arXiv:2301.06102v1 [math.CV] 15 Jan 2023

赋予全纯不变 K¨ähler-Berwald 度量的多圆盘上的施瓦茨引理

林书青（sqlinmath@126.com）厦门大学数学科学学院，厦门 361005，中国；孙丽玲（sunliling@yeah.net）集美大学理学院，厦门 361021，中国；钟春平（zcp@xmu.edu.cn）厦门大学数学科学学院，厦门 361005，中国

摘要

本文针对从单位多圆盘 P_m 到单位多圆盘 P_n的全纯映射，证明了一个施瓦茨引理，其中 P_m 和 P_n 分别赋有 Aut(P_m)-不变 K¨ahelr-Berwald 度量$F_{t,\ k}$和 Aut(P_n)-不变 K¨ähler-˜Berwald 度量 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$。当 P_m 和 P_n 分别赋有伯格曼度量时，我们的结果推广了从 P_m 到 P_n 的全纯映射的施瓦茨引理。我们还在单位多圆盘 P_m上得到一个畸变定理，其中 P_m 赋有 Aut(P_m)-不变 K¨ähler-Berwald 度量 $F_{t,\ k}$；并证明，对于每个固定的 $t \in [0, +\infty)$ 和整数 $k \geq 2$， $F_{t,\ k}$ 实际上是 T. Aikou 意义下的 K¨ähler Finsler-Einstein 度量。

关键词： 施瓦茨引理；K¨ahler-Berwald 度量；畸变定理；芬斯勒-爱因斯坦度量。

MSC（2010）： 32H02, 53C60, 53C56.

1 引言及主要结果陈述

设 $\triangle = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ 为赋有庞加莱度量的 $\mathbb{C}$ 单位圆盘

$$ds^2 = \frac{dzd\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z \in \triangle, \tag{1.1}$$

并且 Aut(△) 表示 △ 的全纯自同构群。经典施瓦茨引理表明，每个从 △ 到自身的全纯映射 f 都会减小

庞加莱′度量，即 $f^*ds^2 \leq ds^2$，其中 f^*ds^2表示拉回度量。经典施瓦茨引理的一个直接推论是，每个 $f \in \mathrm{Aut}(\triangle)$ 都是 ds^2 的等距变换。设 $f: \triangle \to N$ 是任意全纯映射，其中 N 是一个赋予共形度量 $d\sigma^2 = \rho(w)|dw|^2$ 的黎曼曲面，并且其高斯曲率满足 $K = -\frac{2}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}}\log\frac{\rho}{\partial w \partial \overline{w}} \leq -4.$在 [2], 中，L. V. Ahlfors 证明了$f^*d\sigma^2 \leq ds^2.$ Ahlfors的推广揭示了微分度量的曲率与全纯映射 f 下拉回度量 $f^*d\sigma^2$ 的递减性质之间的关系: $\triangle \to N$。这为从微分几何的角度推广内部型施瓦茨引理打开了大门。关于沿这一方向的推广，请参见 K. H. Look [21,22],、S. Kobayashi [16], 、S. S. Chern [10], 、S. T. Yau [35], 、Z. H. Chen、S. Y. Cheng 和 Q. K. Lu [9], 、H. L. Royden [26], 、H. C. Yang 和 Z. H. Chen [36], 、V. Tosatti [32], 、K. T. Kim 和 H. J. Lee [15] 以及其中的参考文献。研究边界型施瓦茨引理也引起了广泛兴趣，相关工作可参见 D. M. Burns 和 S. G. Krantz [6], 、T. S. Liu、J. F. Wang 和 X. M. Tang [18], 、T. S. Liu 和 X. M. Tang [19], 、Y. Liu、Z. H. Chen 和 Y. F. Pan [20], 、X. M. Tang、T. S. Liu 和 W. J. Zhang [31], 、J. F. Wang、T. S. Liu 和 X. M. Tang [34]。

近年来，将施瓦茨引理推广到强伪凸复芬斯勒流形受到了一些关注。在 [27], B. Shen 和 Y. B. Shen 得到了两个紧致强伪凸复芬斯勒流形之间全纯映射的施瓦茨引理。在 [33], X. Y. Wan 得到了从赋有共形度量的完备黎曼曲面到赋有强伪凸复芬斯勒度量的复流形的全纯映射的施瓦茨引理。在 [24], J. Nie 和 C. P. Zhong 得到了从完备 K¨ahler 流形到满足某些曲率条件的强伪凸复芬斯勒流形的全纯映射的施瓦茨引理；随后，在 [25], J. Nie 和 C. P. Zhong 得到了定义在具有弱 K¨ahler-Finsler 度量的复流形上的施瓦茨引理，其中对径向旗曲率和全纯截面曲率作了某些假设。

在 [38], 中，本文第三位作者证明，任意 $U(m)$-不变域 $D \subset \mathbb{C}^m$上都不存在非厄米二次型的 $U(m)$-不变 K¨ahler-Finsler 度量。由此立即可得，在 $\mathbb{C}^m$中的单位球 B_m 上，每个 Aut(P_m)-不变的强伪凸复芬斯勒度量都是 B_m上伯格曼度量的常数倍。最近，[39], 中 C. P. Zhong 证明，在 $\mathbb{C}^m(m \geq 2)$中的单位多圆盘 P_m 上，存在无穷多个 Aut(P_m)-不变的复芬斯勒度量

$$F_{t,k}(z;v) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\sqrt{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1-|z^l|^2)^2} + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z^l|^2)^{2k}}}} \tag{1.2}$$

对于任意 $t \in [0,+\infty)$ 及任意整数 $k \geq 2$，其中 $z = (z^1, \cdots, z^m) \in P_m \subset \mathbb{C}^m$ 和$v = (v^1, \cdots, v^m) \in \mathbb{C}^m \cong T^{1,0}_z P_m.$ 此外，对于任意固定的 $t \in [0,+\infty)$ 及任意固定的整数 $k \geq 2$， $F_{t,k}$ 是一个完备的强凸 K¨ahler-Berwald 度量。

注意，当 $t=0$ 时，(1.2) 化为通常的伯格曼度量

$$F_0^2(z;v)=\frac{|v^1|^2}{\left(1-|z^1|^2\right)^2}+\cdots+\frac{|v^m|^2}{\left(1-|z^m|^2\right)^2},\quad \forall z\in P_m, v\in T_z^{1,0}P_m \tag{1.3}$$

在 P_m 上，关于纤维坐标 $v=(v^1,\cdots,v^m)$，它显然是厄米二次型。然而，对于任意固定的 $t\in(0,+\infty)$ 和任意固定的整数 $k\geq 2$，(1.2) 是一个非厄米二次度量。

设 $f:\ P_m\to P_m$ 是一个全纯映射，记

$$f^*F_0^2(z;v):=F_0^2(f(z);f_*(v)),\quad \forall z\in P_m, v\in T_z^{1,0}P_m,$$

其中 f_* 表示 f 在点 z 处的微分。下述定理由 K. H. Look [21,22] 得出。

定理 1.1. *([21,22])* 设 P_m 是 $\mathbb{C}^m(m\geq 2)$ 中的单位多圆盘，并赋予伯格曼度量 F_0^2。那么，对于任意从 P_m 到其自身的全纯映射 $w=f(z)$，

$$\left(f^*F_0^2\right)(z;v)\leq mF_0^2(z;v),\quad \forall z\in P_m, v\in T_z^{1,0}P_m. \tag{1.4}$$

注 1.1. 容易验证，任何 Aut(P_m)-不变厄米度量都是 P_m 上伯格曼度量的正的常数倍。此外，(1.4) 中的常数 m 是最优的。

现在令 $\tilde{z}=(\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^n)$ 为 $\mathbb{C}^n(n\geq 2)$ 上的复坐标，并令 P_n 为 $\mathbb{C}^n$ 中赋予如下 Aut(P_n)-不变 K¨ahler-Berwald 度量的单位多圆盘

$$\tilde{F}_{\tilde{t},\tilde{k}}(\tilde{z};\tilde{v})=\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{t}}}\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\frac{|\tilde{v}^l|^2}{(1-|\tilde{z}^l|^2)^2}+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{l=1}^{n}\frac{|\tilde{v}^l|^{2\tilde{k}}}{(1-|\tilde{z}^l|^2)^{2\tilde{k}}}}},\quad \forall\ \tilde{z}\in P_n, \tilde{v}\in T_{\tilde{z}}^{1,0}P_n. \tag{1.5}$$

本文的目的首先是为全纯映射 $f:\ P_m\to P_n$ 建立一个施瓦茨引理，其中 P_m 赋予由 (1.2) 给出的 Aut(P_m)-不变 K¨ahler-Berwald 度量 $F_{t,\ k}$，而 P_n 赋予由 (1.5) 给出的 Aut(P_n)-不变 K¨ahler-Berwald 度量 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$；随后，我们在 P_m 赋予 Aut(P_m)-不变度量 $F_{t,\ k}$ 时，得到一个畸变定理；最后证明，对于任意固定的 $t\in[0,+\infty)$ 和任意固定的整数 $k\geq 2$，(P_m,$F_{t,\ k}$) 是 T. Aikou [4] 意义下的 K¨ahler Finsler-Einstein 流形。

注意，如果 $m=n=1$，那么 $F_{t,\ k}$ 和 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$ 归结为单位圆盘 $\triangle$ 在 $\mathbb{C}$中的著名庞加莱度量。在下文中，我们始终假设 m, $n\geq 2$。对于任意 $t,\tilde{t}\in(0,+\infty)$，满足 $t\neq\tilde{t}$和 $k\neq\tilde{k}$，即使 $m=n\geq 2$，复芬斯勒流形 (P_m,$F_{t,\ k}$) 与 (P_n,$F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$) 之间也不存在全纯等距映射 ˜。

本文的主要结果如下。

定理 1.2. 令 P_m 为 $\mathbb{C}^m$ 中的单位多圆盘，其配备 ***Aut***(P_m)不变的 ***K¨ahler-Berwald*** 度量 $F_{t,k}$; 令 P_n 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘，其配备 ***Aut***(P_n)不变的 ***˜K¨ahler-Berwald*** 度量$F_{\tilde{t},\tilde{k}}$。那么对于任意全纯映射 $f:\ P_m\to P_n$，我们有

$$\left(f^*\tilde{F}_{\tilde{t},\tilde{k}}^2\right)(z;v)\leq\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F_{t,k}^2(z;v),\quad \forall z\in P_m, v\in T_z^{1,0}P_m. \tag{1.6}$$

对于任意固定的 $t, \tilde{t} \in [0, +\infty)$ 以及任意固定的整数 $k, k \geq 2$，(1.6) 中的常数 $\frac{n+\tilde{t}\sqrt[k]{n}}{1+\tilde{t}}$ 是最优的。

