arXiv:2301.06106v2 [math.RA] 3 Mar 2023

将矩阵分解为挠矩阵之和与固定幂零指数的矩阵

PETER DANCHEV、ESTHER GARC´IA 和 MIGUEL G ´OMEZ LOZANO

Abstract. 对于 $n \geq 2$ 和固定的 $k \geq 1$，我们研究任意域 $\mathbb{F}$ 上的方阵 A 何时可以分解为 $T + N$，其中 T 是挠矩阵，N 是满足 $N^k = 0$的幂零矩阵。对于素特征域，我们证明，只要$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$的特征多项式在其基域上是代数的，且 A 的秩至少为 $\frac{n}{k}$，这种分解便成立；我们还给出了若干例子，说明一般情况下该分解并不成立。此外，我们彻底解决了任意域（甚至除环）上的$k = 2$ 与幂零矩阵的这一分解问题。这在一定程度上延续了我们近期发表于 Lin. & Multilin. Algebra (2023) 和 Internat. J. Algebra & Computat. (2022) 的研究，也加强了 Calugareanu-Lam 在 J. Algebra & Appl. (2016) 中的结果。

Key words: （幂等幂）矩阵、幂零元、平方为零元素、多项式
2010 Mathematics Subject Classification: 15A21, 15A24, 15B99, 16U60

1. Introduction and Fundamentals

长期以来，许多研究者一直关注如何将任意域上的矩阵分解为若干特殊元素之和，例如幂零元、幂等元素、幂等幂元素、单位元等（例如参见 [1], [2], [3], [4], [5], [6], [20], [22] 和 [23] 及其中引用的文献）。具体而言，就我们在这一主题上的工作来说，在 [14] 中，我们找到了使域（有限或无限）上的任意方阵都能表示为一个可对角化矩阵与一个指数不超过二的幂零矩阵之和的一些必要（及充分）条件。特别是，我们还得到了一些关于有限域上方阵表示为幂等幂矩阵与平方为零矩阵之和的结果。然而，这种分解对于零特征的域并不成立（见 [14, 例 4.3]）。我们在 [13]中进一步探讨了某些特殊有限环上的这一问题。对于有兴趣的读者，我们还推荐参阅 [11]，了解在某些域上将矩阵表示为特定元素之和的其他方面。

结合可逆性与幂零性的概念，C˘alug˘areanu 和 Lam 于 2016 年引入了精细环的概念 [7]：其中每个非零元素都可以写成一个可逆元素与一个幂零元之和。他们在该研究中证明，除环上的每个非零方阵都可以表示为一个可逆矩阵与一个

第一作者获得了保加利亚国家科学基金通过2019年12月7日的 KP-06 第32/1号资助项目提供的部分资助。第二作者获得了 URJC 的 Ayuda Puente 2022 项目提供的部分资助。三位作者均获得了安达卢西亚自治区政府 FQM264 项目提供的部分资助。

幂零矩阵之和。非零幂等元都是精细元的环，后来被发现属于一类有趣的不可分解环，并由 C˘alug˘areanu 和 Zhou 在 [8] 中进行了研究。2021年，这两位作者将研究重点转向每个非零幂零元都是精细元的环，他们称之为 NF 环，并证明对于交换环 R 和 $n \geq 2$，矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是 NF 当且仅当 R 是一个域；参见 [9]。在 [12] 中定义了一类比精细环略为一般的环，称为幂零良环（每个元素 a 都可以表示为 $a = n + u$ 之和，其中 n 是幂零元，而 u 或为零或为单位元）；文献 [18] 证明，除环 D 上的矩阵环 $\mathbb{M}_n(D)$ 是幂零良环。一般而言，这些分解对幂零指数没有任何限制。

在我们的工作 [15] 中，我们考虑了任意域$\mathbb{F}$上的矩阵环 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，为幂零指数设定了一个上界 k ，并研究了矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$何时可以表示为可逆矩阵 U 与满足 $N^k = 0$的幂零矩阵 N 之和。在这里，我们将继续这一方向的研究，把 U 的可逆性条件改为挠矩阵条件。回忆一下，挠矩阵 T 是指存在正整数 s 使得 T^s 为单位矩阵的矩阵。容易看出，这种矩阵必然可逆，而且是 $s+1$幂等的，即 $T^{s+1} = T$。D. Sjerve 研究了挠矩阵的典范形，并在其论文 [21]中给出了有理数域上的完整分类。

本文安排如下：第一节将证明，只要 A 的特征多项式在其基域上是代数的，且其秩满足某个界限，所需的分解就成立；并给出若干例子，说明该分解并非普遍成立。第二节聚焦于幂零矩阵，探讨如何确定将此类矩阵分解为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵（固定幂零指数 $k \leq 2$）之和的充要条件。由于我们通过考察所研究幂零矩阵的若尔当标准块来解决这一问题，因此我们的结果对除环上的幂零矩阵也成立。

2. Decomposing Matrices Into a Sum of Torsion Matrices and Matrices of Fixed Nilpotence

按照惯例，为了方便行文，我们说明：除非另有说明，字母 $\mathbb{F}$ 表示任意域，符号 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 专指 $\mathbb{F}$ 上的矩阵环。其他未明确解释的记号均为标准记号，并与书籍 [19] 中的用法一致。

在我们的工作中 [15] ，我们证明了：

定理 2.1. [15, 定理 2.7] 设 $n \geq 2$。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，考虑环$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，并固定 $k \geq 1$。给定一个非零矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，存在一个可逆矩阵 $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$和一个幂零矩阵 $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，满足 $N^k = 0$ ，使得 $A = U + N$ 当且仅当 A 的秩大于或等于 $\frac{n}{k}$

本节将讨论以下问题：

问题：给定一个固定的 $k \geq 1$，求出必要且充分的条件，使得任意非零方阵 A 都能在域 $\mathbb{F}$ 上分解为一个挠矩阵 T与一个幂零矩阵 N 之和，且满足 $N^k = 0$。

注意，利用定理 2.1 以及有限环的单位群总是挠群这一显然事实，关于有限域上矩阵的上述问题已经得到解决。然而，在无限域上，秩条件不足以保证这种分解成立。在本节余下部分，我们将展示这种分解成立的一些情形，并给出一些反例，说明这种分解并非普遍成立。

注 2.2. 设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$。若存在一个幂零矩阵 $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$（$N^k = 0$），且 $T = A - N$满足 $T^s = \mathrm{Id}$（对某个 $s \in \mathbb{N}$），则以下三点成立:

- A 的迹与 T的迹相同;
- T的最小多项式整除 $X^s - 1$，因此 T的特征值（在 $\mathbb{F}$的某个扩域中）是 s 次单位根。此外，若 $X^s - 1$可分，则 T 可对角化;
- T的迹等于其特征值之和，因此它是 $\mathbb{F}$基域上的一个代数数。

例如，矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$即使满秩，且其迹在基域上是超越数，也绝不可能分解为和 $T + N$，其中 T是挠矩阵，而 N 是幂零矩阵。

设 $n \geq 2$。回顾一下，多项式 $p(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{F}[x]$ 的迹是标量 $-b_{n-1}$，且等于其伴随矩阵$C(p(x)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$的迹。注意，伴随矩阵的秩总是大于或等于 $n - 1$。

