arXiv:2301.06131v1 [math.MG] 15 Jan 2023

体积乘积

MATTHIEU FRADELIZI、MATHIEU MEYER 和 ARTEM ZVAVITCH

Abstract. 本文旨在概述关于凸体K 在 $\mathbb{R}^n$中的体积乘积 $\mathcal{P}(K) = \min_{z\in K} \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}((K-z)^*)$ 的已知结果与未解问题。我们介绍了 $\mathcal{P}(K)$的若干上界和下界，尤其讨论了关于 $\mathcal{P}(K)$下界的马勒猜想，该猜想至今仍未解决。我们还展示了 $\mathcal{P}(K)$与现代数学不同分支之间的联系，包括几何数论、凸几何、分析学、调和分析，以及度量几何、辛几何和概率论。

Contents

1. 引言 2 1.1. 1980 年之前的记号与结果 3 1.2. 影子系统 5 2. 布拉施克-桑塔洛不等式 6 2.1. 中心对称情形下布拉施克-桑塔洛不等式的证明 8 2.2. 布拉施克-桑塔洛不等式的调和分析证明 9 2.3. 更多结果与推广 11 3. 马勒猜想：特殊情形 15 3.1. 对称情形下猜想的极小值并非唯一 15 3.2. 平面情形 16 3.3. 佐诺体情形 17 3.4. 无条件体情形 18 3.5. 三维对称情形 19 3.6. 猜想成立的其他特殊情形 22 3.7. 局部极小值与稳定性结果 23 4. 渐近估计与 Bourgain-Milman 定理 25 4.1. 通过 Milman 子空间商定理的方法 26 4.2. 复分析方法 27 5. 函数不等式及其与输运不等式的联系 30 5.1. 上界 30 5.2. 对数凹函数体积乘积的下界 34 5.3. 体积乘积与输运不等式 35

日期：2023年1月。2010 数学学科分类。52A20, 52A40, 53A15, 52B10。关键词与短语。凸体、极体、体积乘积、马勒猜想、布拉施克- Santal¨o 不等式、等分。A.Z. 部分经费由美国国家科学基金会资助（Grant DMS-1101636）；此外，A.Z. 在罗德岛州普罗维登斯的数学计算与实验研究所驻留期间，参加调和分析与凸性学期项目，其经费部分由法国国家科学研究中心和美国国家科学基金会（Grant No. DMS-1929284）提供。

推广到多个函数与体37与其他不等式的联系38切片猜想38辛几何与 Viterbo 猜想39芬克几何40数的几何与等周同胚不等式41参考文献42

1. Introduction

这至少有两个著名的未解问题，或多或少都与库尔特·马勒（1903—1988）这个名字联系在一起：

- 关于代数数的莱默问题
- 凸体体积乘积的下界。

这两个问题之所以声名卓著，是因为它们都非常自然、表述简单，却至今未解；近一个世纪以来，许多数学家对它们取得了部分结果，提出了等价表述或各种推广。时不时就会出现一些旨在解决这些问题的有趣尝试，并将它们与现代数学的诸多领域联系起来。

虽然我们在此关注第二个问题，但出于读者的兴趣，我们先概述第一个问题。设 α 是一个代数整数， P 是α的最小多项式，也就是次数最低的整系数多项式 d ，满足其 x^d的系数为 1，且 $\mathcal{P}(\alpha) = 0$。设 $\alpha_1 = \alpha$和 α_2、……、 $\alpha_d \in \mathbb{C}$是 P的其他根。 α的 Mahler 测度是数 $M(\alpha)$: $= \prod_{k=1}^{d} \max(|\alpha_k|, 1)$。根据克罗内克的一项经典结果，如果 $M(\alpha) = 1$，那么 α 是单位根。但若 α 不是单位根，它能与 1 有多接近？是否存在一个与 α的次数无关的常数 $c > 1$，使得$M(\alpha) > 1$ 蕴含 $M(\alpha) > c$？德里克·亨利·莱默在 1933 [Leh] 中猜想，这个问题的答案是肯定的（我们注意到，当 c 依赖于 α 的次数时，人们已经给出了许多估计）；而 Mahler 至少通过定义一种以他名字命名的测度，为此作出了贡献 [Sm, VG]。

本文主要关注第二个问题：设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸对称体，它是一个 n维赋范空间 E的单位球。设 K^* 是 K的极体，它是 E的对偶空间 E^*的单位球。那么体积乘积 $\mathcal{P}(E)$ $= \mathcal{P}(K)$: $=$ vol(K) vol(K^*) 的上下界是什么？最佳上界似乎早已为人所知（ Blaschke 于 1917年 给出了 $n = 2$、3 维的结果， [Bl1], Santal´o 于 1949年给出了 $n \geq 4$ [San2] 的结果），但精确下界仍是一个尚未解决的猜想，尽管 Bourgain 和 V. Milman 近 40 年前已经发现了 min$\{\mathcal{P}(E); E$ n维赋范空间$\}$ 的渐近行为 [BM]。这一问题有许多推广和特例。人们可以提出一系列非常自然的问题，包括：如果 K 不再是中心对称的，会发生什么？对于某些特殊类别的凸体，情况又如何？体积乘积是否存在函数版本？它在凸几何内外可能有哪些应用和联系？我们还必须指出，为了证明体积乘积的性质并研究这一问题的不同情形，人们使用了许多新方法，尤其是来自泛函分析、调和分析、拓扑学、微分几何和概率论的方法。本文将尝试介绍其中的一部分，并概述其他方法。

本文结构如下。我们将在第 1.1 节引入体积乘积并证明其基本性质。在第 1.2 节中，我们将介绍影子系统的方法；事实证明，这些方法对于研究体积乘积的界至关重要。在第 2 节中，我们将讨论体积乘积的上界——布拉施克-桑塔洛不等式。我们将介绍不同的证明方法，包括施泰纳对称化证明和调和分析方法；还将讨论这一不等式的若干推广。在第 3 节中，我们将讨论关于下界的猜想——马勒猜想。我们将介绍若干特例的解答，包括佐诺体、无条件体、二维情形，以及最近对三维对称体的一项解答。我们还将介绍针对上界和下界的稳定性结果的一种研究方法。第 4 节专门讨论体积乘积的渐近下界估计，尤其是 Bourgain-Milman 不等式。在这里，我们还将介绍体积乘积的调和分析方法和复分析方法。第5 节专门讨论与体积乘积相关的函数不等式，尤其是与输运不等式的联系。在第 6 节中，我们将讨论体积乘积推广到多个函数和多个体的情形。最后，在第 7 节中，我们将举例说明体积乘积界与其他不等式之间的联系，包括切片猜想、维泰博猜想、数的几何中的应用以及等周长不等式。