注记 1.2。 (1) 对于 $t = 0$ 和 $\tilde{t} = 0$， $F_{t,\ k}$ 和 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$ 分别化为 P_m 和 P_n 上的通常 Bergman 度量，这些度量是完备的 K¨ahler 度量，因此也是厄米二次复芬斯勒度量。在这种情况下，只要 $m = n$，定理 1.2 就化为定理 1.1。

(2) 对任意固定的 t、 $\tilde{t} \in (0, +\infty)$ 以及任意固定的整数 k、 $\tilde{k} \geq 2$、 $F_{t,\ k}$ 和 $\tilde{F}_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$ 分别是定义在 P_m 和 P_n 上的全纯不变 K¨ahler-Berwald 度量，它们是非厄米二次复芬斯勒度量。因此，定理 1.2 将定理 1.1 从厄米二次度量自然推广到不一定是厄米二次型的复芬斯勒度量。

(3) 常数 $\frac{n+\tilde{t}\sqrt[k]{n}}{1+\tilde{t}}$ 中是最优的，它既不依赖于 t 和 k 在 $F_{t,\ k}$ 中的参数，也不依赖于源多圆盘 P_m的维数 m，而只依赖于给定参数 $\tilde{t}$ 和 $\tilde{k}$ 在 $\tilde{F}_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$ 中，以及目标多圆盘 P_n的维数 n.此外，我们可以将常数 $\frac{n+\tilde{t}\sqrt[k]{n}}{1+\tilde{t}} = \frac{L}{U}$ 视为 $F_{t,\ k}$ 的全纯截面曲率下界$L = -4$ 与 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$ 的全纯截面曲率上界 $U = \frac{-4}{(1+\tilde{t})\sqrt[k]{n+\tilde{t}\sqrt[k]{n}}}$之比（见 [39]中的定理 1.6）。

注意，对于每个规范化双全纯凸映射 $f(z)$: $P_m \to \mathbb{C}^m$， $f_l(z) = f_l\left(z^l\right)$ 都是单位圆盘 $\Delta_l = \Delta$上的单复变数规范化双全纯凸函数z^l， $l = 1, \cdots, m$. 我们有

定理 1.3。 设 P_m 是配备 *Aut*(P_m) 不变 ***K¨ahler-Berwald*** 度量 $F_{t,k}$ （由(1.2)给出）的单位多圆盘，且 $f(z) = (f_1(z) \cdots, f_n(z)) : P_m \to \mathbb{C}^m$ 是规范化双全纯凸映射。那么，对任意 $z \in P_m$ 和向量 $v \in T^1_{,z}{}^0 P_m \cong \mathbb{C}^m$，下列不等式

$$\left[\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right]^2 F^2_{t,k}(z;v) \leq F^2_{t,k}(0; f_*(z)v) \leq \left[\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right]^2 F^2_{t,k}(z;v) \tag{1.7}$$

成立，其中 $p(z)$ 是 P_m 的闵可夫斯基泛函。此外，若在(1.7) 中某一点 $z \neq 0$ 处有一个等号成立，当且仅当存在某个 $\theta_l \in \mathbb{R}, l = 1, \cdots, m.$，使得 $f_l(z^l) = \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l} z^l}$

下面的定理表明，Aut(P_m)-不变的 K¨ahler-Berwald 度量$F_{t,k}$是 P_m 上按 T. Aikou [4] 意义定义的 K¨ahler-Finsler-Einstein 度量。

定理 1.4. 设 P_m 为赋予 *Aut*(P_m)-不变 ***K¨ahler-Berwald*** 度量 $F_{t,k}$ （由 (1.2) 给出）的单位多圆盘。那么，对于任意固定的 $t \in [0, +\infty)$ 以及任意固定的整数 $k \geq 2$，$(P_m, F_{t,k})$ 都是因子为 $\varphi = -2$ 的 ***K¨ahler Finsler-Einstein*** 流形。

本文内容安排如下。第 2 节介绍 $\mathbb{C}^m$中区域上的复芬斯勒度量的一些基本概念。第 3 节给出两个引理，第 4 节将利用它们推广赋有全纯不变 K¨ahler-Berwald 度量的多圆盘之间全纯映射的施瓦茨引理，并推导出一些推论。第 5 节给出赋有全纯不变 K¨ahler-Berwald 度量的多圆盘上的畸变定理$F_{t,\ k}$. 第 6 节证明$F_{t,\ k}$ 是多圆盘上的 K¨ahelr 芬斯勒-爱因斯坦度量。

2 复芬斯勒度量

设 D 是 $\mathbb{C}^m$ 中的一个域，$T^{1,0}D$ 是其全纯切丛。用 $z=(z^1,\cdots,z^m)$表示 D上的复坐标。纤维$T^{1,0}_zD$ 中位于 $z\in D$ 上方的复切向量 $\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v}=v^i\frac{\partial}{\partial z^i}\Big|_z,\quad v=(v^1,\cdots,v^m)\in\mathbb{C}^m,$$

因此，$(z;v)=(z^1,\cdots,z^m;v^1,\cdots,v^m)$ 可作为 $T^{1,0}D$ 上的全局复坐标。因此，$T^{1,0}D$ 与乘积丛 $D\times\mathbb{C}^m$ 同构，故是 D 上的平凡全纯向量丛。

定义 2.1。 [1] D 上的（光滑）复芬斯勒度量是一个连续函数 $F\colon T^{1,0}D\to[0,+\infty)$，满足以下性质：

(1) 正则性：$G=F^2$ 在 $T^{1,0}D\setminus\{$上（除零截面$\}$外）为 C^∞；(2) 正定性：对于任意 $(z;v)\in T^{1,0}D$，$F(z;v)\geq 0$，且 $F(z;v)=0$ 当且仅当 $v=0$；(3) 齐次性：对于任意 $(z;v)\in T^{1,0}D$ 且 $\lambda\in\mathbb{C}$，$F(z;\lambda v)=|\lambda|F(z;v)$。

注 2.1. 只要求 G 在 $T^{1,0}D\backslash\{$零截面$\}$ 上光滑非常重要，因为 G 在整个 $T^{1,0}D$ 上光滑（事实上，C^2 就足够）当且仅当 F 是 Hermitian 度量（参见 [1] 中的引理 2.3.1）。

令 $z^i=x^i+\sqrt{-1}x^{m+i}$ 和 $v^i=u^i+\sqrt{-1}u^{m+i}$，对于 $i=1$、$\cdots$、$m.$，则 $(x;u)=(x^1$、$\cdots$、$x^{2m};u^1$、$\cdots$、$u^{2m})$ 可作为 D 的实切丛 TD 上的实坐标（将其视为 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的开集）。注意 $T^{1,0}D\cong TD$。

定义 2.2. 若复芬斯勒度量 F 的 $m\times m$ Levi矩阵 $(G_{i\bar{j}})$ 在 $T^{1,0}D\setminus\{$零截面$\}$ 上正定，则称其为强伪凸度量，其中

$$G_{i\bar{j}}:=\frac{\partial^2 G}{\partial v^i\partial\overline{v^j}},\quad i,j=1,\cdots,m. \tag{2.1}$$

特别地，如果强伪凸复芬斯勒度量 F 对任意 $v\in T^{1,0}_zD\cong\mathbb{C}^m$ 都与 $z\in D$ 无关，那么 F 就称为 D 上的复闵可夫斯基度量。

如果复芬斯勒度量 F 的实 $2m\times 2m$ 海森矩阵 (G_{ab}) 在 $TD\setminus\{$零截面$\}$ 上正定，则称其为强凸复芬斯勒度量，此处

$$G_{ab}:=\frac{\partial^2 G}{\partial u^a\partial u^b},\quad a,b=1,\cdots,2m.$$

注意，F 是 D 上的强伪凸（分别地，强凸）复芬斯勒度量，等价于要求所有的 F-指标曲线

$$I_F(z)=\left\{v\in T^{1,0}_zD\middle|\,F(z;v)<1\right\},\quad z\in D$$

是强伪凸的（分别是强凸的）。

例2.1. 设 D 是 $\mathbb{C}^m$ 中的一个域，且 $ds^2 = g_{i\overline{j}}(z)dz^i d\overline{z^j}$ 是 D 上的厄米度量（假定它总是 C^∞）。那么

$$F(z;v) = \sqrt{g_{i\overline{j}}(z)v^i\overline{v^j}}$$

是强伪 凸复芬斯勒度量，称为厄米二次型 .

例2.2. [39] 设 D 是 $\mathbb{C}^m$中的一个域。对于任意固定的 $t \in (0,+\infty)$以及任意固定的整数 $k \geq 2$，定义

$$F_{t,k}(z;v) = \sqrt{|v^1|^2 + \cdots + |v^m|^2 + t\sqrt[k]{|v^1|^{2k} + \cdots + |v^m|^{2k}}}, \quad \forall v \in T^{1,0}_z D.$$

则$F_{t,\ k}$ 是一个强凸复闵可夫斯基度量，但不是厄米二次型。

与强伪凸复芬斯勒度量 $F\colon\ T^{1,\ 0}D \to [0,+\infty)$相关联的切恩-芬斯勒非线性联络系数为 [1]

$$\Gamma^i_{;l} = G^{\overline{s}i}\frac{\partial^2 G}{\partial\overline{v^s}\partial z^l},$$

其中（$G^{\overline{s}i}$）是（$G_{i\overline{s}}$）的逆矩阵，复伯瓦尔德非线性联络系数为

$$\mathbb{G}^i_{\ l} = \frac{\partial}{\partial v^l}\left(\frac{1}{2}\Gamma^i_{;l}v^l\right).$$

水平切恩-芬斯勒联络系数为

$$\Gamma^i_{j;l} = \frac{\partial\Gamma^i_{;l}}{\partial v^j}$$

复贝瓦尔德联络系数为

$$\mathbb{G}^i_{jl} = \frac{\partial\mathbb{G}^i_{\ l}}{\partial v^j}.$$

强伪凸复芬斯勒度量 $F\colon\ T^{1,\ 0}D \to [0,+\infty)$ 称为 [1] 和 [8] 中的 K¨ahler-芬斯勒度量，当且仅当

$$\Gamma^i_{j;l} = \Gamma^i_{l;j};$$

若水平切恩-芬斯勒联络系数 $\Gamma^i_{j;l}$ 与 $v=(v^1、\ \cdots、\ v^m)$ 无关（ [3]），则称其为复贝瓦尔德度量；若复贝瓦尔德联络系数 $\mathbb{G}^i_{jl}$ 与 $v\ =(v^1、\ \cdots、\ v^m)$ 无关（ [37]），则称其为弱复贝瓦尔德度量；若 F 既是 K¨ahler-芬斯勒度量又是复贝瓦尔德度量，则称其为 K¨ahler-贝瓦尔德度量。文献 [39] 表明，由（1.2）定义的度量是在 P_m 上的 Aut(P_m)-不变强凸 K¨ahler-贝瓦尔德度量；当 $t=0$ 时，它退化为通常的伯格曼度量 P_m；并且对于任意固定的 $t\in$（0，$+\infty$）和任意固定整数 $k\geq 2$，它都不是厄米二次型。