现在，我们可以对上述问题给出一个部分解答。具体而言，以下结论成立。

命题 2.3. 设 $n \geq 2$，设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是一个次数为 n 的多项式，且$C(p(x)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$是其伴随矩阵。如果 $p(x)$的迹可以表示为 $\mathbb{F}$的某个扩域中 n 个不同单位根之和，那么 A 可以在 $\mathbb{F}$的某个扩域中分解为 $T + N$，其中 T是挠矩阵，且$N^2 = 0$。特别地，如果 $p(x)$的迹为1、-1或0，则这一结论总是成立。

证明。根据假设，$p(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$的迹可表示为 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，其中 α_1，.....，α_n是某个 $\mathbb{F}$的扩域中的互不相同的单位根。考虑多项式 $q(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
C(p(x)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{C(q(x))} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 - b_0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & a_{n-1} - b_{n-1} \end{pmatrix}}_{N},
\end{aligned}
$$

其中 $T:=C(q(x))$ 是一个可对角化扭矩阵，而 $N^2=0$，因为 $a_{n-1}-b_{n-1}=0$，正如所需。根据上述论证，最后一个结论立即成立。□

由此立即可得：

推论 2.4. 设 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，且 $p_1(x)\ldots,p_k(x)$ 是 A 的初等因子（分别是 A 的不变因子）。若每个 $p_i(x)$ 的次数为 n_i，且其迹是某个 $\mathbb{F}$ 扩域中 $n_i's$ 个互不相同的单位根之和，那么 A 可在某个 $\mathbb{F}$ 扩域中分解为 $T+N$，其中 T 是挠矩阵，且 $N^2=0$。

证明。若 $p_1(x)\ldots,p_k(x)$ 是 A 的初等因子（分别是其不变因子），则矩阵 A 相似于各个 $p_i(x)$ 的伴随矩阵的直和。然而，利用命题 2.3，我们可以将每个 $p_i(x)$ 的伴随矩阵表示为和 T_i+N_i，其中 T_i 是挠矩阵，且 $N_i^2=0$，证毕。□

接下来的两条有趣评论值得一读。

注 2.5. 并非每个迹为 n 个单位根之和的矩阵 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$都能写成 $T+N$，其中 T 是挠矩阵，且 $N^2=0$（即使这些单位根彼此不同，且 A 满足秩条件）。事实上，令 $n\geq 2$，并考虑元素 $a\in\mathbb{F}$，使得 na 是单位根之和，但 a 本身不是单位根（注意，这样的元素 a 总是存在且容易构造，因此略去细节）。那么矩阵 $A=a$ 恒等矩阵 $\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$不能写成和式 $T+N$；否则就存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $T^m=$恒等矩阵；但此时恒等矩阵 $=T^m=(A-N)^m=a^m$恒等矩阵$-ma^{m-1}N$，因此$(a^m-1)^2$恒等矩阵$=((a^m-1)$恒等矩阵$)^2=(ma^{m-1}N)^2=0$，矛盾。
例如，矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 不能表示为 $T+N$，即使它的迹是两个（不同的）6^{th}次单位根之和：$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

注 2.6. 设 $\mathbb{F}$ 是一个特征为 0 的域。当 $n\geq 3$时，如果 $p(x)$ 是一个次数为 n 的多项式，且 $p(x)$ 的迹是 n 个相等的单位根之和，那么矩阵 $C(p(x))$ 绝不可能写成 $T+N$。事实上，设 α 是一个单位根，并考虑一个次数为 n 的多项式 $p(x)$，其迹为 $n\alpha$，其伴随矩阵为 $C(p(x))$。现在假设 $C(p(x))=T+N$，其中 T满足：对某个 $m\in\mathbb{N}$，有 $T^m=$恒等矩阵，且 $N^2=0$。由于 T的最小多项式整除 X^m-1，且该多项式没有重根，因此 T可对角化，其特征值全是单位根，且其和与 T 的迹相同（另一方面，这也与 $p(x)$ 的迹相同），所以它恰好是 $n\alpha$。若 $n\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$、$\alpha$、$\alpha_1$、.....、$\alpha_n$ 均为单位根，则唯一解是 $\alpha=\alpha_1=\cdots=\alpha_n$。因此，$T$的特征值全都等于 α，从而 $T=\alpha$恒等矩阵。但此时，$N=C(p(x))-\alpha$ 恒等矩阵的平方应为零，这显然不成立（$C(p(x))-\alpha$恒等矩阵的秩至少为 $n-1$）。

例如，矩阵

$$C((x-1)^3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{pmatrix}$$

不能表示为 $T+N$，其中 T是一个挠矩阵，且 $N^2=0$。

不过，当我们关注素特征域时，可以部分解决这个问题。设 $\mathbb{F}$ 为一个素特征域 p，并用$\mathbb{F}_p$ 表示其基域。

引理 2.7. 设 $n \geq 2$。若 $\mathbb{F}$ 是特征为 p 的域，并且我们固定 $k \geq 1$，那么对于每个秩大于或等于 $\frac{n}{k}$ 且元素在 $\mathbb{F}_p$ 上代数的矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，都存在一个满足 $N^k = 0$ 的矩阵 N，使得 $A - N$ 是一个挠矩阵。

证明。由基域 $\mathbb{F}_p$ 和矩阵 A 的元素生成的 $\mathbb{F}$ 的子域 $\mathbb{K}$ 是一个有限域，并且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$。应用定理 2.1 将 A 分解为$U + N$，其中 $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 可逆，而 $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 满足 $N^k = 0$。由于 U 是有限域上的可逆矩阵，可逆等价于为挠矩阵。证毕。□

矩阵 A 的元素所满足的条件可以转化为该矩阵的特征多项式的系数所满足的条件。若一个多项式的所有系数都在 $\mathbb{F}_p$ 上代数，则称该多项式在 $\mathbb{F}_p$ 上代数。

定理 2.8. 设 $\mathbb{F}$ 是特征为 p 的域，固定幂零指数 $k \geq 1$，并设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 的秩大于或等于 $\frac{n}{k}$。若 A 的特征多项式在 $\mathbb{F}_p$ 上代数，则 A 可写成 $T + N$，其中 T 是挠矩阵，且 $N^k = 0$。特别地，对于秩大于或等于 $\frac{n}{k}$ 的幂零矩阵，这种分解总是成立。

证明。考虑 A 的初等有理标准形 C，其特征多项式在 $\mathbb{F}_p$ 上代数。C 的特征值（即该特征多项式在 $\mathbb{F}$ 的某个扩域中的根）在 $\mathbb{F}_p$ 上代数，因此 A 的所有初等因子都是 $\mathbb{F}_p$ 上的代数多项式。由此，C 的所有元素都在 $\mathbb{F}_p$ 上代数，因此可应用引理 2.7 得证。□

开放问题 1：给定一个固定的幂零指数 $k \geq 1$，为如何将零特征域上的任意矩阵分解为一个挠矩阵与一个幂零指数为 $\leq k$ 的幂零矩阵之和，寻找一个合适的判据。