关于凸体、体积与混合体积、对偶性，以及本综述中用到的分析学、几何和凸性领域的其他核心对象，更多信息请参阅 [AGM1、AGM2、Ga1、Ga2、Gru、Kol、Pi、Sc、Tom]。

致谢。我们感谢 Richard Gardner、Dmitry Faifman、DylanLangharst、Erwin Lutwak 和 Shlomo Reisner 提出的诸多订正、宝贵讨论和建议。

1.1. 1980 年以前的记号和结果。在 $\mathbb{R}^n$ 中，凸体 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个凸紧子集，且内点非空，记作 $\mathrm{int}(K)$。若 $L \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $L = -L$，则称其为中心对称。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，满足 $0 \in \mathrm{int}(K)$；对于 $x \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0;\ tx \in K\}$$

称为 K 的规范函数；特别地，当 K 是凸对称体时，$x \mapsto \|x\|_K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，且 K 是其闭单位球。我们赋予 $\mathbb{R}^n$ 自然的数量积，记作 $\langle\ ,\ \rangle$，其对应的欧几里得范数记作 $|\cdot|$；半径为一的欧几里得球记作 B_2^n。博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的标准勒贝格测度记作 $\mathrm{vol}(A)$。

设 K 是一个凸体。若 $0 \in \mathrm{int}(K)$，则极体 K^* 定义为

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x, y\rangle \le 1 \text{ for all } x \in K\}. \tag{1}$$

那么 K^* 也是一个凸体，使得 $0 \in \mathrm{int}(K^*)$；若 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性同构，则有

$$\big(T(K)\big)^* = (T^*)^{-1}(K^*),$$

其中 T^* 是 T 的伴随算子。更一般地，对于凸体 K 和 $z \in \mathrm{int}(K)$，定义极体 K^z 相对于 K z 为

$$K^z = (K - z)^* + z.$$

著名的双极定理 断言，若 $0 \in \mathrm{int}(K)$，则

$$(K^*)^* = K \text{ and consequently that } (K^z)^z = K$$

对任意凸体 K以及任意 $z \in \text{int}(K)$。令 $h_K(y) = \max_{x\in K}\langle x, y\rangle$为 K的支撑函数。注意，当 $0 \in \text{int}(K)$时， $K^* = \{h_K \le 1\}$，即 $h_K(x) = \|x\|_{K^*}$。此外，若 $z \in \text{int}(K)$，

$$K^z = z + \{y \in \mathbb{R}^n; h_K(y) - \langle z, y\rangle \le 1\}$$

因此

$$\text{vol}(K^z) = \int_{K^*} \frac{1}{(1 - \langle z, y\rangle)^{n+1}} dy.$$

由此可知，映射 $z \mapsto \text{vol}(K^z)$ 是 $\text{int}(K)$ 上的严格凸正 C^∞ 函数。

稍作推导即可证明，当 z 趋近于K的边界时，$\text{vol}(K^z) \to +\infty$。考虑 $\theta \in S^{n-1}$，根据 Brunn 定理，由 $f_\theta(t) := \text{vol}_{n-1}(\{y \in K^*; \langle y, \theta\rangle = t\})$ 定义的函数 $f_\theta\colon [-h_{K^*}(-\theta)\ h_{K^*}(\theta)] \to [0, \infty)$ 满足凹性。因此，对于 $0 \le t \le h_{K^*}(\theta)$，有 $f_\theta(t) \ge f_\theta(0)(1 - h_{K^*}^{-1}(\theta)t)^{n-1}$。令 $r_K(\theta) = \min\{a \ge 0 : \theta \in aK\}$ 为 K 的径向函数。于是 $r_K(\theta) = h_{K^*}^{-1}(\theta)$，并令 $z = s\theta$（θ），得到

$$\text{vol}(K^z) = \int_{K^*} \frac{1}{(1 - \langle z, y\rangle)^{n+1}} dy = \int_{-h_{K^*}(-\theta)}^{h_{K^*}(\theta)} \frac{f_\theta(t)}{(1 - st)^{n+1}} dt$$

$$\ge f_\theta(0) \int_0^{h_{K^*}(\theta)} \frac{(1 - th_{K^*}^{-1}(\theta))^{n-1}}{(1 - st)^{n+1}} dt = \frac{f_\theta(0)}{n(r_K(\theta) - s)} \ge \frac{\min\limits_{\theta\in S^{n-1}} f_\theta(0)}{n(r_K(\theta) - s)} \to +\infty,$$

当 $s \to r_K(\theta)$ 时，也就是 $z \to \partial K$。

因此，函数 $z \mapsto \text{vol}(K^z)$ 在 $\text{int}(K)$ 上于唯一一点 $s(K)$ 处达到最小值，该点称为 K 的 Santal´o 点。计算其微分可知， $s(K)$ 的特征是 $K^{s(K)}$ 的质心（质量中心）为 $s(K)$（见 [MSW]）。对于足够大的 $t > 0$，集合 $\{z \in \text{int}(K); \text{vol}(K^z) \le t\}$（称为 K 的 Santal´o 区域）已在 [MW1] 中得到研究（另见 [MW2]）。

定义 1. 凸体 K 的 ***Santal´o*** 点记为 $s(K)$，是$\text{int}(K)$ 中的唯一一点，满足

$$\text{vol}(K^{s(K)}) = \min_{z\in K} \text{vol}(K^z).$$

K 的体积乘积为

$$\mathcal{P}(K) := \text{vol}(K)\,\text{vol}(K^{s(K)}).$$

我们列举以下事实:

- 如果 K 是中心对称的，那么 K^* 也如此，且有 $s(K) = 0 = s(K^*)$ 和 $\mathcal{P}(K) = \mathcal{P}(K^*)$。总有 $\mathcal{P}(K^{s(K)}) \le \mathcal{P}(K)$；而当 K 不具有中心对称性时，可能出现 $\mathcal{P}(K^{s(K)}) < \mathcal{P}(K)$。
- 容易看出， $s(K)$ 是 $\text{int}(K)$ 中唯一满足以下条件的点：0 是 $\big(K - s(K)\big)^*$ 的质心，或者 $s(K)$ 是 $K^{s(K)}$ 的质心。
- 映射 $K \mapsto \mathcal{P}(K)$ 是仿射不变的，也就是说，如果 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一一仿射变换，那么 $\mathcal{P}(AK) = \mathcal{P}(K)$。这表明，如果 E 是一个具有闭单位球 B_E 的 n 维赋范空间，并且 $\phi\colon E \to \mathbb{R}^n$ 是一一线性映射，那么 $\mathcal{P}(E) := \mathcal{P}(\phi(B_E))$ 与 ϕ 无关。特别地，这一性质使 $\mathcal{P}(E)$ 成为赋范空间局部理论中的重要工具（参见 [Pi、LMi、Tom]）。
- 设 K 是一个凸体，使得 $0 \in \text{int}(K)$，并设 E 是 $\mathbb{R}^n$的一个线性子空间。那么， $K \cap E$ 是 E中的一个凸体，它继承了 $\mathbb{R}^n$欧几里得结构中的数量积；而 $(K \cap E)^*$（在 E中取极性）可识别为

$P_E(K^*)$，其中 P_E 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 E的正交投影。因此，当 K 中心对称时，$\mathcal{P}(K \cap E) = \mathrm{vol}_E(K \cap E)\,\mathrm{vol}_E(P_E(K^*))$，其中 vol_E表示 E上的勒贝格测度。

鉴于这些事实，一个自然的问题是：对于固定的 n，如何计算所有 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 K 的 $\mathcal{P}(K)$ 的上界和下界。这些界的存在性源于仿射不变性，它使我们能够在赋予豪斯多夫度量的所有凸体集合的一个紧子集上考察 $K \mapsto \mathcal{P}(K)$ 的界。事实上，若 B_2^n 是欧几里得球，根据约翰定理，可以将问题归结为在一般情形下研究 $\mathcal{P}(K)$（其中 $B_2^n \subset K \subset nB_2^n$），或在 K 中心对称时研究 $B_2^n \subset K \subset \sqrt{n}B_2^n$（其中 K），从而得到这些界虽粗略但具体的估计。

看起来，最早研究这一问题的是 Wilhelm Blaschke（1885-1962）。他证明了对于 $n = 2$ 和 $n = 3$，$\mathcal{P}(K) \leq \mathcal{P}(\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 是任意椭球 [Bl1], [Bl2]。随后，Mahler 给出了 $\mathcal{P}(K)$ 的精确下界，适用于一般情形和中心对称情形 [Ma1, Ma2]。1947年，Luis Santal´o（1911-2001） [San2] 运用与 Blaschke 相同的方法，将 Blaschke 的结果推广到了所有 n 。上界等号成立的情形直到很久之后才得到证明：1978年由 Petty [Pe4] 证明（ [San2] 中给出的论证并不完全有效）。

定理 1.（布拉施克-Santal´o-Petty）若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，则

$$\mathcal{P}(K) \leq \mathcal{P}(B_2^n), \tag{2}$$

当且仅当 K 是一个椭球时，等号成立。

Bambah [B]给出了 $\mathcal{P}(K)$的粗略下界。Guggenheimer [Gu1, Gu2]曾一度认为自己已经为中心对称的K 给出了精确下界 $\mathcal{P}(K) \geq \mathcal{P}([-1,1]^n) = \frac{4^n}{n!}$ 的完整证明，但后来发现他的证明有误。20 世纪 80 年代的情况便是如此，当时 Saint-Raymond [SR1],Reisner[Re1, Re2], Gordon和Reisner [GR] 以及 Bourgain-Milman [BM]为这个问题带来了新的见解。

我们以这一理论中的一项重要工具结束本节：

1.2. **影子系统**。

定义 2. 沿方向 $\theta \in S^{n-1}$ 的**影子系统** 是一族凸集$K_t \subset \mathbb{R}^n$，其定义为 $K_t = \mathrm{conv}(\{x + ta(x)\theta;\, x \in M\})$，其中 M是 $\mathbb{R}^n$中的一个有界子集，$a\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个有界函数，且 $t \in I$是 $\mathbb{R}$ 的一个区间（并且$\mathrm{conv}(A)$表示集合 $A \subset \mathbb{R}^n$)的闭凸包）。

可以看出，经典的施泰纳对称化可视为一个影子系统，其中 K_t 的体积保持不变（见下文注1）。影子系统的概念由 Rogers 和 Shephard [RS, Sh1] 提出，并可通过 Shephard 在 [Sh1], 中的一个观点加以说明：他指出，$\mathbb{R}^n$ 中的凸体影子系统可视为某个（$n+1$）维凸集在 $\mathbb{R}^{n+1}$的某个 n维子空间上的一族投影。具体而言，设 $\mathbb{R}^{n+1}$的一组标准正交基为 $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$。设 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集 M如前所述（即 M包含于由 $e_1, e_2, ..., e_n$线性张成的空间中），令$a\colon M \to \mathbb{R}$ 为一个有界函数，$\theta \in S^{n-1}$ 且 I 为 $\mathbb{R}$的一个区间。我们定义一个凸集$\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{n+1}$，它是（$n+1$）维的，定义如下

$$\tilde{K} = \mathrm{conv}\{x + a(x)e_{n+1} : x \in M\}.$$

对每个 $t \in I$，令 $P_t : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 为从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 沿方向$e_{n+1} - t\theta$投影到 $\mathbb{R}^n$ 上的投影。于是，

$$P_t(\tilde{K}) = \mathrm{conv}(\{x + ta(x)\theta; x \in M\}) = K_t.$$

这一解释使我们能够看出 $t \mapsto \mathrm{vol}(K_t)$ 是一个凸函数 [RS]。这一结果是获得等周型几何不等式的有力工具。

下面的定理将影子系统与体积乘积联系起来。该定理由 Campi 和 Gronchi [CG1] 在凸体 K_t 为中心对称时证明，而 Meyer 和 Reisner 则证明了其一般情形 [MR3]（另见 [FMZ]）。

定理 2。 设 $(K_t)^{t\in(a,b)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中凸体的一个影子系统。那么，函数$t \mapsto \mathrm{vol}\left((K_t)^{s(K_t)}\right)^{-1}$在$(a, b)$上是凸函数。