3 一些引理

下面的引理 3.1 和引理 3.2 实际上分别推广了 K. H. Look [22] 中的引理 4 和引理 5，其意义在于 P_m 和 P_n 不必具有相同的维数。证明基本沿用 [22] 中引理 4 和引理 5 的证明思路。为完整起见，我们在此给出证明。

引理 3.1. 设 $w = f(z)$ 是一个全纯映射，将 P_m 映入 P_n，并将原点 $0 \in \mathbb{C}^m$ 映至原点 $0 \in \mathbb{C}^n$。设映射函数$f_l(z)(l = 1, \cdots, n)$ 的展开为

$$\begin{aligned} w^1 &= f_1(z) = a_{11}z^1 + \cdots + a_{m1}z^m + \textit{terms of higher power}, \\ &\vdots \\ w^n &= f_n(z) = a_{1n}z^1 + \cdots + a_{mn}z^m + \textit{terms of higher power}. \end{aligned}$$

那么，该变换的线性项

$$\begin{aligned} w^1 &= a_{11}z^1 + \cdots + a_{m1}z^m, \\ &\vdots \\ w^n &= a_{1n}z^1 + \cdots + a_{mn}z^m \end{aligned}$$

构成一个从 P_m 到 P_n的全纯映射。

证明. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $|\lambda| \leq 1$。任取 P_m的一个内部点 z，则有

$$\left|\lambda z^1\right| < 1, \cdots, |\lambda z^m| < 1.$$

我们考虑函数

$$f_l(\lambda z), \quad l = 1, \cdots, n,$$

它们是闭圆盘 $\overline{\triangle}$ 内关于 λ 的全纯函数。根据单复变量的施瓦茨引理，对于每个 $f_l(\lambda z)$, 我们有

$$\left|\frac{df_l(\lambda z)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \leq 1, \quad l = 1, \cdots, n. \tag{3.1}$$

然而，很容易验证

$$\left|\frac{df_l(\lambda z)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} < 1, \quad l = 1, \cdots, n.$$

事实上，若等式 (3.1) 成立，则根据单复变数的施瓦茨引理，当我们令 $\lambda = 1$ 时，有 $f_l(\lambda z) = e^{i\theta}\lambda$ 且 $|f_l(z)| = 1$。但根据我们的假设， z是 P_m 的内点，且该映射是内全纯映射。只要 $z \in P_m$，就有$|f_l(\lambda)| < 1$。这两个结果相互矛盾。因此，我们有

$$\left|\frac{df_l(\lambda z)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} < 1, \quad l = 1, \cdots, n,$$

即,

$$\left|a_{1l}z^1+\cdots+a_{ml}z^m\right|<1,\quad l=1,\cdots,n.$$

这说明线性变换

$$w^l=a_{1l}z^1+\cdots+a_{ml}z^m,\quad l=1,\cdots,n$$

将 P_m 映到 P_n。证明至此完成。 □

引理 3.2. 线性变换的充要条件是 n

$$w^l=a_{1l}z^1+\cdots+a_{ml}z^m,\quad l=1,\cdots,n \tag{3.2}$$

将 P_m 映到 P_n，即

$$|a_{1l}|+\cdots+|a_{ml}|\le 1,\quad l=1,\cdots,n. \tag{3.3}$$

证明. 充分性显然，因为对任意点 $z\in P_m$

$$\begin{aligned}|w^l| &\le |a_{1l}|\cdot\left|z^1\right|+\cdots+|a_{ml}|\cdot|z^m|\\ &< |a_{1l}|+\cdots+|a_{ml}|\le 1,\quad l=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

为证明必要性，我们用 $\overline{P_m}$ 表示 P_m的闭包。由于线性映射 (3.2) 将 P_m 映到 P_n，对任意点 $z\in\overline{P_m}$，我们有

$$\left|a_{1l}z^1+\cdots+a_{ml}z^m\right|\le 1,\quad l=1,\cdots,n. \tag{3.4}$$

设 $a_{il}=|a_{il}|\,e^{\sqrt{-1}\theta_{il}}$ 满足 $i=1,\cdots,m$ 和 $l=1,\cdots,n$，其中 θ_{il} 为实数。将 $z^1=e^{-\sqrt{-1}\theta_{1l}},\cdots,z^m=e^{-\sqrt{-1}\theta_{ml}}$ 代入 (3.4)，得到

$$|a_{1l}|+\cdots+|a_{ml}|\le 1.$$

证明至此完成。 □

4 带有 K¨ahler-Berwald 度量的多圆盘上的施瓦茨引理

本节将给出以下定理的另一种证明，该定理最初由 [39], 证明；随后，我们将建立一个施瓦茨引理，用于从P_m 到 P_n的全纯映射，其中 P_m 和 P_n 分别带有 Aut(P_m)-不变的 K¨ahler-Berwald 度量$F_{t,\ k}$ 以及 Aut(P_n)-不变的 K¨ahler-Berwald 度量 $F_{\tilde{t},\ \tilde{k}}$。

定理 4.1。 设 P_m 为 $\mathbb{C}^m$. 中的单位多圆盘，则

$$F_{t,k}(z;v)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\sqrt{\sum_{l=1}^m\frac{|v^l|^2}{(1-|z^l|^2)^2}+t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^m\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z^l|^2)^{2k}}}},\quad z\in P_m, v\in T^{1,0}_zP_m \tag{4.1}$$

对于任意固定的 $t\in[0,+\infty)$ 以及任意固定的整数 $k\ge 2$，它是一个 *Aut*(P_m)-不变的强凸 *K¨ahler-Berwald* 度量。

注 4.1. 这里引入因子 $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$，使得当 $m = 1$时，$F_{t,k}$ 化为单位圆盘 $\triangle$ 上众所周知的 Poincar´e 度量。当 $m \geq 2$ 且 $t = 0$ 时，$F_{t,k}$ 化为多圆盘 P_m 上的伯格曼度量；该度量是 Aut(P_m)-不变的 K¨ahler 度量，因此是厄米二次型。然而，对于任意 $m \geq 2$、固定的 $t \in (0, +\infty)$ 以及固定的 $k \in \mathbb{N}$，$k \geq 2$，$F_{t,k}$ 是一个 Aut(P_m)-不变的完备 K¨ahler-Berwald 度量，但不是厄米二次型。

证明。定理这里给出的证明实质上利用了 Aut(P_m) 在 P_m 上的传递作用 .

由 [39] 中的定理 1.1 可直接得出，(4.1) 是一个强凸的 K¨ahler-Berwald 度量。要证明 (4.1) 是 Aut(P_m)-不变的，只需证明 (4.1) 可通过在原点处的切空间 $T^{1,0}_0 P_m \cong \mathbb{C}^m$ 上赋予一个强凸复范数 $\varphi_{t,k}(v)$ 来重构，且该范数满足

$$\varphi_{t,k}\big(g_*(v)\big) = \varphi_{t,k}(v), \quad \forall g \in \mathrm{Iso}(P_m), \tag{4.2}$$

其中 Iso(P_m) 是原点处的各向同性子群，g_* 表示 g 在原点处的微分。

事实上，若我们定义

$$\varphi_{t,k}(v) := \frac{1}{\sqrt{1+t}} \sqrt{\sum_{l=1}^{m} |v^l|^2 + t \sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m} |v^l|^{2k}}}, \quad v \in T^{1,0}_0 P_m, \tag{4.3}$$

那么根据 T 定理 1.1 中的 [39], $\varphi_{t,\ k}(v)$ 是 $T^{1,\ \ 0}_{\ \ 0} P_m$ 上的强凸复范数 .

根据 [23], 中的第5章命题3，自同构群 Aut(P_m) 由以下形式的全纯函数组成：

$$f_{z_0}(z) = \left(e^{i\theta_1} \frac{z^{\sigma(1)} - z_0^1}{1 - \overline{z_0}^1 z^{\sigma(1)}}, \cdots, e^{i\theta_m} \frac{z^{\sigma(m)} - z_0^m}{1 - \overline{z_0}^m z^{\sigma(m)}} \right), \quad z \in P_m, \tag{4.4}$$

其中 $z_0 = (z_0^1, \cdots, z_0^m) \in P_m$, $\theta_1, \cdots, \theta_m \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma\colon \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}$ 是一个置换。原点处的各向同性子群 Iso(P_m) 为

$$\mathrm{Iso}(P_m) = \left\{ g(z) = \left(e^{i\theta_1} z^{\sigma(1)}, \cdots, e^{i\theta_m} z^{\sigma(m)} \right) \middle| \theta_1, \cdots, \theta_m \in \mathbb{R} \right\},$$

结合 (4.3)，立即可得 (4.2)。

接下来我们证明

$$F_{t,k}(z_0; v) = \varphi_{t,k}((h_{z_0})_*(v)), \tag{4.5}$$

其中

$$h_{z_0}(z) = \left(\frac{z^1 - z_0^1}{1 - \overline{z_0^1} z^1}, \cdots, \frac{z^m - z_0^m}{1 - \overline{z_0^m} z^m} \right), \quad z \in P_m. \tag{4.6}$$

注意到 $h_{z_0} \in$ Aut(P_m) 满足 $h_{z_0}(z_0) = 0$，且对于每个 $v \in T^{1,\ \ 0}_{\ z_0} P_m$，我们有

$$(h_{z_0})_*(v) = dh_{z_0}(v) = \left(\frac{v^1}{1 - |z_0^1|^2}, \cdots, \frac{v^m}{1 - |z_0^m|^2} \right) \in T^{1,0}_0 P_m. \tag{4.7}$$

将 (4.7) 代入 (4.3)，得到

$$\varphi_{t,k}\big((h_{z_0})_*(v)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+t}}\sqrt{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1-|z_0^l|^2)^2}+t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z_0^l|^2)^{2k}}}}, \tag{4.8}$$