在下一节中，我们将针对 $k \leq 2$ 以及秩至少为 $\frac{n}{2}$ 的幂零矩阵回答这个问题。由于我们的论证相当技术化，我们将秩至少为 $\frac{n}{k}$ 的幂零矩阵能否分解为挠矩阵与幂零指数小于或等于 k 的幂零矩阵之和这一问题留作开放问题。

3. Decomposing Nilpotent Matrices Into a Sum of Torsion and Square-Zero Matrices

本节旨在证明：对于任意域 $\mathbb{F}$，在$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 中，任何秩至少为 $\frac{n}{2}$ 的幂零矩阵都可以分解为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵之和。回顾一下，每个幂零矩阵都相似于其若尔当块的直和——这些若尔当块的特征值均为 0。

与上一节一样，主要困难出现在处理大小为 1 的若尔当块时。秩条件保证它们总能与更大的若尔当块合并。下面考虑两个例子。

例3.1. 设 A 为幂零矩阵

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0 \end{array}\right),$$

它是可分解为若尔当块的最小幂零矩阵，其中包含一个大小为 1 的若尔当块，且秩 A 大于或等于 $\frac{n}{2}$ $(n=4)$。定义

$$N=\begin{pmatrix} 0&1&0&-1\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

并令 $T=A-N$。那么 $N^2=0$，且 T的特征多项式为 x^4-1，因此 $A=T+N$，其中 $T^4=$为恒等矩阵，且 $N^2=0$。

例3.2。在某些情况下，需要将多个大小为 1 的若尔当块与一个较大的若尔当块合并。例如，考虑

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cc} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right),$$

它同样是按若尔当块表示的最小幂零矩阵，其中有两个大小为 1 的块，并且满足秩$(A)\ \geq\ \frac{n}{2}$ $(n\ =\ 6$ 此处)。考虑平方为零矩阵

$$N=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&-1\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-1&0 \end{pmatrix}.$$

那么 $T=A-N$的特征多项式为 x^6-1，因此 $A=T+N$，其中$T^6=$为恒等矩阵，且 $N^2=0$。

上述平方为零矩阵的构造取决于我们需要将多少个大小为 1 的若尔当块与一个较大的若尔当块组合。令 s 为大小为 1 的若尔当块的数量（回忆一下，秩的条件要求 $2(s+1)\ \leq\ n$）。 N 的构造还取决于一个特定参数，称为 r，该参数必须满足 $1+2s+r<n$，且在上述示例中其值为零。利用这些要素，我们将定义一个称为$N_{s,\ r}$ 的平方为零矩阵族，以及一个记作 $N'_{s,\ r}$的辅助平方为零矩阵族。

定义 3.3. 设 $s,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，满足 $2(s+1)\leq n$ 和 $1+2s+r<n$。设 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 为由单个若尔当块组成的幂零矩阵，并且包含 s 个大小为 1 的若尔当块（注意，条件 $2(s+1)\leq n$ 等价于 A 的秩大于或等于 $\frac{n}{2}$）。定义矩阵

$$\begin{aligned}
N_{0,r} &:= -e_{1,n},\\
N_{s,r} &:= \sum_{i=n-2s-r}^{n-s-r-2}(e_{i+1,i}+e_{i+1+s+r+1,i})+e_{1,n-s-r-1}\\
&\quad -\sum_{i=n-s}^{n-1}(e_{i+1,i}+e_{i+1-s-r-1,i})-e_{1,n},\ \text{if } s\geq 1,\\
N'_{0,r} &:= -e_{1,n},\\
N'_{s,r} &:= Q_{n-2s-r,n-s-r-1}N_{s,r}Q_{n-2s-r,n-s-r-1}=\\
&= \sum_{i=n-2s-r}^{n-s-r-2}(e_{i+1,i}-e_{i+1+s+r+1,i})-e_{1,n-s-r-1}\\
&\quad -\sum_{i=n-s}^{n-1}(e_{i+1,i}-e_{i+1-s-r-1,i})-e_{1,n},\ \text{if } s\geq 1,\\
T_{s,r} &:= A-N_{s,r},\ \text{for } s\geq 0,\\
T'_{s,r} &:= A-N'_{s,r}\ \text{for } s\geq 0.
\end{aligned}$$

现在我们将证明矩阵 $N_{s,\ r}$ 和 $N'_{s,\ r}$ 都是平方为零的矩阵。让我们回顾一下 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 的初等矩阵：

$$\begin{aligned}
&P_{i,j}(t) := \mathrm{Id}+te_{i,j},\ t\in\mathbb{F}.\\
&P_{i,j} := \mathrm{Id}+e_{i,j}+e_{j,i}-e_{i,i}-e_{j,j}\\
&Q_i(s) = \mathrm{Id}+(s-1)e_{i,i},\ 0\neq s\in\mathbb{F}.
\end{aligned}$$

它们全部可逆，其逆矩阵分别为 $(P_{i,\ j}(t))^{-1}=P_{i,\ j}(-t)$、$(P_{i,\ j})^{-1}=P_{i,\ j}$ 以及 $(Q_i(s))^{-1}=Q_i(1/s)$。定义 $Q_{i,\ j}:=\sum_{r=i}^{j}Q_r(-1)$。

命题 3.4。设 $\mathbb{F}$ 为域，取 $n\in\mathbb{N}$ 和 $s,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，使得 $2(s+1)\leq n$ 且 $1+2s+r<n$。那么，$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 中的矩阵 $N_{s,\ r}$ 和 $N'_{s,\ r}$ 都是幂零指数为 2 的幂零矩阵。

证明。在此证明中，我们将矩阵与作用于 $\mathbb{F}^n$ 的典范基 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 上的端同态对应起来。显然 $N_{0,\ r}^2=(N'_{0,\ r})^2=0$。设 $s\geq 1$，并将矩阵 $N_{s,\ r}$ 记为 N。对于任意 $i=1\dots,n$，我们有：

（1）如果 $i=1,\dots,n-2s-r-1$, $N(e_i)=0$,

（2）如果 $i=n-2s-r$、…、$n-s-r-2$、$N(e_i)=e_{i+1}+e_{i+1+s+r+1}$,

（3）$N(e_{n-s-r-1})=e_1$,

（4）如果 $i=n-s-r$、…、$n-s-1$、$N(e_i)=0$,

（5）如果 $i=n-s,\ \dots,\ n-1$, $N(e_i)=-e_{i+1}-e_{i+1-s-r-1}$,

（6）$N(e_n)=-e_1$

因此，N 的像由以下元素张成

$$\{e_1\}\cup\{e_{n-2s-r+1}+e_{n-s+2},\dots,e_{n-s-r-1}+e_n\}\cup\{e_{n-s+1}+e_{n-2s-r},\dots,e_n+e_{n-s-r-1}\},$$

也就是说， N 的像是由以下元素生成的子空间

$$S = \{e_1\} \cup \{e_{n-s+i} + e_{n-2s-r-1+i} \quad | \quad i = 1, \dots, s\}.$$

我们来证明 $N(S) = 0$。显然， $N(e_1) = 0$；此外，若 $i = 1, \dots, s-1$，则有

$$N(e_{n-s+i} + e_{n-2s-r-1+i}) =$$
$$= -e_{n-s+i+1} - e_{n-2s-r+i} + e_{n-2s-r+i} + e_{n-s+i+1} = 0$$