沿用前文的记号如果 K_t 是中心对称的，那么 $s(K_t) = 0$，因此

$$(K_t)^{s(K_t)} = K_t^* = (P_t(\tilde{K}))^*.$$

如上所述，凸体在子空间 E 上的正交投影的极体，是其极体被 E截出的截面。但这里 P_t 并非正交投影，因此我们得到

$$(P_t(\tilde{K}))^* = P_{e_{n+1}^\perp}(\tilde{K}^* \cap (e_{n+1} - t\theta)^\perp),$$

其中 $P_{e_{n+1}^\perp}$ 是从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 到 $\mathbb{R}^n = e_{n+1}^\perp$的正交投影。在这一背景下，Campi–Gronchi 定理以另一种表述形式出现，并为布塞曼定理提供了新的证明[Bu]；该定理涉及中心对称体的中心超平面截面（另见 [MR5]）。这一观点由 [CFPP], 提出，其中还将这类性质推广到了比勒贝格测度更一般的测度。

与定理 2 相关的一个重要部分（证明见 [MR3，命题 7]，另见 [MR4]）是 $\mathrm{vol}(K_t)$ 和 $\mathrm{vol}((K_t)^{s(K_t)})^{-1}$ 都是关于 $t \in (a, b)$ 的仿射函数的情形。在这种情况下，所有的凸体 K_t 彼此都是经由特殊仿射变换得到的仿射像。这有助于确定涉及体积乘积的不等式中的等号成立情形，也有助于证明 [MR4] 和 [FMZ]的结果。[MY 将这一部分的证明（其中涉及某些常微分方程）推广到了更一般的情形，见命题 6.1] 。

2. The Blaschke-Santaló inequality

布拉施克-桑塔洛不等式′的最初证明 [Bl1，San1，San2，Leic1] 是基于仿射等周不等式的。现在我们说明这一不等式如何推出布拉施克-桑塔洛′不等式，以及反过来布拉施克-桑塔洛′不等式如何推出该不等式。关于本节所用工具的详情，请参见 [Sc] 和 [SW，Leic2]。若 M 是一个处处具有正曲率的光滑凸体，其仿射表面积 $\mathcal{A}(M)$定义为

$$\mathcal{A}(M) = \int_{S^{n-1}} f_M(u)^{\frac{n}{n+1}} du,$$

其中 $f_M : S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ 是曲率函数，即测度 σ_M 在 S^{n-1}上的密度，相对于 S^{n-1}上的哈尔测度而言；对于 S^{n-1}中的博雷尔子集 A，$\sigma_M(A)$是 ∂M 中所有满足其指向 M的单位法向量属于 A的点构成的集合的 $(n-1)$-豪斯多夫测度。仿射等周不等式指出，在体积固定时，椭球的

仿射表面积在所有具有正连续曲率的凸体中最大。换言之，

$$\mathcal{A}(M)^{n+1} \leq n^{n+1} v_n^2 \operatorname{vol}(M)^{n-1}, \tag{3}$$

其中 $v_n = \operatorname{vol}(B_2^n)$。令 L 为另一个凸体，由霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M)^{n+1} &\leq \left(\int_{S^{n-1}} h_L(u) f_M(u) du \right)^n \int_{S^{n-1}} h_L^{-n}(u) du \\ &= n^{n+1} V(M[n-1], L)^n \operatorname{vol}(L^*), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $V(M[n-1], L) = V(M[n-1], L[1]) = \frac{1}{n} \int_{S_{n-1}} h_L(u) f_M(u) du$ 是 M和 L的混合体积，也可以用以下公式定义，其中 $t \geq 0$,

$$\operatorname{vol}(M + tL) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} V(M[n-k], L[k]) t^k.$$

关于混合体积性质的精确定义，请参阅 [Sc] 。利用不等式（3）和闵可夫斯基第一不等式

$$V(M[n-1], L)^n \geq \operatorname{vol}(M)^{n-1} \operatorname{vol}(L),$$

可得

$$\mathcal{A}(M)^{n+1} \leq n^{n+1} v_n^2 \operatorname{vol}(M)^{n-1} \leq n^{n+1} v_n^2 V(M[n-1], L)^n \operatorname{vol}(L)^{-1}. \tag{5}$$

现在，给定一个凸体 K，令 $s = s(K)$ 为其桑塔洛点；则 0 是$K - s$ 的质心，因此

$$\int_{S^{n-1}} u h_{K-s}(u)^{-(n+1)} du = 0,$$

因此，根据闵可夫斯基存在定理（见第 8 节2 [Sc]），存在一个凸体M 使得 $f_M = h_{K-s}^{-(n+1)}$。令 $L = K - s$，则（4）取等号，因此由（5）

$$\begin{aligned} n^{n+1} V(M[n-1], K-s)^n \operatorname{vol}((K-s)^*) &= \mathcal{A}(M)^{n+1} \\ &\leq n^{n+1} v_n^2 V(M[n-1], K)^n \operatorname{vol}(K-s)^{-1}, \end{aligned}$$

从而得到布拉施克-桑塔洛´不等式（2）。

反过来，设 M 是一个具有正曲率的凸体，并假设 0 是´的桑塔洛点，且布拉施克-桑塔洛´不等式对 M成立。由（4），取 $L = M$，可得

$$\mathcal{A}(M)^{n+1} \leq n^{n+1} V(M[n-1], M)^n \operatorname{vol}(M^*) \leq n^{n+1} v_n^2 \operatorname{vol}(M)^{n-1},$$

这就是仿射等周不等式。

关于此类其他结果以及仿射表面积与体积乘积之间关系的例子，参见 Petty [Pe3、Pe4], Lutwak [Lu2], Li, Sch¨utt and Wernerand [LSW], Nasz´odi、Nazarov 和 Ryabogin [NNR] 以及 Hug [Hu], ，他们利用施泰纳对称化证明了仿射等周不等式，并研究了等号成立情形。

2.1. **中心对称情形下的布拉施克-桑塔洛不等式证明**。在 [MP1，MP2], Meyer 和 Pajor 使用经典的施泰纳对称化给出了一个证明，我们将在本节中概述该证明。截面的各种对称化也见于 [SR1]和 [Ba3]。