也就是说，(4.5) 成立。

最后，我们证明由此得到的 $F_{t,k}(z;v)$ 确实是 Aut(P_m)-不变的。对于任意$\phi\in$ Aut(P_m)，记 $b=\phi(z_0)$。则 $h_b\circ\phi\circ h_{z_0}^{-1}(0)=h_b\circ\phi(z_0)=h_b(b)=0$ 且$h_b\circ\phi\circ h_{z_0}^{-1}\in$ Iso(P_m)。因此，由 (4.2) 和 (4.8)，有

$$\begin{aligned}
F_{t,k}\big(\phi(z_0);\phi_*(v)\big) &= \varphi_{t,k}\big((h_b)_*\circ\phi_*(v)\big) \quad \text{by (4.5)}\\
&= \varphi_{t,k}\big((h_b\circ\phi\circ h_{z_0}^{-1})_*\circ(h_{z_0})_*(v)\big)\\
&= \varphi_{t,k}\big((h_{z_0})_*(v)\big) \quad \text{by (4.2)}\\
&= F_{t,k}(z_0;v). \quad \text{by (4.5)}
\end{aligned}$$

由于 z_0 是 P_m中的任意不动点，必要时将 z_0 改为 z，即可完成关于 $F_{t,k}$ 是 Aut(P_m)-不变的断言。 □

定理 4.2。 设 P_m 是 $\mathbb{C}^m$ 中的单位多圆盘，配备 *Aut*(P_m)-不变的 ***K¨ahler-Berwald*** 度量 $F_{t,k}$; P_n 是 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘，配备 *Aut*(P_n)-不变的 ***˜K¨ahler-Berwald*** 度量$F_{\tilde{t},\tilde{k}}$。那么，对于任意全纯映射 $f\colon P_m\to P_n$，有

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z;v)\le\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_{t,k}(z;v),\quad \forall z\in P_m, v\in T^{1,0}_zP_m. \tag{4.9}$$

(4.9) 中的常数 $\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}$ 对任意固定的 $t,\tilde{t}\in[0,+\infty)$ 以及任意固定的整数 $k,\tilde{k}\ge 2$ 都是最优的。

证明。 设 $z_0=(z_0^1,\cdots,z_0^m)$ 是 P_m 中任意一个固定不动点，并设 $f\colon P_m\to P_n$ 是任意一个全纯映射。记 $w_0=(w_0^1,\cdots,w_0^n)=f(z_0)\in P_n$。

定义

$$h_{z_0}(z):=\left(\frac{z^1-z_0^1}{1-\overline{z_0^1}z^1},\cdots,\frac{z^m-z_0^m}{1-\overline{z_0^m}z^m}\right),\quad z\in P_m \tag{4.10}$$

and

$$\tilde{h}_{w_0}(w):=\left(\frac{w^1-w_0^1}{1-\overline{w_0^1}w^1},\cdots,\frac{w^n-w_0^n}{1-\overline{w_0^n}w^n}\right),\quad w\in P_n. \tag{4.11}$$

˜则 $h_{z_0}\in$ Aut (P_m) 且 $h_{w_0}\in$ Aut (P_n)。由 (4.10) 和 (4.11) 可得

$$h_{z_0}(z_0)=0\in P_m \quad\text{and}\quad \tilde{h}_{w_0}(w_0)=0\in P_n, \tag{4.12}$$

结合 $w_0=f(z_0)$ 可知， $g:=\tilde{h}_{w_0}\circ f\circ h_{z_0}^{-1}$是从 P_m 到 P_n 的全纯映射，且满足 $g(0)=0$。根据定义，有

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0;v)=\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z_0);f_*(v)\big), \tag{4.13}$$

˜其中 f_* 表示 f 在点 z_0处的微分。另一方面，$F_{\tilde{t},\tilde{k}}$ 是 Aut (P_n)-˜不变的，且 $h_{w_0} \in$ Aut(P_n)，因此

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z_0); f_*(v)\big) &= \tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\Big(\tilde{h}_{w_0}\big(f(z_0)\big); \big(\tilde{h}_{w_0}\big)_*\big(f_*(v)\big)\Big) \\
&= \tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\Big(\big(\tilde{h}_{w_0} \circ f \circ h^{-1}_{z_0}\big)\big(h_{z_0}(z_0)\big); \big(\tilde{h}_{w_0} \circ f \circ h^{-1}_{z_0}\big)_*\big((h_{z_0})_*(v)\big)\Big) \\
&= \tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\Big(g(0); g_*\big((h_{z_0})_*(v)\big)\Big) \\
&= \tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\Big(0; g_*\big((h_{z_0})_*(v)\big)\Big) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

对任意 $v \in T^{1,\ {}^0}_{z_0}P_m$。

现在记 $u := (h_{z_0})_*(v) \in T^{1,\ {}^0}_{0}P_m$ 以及 $g(z) = (g_1(z) \cdots, g_n(z))$。由引理 3.1 和引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\Big(0; g_*\big((h_{z_0})_*(v)\big)\Big) &= \tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(0; g_*(u)\big) \\
&= \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m} u^j a_{jl}\right|^2 + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m} u^j a_{jl}\right|^{2\tilde{k}}}\right\} \\
&\le \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}|u^j||a_{jl}|\right)^2 + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}|u^j||a_{jl}|\right)^{2\tilde{k}}}\right\} \\
&\le \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le m}\big\{|u^j|\big\}\sum_{j=1}^{m}|a_{jl}|\right)^2 + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{l=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le m}\big\{|u^j|\big\}\sum_{j=1}^{m}|a_{jl}|\right)^{2\tilde{k}}}\right\} \\
&\le \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le m}\big\{|u^j|\big\}\right)^2 + t\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{l=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le m}\big\{|u^j|\big\}\right)^{2\tilde{k}}}\right\} \\
&= \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\max_{1\le j\le m}\big\{|u^j|^2\big\}. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

关于　另一方面，由于 $F_{t,\ k}$ 是 Aut(P_m)-不变的，且 $h_{z_0} \in$ Aut(P_m)，因此我们有

$$\begin{aligned} F^2_{t,k}(z_0;v) &= F^2_{t,k}\big(h_{z_0}(z_0);(h_{z_0})_*(v)\big) \\ &= F^2_{t,k}\big(0;(h_{z_0})_*(v)\big) \\ &= F^2_{t,k}(0;u) \\ &= \frac{1}{1+t}\left\{\sum_{j=1}^m |u^j|^2 + t\sqrt[k]{\sum_{j=1}^m |u^j|^{2k}}\right\} \\ &\geq \frac{1}{1+t}\left\{\max_{1\leq j\leq m}\left\{|u^j|^2\right\} + t\sqrt[k]{\max_{1\leq j\leq m}\left\{|u^j|^{2k}\right\}}\right\} \\ &= \max_{1\leq j\leq m}\left\{|u^j|^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

由（4.14）—（4.16），可得

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0;v) \leq \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_{t,k}(z_0;v), \quad \forall v \in T^{1,0}_{z_0}P_m.$$

由于 z_0 是 P_m 中任意一个不动点，必要时将 z_0 改为 z，即可得到（4.9）。

为说明常数 $\sqrt[k]{n}$ 是最优的，取 $w = f_0(z) = (z^1、\cdots、z^1)$（即 $l = 1、\cdots、n$ 时 $w^l = z^1$），以及 $v_0 =$（1，0，$\cdots$，0）$\in T^{1,\ 0}P_m$。那么

$$(f_0)_*(v_0) = (1,\cdots,1),$$

其中（f_0)$_*$ 表示 f_0 在点 $z_0 = 0$处的微分。容易验证

$$\big(f_0^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0;v_0) = \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}, \quad F^2_{t,k}(z_0;v_0) = 1.$$

因此

$$\big(f_0^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0;v_0) = \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_{t,k}(z_0;v_0).$$

证明至此完成。

□

推论 4.1。设 P_m 为赋予伯格曼度量 F_0的 $\mathbb{C}^m$ 中的单位多圆盘，且 P_n 为赋予 *Aut*(P_n)不变 *Kähler-Berwald*度量 $F_{\tilde{t},\tilde{k}}$的 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘。那么，对于任意全纯映射 $f\colon P_m \to P_n$，有

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z;v) \leq \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_0(z;v), \quad \forall z \in P_m, v \in T^{1,0}_z P_m. \tag{4.17}$$

推论 4.2。设 P_m 是赋予 *Aut*(P_m)-不变 *Kähler-Berwald* 度量 $F_{t,\ k}$ 的 $\mathbb{C}^m$ 中的单位多圆盘，且 P_n 是赋予伯格曼度量 F_0. 的 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘。那么对于任意全纯映射 f：　$P_m \to P_n$，有

$$\big(f^*\tilde{F}^2_0\big)(z;v) \leq nF^2_{t,k}(z;v), \quad \forall z \in P_m, v \in T^{1,0}_z P_m. \tag{4.18}$$

推论 4.3。 设 P_m 是赋予伯格曼度量 F_0 的 $\mathbb{C}^m$ 中的单位多圆盘，且 P_n 是赋予伯格曼度量 F_0. 的 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘。那么对于任意全纯映射 $f:\ P_m \to P_n$，有

$$\big(f^*\tilde{F}_0^2\big)(z;v) \le nF_0^2(z;v), \quad \forall z \in P_m, v \in T_z^{1,0}P_m. \tag{4.19}$$

注 4.2. 当 $m = n$ 时，推论 4.3 可化为定理 1.1。

在定理 4.2 中，当 $m = n$ 时，我们有如下命题 4.1。

命题 4.1. 设 P_m 是 $\mathbb{C}^m$ 中赋予 *Aut*(P_m)-不变 *Kähler-Berwald* 度量$F_{t,k}$ 的单位多圆盘，且 f 是从 P_m 到其自身的全纯映射。若存在一点 $z_0 \in P_m$ 使得

$$\big(f^*F_{t,k}^2\big)(z_0;v) \ge F_{t,k}^2(z_0;v), \quad \forall z_0 \in P_m, v \in T_{z_0}^{1,0}P_m, \tag{4.20}$$

那么 $f \in$ *Aut*(P_m)。

证明. 取 $\varphi \in$ Aut(P_m)，使得 $\varphi(z_0) = f(z_0)$；这是可能的，因为 P_m 是齐性的。于是 $h := \varphi^{-1} \circ f$ 是从 P_m 到其自身的全纯映射，并保持 z_0 不动。注意到 $\varphi^{-1} \in$ Aut(P_m)，因此它也是 $F_{t,k}$ 的等距变换；结合条件 (4.20)，可得

$$(h^*F_{t,k}^2)(z_0;v) = \big((\varphi^{-1})^* \circ f^*\big)\, F_{t,k}^2(z_0;v) = f^*F_{t,k}^2(z_0;v) \ge F_{t,k}^2(z_0;v), \quad \forall v \in T_{z_0}^{1,0}P_m.$$

现在设 $\mu_i(i = 1,\cdots,m)$ 是矩阵 $(h_*)_{z_0}$ 的一个特征值，并设 v_i 是对应于 μ_i 的特征向量，即 $(h_*)_{z_0}v_i = \mu_i v_i$。于是

$$(h^*F_{t,k}^2)(z_0;v_i) = F_{t,k}^2(z_0;\mu_i v_i) = |\mu_i|^2 F_{t,k}^2(z_0;v_i) \ge F_{t,k}^2(z_0;v_i), \quad i = 1,\cdots,m,$$