且 $N(e_n + e_{n-s-r-1}) = -e_1 + e_1 = 0$。因此， $N^2 = 0$。

由于矩阵 $Q_{n-2s-r,n-s-r-1}$ 满足 $Q^2_{n-2s-r,n-s-r-1} = \mathrm{Id}$，我们推得 $N'_{s,r}$ 也是平方为零矩阵，正如所需。□

在定理 3.10 中，我们将计算以下矩阵的特征多项式

$$T_{s,r} := A - N_{s,r} \quad \text{and} \quad T'_{s,r} := A - N'_{s,r},$$

这些矩阵定义于 3.3。由于特征多项式在相似变换下不变，我们的论证将分有限步通过相似变换，把矩阵 $T_{s,r}$ 和 $T'_{s,r}$ 化为形如 $T_{s',r'}$ 或 $T'_{s',r'}$ 的矩阵，其中 $s' = 0$ 为 1 或 2。我们将先证明两个递降引理。在每个递降引理中，我们将把 $T_{s,r}$ 或 $T'_{s,r}$ 的第一个下标减小三，并把第二个下标增大三。之后，只需明确计算矩阵 $T_{s',r'}$ 和 $T'_{s',r'}$的特征多项式，其中 $s' = 0$ 为 1 或 2。

引理 3.5（从 $T_{s,\ r}$ 到 $T'_{s-3,\ r+3}$）。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个幂零矩阵，由一个秩大于或等于 $\frac{n}{2}$ 的若尔当块和 s 个大小为 1 的若尔当块组成。假设 $s \geq 3$，并令 $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 $1 + 2s + r < n$。令 $T_{s,\ r}$ 和 $T'_{s,\ r}$ 为 3.3 中定义的矩阵。则矩阵 $T_{s,\ r}$ 与矩阵 $T'_{s-3,\ r+3}$ 相似。

证明。对于 $v = s + r + 1$ 和

$$T_1 := P_{n-s+3,n-s+3-v}(-1) \cdot T_{s,r} \cdot P_{n-s+3,n-s+3-v}(1)$$
$$T_2 := P_{n-s+2,n-s+2-v} \cdot T_1 \cdot P_{n-s+2,n-s+2-v}$$
$$T_3 := P_{n-s+1-v,n-s+1}(-1) \cdot T_2 \cdot P_{n-s+1-v,n-s+1}(1),$$
$$T_4 := Q_{n-s+2-v,n-s+2} \cdot T_3 \cdot Q_{n-s+2-v,n-s+2},$$

我们将证明 $T_4 = T'_{s-\quad 3,r+3}$.

在整个证明过程中，我们将矩阵视为作用于 $\mathbb{F}^n$ 的典范基上的端同态。我们用 P 表示以下矩阵

$$P := P_{n-s+3,n-s+3-v}(1) \cdot P_{n-s+2,n-s+2-v} \cdot P_{n-s+1-v,n-s+1}(1) \cdot Q_{n-s+2-v,n+r+3-v}.$$

有了这些记号，我们得到 $T_4 = P^{-1}T_{s\quad\quad\quad,r}P$. 我们来计算 $P(e_i)$, $i = 1, \dots, n$:

$$P(e_i) = e_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, n-s-v,$$
$$P(e_{n-s-v+1}) = e_{n-s-v+1},$$
$$P(e_{n-s-v+2}) = -e_{n-s+2},$$
$$P(e_{n-s-v+3}) = -e_{n-s-v+3} - e_{n-s+3},$$
$$P(e_i) = -e_i \text{ for } i = n-s-v+4, \dots, n-v \quad (\text{if } n-s-v+4 \leq n-v),$$
$$P(e_i) = -e_i \text{ for } i = n-v+1, \dots, n-s-1 \quad (\text{if } n-v+1 \leq n-s-1),$$
$$P(e_{n-s}) = -e_{n-s} \quad (\text{if } s \neq 3),$$
$$P(e_{n-s+1}) = -e_{n-s+1} - e_{n-s+1-v},$$

$P(e_{n-s+2}) = -e_{n-s+2-v}$ and
$P(e_i) = e_i$ for $i = n-s+3, \ldots, n$.

我们来看看 $T_4 = P^{-1}T_{s,\ r}P$ 如何作用于典范基：为此，我们根据 $T'_{s-3,\ r+3}$ 的定义，将集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 划分为以下几个子集：

$$\Delta'_1 := \{1, \ldots, n-s-v+3\} \quad \Delta'_2 := \{n-s-v+4, \ldots, n-v-1\}$$
$$\Delta'_3 := \{n-v, \text{ if } s \neq 3\} \quad \Delta'_4 := \{n-v+1, \ldots, n-s+2\}$$
$$\Delta'_5 := \{n-s+3, \ldots, n-1\} \quad \Delta'_6 := \{n\}$$

（注意，如果 $s = 3$，那么 $\Delta'_2 = \emptyset$、$\Delta'_3 = \emptyset$ 和 $\Delta'_5 = \emptyset$；而如果 $s = 4$，那么 $\Delta'_2 = \emptyset$。）

- T_4 作用于 Δ'_1 中的元素：
  (1) $T_4(e_i) = P^{-1}T_{s,r}P(e_i) = P^{-1}T_{s,r}(e_i) = P^{-1}(e_{i+1}) = e_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n-s-v$,
  (2) $T_4(e_{n-s-v+1}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s-v+1}) = P^{-1}T_{s,r}(e_{n-s-v+1}) = P^{-1}(-e_{n-s+2}) = e_{n-s-v+2}$,
  (3) $T_4(e_{n-s-v+2}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s-v+2}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-s+2}) = P^{-1}(-e_{n-s+3} - e_{n-s-v+3}) = e_{n-s-v+3}$,
  (4) $T_4(e_{n-s-v+3}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s-v+3}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-s+3} - e_{n-s-v+3}) = P^{-1}(-e_{n-s+4} - e_{n-s-v+4} + e_{n-s+4}) = P^{-1}(-e_{n-s-v+4}) = e_{n-s-v+4}$.
- T_4 作用于 Δ'_2 中的元素（当 $\Delta'_2 \neq \emptyset$ 时）：
  (5) $T_4(e_i) = P^{-1}T_{s,r}P(e_i) = P^{-1}T_{s,r}(-e_i) = P^{-1}(e_{i+1+v}) = e_{i+1+v}$ for $i = n-s-v+4, \ldots, n-v-1$.
- T_4 作用于 Δ'_3 中的元素（当 $\Delta'_3 \neq \emptyset$ 时）：
  (6) $T_4(e_{n-v}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-v}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-v}) = P^{-1}(e_1 - e_{n-v+1}) = e_1 + e_{n-v+1}$.
- T_4 作用于 Δ'_4 中的元素：
  (7) $T_4(e_i) = P^{-1}T_{s,r}P(e_i) = P^{-1}T_{s,r}(-e_i) = P^{-1}(-e_{i+1}) = e_{i+1}$ for $i = n-v+1, \ldots, n-s-1$,
  (8) $T_4(e_{n-s}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-s}) = P^{-1}(-e_{n-s+1} - e_{n-s+1-v}) = e_{n-s+1}$,
  (9) $T_4(e_{n-s+1}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s+1}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-s+1} - e_{n-s+1-v}) = P^{-1}(-e_{n-s+2} - e_{n-s+2-v} + e_{n-s+2}) = P^{-1}(-e_{n-s+2-v}) = e_{n-s+2}$,
  (10) $T_4(e_{n-s+2}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s+2}) = P^{-1}T_{s,r}(-e_{n-s+2-v}) = P^{-1}(e_{n-s+3}) = e_{n-s+3}$.
- T_4 作用于 Δ'_5 中的元素（当 $\Delta'_5 \neq \emptyset$ 时）：
  (11) $T_4(e_{n-s+3}) = P^{-1}T_{s,r}P(e_{n-s+3}) = P^{-1}T_{s,r}(e_{n-s+3}) = P^{-1}(e_{n-s+4} + e_{n-s+4-v}) = e_{n-s+4} - e_{n-s+4-v}$,
  (12) $T_4(e_i) = P^{-1}T_{s,r}P(e_i) = P^{-1}T_{s,r}(e_i) = P^{-1}(e_{i+1} + e_{i+1-v}) = e'_{i+1} - e'_{i+1-v}$ for $i = n-s+4, \ldots, n-1$.
- T_4 作用于 Δ'_6 中的元素：
  (13) $T_4(e_n) = P^{-1}T_{s,r}P(e_n) = P^{-1}T_{s,r}(e_n) = P^{-1}(e_1) = e_1$,