步骤 *1*：我们首先证明，如果 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性超平面，且 $S_H K$ 是 K 关于 H 的施泰纳对称体，其定义如下，那么

$$\mathrm{vol}(K^*) \leq \mathrm{vol}\left((S_H K)^*\right).$$

为简化记号，设 $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$；如前所述，令 $P_H : \mathbb{R}^n \mapsto H$ 是到 H 的正交投影。于是，K 可描述如下：

$$K = \{x + se_n;\ x \in P_H K, s \in I(x)\}$$

其中，对于 $x \in P_H K$，$I(x) = \{s \in \mathbb{R};\ x + se_n \in K\}$ 是一个闭区间。K 关于 H 的施泰纳对称体定义为

$$S_H K = \left\{x + se_n; x \in PK, s \in \frac{I(x) - I(x)}{2}\right\}$$

是一个关于 H 对称的凸体，满足

$$\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(S_H K).$$

对于 $t \in \mathbb{R}$，令 $K^*(t) := \{y \in H;\ y + te_n \in K^*\}$ 为 K^* 被超平面 $\{x_n = t\}$ 截得的截面，且 $J = \{t \in \mathbb{R};\ K^*(t) \neq \emptyset\}$。于是

$$K^* = \{y + te_n; t \in J, y \in K^*(t)\}.$$

由 K^* 的对称性，对于每个 $x \in P_H K$，都有 $K(-x) = -K(x)$，因此对于每个$t \in J$，$y_1 \in K^*(t)$、$y_2 \in K^*(-t)$ 和 $s_1,\ s_2 \in K(x)$，都有：

$$\langle x, y_1\rangle + s_1 t \leq 1 \text{ and } \langle x, y_2\rangle - s_2 t \leq 1.$$

将这两个不等式相加可得，对于每个 $x \in P_H K$，$s = \frac{s_1 - s_2}{2} \in \frac{1}{2}(I(X) - I(X))$、$t \in J$ 和 $y = \frac{y_1 + y_2}{2} \in \frac{1}{2}\left(K^*(t) + K^*(-t)\right)$，都有

$$\langle x, y\rangle + st \leq 1.$$

因此，对于每个 $t \in J$，

$$\frac{1}{2}\left(K^*(t) + K^*(-t)\right) \subset (S_H K)^*(t). \tag{6}$$

由 K的对称性，有 $K^*(-t) = -K^*(t)$。根据布伦-明可夫斯基定理，$\mathrm{vol}_{n-1}\left((S_H K)^*(t)\right) \geq \mathrm{vol}_{n-1}\left(K^*(t)\right)$，并对 t 积分可得

$$\mathrm{vol}\left((S_H K)^*\right) = \int \mathrm{vol}_{n-1}\left((S_H K)^*(t)\right)dt \geq \int \mathrm{vol}_{n-1}(K^*(t))dt = \mathrm{vol}(K^*).$$

因此可得 $\mathcal{P}(S_H K) \geq \mathcal{P}(K)$。

步骤 *2*：众所周知，存在一个超平面序列 $(H_m)_m$，使得若 $K_0 = K$且对于 $m \geq 1$，$K_m := S_{H_m} K_{m-1}$，则序列 $(K_m)_m$ 收敛到欧几里得球$R_K B_2^n$，其体积与 K 相同（例如参见 [Sc]中的第 10.3 节）。因此

$$\mathcal{P}(K) \leq \mathcal{P}(K_{n-1}) \leq \mathcal{P}(K_n) \leq \mathcal{P}(R_K B_2^n) = \mathcal{P}(B_2^n).$$

布拉施克-桑塔洛不等式中的等号成立的情形最初由 Petty 证明 [Pe4]，，他运用了精妙的微分几何论证。当 K 为中心对称时，一种新的初等

证明由 Saint Raymond 给出 [SR1], ，其运用了超平面截面的闵可夫斯基对称化（另见 [Ba3]）。Meyer-Pajor 将这些思想推广 [MP2] ，为一般情形给出了初等证明，并得到了一个稍强一些的结果，该结果同样基于施泰纳对称化：

定理 3。（Meyer-Pajor [MP2]）对于每个凸体 K 以及每个超平面 H将 $\mathbb{R}^n$ 分成两个闭半空间 H_+ 和 H_-，记 $\lambda = \frac{\mathrm{vol}(H_+\cap K)}{\mathrm{vol}(K)}$，则存在$z \in H$ 使得$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^z) \leq \mathcal{P}(\mathcal{E})\,4\lambda(1-\lambda)$.

注1。注意，凸体 K 关于方向 $u \in S^{n-1}$ 的施泰纳对称体可以按如下方式写成一个影子系统的一部分：对于$y \in P_{u^\perp}K$，令 $I(y) = \{s \in \mathbb{R};\ y + su \in K\}$。对于 $t \in [-1,1]$，令

$$K_t = \left\{ y + su; s \in \frac{1+t}{2} I(y) - \frac{1-t}{2} I(y) \right\}.$$

于是 $K_1 = K$, $K_0 = S_{u^\perp}K$，并且对于每个 $t \in [-1,1]$, K_{-t} 都是 K_t 关于超平面 $u^\perp$的反射。这意味着函数 $t \mapsto \mathcal{P}(K_t)$ 是偶函数。此外，由于对于 $t \in [-1,1]$，$\mathrm{vol}(K_t) = \mathrm{vol}(K)$ 为常数，利用定理 2 可知函数 $t \mapsto \mathcal{P}(K_t)^{-1}$是凸函数。因此，$\mathcal{P}(K_t)$ 在 0 处取最大值，这证明了对于任意凸体，施泰纳对称化不会使体积乘积减小，从而重新得到 Meyer-Pajor 的结果 [MP2]。再次使用适当的施泰纳对称化序列，即可得到一般的布拉施克-桑塔洛不等式。前述观察归功于 [MR3]。