因此我们有 $|\mu_i| \ge 1$，从而 $|\det((h_*)_{z_0})| = |\mu_1 \cdots \mu_m| \ge 1$. 根据 H. Cartan 和 Carath´eodory 的一个著名定理（例如见 [5] 的第 1 章），可知 $h \in$Aut(P_m)，由此可得 $f \in$ Aut(P_m)。证明完毕。 □

命题 4.2。 设 $f:\ P_m \to P_n$ 是一个满足 $f(0) = 0.$ 的全纯映射。那么对于任意固定的 $l \in \{1,2,\cdots,m\}$ 和 $0 \ne v = \big(0, \underbrace{\cdots\ 0}_{l-1}, v^l, 0, \cdots, 0\big) \in T^{1,0}_{(0,\cdots,0)}P_m$,

$$\big(f^*\tilde{F}_{\tilde{t},\tilde{k}}^2\big)(0;v) = \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} F_{t,k}^2(0;v) \tag{4.21}$$

当且仅当成立

$$f_j\big(\underbrace{0,\cdots,0}_{l-1}, z^l, 0, \cdots, 0\big) = e^{\sqrt{-1}\theta_j} z^l, \quad \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1,\cdots,n. \tag{4.22}$$

证明。 首先证明必要性。根据定义，

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(0;v)=\frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial z^i}(0)v^i\right|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial z^i}(0)v^i\right|^{2\tilde{k}}}\right\},\quad \forall v\in T^{1,0}_0P_m.$$

因此，对于任意固定的 $l\in\{1,2,\cdots,m\}$、 $0\neq v=\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{},v^l,0,\cdots,0\big)\in T^{1,0}_0P_m$，我们$l-1$有

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(0;v)\ =\ \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_j}{\partial z^l}(0)v^l\right|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_j}{\partial z^l}(0)v^l\right|^{2\tilde{k}}}\right\}. \tag{4.23}$$

由引理 3.2，我们有

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial z^l}(0)\right|\leq 1$$

对于任意 $j=1,\cdots,n$，结合 (4.23) 可得

$$\begin{aligned}\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(0;v)\ &\leq\ \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|v^l|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^{n}|v^l|^{2\tilde{k}}}\right\}\\ &=\ \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}|v^l|^2\\ &=\ \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_{t,k}(0;v).\end{aligned} \tag{4.24}$$

因此，若 (4.21) 中的等式成立，则必有

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial z^l}(0)\right|=1,\quad j=1,\cdots,n.$$

因此，若我们定义全纯映射

$$g_j:\triangle\longrightarrow\triangle,\quad g_j\big(\zeta\big):=f_j\big(\underbrace{0,\cdots,0}_{l-1},\zeta,0,\cdots,0\big),\quad j=1,\cdots,n.$$

于是 $g_j(0)=0$，且 $|g_j'(0)|=\left|\frac{\partial f_j}{\partial z^l}(0)\right|=1.$。因此，根据单复变数的经典施瓦茨引理，我们有 $g_j(\zeta)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}\zeta$，从而

$$f_j\big(\underbrace{0,\cdots,0}_{l-1},z^l,0,\cdots,0\big)=g_j(z^l)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}z^l,\quad \theta_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,n.$$

现在证明充分性。若 $f_j\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z^l,\mathbf{0},\cdots,0\big)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}z^l$，对 $\theta_j\in\mathbb{R}$及 $j=1,\cdots,n$成立。取 $v_0=\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},\mathbf{1},\mathbf{0},\cdots,0\big)\in T^{1,0}_0P_m$，我们有 $f_*(v_0)=\big(e^{\sqrt{-1}\theta_1},\cdots,e^{\sqrt{-1}\theta_n}\big)$ 以及

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(0;v_0)=\frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n\left|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\right|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n\left|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\right|^{2\tilde{k}}}\right\}=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}},\quad F^2_{t,k}(0;v_0)=1.$$

因此

$$\big(f^*\tilde{F}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(0;v_0)=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}F^2_{t,k}(0;v_0).$$

证明至此完成。 □

根据 (4.3) 的定义，$\varphi_{t,\ k}$ 的指标集定义为

$$I_{\varphi_{t,k}}(0)=\left\{v\in T^{1,0}_0P_m|\varphi_{t,k}(v)<1\right\}. \tag{4.25}$$

记 B_m 为 $\mathbb{C}^m$中典范复欧几里得范数的单位球。于是立即得到以下命题。

命题 4.3。设 B_m，$I_{\varphi_{t,\ k}}$ 和 P_m 如上定义。则

$$B_m\subset I_{\varphi_{t,k}}\subset P_m.$$

定理 4.3。设 $f\colon P_m\to P_n$ 是从单位多圆盘 P_m 到单位多圆盘 P_n 的全纯映射，满足 $f(0)=0$。则

$$\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z)\big)\le\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^2_{t,k}(z). \tag{4.26}$$

证明。设 $f(z)=\big(f_1(z)\ \cdots,f_n(z)\big)$ 是从 P_m到 P_n的全纯映射。对任意固定的 $z_0=(z_0^1,\cdots,z_0^m)\in P_m\setminus\{0\}$，令

$$\hat{z}_0=\frac{1}{\lambda_0}(z_0^1,\cdots,z_0^m),$$

其中 $\lambda_0=\max\limits_{1\le l\le m}\left\{|z_0^l|\right\}\in(0,1)$。

由于 $f_j(z)$ 关于 $z\in P_m$ 全纯，$g_j(\zeta):=f_j(\zeta\hat{}z_0)$ 是一个从 $\triangle$ 到其自身的全纯映射，且对于 $j=1$、$\cdots$、n，有 $g_j(0)=f_j(0)=0$。因此，g_j 在 $\zeta=0$ 处有泰勒展开，即

$$g_j(\zeta)=\sum_{i=N_j}^{\infty}b_{ji}\zeta^i\quad\text{with}\quad b_{ji}=\frac{g_j^{(i)}(0)}{i!},\quad j=1,\cdots,n, \tag{4.27}$$

其中 $N_j \geq 1$ 是 g_j 在 $\zeta = 0$ 处的零点阶数。利用单复变数的经典施瓦茨引理，可得

$$|g_j(\zeta)| \leq |\zeta|^{N_j}, \quad j = 1, \cdots, n, \forall \zeta \in \triangle. \tag{4.28}$$

注意到

$$g_j(\lambda_0) = f_j(\lambda_0 \hat{z}_0) = f_j(z_0), \tag{4.29}$$

结合 (4.28) 可得

$$|f_j(z_0)|^2 \leq \lambda_0^{2N_j} \leq \lambda_0^2, \quad \forall j = 1, \cdots, n. \tag{4.30}$$

因此，由 (4.30) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z_0)\big) &= \frac{1}{1+\tilde{t}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f_j(z_0)|^2 + \tilde{t} \sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^{n} |f_j(z_0)|^{2\tilde{k}}} \right\} \\ &\leq \frac{1}{1+\tilde{t}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_0^2 + \tilde{t} \sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^{n} \lambda_0^{2\tilde{k}}} \right\} \\ &= \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} \lambda_0^2. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \varphi^2_{t,k}(z_0) &= \frac{1}{1+t} \left\{ \sum_{l=1}^{m} |z_0^l|^2 + t \sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m} |z_0^l|^{2k}} \right\} \\ &\geq \frac{1}{1+t} \left\{ \lambda_0^2 + t\lambda_0^2 \right\} \\ &= \lambda_0^2. \end{aligned}$$

因此

$$\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z_0)\big) \leq \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} \varphi^2_{t,k}(z_0).$$

显然，当 $z_0 = 0$ 时，上述不等式成立，因此对任意 $z \in P_m$ 都成立。

为说明常数 $\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}$ 是最优的，取 $w = f_0(z) = \big(z^1, \cdots, z^1\big)$ 以及 $z_0 = (z_0^1, \underbrace{0, \cdots 0}_{m-1}, \quad) \in P_m$，其中 $|z_0^1| < 1$ 为任意值。于是容易验证

$$\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f_0(z_0)\big) = \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} |z_0^1|^2 = \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} \varphi^2_{t,k}(z_0).$$

证毕。 □

推论 4.4. 设 $f\colon P_m \to P_n$ 是一个全纯映射，满足 $f(\lambda z) = \lambda^N f(z)$ 对任意 $\lambda \in \triangle$ 及整数 $N \geq 1$ 均成立。那么

$$\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big(f(z)\big) \leq \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}} \varphi^{2N}_{t,k}(z). \tag{4.31}$$

证明. 由假设及定理 4.3 的证明可知，对于任意 λ、$\zeta \in \triangle$，$f(0) = 0$ 且$g_j(\lambda\zeta) = \lambda^N g_j(\zeta)$。因此，对于 $j = 1$、$\cdots$、n，有 $N_j \geq N$，结论得证。

□

命题 4.4. 设 $f\colon P_m \to P_n$ 是满足 $f(0) = 0.$ 的全纯映射。那么，对于任意固定的 $l(l = 1, \cdots, m)$, 以下断言成立:

*(1)*等式

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0) = \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^2_{t,k}(z_0), \quad \forall 0 \neq z_0 = \big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, z_0^l, 0, \cdots, 0\big) \in P_m \tag{4.32}$$

成立，当且仅当

$$f_j\big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, z^l, 0, \cdots, 0\big) = e^{\sqrt{-1}\theta_j} z^l, \quad \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n; \tag{4.33}$$

(2) 此外，若对任意 $f(\lambda z) = \lambda^N f(z)$ $\lambda \in \triangle, z \in P_m$ 以及整数 $N \geq 1$，则

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0) = \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^{2N}_{t,k}(z_0), \quad \forall 0 \neq z_0 = \big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, z_0^l, 0, \cdots, 0\big) \in P_m \tag{4.34}$$

成立，当且仅当

$$f_j\big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, z^l, 0, \cdots, 0\big) = e^{\sqrt{-1}\theta_j}\big(z^l\big)^N, \quad \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n. \tag{4.35}$$

证明。 (1) 首先，我们证明必要性。利用 (4.30)，可得

$$\begin{aligned}
\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0) &= \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n |f_j(z_0)|^2 + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n |f_j(z_0)|^{2\tilde{k}}}\right\} \\
&\leq \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_0^{2N_j} + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n \lambda_0^{2\tilde{k}N_j}}\right\} \\
&\leq \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\lambda_0^2 \\
&\leq \frac{n + \tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^2_{t,k}(z_0).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