这证明 $T_4 = P^{-1}T_{s,\ r}P$ 在典范基上的作用方式与 $T'_{s-3,\ r+3}$ 相同，因此 $T_4 = T'_{s-3,\ r+3}$。□

按照上述证明中的相同论证，我们还可以得到以下下降引理。

引理 3.6（从 $T'_{s,r}$ 到 $T_{s-3,r+3}$）。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个由单个若尔当块（其秩大于或等于 $\frac{n}{2}$）和 s 个大小为 1 的若尔当块组成的幂零矩阵。假设 $s \geq 3$，并令 $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 $1 + 2s + r < n$。令 $T_{s,r}$ 和 $T'_{s,r}$ 为 3.3 中定义的矩阵。则矩阵 $T'_{s,r}$ 与矩阵 $T_{s-3,r+3}$ 相似。事实上，如果 $v = s + r + 1$ 且

$$\begin{aligned}
T'_1 &:= P_{n-s+3,n-s+3-v}(1) \cdot T'_{s,r} \cdot P_{n-s+3,n-s+3-v}(-1) \\
T'_2 &:= P_{n-s+2,n-s+2-v} \cdot T'_1 \cdot P_{n-s+2,n-s+2-v} \\
T'_3 &:= P_{n-s+1-v,n-s+1}(1) \cdot T'_2 \cdot P_{n-s+1-v,n-s+1}(-1), \\
T'_4 &:= Q_{n-v-s+3,n-s+1} \cdot T'_3 \cdot Q_{n-v-s+3,n-s+1},
\end{aligned}$$

我们得到 $T'_4 = T_{s-3,\ r+3}$。

在这两个递降引理之后，我们来计算 $T_{s,\ r}$ 和 $T'_{s,\ r}$ 在 $s = 0$ 为 1 或 2 时的特征多项式。

注 3.7（情形 $s = 0$）。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个幂零矩阵，由一个秩大于或等于 $\frac{n}{2}$ 的若尔当块构成，且没有大小为 1 的若尔当块（$s = 0$）。对于任意 $r < n - 1$，有 $T_{0,\ r} = T'_{0,\ r} = \sum_{t=1}^{n-1} e_{t+1,\ t} + e_{1,\ n}$，其特征多项式恰为 $x^n - 1$。

引理 3.8（情形 $s = 1$）。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个幂零矩阵，由一个秩大于或等于 $\frac{n}{2}$ 的若尔当块以及一个大小为 1 的若尔当块构成。设 $r \geq 0$ 满足 $r + 3 < n$。考虑矩阵 $T_{1,\ r} = A - N_{1,\ r}$ 和 $T'_{1,\ r} = A - N'_{1,\ r}$。那么，其特征多项式为

- $p_{T_{1,r}}(x) = x^n + x^{r+2} - x^{n-r-2} - 1 = (x^{r+2} - 1)(x^{n-r-2} + 1)$
- $p_{T'_{1,r}}(x) = x^n - x^{r+2} + x^{n-r-2} - 1 = (x^{r+2} + 1)(x^{n-r-2} - 1)$.

证明。我们将用到以下一般性说明：假设我们要计算一个如下形式的矩阵的行列式

$$B = \begin{pmatrix}
x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
-1 & x & \cdots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & x & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -1 & x
\end{pmatrix} + a\, e_{i,j}$$

其中，a 是位置（i，j）处的非零元素，$j > i$。如果在左侧将 B 乘以$P_{i,\ j+1}$（我们将第 $j + 1$ 行乘以 a后加到第 i 行），就得到一个新矩阵，该矩阵在位置（i，j）处为零，并且在位置（i，$j + 1$）处为 ax。由于

$|P_{i,\ j+1}(a)|=1$ 我们得到

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & x & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} + a\,e_{i,j}\right) =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & x & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} + ax\,e_{i,j+1}\right)$$

即，在计算 B 的行列式时，位置 (i,j),$j>i$ 处的非零元素可以通过每一步乘以 x 移至右侧。

根据类似的论证，在右侧乘以初等矩阵 $B\ P_{i-1,j}(a)$（将第 $i-1$ 列乘以 a 后加到第 j 列），我们也有

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & x & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} + a\,e_{i,j}\right) =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & x & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} + ax\,e_{i-1,j}\right)$$

即，在计算 B 的行列式时，位置 (i,j),$j>i$ 处的非零元素可以通过每一步乘以 x 向上移至位置 $(i-1,j)$。

注意到

$$T_{1,r}=\sum_{t=1}^{n-1} e_{t+1,t}+e_{1,n}+e_{n-r-2,n-1}-e_{1,n-r-2}.$$

将上述论证应用于矩阵 x恒等矩阵 $-T_{1,\ r}$ 的行列式，我们可以将位置 $(n-r-2,n-1)$ 处的非零元素移至位置 $(1,n)$，得到 $-x^{n-r-2}$；还可以将位置 $(1,n-r-2)$ 处的非零元素移至位置 $(1,n)$，得到 x^{r+2}，最终得到一个具有如下形式的矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x^{n-r-2}+x^{r+2}-1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}.$$

最后，通过沿第一行对行列式作拉普拉斯展开，我们得到 $T_{1,\ r}$ 的特征多项式由 $x^n - x^{n-r-2} + x^{r+2} - 1$ 给出。

同理，由于

$$T'_{1,r} = \sum_{t=1}^{n-1} e_{t+1,t} + e_{1,n} - e_{n-r-2,n-1} + e_{1,n-r-2},$$

其特征多项式为 $x^n + x^{n-r-2} - x^{r+2} - 1$。 □

我们继续研究下一个技术断言。

引理 3.9（情形 $s = 2$）。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个幂零矩阵，由一个秩大于或等于 $\frac{n}{2}$ 的若尔当块和两个大小为 1 的若尔当块组成。设 $r \geq 0$ 满足 $r + 5 < n$。考虑矩阵 $T_{2,\ r} = A - N_{2,\ r}$ 和 $T'_{2,\ r} = A - N'_{2,\ r}$。那么，特征多项式为

- $p_{T_{2,r}}(x) = x^n + x^{r+3} - x^{n-r-3} - 1 = (x^{n-r-3}+1)(x^{r+3}-1)$
- $p_{T'_{2,r}}(x) = x^n - x^{r+3} + x^{n-r-3} - 1 = (x^{n-r-3}-1)(x^{r+3}+1)$.