2.2. **布拉施克-桑塔洛不等式的调和分析证明´**。 我们沿用 Bianchi 和 Kelli 的工作 [BK]。调和分析在对偶性和体积乘积的研究中发挥着至关重要的作用。Nazarov 首先提出了这一主要思想 [Na], ，并运用它证明了 Bourgain-Milman 不等式 [BM] ；随后，Bianchi 和 Kelly 采用这一思想，给出了布拉施克-桑塔洛不等式一个极为优雅的证明´。关于调和分析的基本知识，可参阅 [StWe] 和[Ho]。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸对称体。设 $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$，使得其傅里叶变换$\widehat{\ }F = 0$ 几乎处处在 $\mathbb{R}^n \setminus K$ 上成立。那么， F 是限制在 $\mathbb{R}^n$ 上的整函数，仍记作 F，其定义如下： $F(z) = \int_K e^{2\pi i\langle z,\xi\rangle}\widehat{F}(\xi)d\xi$ 对于 $z \in \mathbb{C}^n$，它满足以下不等式，这初步揭示了该理论为何如此有用：

$$|F(iy)| = \left| \int_K e^{-2\pi\langle y,\xi\rangle}\widehat{F}(\xi)d\xi \right| \leq \int_K e^{2\pi \sup_{\xi\in K}|\langle \xi,y\rangle|}|\widehat{F}(\xi)|d\xi = e^{2\pi\|y\|_{K^*}}\int_K |\widehat{F}(\xi)|d\xi.$$

因此，对于某个 $C > 0$，对所有 $y \in \mathbb{R}^n$，都有 $|F(iy)| \leq Ce^{2\pi\|y\|_{K^*}}$，也就是说， F 是指数型K^*。这一事实是以下经典定理的初等部分：

定理4。（*Paley*–维纳）设 $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$，且 K 是一个凸对称体。那么以下条件等价：

- F 是一个指数型为 K^* 的整函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制。
- F 的支集包含于 K。

现在我们准备好介绍

布拉施克-桑塔洛不等式的证明´，改编自 Bianchi 和 Kelly [BK]。令 $F = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)}\widehat{\mathbf{1}_K}$，其中 $\mathbf{1}_K$ 是 K 的示性函数：

$$\mathbf{1}_K(x) = \begin{cases} 1, \text{ for } x \in K \\ 0, \text{ for } x \notin K. \end{cases}$$

于是，$F(0) = 1$，$F \in L_2(\mathbb{R}^n)$，F 是连续偶函数，并可将其延拓为定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，仍记为 F，如下：

$$F(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K e^{2i\pi(\sum_{k=1}^n z_i x_i)} dx_1 \dots dx_n.$$

对于 $\theta \in S^{n-1}$ 和 $z \in \mathbb{C}$，令 $F_\theta(z) = F(z\theta)$。于是，根据 Paley-Wiener 定理的简单部分，F_θ 是指数型为 $[-\|\theta\|_{K^*}^{-1}, \|\theta\|_{K^*}^{-1}]$ 的偶整函数。此外，由于 F 是偶整函数，存在一个整函数 $H_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $H_\theta(z^2) = F_\theta(z) = F(z\theta)$。最后，我们将 $R_\theta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 定义为 F_θ 的径向延拓，如下：

$$R_\theta(z_1, \dots, z_n) = H_\theta(z_1^2 + \dots + z_n^2).$$

注意，$z \mapsto R_\theta(z)$ 是一个满足 $R_\theta(0) = F(0) = 1$ 的整函数。此外，由于 F_θ 的指数型为 $[-\|\theta\|_{K^*}^{-1}, \|\theta\|_{K^*}^{-1}]$，因此 R_θ 的指数型为 $\|\theta\|_{K^*}^{-1} B_2^n$。由此，根据 Paley-Wiener 定理，$R_\theta$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制的支集包含于 $(\|\theta\|_{K^*}^{-1} B_2^n)^* = \|\theta\|_{K^*} B_2^n$。。由于 $R_\theta \in L_2(\mathbb{R}^n)$，利用 Plancherel 等式以及关于 $v_n = \mathrm{vol}(B_2^n)$ 的柯西-施瓦茨不等式，可以写成：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |R_\theta(x)|^2 dx = \int_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n} |\widehat{R_\theta}(x)|^2 dx &\geq \frac{|\int_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n} \widehat{R_\theta}(x) dx|^2}{v_n \|\theta\|_{K^*}^n} \\ &= \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{R_\theta}(x) dx|^2}{v_n \|\theta\|_{K^*}^n} = \frac{R_\theta(0)}{v_n \|\theta\|_{K^*}^n} = \frac{1}{v_n \|\theta\|_{K^*}^n}. \end{aligned} \tag{7}$$

若 $|x| = r = |re_1|$，则有

$$R_\theta(x) = F(|x|\theta) = F(r\theta) = R_\theta(re_1), \tag{8}$$

因此，R_θ 在 $\mathbb{R}^n$上是旋转不变的。于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{F}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |F(r\theta)|^2 r^{n-1} dr d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |R_\theta(re_1)|^2 r^{n-1} dr d\theta = \frac{1}{n v_n} \int_{\mathbb{R}^n} |R_\theta(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(K)} = \frac{1}{n v_n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |R_\theta(x)|^2 dx d\theta \geq \frac{1}{n v_n^2} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{K^*}^{-n} d\theta = \frac{\mathrm{vol}(K^*)}{\mathrm{vol}(B_2^n)^2},$$

这就是布拉施克–桑塔洛不等式。

Bianchi 和 Kelly [BK] 也给出了等号情形的证明。事实上，假设 Blaschke-Santal´o 不等式中取等号，那么 (7) 中也必须取等号。因此，对于每个 $\theta \in S^{n-1}$ 以及某个 $c_\theta \in \mathbb{R}$，都有 $\widehat{R_\theta} = c_\theta \mathbf{1}_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上，并且

$$R_\theta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle x,y\rangle} \widehat{R_\theta}(y) dy = c_\theta \int_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n} e^{-2i\pi\langle x,y\rangle} dy.$$

Mo此外，由于 $R_\theta(0) = 1$，可得 $c_\theta \operatorname{vol}(\|\theta\|_{K^*} B_2^n) = 1$。接下来，由 (8)，我们得 et

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \int_K e^{-2i\pi r\langle \theta, y\rangle} dy = F(r\theta) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\|\theta\|_{K^*} B_2^n)} \int_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n} e^{-2i\pi r\langle \theta, y\rangle} dy. \tag{9}$$

若 M 是一个凸体， $\theta \in S^{n-1}$ 和 $t \in \mathbb{R}$，令 $A_{M,\theta}(t) =$ 体积$_{n-1}\left(M \cap (\theta^\perp + t\theta)\right)$。则有

$$\widehat{A_{K,\theta}}(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi rt} A_{K,\theta}(t) dt = \int_K e^{-2i\pi r\langle \theta, y\rangle} dy.$$