由（4.32）和（4.36），可得

$$|f_j(z_0)| = |z_0^l|^{N_j} = |z_0^l|,$$

因此我们有 $N_j = 1.$ 根据单复变数的经典施瓦茨引理，我们有

$$f_j\big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, z^l, 0, \cdots, 0\big) = e^{\sqrt{-1}\theta_j} z^l, \quad \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n.$$

接下来，我们证明充分性。若 $f_j\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z^l,0,\cdots,0\big)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}z^l,\theta_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,n$ 成立。取 $z_0=\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z_0^l,0,\cdots,0\big)\neq 0$,那么我们有

$$f(z_0)=\big(e^{\sqrt{-1}\theta_1}z_0^l,\cdots,e^{\sqrt{-1}\theta_n}z_0^l\big)$$

and

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0)=\frac{|z_0^l|^2}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n\big|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\big|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n\big|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\big|^{2\tilde{k}}}\right\}=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}|z_0^l|^2,\quad \varphi^2_{t,k}(z_0)=|z_0^l|^2.$$

因此

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0)=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^2_{t,k}(z_0).$$

断言 (1) 的证明至此完成。

(2) 首先，我们证明必要性。根据我们的假设和推论 4.4，我们有$f(0)=0$且 $g_j(\lambda\zeta)=\lambda^N g_j(\zeta)$，对任意 $\lambda,\zeta\in\triangle$均成立。因此，对于 $j=1,\cdots,n$，有 $N_j\geq N$，并且 (4.36) 可替换为

$$\begin{aligned}\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0) &= \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n|f_j(z_0)|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n|f_j(z_0)|^{2\tilde{k}}}\right\}\\ &\leq \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n\max_{1\leq i\leq m}\left\{|z_0^i|^{2N}\right\}+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n\max_{1\leq i\leq m}\left\{|z_0^i|^{2\tilde{k}N}\right\}}\right\}\\ &= \frac{1}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n|z_0^l|^{2N}+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n|z_0^l|^{2\tilde{k}N}}\right\}\\ &= \frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}|z_0^l|^{2N}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

由 (4.34) 和 (4.37)，我们有

$$|f_j(z_0)|=|z_0^l|^N,$$

记 $h_j(z^l):=f_j\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z^l,0,\cdots,0\big)$，则 $\big|h_j(z_0^l)\big|=|z_0^l|^N$.由于 $h_j\big(\lambda z^l\big)=\lambda^N h_j\big(z^l\big)$,对 $h_j(\lambda z^l)$ 关于 $\lambda,i=0,\cdots,N-1$ 求 i 阶导数，并令 $\lambda=0$，得到 $h_j(0)=h_j'(0)=\cdots=h_j^{(N-1)}(0)=0$。由单复变数的经典施瓦茨引理可得

$$f_j\big(\underbrace{0,\cdots,0}_{l-1},z^l,0,\cdots,0\big)=h_j(z^l)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}\big(z^l\big)^N,\quad \theta_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,n.$$

接下来证明充分性。若 $f_j\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z^l,0,\cdots,0\big)=e^{\sqrt{-1}\theta_j}(z^l)^N,\theta_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,n$ 成立。取 $z_0=\big(0,\underbrace{\cdots\ 0}_{l-1},z_0^l,0,\cdots,0\big)\neq 0$, 则有

$$f(z_0)=\left(e^{\sqrt{-1}\theta_1}(z_0^l)^N,\cdots,e^{\sqrt{-1}\theta_n}(z_0^l)^N\right)$$

and

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0)=\frac{|z_0^l|^{2N}}{1+\tilde{t}}\left\{\sum_{j=1}^n\left|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\right|^2+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{\sum_{j=1}^n\left|e^{\sqrt{-1}\theta_j}\right|^{2\tilde{k}}}\right\}=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}|z_0^l|^{2N},\quad \varphi^2_{t,k}(z_0)=|z_0^l|^2.$$

因此

$$\big(f^*\tilde{\varphi}^2_{\tilde{t},\tilde{k}}\big)(z_0)=\frac{n+\tilde{t}\sqrt[\tilde{k}]{n}}{1+\tilde{t}}\varphi^{2N}_{t,k}(z_0).$$

证明至此完成。 □

5 配备 K¨ahler- Berwald 度量的多圆盘上的畸变定理

畸变定理是单复变数经典几何函数论中的一个重要研究对象。作为德布朗日定理的推论，对于单位圆盘 Δ 上任意满足 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=1$ 的正规化双全纯函数 f，以下结论成立：

(1) $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\quad\forall z\in\Delta$;

(2)上述不等式在某个 $z\neq 0$ 处成立，当且仅当 $f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2},(\theta\in\mathbb{R})$。

然而，在多复变函数的情形下，有许多反例表明畸变定理并不成立。例如 [7],

$$f(z)=\left(z^1,\frac{z^2}{(1-z^1)^n}\right),\quad z=(z^1,z^2)\in B_2,n\in\mathbb{N}^+.$$

容易验证，f 是双全纯的，$f(0)=0$ 且 $f_*(0)=I_2$，即 f 是一个正规化的双全纯映射，其中 $f_*(0)$ 是 f 在原点处的雅可比矩阵，而 I_2 是单位矩阵。但是，对于全纯映射 f, $\det f_*(z)$ 和 $f_*(z)f_*(z)'$ 既没有有限的上界，也没有非零下界，其中 $f_*(z)$ 是 f 在点 z 处的雅可比矩阵。为了将上述经典畸变定理推广到高维情形，H. Cartan [7]建议研究多复变函数中的凸映射、星形映射以及双全纯映射的其他一些子类。

根据 K.L ¨owner 的畸变定理，如果 $f(z)=z+\sum_{i=2}^{\infty}a_iz^i$ 是单位圆盘上的双全纯凸函数 Δ，且 $f(0)=0$ 以及 $f'(0)=1$，那么 $|a_i|\leq 1,\quad i=$

2、3、$\cdots$，并且当且仅当对于某个 $i \geq 2$ 有 $f(z) = \frac{z}{1-e^{i\theta}z}(\theta \in \mathbb{R})$。此外，以下不等式成立

(1) $\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$；(2) 上述不等式在某个 $z \neq 0$ 处成立，当且仅当 $f(z) = \frac{z}{1-e^{i\theta}z}(\theta \in \mathbb{R})$。

在 [14], 中，S. Gong、S. K. Wang 和 Q. H. Yu 给出了单位球 B_m $\mathbb{C}^m$上归一化双全纯凸映射族的$f_*(z)f_*(z)'$ 的以下精确估计。

定理 5.1。 *[14]* 设 $f: \ B_m \to \mathbb{C}^m$ 是单位球 $B_m \subset \mathbb{C}^m$上的归一化双全纯凸映射。则

$$\left(\frac{1-\|z\|}{1+\|z\|}\right)^2 Q \leq f_*(z)\overline{f_*(z)}' \leq \left(\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\right)^2 Q \tag{5.1}$$

对每个 $z = (z^1, \cdots, z^m) \in B_m$均成立，其中

$$Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq m} = \left(\frac{(1-\|z\|^2)\,\delta_{ij} + \bar{z}_i z_j}{(1-\|z\|^2)^2}\right)_{1\leq i,j\leq m} \tag{5.2}$$

是 B_m的 ***Bergman*** 矩阵的 ***Hermitian*** 张量矩阵，而 $\|.\|^2$ 是 $\mathbb{C}^m$中的典范复欧几里得范数。这些估计是精确的。

注 5.1. (5.1) 中的两个厄米矩阵 $A \leq B$ 意味着它们的差 $A - B$ 是一个半负定厄米矩阵。显然，(5.1) 等价于以下不等式

$$\left(\frac{1-\|z\|}{1+\|z\|}\right)^2 Q(z;v) \leq \|f_*(z)v\|^2 \leq \left(\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\right)^2 Q(z;v), \quad \forall z \in B_m, v \in T_z^{1,0}B_m \cong \mathbb{C}^m,$$

其中， $Q(z; v)$ 是 B_m上的伯格曼度量， Q 由 (5.2) 给出。

定义 5.1. [28] 设 Ω 是 $\mathbb{C}^m$中的一个有界凸圆形域，定义

$$p(z) = \inf\left\{c > 0 : \frac{z}{c} \in \Omega\right\}, \quad z \in \mathbb{C}^m,$$

则 (i) $p(z)$ 是 $\mathbb{C}^m$上的复范数，称为 Ω 的闵可夫斯基泛函；(ii) 在复范数 $p(\cdot)$ 下， $\mathbb{C}^m$ 是一个复巴拿赫空间；(iii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^m : \ p(z) < 1\}$, $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^m : \ p(z) = 1\}$。

由定义 5.1 可知，多圆盘 P_m 的闵可夫斯基泛函为 $p(z) = \max\limits_{1\leq l\leq m}\{|z^l|\}$，其中任意 $z \in \mathbb{C}^m$.

在 [13], S. Gong 和 T. S. Liu 根据 Carth´eodory 度量和小林度量，将双全纯凸映射的畸变定理推广到了有界圆形域中 $\mathbb{C}^m$.

定理 5.2。 *[13]* 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ 是一个有界凸圆形域，满足 $0 \in \Omega$，且$p(z)(z \in \Omega)$ 是其闵可夫斯基泛函。设 $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}^m$ 是 Ω 上的规范化双全纯凸映射。则对于任意 $z \in \Omega$ 以及向量 $v \in \mathbb{C}^m$, 以下不等式成立

$$\frac{1-p(z)}{1+p(z)}F^{\Omega}(z;v) \leq p\left(f_*(z)v\right) \leq \frac{1+p(z)}{1-p(z)}F^{\Omega}(z;v)$$

成立，其中

$$F^{\Omega}(z;v) = F_C^{\Omega}(z;v) = F_K^{\Omega}(z;v),$$

$F_{\Omega C}(z;\ v)$和 $F_{\Omega K}(z;\ v)$分别是Ω 的 *Carath´eodory* 度量和 *Kobayashi-Royden*度量的无穷小形式。

注 5.2。 [29], T. J. Suffridge 得到了以下分解定理：设 $f(z) = (f_1(z) \cdots, f_m(z))$ $z \in \mathbb{C}^m$在多圆盘 P_m, $f(0) = 0$ 上全纯。那么， $f(z)$ 是双全纯凸映射，当且仅当存在一个非奇异常数矩阵 T使得 $f(z) = (\phi_1(z^1) \cdots, \phi_m(z^m))$ T成立，其中$\phi_l\left(z^l\right)$ 是单位圆盘Δ_l上的单复变数双全纯凸函数 z^l , $l = 1, \cdots, m.$

注意，如果 f 是规范化双全纯凸映射，那么 $f(0) = 0$ 且$f_*(0) = I_m$。因此我们有 $\phi_l(0) = 0, l = 1, \cdots, m$，并且

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi_1'(0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\phi_m'(0)} \end{pmatrix}.$$