证明。设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的典范基。设

$$P := P_{n,n-r-3} \cdot Q_{n-r-3,n-r-3}$$

并考虑新基

$$\{e'_i, \mid i = 1, \ldots, n\}, \text{ where each } e'_i := P(e_i).$$

这个新基只是对典范基重新排序，并将其中一个向量变号：

$$\{e'_i, \mid i = 1, \ldots, n\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-r-4}, -e_n\} \cup \{e_{n-r-3}, \ldots, e_{n-1}\}.$$

回忆一下，

$$T_{2,r} = \sum_{t=1}^{n-r-5} e_{t+1,t} - e_{n,n-r-4} + e_{1,n} + \sum_{t=n-r-3}^{n-1} e_{t+1,t} - e_{1,n-r-3} + e_{n-r-4,n-2} + e_{n-r-1,n-1}.$$

那么，矩阵 $P^{-1} \cdot T_{2,\ r} \cdot P$ 具有如下形式

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

其特征多项式与 $T_{2,\ r}$ 的特征多项式相同，是两个对角块的特征多项式之积，即恰为 $(x^{n-r-3}+1)(x^{r+3}-1)$。

类似地，若我们考虑 $P' := P_{n,\ n-r-3} \cdot Q_{n,\ n}$ 以及新基

$$\{e_i'',\mid i=1,\dots,n\},\ \text{where each } e_i'' := P'(e_i),$$

那么，

$$\{e_i'',\mid i=1,\dots,n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-r-4}, e_n\} \cup \{e_{n-r-3}, \dots, -e_{n-1}\}.$$

因此，矩阵 $(P')^{-1} \cdot T'_{2,\ r} \cdot P'$ 具有如下形式

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

其特征多项式与 $T'_{2,\ r}$ 的特征多项式相同，是两个对角块的特征多项式之积，即恰为 $(x^{n-r-3}-1)(x^{r+3}+1)$. □

由此得到以下结果，其中我们计算矩阵 $T_{s,\ r} = A - N_{s,\ r}$ 和 $T'_{s,\ r} = A - N'_{s,\ r}$ 的特征多项式。它们取决于 s 模 3 的等价类。

定理 3.10. 设 $\mathbb{F}$ 为域，$n \in \mathbb{N}$，且 $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 $2(s+1) \le n$。设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 为一个由单个若尔当块和 s 个大小为 1 的若尔当块组成的幂零矩阵。那么，

(1) 如果 $s = 3\alpha$ 对某个 $\alpha \ge 0$ 成立，并且我们取任意满足 $1+2s+r < n$ 的 r，那么 $T_{s,\ r} = A - N_{s,\ r}$ 的特征多项式为

$$p_{T_{3\alpha,r}}(x) = x^n - 1.$$

(2.1) 如果 $s=3\alpha+1$ 对某个偶数 $\alpha\geq 0$ 成立，并且我们取任意满足 $1+2s+r<n$ 的 r，那么 $T_{s,\ r}=A-N_{s,\ r}$ 的特征多项式为

$$p_{T_{3\alpha+1,r}}(x)=p_{T_{1,r+3\alpha}}(x)=(x^{r+3\alpha+2}-1)(x^{n-r-3\alpha-2}+1),$$

且 $T'_{s,r}=A-N'_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T'_{3\alpha+1,r}}(x)=p_{T'_{1,r+3\alpha}}(x)=(x^{r+3\alpha+2}+1)(x^{n-r-3\alpha-2}-1).$$

(2.2) 若 $s=3\alpha+1$ 对某个奇数 $\alpha\geq 1$ 成立，并取任意满足 $1+2s+r<n$ 的 r，则 $T_{s,r}=A-N_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T_{3\alpha+1,r}}(x)=p_{T'_{1,r+3\alpha}}(x)=(x^{r+3\alpha+2}+1)(x^{n-r-3\alpha-2}-1),$$

且 $T'_{s,r}=A-N'_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T'_{3\alpha+1,r}}(x)=p_{T_{1,r+3\alpha}}(x)=(x^{r+3\alpha+2}-1)(x^{n-r-3\alpha-2}+1).$$

(3.1) 若 $s=3\alpha+2$ 对某个偶数 $\alpha\geq 0$ 成立，并取任意满足 $1+2s+r<n$ 的 r，则 $T_{s,r}=A-N_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T_{3\alpha+2,r}}(x)=p_{T_{2,r+3\alpha}}(x)=(x^{n-r-3\alpha-3}+1)(x^{r+3\alpha+3}-1),$$

且 $T'_{s,r}=A-N'_{s,r}$ 的特征多项式为

$$P_{T'_{3\alpha+2,r}}(x)=p_{T'_{2,r+3\alpha}}(x)=(x^{n-r-3\alpha-3}-1)(x^{r+3\alpha+3}+1).$$

(3.2) 若对于某个奇数 $s=3\alpha+2$ $\alpha\geq 0$，并取任意满足 $1+2s+r<n$ 的 r，则 $T_{s,\ r}=A-N_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T_{3\alpha+2,r}}(x)=p_{T'_{2,r+3\alpha}}(x)=(x^{n-r-3\alpha-3}-1)(x^{r+3\alpha+3}+1),$$

$T'_{s,r}=A-N'_{s,r}$ 的特征多项式为

$$p_{T'_{3\alpha+2,r}}(x)=p_{T_{2,r+3\alpha}}(x)=(x^{n-r-3\alpha-3}+1)(x^{r+3\alpha+3}-1).$$

证明。注意，条件 $2(s+1)\leq n$ 等价于 A 的秩大于或等于 $\frac{n}{2}$。

(1) 假设对于某个 $\alpha\geq 0$， $s=3\alpha$。考虑 $T_{3\alpha,r}=A-N_{3\alpha,r}$。若$\alpha\geq 1$，将引理 3.5 应用于 $T_{3\alpha,r}$，可得到矩阵 $T'_{3(\alpha-1),r+3}$，它与 $T_{3\alpha,r}$ 相似。若 $\alpha-1\geq 1$，则使用引理 3.6 得到另一个相似矩阵$T_{3(\alpha-2),r+6}$；重复这一过程，经过 α 步后，我们最终将得到 $T_{0,r+3\alpha}$ 或 $T'_{0,r+3\alpha}$，它们都等于矩阵 $\sum_{t=1}^{n-1}e_{t+1,t}+e_{1,n}$（见注 3.7），其特征多项式为 x^n-1。因此，$T_{s,r}$ 的特征多项式为 x^n-1。