反演 g th由傅里叶变换可知，根据式（9），对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in S^{n-1}$,

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(K)} A_{K,\theta}(t) = \frac{A_{\|\theta\|_{K^*} B_2^n, \theta}(t)}{\operatorname{vol}(\|\theta\|_{K^*} B_2^n)} = \frac{A_{B_2^n,\theta}\left(t\|\theta\|_{K^*}^{-1}\right)}{\|\theta\|_{K^*} \operatorname{vol}(B_2^n)}. \tag{10}$$

现在，对于 $\theta \in S^{n-1}$，由式（10）可得

$$\begin{aligned} \int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \int_{\mathbb{R}} t^2 A_{K,\theta}(t) dt &= \frac{\operatorname{vol}(K)}{\|\theta\|_{K^*} \operatorname{vol}(B_2^n)} \int_{\mathbb{R}} t^2 A_{B_2^n,\theta}\left(t\|\theta\|_{K^*}^{-1}\right) dt \\ &= \frac{\operatorname{vol}(K)}{\operatorname{vol}(B_2^n)} \|\theta\|_{K^*}^2 \int_{\mathbb{R}} u^2 A_{B_2^n,\theta}(u) du \end{aligned}$$

并且由于旋转不变性 $A_{B_2^n,\theta}(u)$ 不依赖于 $\theta \in S^{n-1}$，因此对于某个$c > 0$ 和所有 $\theta \in S^{n-1}$,

$$\|\theta\|_{K^*} = c \left(\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \right)^{1/2},$$

这证明了 K^* 因此 K 是一个椭球（最后的论证受到 [MR0]的启发）。

2.3. 进一步的结果与推广。 下面介绍几个可视为布拉施克-桑塔洛不等式衍生结果的结论。

2.3.1. 稳定性。 K. B¨or¨ozcky [Bor] 建立了布拉施克-桑塔洛不等式的稳定性版本，后来 K. Ball 和 K. B¨or¨ozcky 在 [BB]中对其进行了改进。设 $d_{BM}(K, L)$ 是两个凸体 K 和 L 在 $\mathbb{R}^n$中的班纳赫-马祖尔距离:

$$d_{BM}(K, L) = \inf\{d > 0 \colon K - x \subseteq T(L - y) \subseteq d(K - x), \text{其中某个 } T \in GL(n) \text{ 和 } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

以下稳定性定理由 [BB]证明:

定理 5. 如果 K 是一个凸体，满足 $\mathbb{R}^n$、 $n \geq 3$，并且对于某个 $\varepsilon > 0$ 有

$$(1 + \varepsilon)\mathcal{P}(K) \geq \mathcal{P}(B_2^n),$$

then

$$\log\left(d_{BM}(K, B_2^n)\right) \leq c_n \varepsilon^{\frac{1}{3(n+1)}} |\log \varepsilon|^{\frac{2}{3(n+1)}}.$$

其中 c_n 是一个仅取决于 n 的绝对常数。

如果在上述定理中假设 K 是对称的，那么 ε 的指数可以改进为 $2/3(n + 1)$。

2.3.2. 局部极大值与受限极大值。 证明了具有最大体积乘积的凸体是椭球之后，人们可能会想知道体积乘积的局部极大值（以豪斯多夫距离为度量）。利用定理 2，文献 [MR4] 证明了任何局部极大值都是椭球，从而给出了布拉施克-桑塔洛不等式的另一种证明´。

我们还可以考察不含椭球的某些类体中的极大值。例如，在 $\mathbb{R}^2$ 中，对于顶点数多于 $m \geq 4$ 的多边形，极大值由具有 m 个顶点的正多边形的仿射像取得 [MR3]。对于 $n \geq 3$, [AFZ] 使用影子系统研究了复杂得多的情形。特别是， [AFZ] 证明，在顶点数至多为 m 的多胞体中，体积乘积最大的多胞体是单纯的（其所有面都是单纯形），且恰有 m 个顶点。他们还证明，在顶点数至多为 $n+2$ 的多胞体中，体积乘积在 $\mathrm{conv}(\Delta_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ 处取得最大值，其中 $\Delta_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 和 $\Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 是分别位于维数为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 和 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 的互补子空间中的单纯形（按定义，对于 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\lfloor \alpha \rfloor$ 是 α 的整数部分；对于 $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\lceil \alpha \rceil = \lfloor \alpha \rfloor = \alpha$）。 [AFZ] 猜想，对于 $1 \leq k \leq n$，在顶点数至多为 $n+k$ 的多胞体中，位于维数为 $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ 或 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 的互补子空间中的 k 个单纯形的凸包具有最大的体积乘积。

在有限维 Lipschitz 自由空间的单位球中，对于至多含有 $(n+1)^2$ 个极点且为多胞体的单位球， [AFGZ] 建立了一些初步结果，并证明了体积乘积的极大化体是单纯多胞体。

2.3.3. L_p-质心不等式。 在 Lutwak、杨和张的一系列工作中， [LuZ、LuYZ1、LuYZ2], 布拉施克-桑塔洛´不等式作为一族等周不等式的特殊情形出现，这族不等式涉及所谓的 L_p-质心体和 L_p-投影体。更确切地说，设紧星形体 K 位于 $\mathbb{R}^n$ 中，并且 $p \in [1, \infty]$，其极体 L_p-质心体$\Gamma_p^* K$ 通过其范数定义为：

$$\|x\|_{\Gamma_p^* K}^p = \frac{1}{c_{n,p} \operatorname{vol}(K)} \int_K |\langle x, y \rangle|^p dy,$$

这里的归一化常数$c_{n,\ p}$ 选取为使得 $\Gamma_p^* B_2^n = B_2^n$. 在 [LuZ] 中证明了，对于所有 $p \in [1, \infty]$

$$\operatorname{vol}(K) \operatorname{vol}(\Gamma_p^* K) \leq \operatorname{vol}(B_2^n)^2, \tag{11}$$