于是我们有 $f(z) = (f_1(z) \cdots, f_m(z)) = \left(\frac{\phi_1(z^1)}{\phi_1'(0)} \cdots, \frac{\phi_m(z^m)}{\phi_m'(0)}\right)$·因此， $f(z)$ 是规范化双全纯凸映射，当且仅当 $f_l(z) = f_l\left(z^l\right)$ 是在单位圆盘 Δ_l 上的单复变数规范化双全纯凸函数 z^l , $l = 1, \cdots, m.$

利用由 (1.2) 给出的 Aut(P_m)-不变 K¨ahler-Berwald 度量 $F_{t,k}$ （它不一定是厄米二次型），我们能够得到关于 P_m 上规范化双全纯凸映射的以下畸变定理。

定理 5.3。 设 P_m 是赋予 *Aut*(P_m)不变 *K¨ahler-Berwald* 度量 $F_{t,\ k}$ （由(1.2)给出）的单位多圆盘，且 $f(z) = (f_1(z) \cdots,\ f_n(z))$： $P_m \to \mathbb{C}^m$ 是一个规范化双全纯凸映射。则对任意 $z \in P_m$ 和 $v \in T^{1,\ 0}_z P_m \cong \mathbb{C}^m$，以下不等式成立

$$\left[\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right]^2 F_{t,k}^2(z;v) \leq F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) \leq \left[\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right]^2 F_{t,k}^2(z;v) \tag{5.3}$$

取值，这里 $p(z)$ 是 P_m的闵可夫斯基泛函。此外，当且仅当对某些 $\theta_l \in \mathbb{R}, l = 1, \cdots, m.$, $z \neq 0$ 处(5.3) 中的某个等式成立时， $f_l(z) = \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l}z^l}$成立

证明。 由于 $f(z) = (f_1(z) \cdots, f_n(z)) : P_m \to \mathbb{C}^m$ 是一个规范化双全纯凸映射，根据 T. J. Suffridge 的分解定理 [29] ， $f_l(z) = f_l\left(z^l\right)$ 是单位圆盘 Δ_l 上的单个复变量 z^l 的规范化双全纯凸函数，其中 $l = 1, \cdots, m$。因此，我们有

$$F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) = \frac{1}{1+t}\left\{\sum_{l=1}^{m}|f_l'(z^l)v^l|^2 + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}|f_l'(z^l)v^l|^{2k}}\right\}, \quad \forall z \in P_m, v \in T_z^{1,0}P_m \cong \mathbb{C}^m. \tag{5.4}$$

根据 K. Lowner 的结果，我们有

$$\frac{1}{(1+|z^l|)^2} \leq |f_l'(z^l)| \leq \frac{1}{(1-|z^l|)^2}, \quad l = 1, \cdots, m. \tag{5.5}$$

现在由 (5.4) 和 (5.5) 可得

$$F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) \leq \frac{1}{1+t}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1-|z^l|)^4} + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z^l|)^{4k}}}\right\} \tag{5.6}$$

and

$$F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) \geq \frac{1}{1+t}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1+|z^l|)^4} + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1+|z^l|)^{4k}}}\right\}. \tag{5.7}$$

由于

$$\frac{1}{(1-|z^l|)^4} = \frac{1}{(1-|z^l|^2)^2}\left[\frac{1+|z^l|}{1-|z^l|}\right]^2 \leq \frac{1}{(1-|z^l|^2)^2}\left[\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right]^2, \tag{5.8}$$

结合 (5.6)，可推出

$$\begin{aligned} F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) &\leq \frac{1}{1+t}\left[\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right]^2\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1-|z^l|^2)^2} + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z^l|^2)^{2k}}}\right\} \\ &= \left[\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right]^2 F_{t,k}^2\left(z; v\right). \end{aligned}$$

同理，由于

$$\frac{1}{(1+|z^l|)^4} = \frac{1}{(1-|z^l|^2)^2}\left[\frac{1-|z^l|}{1+|z^l|}\right]^2 \geq \frac{1}{(1-|z^l|^2)^2}\left[\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right]^2, \tag{5.9}$$

结合 (5.7) 可得

$$\begin{aligned} F_{t,k}^2\left(0; f_*(z)v\right) &\geq \frac{1}{1+t}\left[\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right]^2\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^2}{(1-|z^l|^2)^2} + t\sqrt[k]{\sum_{l=1}^{m}\frac{|v^l|^{2k}}{(1-|z^l|^2)^{2k}}}\right\} \\ &= \left[\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right]^2 F_{t,k}^2\left(z; v\right). \end{aligned}$$

因此，(5.3) 得证。此外，若 (5.3) 中的某个等式在某点 $z \neq 0$ 处成立，则

$$\frac{1}{(1+|z^l|)^2} = |f_l'(z^l)| \quad \text{or} \quad \frac{1}{(1-|z^l|)^2} = |f_l'(z^l)|, \quad l = 1, \cdots, m.$$

根据 K. Lowner 的结果，我们有 $f_l(z^l) = \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l}z^l}$，其中 $\theta_l \in \mathbb{R}$ 对于 $l = 1, \cdots, m$。另一方面，若 $f_l(z^l) = \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l}z^l}$，其中 $\theta_l \in \mathbb{R}$ 对于 $l = 1, \cdots, m$，并且取 $z_0 = (be^{-i\theta_1}, \cdots, be^{-i\theta_m})$，其中 $b \in \mathbb{R}^+$，则 $|f_l'(z_0^l)|^2 = \frac{1}{(1-b)^4}$，且 ~~(5.8)~~ 化简为

$$\frac{1}{(1-b)^4} = \frac{1}{(1-b^2)^2}\left[\frac{1+b}{1-b}\right]^2 = \frac{1}{(1-|z_0^l|^2)^2}\left[\frac{1+p(z_0)}{1-p(z_0)}\right]^2. \tag{5.10}$$

因此

$$F_{t,k}^2(0, f_*(z_0)v) = \left[\frac{1+p(z_0)}{1-p(z_0)}\right]^2 F_{t,k}^2(z_0; v).$$

类似地，对于 $\tilde{z}_0 = (-ae^{-i\theta_1}, \cdots, -ae^{-i\theta_m})$，其中 $a \in \mathbb{R}^+$，我们有

$$F_{t,k}^2(0, f_*(\tilde{z}_0)v) = \left[\frac{1-p(\tilde{z}_0)}{1+p(\tilde{z}_0)}\right]^2 F_{t,k}^2(\tilde{z}_0; v).$$

证明至此完成。 □

推论 5.1。 设 P_m 是 $\mathbb{C}^m$ 中赋予 ***Aut***(P_m)-不变 ***K¨ahler- Berwald*** 度量 $F_{t,k}$ 的单位多圆盘，该度量由 (1.2) 给出，并设 $f(z): P_m \to \mathbb{C}^m$，其中 $f_l(z) = f_l\left(z^l\right)$是定义在单位圆盘$\Delta_l(l = 1, \cdots, m)$. 上的复变量 z^l 的规范化双全纯凸函数。则

$$\frac{p(z)^2}{(1+p(z))^4} \leq F_{t,k}^2(0; f_*(z)z) \leq \frac{m + t\sqrt[k]{m}}{1+t}\frac{p(z)^2}{(1-p(z))^4} \tag{5.11}$$

对于每个 $z \in P_m$. 此外，右侧等式在某个 z_0 处成立，当且仅当 $z_0 =$（$be^{i\theta_1}$、$\cdots$、$be^{i\theta_m}$）满足 $b \in \mathbb{R}^+$且 f_l（z^l）$= \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l}z^l}$对于某些 $\theta_l \in \mathbb{R}$、$l = 1$、$\cdots$、m.

证明。 根据由（1.2）给出的 Aut(P_m)-不变 K¨ahler-Berwald 度量 $F_{t,\ k}$的定义，我们有

$$\frac{p(z)^2}{(1-p(z)^2)^2} \leq F_{t,k}^2(z; z) \leq \frac{m + t\sqrt[k]{m}}{1+t}\frac{p(z)^2}{(1-p(z)^2)^2}, \quad \forall z \in P_m. \tag{5.12}$$

因此，由（5.12）并在定理 5.3 中用 z 替换 v，我们有

$$\frac{p(z)^2}{(1+p(z))^4} \leq F_{t,k}^2(0; f_*(z)z) \leq \frac{m + t\sqrt[k]{m}}{1+t}\frac{p(z)^2}{(1-p(z))^4},$$

这就完成了（5.11）的证明。此外，（5.11）右端的等式在某点成立，当且仅当

$$F_{t,k}^2(0; f_*(z_0)z_0) = \left[\frac{1+p(z_0)}{1-p(z_0)}\right]^2 F_{t,k}^2(z_0; z_0) \tag{5.13}$$

and

$$F_{t,k}^{2}\left(z_{0};z_{0}\right) \;=\; \frac{m+t\sqrt[k]{m}}{1+t}\frac{p(z_{0})^{2}}{(1-p(z_{0})^{2})^{2}}. \tag{5.14}$$

因此，由定理 5.3 可知，（5.13）在 z_0 处成立，当且仅当对于某个 $\theta_l \in$， f_l（z^l）$= \frac{z^l}{1-e^{i\theta_l}z^l}$，$\mathbb{R}$、$l=1$、$\cdots$、$m.$。由（1.2）可知，（5.14）在 z_0 处成立，当且仅当对于 i、$j=1$、$\cdots$、m，$\frac{|z_0^i|}{1-|z_0^i|^2}=\frac{|z_0^j|}{1-|z_0^j|^2}$；这又当且仅当 $z_0=$（$be^{i\theta_1}$、$\cdots$、$be^{i\theta_m}$），其中 $b\in\mathbb{R}^{+}$。证明完毕。 □

6 复芬斯勒-爱因斯坦条件

本节将证明，式 (1.2) 中定义的复芬斯勒度量是 T. Aikou [4] 意义下的复芬斯勒-爱因斯坦度量。

设 M 是一个复维数为 n 的复流形，$g=g_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}$ 是 M 上的一个厄米度量。设 E 是 M 上秩为 r 的全纯向量丛，其纤维度量是强伪凸复芬斯勒度量 $F(z;\xi)$。记 $R^{i}_{j\alpha\bar{\beta}}$ 为与 F 相关联的偏联络（或等价地，水平 Chern-Finsler 联络）的曲率分量。定义部分平均曲率 K^{i}_{j} 如下 [4]:

$$K^{i}_{j}:=g^{\bar{\beta}\alpha}R^{i}_{j\alpha\bar{\beta}}. \tag{6.1}$$

一般而言，$R^{i}_{j\alpha\bar{\beta}}$ 同时依赖底流形 M 的局部坐标 z 和纤维坐标 ξ，且容易验证 K^{i}_{j} 实际上在 E 的射影丛 PE 上定义良好。在 [30], 中已证明，若

$$K^{i}_{j}=\varphi(z,\xi)\delta^{i}_{j}$$

对于射影丛 PE 上的某个函数 $\varphi(z,\xi)$，则 $\varphi(z,\xi)=\varphi(z)$。因此，下面的定义是自然的。

定义 6.1。若复芬斯勒丛 (E,F) 的部分平均曲率 $K=(K^{i}_{j})$ 满足以下条件，则称其为弱芬斯勒-爱因斯坦向量丛

$$K^{i}_{j}=\varphi(z)\delta^{i}_{j},$$

对于 M 上的函数 φ。如果因子 φ 为常数，则称 (E,F) 为复芬斯勒-爱因斯坦向量丛。

容易验证，上述定义等价于 T. Aikou [4] 中的定义 3.1。关于复芬斯勒-爱因斯坦向量丛还有其他概念，可参见 [17]，以及沿此方向的一些最新进展 [11,12]。