(2.1) 假设对于某个偶数 $\alpha\geq 0$， $s=3\alpha+1$。考虑 $T_{s,\ r}$。若 $\alpha>1$，如同 (1) 中那样，我们可以多次应用引理 3.5 和引理 3.6，经过 α 步得到一个相似矩阵 $T_{1,\ r+3\alpha}$；因此，$T_{s,\ r}$ 的特征多项式与 $T_{1,\ r+3\alpha}$ 的特征多项式相同。根据引理 3.8，该特征多项式为 ($x^{r+3\alpha+2}-1$)($x^{n-r-3\alpha-2}+1$)。类似地，若从 $T'_{s,\ r}$ 开始并依次应用引理 3.6 和引理 3.5，则经过 α 步最终得到相似矩阵 $T'_{1,\ r+3\alpha}$，根据引理 3.8，其特征多项式为 ($x^{r+3\alpha+2}+1$)($x^{n-r-3\alpha-2}-1$)。

(2.2) 假设对于某个奇数 $\alpha\geq 1$，有 $s=3\alpha+1$。如果我们从 $T_{s,\ r}$ 开始，并应用引理 3.5 和 3.6，那么经过 α 步后，最终将得到相似矩阵 $T'_{1,\ r+3\alpha}$；如果从 $T'_{s,\ r}$ 开始，则最终将得到 $T_{1,\ r+3\alpha}$。

考虑到引理 3.9 中计算得到的 $T_{2,r+3\alpha}$ 和 $T'_{2,r+3\alpha}$ 的特征多项式，(3.1) 和 (3.2) 可由上述 (1)、(2.1) 和 (2.2) 得出。□

由此我们推导出三个重要结论：

推论 3.11. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，假设 $n \in \mathbb{N}$ 为偶数，并令 $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$满足 2$(s+1) \leq n$。设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个仅由一个若尔当块和 s 个大小为 1 的若尔当块构成的幂零矩阵。若取 $r = \frac{n}{2} - s - 1$，则 $T_{s,r} = A - N_{s,r}$ 的特征多项式与$T'_{s,r} = A - N_{s,r}$的特征多项式相同，且它们为 $x^n - 1$。特别地，$T^n_{s,r}$ =恒等矩阵，因此 A可分解为挠矩阵 $T_{s,r}$ 与平方为零矩阵 $N_{s,r}$之和。

证明。若 $s \equiv_3 0$，则对于任意满足 $1 + 2s + r < n$ 的 r，$T_{s,r}$ 的特征多项式总是 $x^n - 1$；取 $r = \frac{n}{2} - s - 1$时也同样成立。

若 $s \equiv_3 1$ 或 $s \equiv_3 2$，并取 $r = \frac{n}{2} - s - 1$，则可得 $T_{s,r}$ 的特征多项式为 $(x^{\frac{n}{2}} - 1)(x^{\frac{n}{2}} + 1) = x^n - 1$。□

推论 3.12。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，假设 $n \in \mathbb{N}$ 为奇数，并取满足 2$(s+1) \leq n$ 的 $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是由单个若尔当块构成的幂零矩阵，且 s 个大小为 1 的若尔当块。

(1) 若 $s \equiv_3 0$，并且我们取任意满足 $1 + 2s + r < n$ 的 r，那么存在 $N_{s、r}$，使得 $T_{s、r} = A - N_{s、r}$ 的特征多项式为 $x^n - 1$。 (2) 若 $s \equiv_3 1$ 或 $s \equiv_3 2$，且：(a) 若 $n = 4m + 1$，α 为偶数，$s = 3\alpha + 1$ 或 $s = 3\alpha + 2$，并且我们取 $r = 2m - s$，那么存在 $N_{s、r}$，使得 $T_{s、r} = A - N_{s、r}$ 的特征多项式为 $(x^{2m} + 1)(x^{2m+1} - 1)$；(b) 若 $n = 4m + 1$，α 为奇数，$s = 3\alpha + 1$ 或 $s = 3\alpha + 2$，并且我们取 $r = 2m - s$，那么存在 $N'_{s、r}$，使得 $T'_{s、r} = A - N'_{s、r}$ 的特征多项式为 $(x^{2m} + 1)(x^{2m+1} - 1)$；(c) 若 $n = 4m + 3$，α 为偶数，$s = 3\alpha + 1$ 或 $s = 3\alpha + 2$，并且我们取 $r = 2m - s$，那么存在 $N_{s、r}$，使得 $T_{s、r} = A - N_{s、r}$ 的特征多项式为 $(x^{2m+2} + 1)(x^{2m+1} - 1)$；(d) 若 $n = 4m + 3$，α 为奇数，$s = 3\alpha + 1$ 或 $s = 3\alpha + 2$，并且我们取 $r = 2m - s$，那么存在 $N'_{s、r}$，使得 $T'_{s、r} = A - N'_{s、r}$ 的特征多项式为 $(x^{2m+2} + 1)(x^{2m+1} - 1)$。

证明。由定理 3.10 可直接得出。 □

推论 3.13。设 $\mathbb{F}$ 是一个零特征域，假设 $n \in \mathbb{N}$ 为奇数，并令 $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 2$(s+1) \leq n$。设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是一个仅由一个若尔当块和 s 个大小为 1 的若尔当块组成的幂零矩阵。则存在平方为零矩阵 N 和 $d \geq 1$，使得 $(A - N)^d =$ 恒等矩阵，即 A 可分解为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵之和。

证明。沿用上述推论中的各个情形，可得：

- 若属于情形 (1)，取 $N = N_{s,r}$ 和 $d = n$；显然 $(A - N)^n =$ 恒等矩阵；- 若属于情形 (2)(a)，取 $r = 2m - s$ 和 $N = N_{s,r}$；那么，如果 $d = lcm(4m, 2m+1)$，我们得到 $(A-N)^d =$ 恒等矩阵，因为多项式 $x^{2m}+1$和 $x^{2m+1} - 1$ 没有公共根，所以矩阵 $A - N$有 n 个不同的特征值（在 $\mathbb{F}$的代数闭包中），它们全都是单位根 ξ，且满足$\xi^{4m} = 1$ 或 $\xi^{2m+1} = 1$；- 若属于情形 (2)(b)，取 $r = 2m - s$ 和 $N = N'_{s,r}$；那么，如果 $d = lcm(4m, 2m + 1)$，仿照情形 (2)(a) 的论证，我们得到 $(A - N)^d =$ 恒等矩阵；

- 若属于情形 (2)(c)，取 $r = 2m - s$ 和 $N = N_{s,r}$；那么，如果 $d = lcm(4m + 2, 2m + 1)$，仿照情形 (2)(a) 的论证，我们得到 $(A - N)^d =$ 恒等矩阵；- 若属于情形 (2)(d)，取 $r = 2m - s$ 和 $N = N'_{s,r}$；那么，如果 $d = lcm(4m + 2, 2m + 1)$，仿照情形 (2)(a) 的论证，我们得到 $(A - N)^d =$ 恒等矩阵。