在 $E=T^{1,0}M$ 是 M 的全纯切丛时，Aikou 的定义似乎有些不够妥当。不过，根据 [4], 中的定理 4.1，复伯瓦尔德流形 (M,F) 必然是一个厄米流形。更确切地说，存在一个定义在 M 上的厄米度量 h_M，使得与 $F(z;v)$ 相关联的偏联络

等于 h_M 的厄米联络的拉回。因此，在 (6.1) 中总可以用 h_M 代替 g 作为定义，这显然适用于复伯瓦尔德流形。按照这一约定，若复伯瓦尔德流形 (M, F) 满足 (6.1)，则称其为复芬斯勒-爱因斯坦流形；若 K¨ahler-Berwald 流形 (M, F) 满足 (6.1)，则称其为 K¨ahler 芬斯勒-爱因斯坦流形。并且，若 (M, F) 是复芬斯勒-爱因斯坦流形，则 (M, h_M) 必然是厄米-爱因斯坦流形；若 (M, F) 是 K¨ahler 芬斯勒-爱因斯坦流形，则 (M, h_M) 必然是 K¨ahler-爱因斯坦流形。下述定理表明，对于任意固定的 $t \in [0, +\infty$ 和整数 $k \geq 2$，$(P_m, F_{t,k})$ 是一个 K¨ahler 芬斯勒-爱因斯坦流形，其中 $F_{t,k}$ 不一定是厄米二次度量。

定理 6.1. 设 P_m 是赋有 $Aut(P_m)$ 不变 *K¨ahler- Berwald* 度量 $F_{t,k}$ 的单位多圆盘，其中该度量由 (1.2) 给出。那么对于任意固定的 $t \in [0, +\infty)$ 和整数 $k \geq 2$,$(P_m, F_{t,k})$ 都是因子为 $\varphi = -2$ 的复芬斯勒-爱因斯坦流形。

证明. 注意，伯格曼度量

$$g = \sum_{l=1}^{m} g_l, \quad g_l = \frac{dz^l d\bar{z}^l}{(1 - |z^l|^2)^2},$$

是 P_m 上的 K¨ahler-爱因斯坦度量，它是一个厄米二次度量。

在 [39], 中，与复芬斯勒度量 $F_{t,k}$ 相关联的水平切恩-芬斯勒联络系数 $\Gamma^s_{l;i}$ 为

$$\Gamma^s_{l;i} = \begin{cases} \hat{\Gamma}^l_{l;l}, & \text{if } l = i = s; \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，$\hat{\Gamma}^l_{l;l}$ 分别是 g_l 关于 $l = 1$、$\cdots$、m 的厄米联络系数。因此，与 $F_{t,k}$ 相关联的偏联络的曲率分量 $R^s_{li\bar{r}}$ 为

$$R^s_{li\bar{r}} = \begin{cases} \hat{R}^l_{ll\bar{l}}, & \text{if } i = r = s = l; \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，$\hat{R}^l_{ll\bar{l}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} \hat{\Gamma}^l_{l;l} = \frac{-2}{(1-|z^l|^2)^2}$ 是与 g_l 相关联的厄米联络的曲率分量。由此可得，$F_{t,k}$ 关于 g 的平均曲率 $K = (K^s_l)$ 为

$$K^s_l = g^{\bar{r}i} R^s_{li\bar{r}} = -2\delta^s_l,$$

这意味着 $(P_m, F_{t,k})$ 是因子为 $\varphi = -2$ 的复芬斯勒-爱因斯坦流形。定理 6.1 的证明至此完成。 □

致谢：本研究得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12071386、11671330）。

参考文献

[1] M. Abate 和 G. Patrizio，《芬斯勒度量——几何函数论及其应用的全局方法》，《数学讲义》第1591卷，施普林格出版社，柏林-海德堡，1994年。[2] L. V. Ahlfors，《施瓦茨引理的推广》，《美国数学会汇刊》43(3)，359-364（1938年）。[3] T. Aikou，《论复芬斯勒流形》，《鹿儿岛大学理学部报告》（数学、物理与化学）(24)，9-25（1991年）。[4] T. Aikou，《爱因斯坦-芬斯勒向量丛》，《德布勒森数学出版物》51(3-4)，363-384（1997年）。[5] S. Bochner 和 W. T. Martin，《若干复变数》，普林斯顿大学出版社，1948年。[6] D. M. Burns、S. G. Krantz，《全纯映射的刚性与一个新的边界施瓦茨引理》，《美国数学会杂志》7(3)，661-676（1994年）。[7] H. Cartan，《将单值函数理论推广到多复变函数的可能性》，载于 P. Montel 著《单值函数与多值函数讲义》，Gauthier-Villars，129-155（1933年）。[8] B. Chen 和 Y. Shen，《K¨ahler 芬斯勒度量实际上是强 K¨ahler 度量》，《中国数学年刊》30B(2)，173-178（2009年）。[9] Z. H. Chen、S. Y. Cheng 和 Q. K. Lu，《关于完备 K¨ahler 流形上的施瓦茨引理》，《中国科学》22(11)，1238-1247（1979年）。[10] S. S. Chern，《关于同维厄米流形之间的全纯映射》，《美国数学会纯粹数学专题讨论会论文集》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，157-170（1968年）。[11] H. T. Feng、K. F. Liu 和 X. Y. Wan，《全纯芬斯勒向量丛的陈形式及若干应用》，《国际数学杂志》27(4)，1650030，22页（2016年）。[12] H. T. Feng、K. F. Liu 和 X. Y. Wan，《全纯芬斯勒向量丛上的 Donaldson 型泛函》，《数学年刊》369(3-4)，997-1019（2017年）。[13] S. Gong 和 T. S. Liu，《有界凸圆形域上双全纯凸映射的畸变定理》，《中国数学年刊》20B(3)，297-304（1999年）。[14] S. Gong、S. K. Wang 和 Q. H. Yu，《C^n中的球的双全纯凸映射》，《太平洋数学杂志》161，287-306（1993年）。[15] K. T. Kim 和 H. J. Lee，《从微分几何角度看施瓦茨引理》，IISc讲义丛书第2卷，世界科学出版社，2011年。[16] S. Kobayashi，《距离、全纯映射与施瓦茨引理》，《日本数学会杂志》19，481-485（1967年）。[17] S. Kobayashi，《负向量丛与复芬斯勒结构》，《名古屋数学杂志》57，153-166（1975年）。[18] T. S. Liu、J. F. Wang 和 X. M. Tang，《$\mathbb{C}^n$ 中的单位球边界处的施瓦茨引理及其应用》，《几何分析杂志》25(3)，1890-1914（2015年）。[19] T. S. Liu 和 X. M. Tang，《$\mathbb{C}^n$中强拟凸域边界处的施瓦茨引理》，《数学年刊》366(1-2)，655-666（2016年）。[20] Y. Liu、Z. H. Chen 和 Y. F. Pan，《非等维边界施瓦茨引理

复变量全纯映射及其应用。《太平洋数学杂志》295(2)，463-476（2018年）。[21] K. H. Look，《多复变函数论中的施瓦茨引理》（中文）。《数学学报》7，370-420（1957年）。[22] K. H. Look，施瓦茨引理与解析不变量。《中国科学》7，453-504（1958年）。[23] R. Narasimhan，《多复变函数》。芝加哥数学讲座丛书，芝加哥大学出版社，1971年。[24] J. Nie 和 C. Zhong，从一个K¨ahler流形到复芬斯勒流形的施瓦茨引理。《中国科学：数学》65(8)，1661-1678（2022年）。[25] J. Nie 和 C. Zhong，弱K¨ahler-芬斯勒流形上的施瓦茨引理。《纯粹与应用数学年刊》201(4)，1935-1964（2022年）。[26] H. L. Royden，多复变函数中的阿尔福斯-施瓦茨引理。《数学通讯（赫尔维）》55(4)，547-558（1980年）。[27] B. Shen 和 Y. Shen，复芬斯勒流形中的施瓦茨引理与Hartogs现象。《中国数学年刊》34B(3)，455-460（2013年）。[28] J. H. Shi，《多复变函数论基础》。高等教育出版社，2014年。[29] T. J. Suffridge，从属原理在多变量函数中的应用。《太平洋数学杂志》33，241-248（1970年）。[30] L. Sun 和 C. Zhong，弱复爱因斯坦-芬斯勒向量丛。《中国科学：数学》61(6)，1079-1088（2018年）。[31] X. M. Tang、T. S. Liu 和 W. J. Zhang，经典域上的边界施瓦茨引理，类型为 II。《几何分析杂志》28(2)，1610-1634（2018年）。[32] V. Tosatti，近厄米流形上的一般施瓦茨引理。《分析与几何通讯》15(5)，1063-1086（2007年）。[33] X. Wan，复芬斯勒流形的全纯截面曲率。《几何分析杂志》29(1)，194-216（2019年）。[34] J. F. Wang、T. S. Liu 和 X. M. Tang，经典域上的边界施瓦茨引理，类型为 IV。《太平洋数学杂志》302(1)，309-333（2019年）。[35] S. T. Yau，K¨ahler流形上的一般施瓦茨引理。《美国数学杂志》100(1)，197-203（1978年）。[36] H. C. Yang 和 Z. H. Chen，关于完备厄米流形上的施瓦茨引理。载于《多复变函数》（杭州，1981），Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，99-116（1984年）。[37] C. Zhong，关于与强凸弱K¨ahler-芬斯勒度量相关的实与复伯瓦尔德联络。《微分几何及其应用》29(3)，388-408（2011年）。[38] C. Zhong，关于酉不变强伪凸复芬斯勒度量。《微分几何及其应用》40，159-186（2015年）。[39] C. Zhong，强凸K¨ahler-伯瓦尔德流形的德拉姆分解定理。《数学结果》。https://doi.org/10.1007/s00025-022-01797-z。