□

现在，我们已经具备了证明本节主要结果所需的一切条件。

定理 3.14. $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 中任意幂零矩阵都可以表示为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵之和，当且仅当其秩至少为 $\frac{n}{2}$。

证明. 根据上述定理 2.1，将 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 表示为和 $T + N$（其中 T 是一个挠矩阵，且 $N^2 = 0$）的必要条件是 A 的秩大于或等于 $\frac{n}{2}$，因为挠矩阵必须可逆。反过来，为证明充分性，假设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 的秩不小于 $\frac{n}{2}$。

若 $\mathbb{F}$ 是素特征域，则结论由上述推论 2.8 得出。以下设 $\mathbb{F}$ 是零特征域。根据任意幂零矩阵的主有理标准分解，不失一般性，可假设 A 是其若尔当块的直和。

如果 A 仅包含大小为 $r > 1$ 的若尔当块，则每个块都可以分别按以下方式分解

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

其中，第一个矩阵是挠矩阵，第二个矩阵是平方为零矩阵。

否则，由于 A 的秩大于或等于 $\frac{n}{2}$，我们可以对矩阵 A 的各个块重新排序——这恰好对应于对 A 的初等因子重新排序——如下所示：每个大小为 $r > 1$ 的若尔当块之后接上 $s\,(s \leq r - 2)$ 个大小为 1 的块。若 $r + s$ 为偶数，则根据推论 3.11，大小为 $r + s$ 的组合块可以分解为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵之和。然而，若 $r + s$ 为奇数，则显然，根据推论 3.13，大小为 $r + s$ 的组合块可以分解为一个挠矩阵与一个平方为零矩阵之和。□

下面的评论有助于说明，上述定理在更一般的情形下也在某种程度上成立。

注 3.15. 众所周知（例如，参见 [10], [16] 或 [17]），除环上的每个幂零矩阵仍与其若尔当标准形相似，也就是说，它与若干若尔当块的直和相似，且这些若尔当块都对应于 0。因此，定理 3.14 对除环上的幂零矩阵仍然成立。

上述结果引出了以下问题：

开放问题 2：给定固定的幂零指数 $k \geq 2$，$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 中的任意幂零矩阵是否都能写成一个挠矩阵与一个幂零指数小于或等于 k 的幂零矩阵之和，当且仅当其秩至少为 $\frac{n}{k}$？

资助：第一作者 Peter V. Danchev 获得保加利亚国家科学基金的部分资助，资助项目为 KP-06 第32/1号，日期为2019年12月7日；第二作者 Esther Garc´ıa 获得 URJC 的 Ayuda Puente 2022 部分资助。三位作者还获得了安达卢西亚自治区 FQM264 项目的部分资助。

References

[1] A. N. Abyzov 和 I. I. Mukhametgaliev. 关于小费马定理的一些矩阵类比. *Mat. Zametki*, 101(2):163–168, 2017. [2] A. N. Abyzov 和 D. T. Tapkin. 每个矩阵都是幂等元矩阵与 q-幂等幂矩阵之和的环. *Siberian Math. J.*, 62(1):1–13, 2021. [3] A. N. Abyzov, D. T. Tapkin. 环上的每个矩阵何时都是两个三幂等元之和? *Linear Algebra & Appl.* **630**:316–325, 2021.[4] S. Breaz. 有限域上的矩阵作为周期元与幂零元之和. *Linear Algebra & Appl.* **555** 92 97, 2018 , : –

.[5] S. Breaz, G. C˘alug˘areanu, P. Danchev 和 T. Micu. 幂零清洁矩阵环 . *Linear Algebra & Appl.* **439** 3115 3119, 2013 , : –

.[6] S. Breaz 和 S. Megiesan. 非导出矩阵作为幂等元矩阵与幂零矩阵之和 . *Linear Algebra & Appl.*, 605:239–248, 2020.[7] G. Calugareanu 和 T. Y. Lam. 精细环：一类新的单环. *J. Algebra & Appl.*, 15 9 2016( ), . [8] G. C˘alug˘areanu 和 Y. Zhou. 具有精细幂等元的环. *J. Algebra & Appl.*. 21(1):2250013（14页）, 2022. [9] G. C˘alug˘areanu 和 Y. Zhou. 具有精细幂零元的环. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci.* , : – *Mat.* **67** 231 241, 2021

.[10] P. M. Cohn 斜域上矩阵的相似约化 . *Math. Z.*, 132 163, 1973 151: – .[11] P. Danchev. 代数闭域和有限域上矩阵的一些分解. *J. Siberian Federal Univ. – Math. & Phys.*, 14(5):547–553, 2021. [12] P. V. Danchev. 幂零良好含幺环. *Internat. J. Algebra*, 10(5):239-252, 2016. [13] P. Danchev, E. Garc´ıa 和 M. G. Lozano. 矩阵分解为幂等幂矩阵与平方零矩阵. *Internat. J. Algebra & Computat.*, 32(2):251–263, 2022. [14] P. Danchev, E. Garc´ıa 和 M. G´omez Lozano. 矩阵分解为可对角化矩阵与平方零矩阵. *Linear & Multilinear Algebra*, 71(3), 2023. [15] P. Danchev, E. Garc´ıa 和 M. G´ómez Lozano. 矩阵分解为可逆矩阵与固定幂零指数矩阵之和. *arXiv*: 2302.12751.[16] E. Garc´ıa, M. G´omez Lozano, R. Mu˜noz Alc´ázar 和 G. Vera de Salas. 任意环中幂零元的若尔当标准形. *Linear Algebra & Appl.*, 581: 1–12, 2019.[17] E. Garc´ıa, M. G´omez Lozano, R. Mu˜noz Alc´ázar 和 G. Vera de Salas. 由幂零元诱导的分次. *Linear Algebra & Appl.*, 656: 1–20, 2023. [18] A. B. Gorman 和 W. Y. Shiao. 幂零良好环与幂零良好清洁矩阵环. *arXiv*: 1512.04640v1.[19] T. W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 第73卷，Springer-Verlag，纽约—柏林，1980年。（1974年原版重印。）[20] Y. Shitov. 环 $\mathbb{M}_{8k+4}\ \mathbb{Z}_2$ **30** 1077 1078, ( ) 2019 是指数为四的幂零清洁环. *Indag. Math. (N.S.)*, : - .

[21] D. Sjerve. 挠矩阵的典范形. *J. Pure Appl. Algebra*, 22:103–111, 1981年. [22] J. ˇSter. 关于将 $\mathbb{Z}_2$ *Linear* 上 *Algebra & Appl.* **544** 339 349, 2018

的矩阵表示为幂等元与幂零元之和. , : – .[23] J. ˇSter. $\mathbb{M}_n(\mathbb{F}_2)$的幂零清洁指数. *Linear Algebra & Appl.*, 632(1):294–307, 2022 年 .

Institute of Mathematics and Informatics,
Bulgarian Academy of Sciences, 1113Sofia, Bulgaria*Email address*: danchev@math.bas.bg
Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles (Madrid), Spain
Email address: esther.garcia@urjc.esDepartamento de Álgebra, Geometría y Topología,
Universidad de Málaga, 29071Málaga, Spain*Email address*: miggl@uma.es