当且仅当 K 是以原点为中心的椭球时，等号成立。事实证明，若 K是中心对称凸体，则 $\Gamma_\infty^* K = K^*$ ，因此布拉施克–桑塔洛不等式的对称情形´可由（11）在 $p = \infty$时推出。（11）的一个更强版本由 [LuYZ1]证明：

$$\operatorname{vol}(\Gamma_p K) \geq \operatorname{vol}(K),$$

对于 n 维实空间中的任意星体 $\mathbb{R}^n$ 以及 $p \in [1, \infty]$。对于 $p = 1$而言，该不等式将相关理论与布森曼–佩蒂质心不等式联系起来 [Pe1] 另见 [Ga1、Sc]。若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$的紧子集，则 $p \geq 1$，LuYZ2 [证明（推论 6）：存在某个3]，使得 $c(p,\ n) > 0$，满足

$$\int_{K \times L} |\langle x, y \rangle|^p dx dy \geq c(p,n) \big(\operatorname{vol}(K) \operatorname{vol}(L) \big)^{\frac{n+p}{n}}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 在零测集意义下分别是以原点为中心、互为极体的椭球的伸缩像。当 $p \to +\infty$时，可得对称形式的以下版本

布拉施克-桑塔洛′在 [LuYZ2]: 若 K, L 是 $\mathbb{R}^n$的紧子集, 则

$$\mathrm{vol}(B_2^n)^2 \max_{x\in K, y\in L} |\langle x, y\rangle|^n \geq \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(L).$$

2.3.4. 与仿射拟混合体积的联系。 仿射拟混合体积由 Lut- wak [Lu1]定义。对于 $1 \leq k \leq n$, 凸体 k的第 K 个仿射拟混合体积为:

$$\Phi_k(K) = \frac{v_n}{v_k}\left(\int_{Gr(k,n)} \mathrm{vol}_k(P_F K)^{-n}\sigma_{n,k}(dF)\right)^{-1/n},$$

其中 $Gr(k,n)$ 是由 k 维线性子空间构成的格拉斯曼流形 F, 其属于 $\mathbb{R}^n$; $\sigma_{n,k}$ 是 $Gr(k, n)$ 上的 Haar 概率测度, P_F 是到 F 上的正交投影。Grinberg [Gri] 证明了, $\Phi_k(K)$ 在保体积仿射变换下保持不变。设 $R_K > 0$ 满足 $\mathrm{vol}(R_K B_2^n) = \mathrm{vol}(K)$。Lutwak [Lu3] 猜想, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体 K 以及任意 $k = 1, \ldots, n-1$, 有

$$\Phi_k(K) \geq \Phi_k(R_K B_2^n) \tag{12}$$

等号成立当且仅当 K 是一个椭球。这个猜想长期以来一直悬而未决。Lutwak 证明, 对于 $k = 1$, 该结论可直接由布拉施克-桑塔洛′不等式推出（而情形 $k = n-1$ 则与 Petty 的一个不等式有关 [Pe2] [Pe3]）。最近, E. Milman 和 Yehudayoff [MY] 证明了这个猜想成立。作为证明中的一个步骤, 他们证明了 $\Phi_k(K) \geq \Phi_k(S_H K)$, 推广了 [MP1]此前的结果。此外, [MY]给出了 Petty 投影不等式的一个简化证明。这些有趣的结果表明, 式（12）可以看作是布拉施克-桑塔洛′不等式的推广。

2.3.5. ***K. Ball*** 的一个猜想。 Keith Ball [Ba1] 猜想, 如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸对称体, 那么

$$\int_K \int_{K^*} \langle x, y\rangle^2 dxdy \leq \int_{B_2^n}\int_{B_2^n} \langle x, y\rangle^2 dxdy = \frac{n}{(n+2)^2}\,\mathrm{vol}(B_2^n)^2. \tag{13}$$

并证明了一种反向不等式:

$$\frac{n\big(\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*)\big)^{\frac{n+2}{n}}}{(n+2)^2\,\mathrm{vol}(B_2^n)^{\frac{4}{n}}} \leq \int_K \int_{K^*} \langle x, y\rangle^2 dxdy,$$

这表明不等式（13）强于布拉施克-桑塔洛′不等式。在 [Ba1、Ba3], (13）对无条件体得到了证明。文献 [KaSa] 和 [Fa]中讨论了推广（后文第 7.3节将进一步介绍）。

2.3.6. 随机测度与对数凹测度的推广。 沿着文献 [PP],开创的思路, 文献 [CFPP] 的作者采用概率方法研究对称体的布拉施克-桑塔洛′不等式, 并得到了以下结果。

定理 6. 对于 $N, n \geq 1$, 设 $(\Omega\ \mathcal{B}, P)$ 是一个概率空间, 并且

- $X_1, \ldots, X_N$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ 是独立随机向量, 其分布相对于勒贝格测度的密度均不超过 *1*。
- $Z_1, \ldots, Z_N$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ 是均匀分布于 rB_2^n 的独立随机向量, 且 $\mathrm{vol}(rB_2^n) = 1$。
- μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转不变测度, 其密度为 $e^{\varphi(|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ 相对于勒贝格测度, 其中 φ: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非增函数。

- $C_{X,N}(\omega) = \mathrm{conv}(\pm X_1(\omega), \dots, \pm X_N(\omega))$ *and* $C_{Z,N}(\omega) = \mathrm{conv}(\pm Z_1(\omega), \dots, \pm Z_N(\omega))$ *for* $\omega \in \Omega$.

那么对于所有 $t \geq 0$，均有 $P(\{\omega \in \Omega;\ \mu(C_{X,\ N}(\omega)^*) \geq t\}) \leq P(\{\omega \in \Omega;\ \mu(C_{Z,\ N}(\omega)^*) \geq t\})$。

当然，同样的比较关系在期望意义下也成立。所用工具包括 Campi 和 Gronchi 的研究中采用的影子系统 [CG1], ，以及 Rogers 的重排不等式 [R] 和布拉斯坎普-利布-卢廷格的重排不等式 [BLL]。将定理6 应用于X_1、……、 X_N在一个凸体上均匀分布的 K，并利用当 $N \to +\infty$时，随机多胞体序列$P_{K,\ N}$：$=\mathrm{conv}(\pm X_1$、……、 $\pm X_N)$几乎必然在豪斯多夫度量下收敛到 K，我们推得，对于测度 μ，如定理6所述，有

$$\mu(K^*) \leq \mu((R_K B_2^n)^*) = \mu\left(\frac{B_2^n}{R_K}\right), \quad \text{where } R_K = \left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于显然 $\mu(K) \leq \mu(R_K B_2^n)$，我们推得 $\mu(K)\mu(K^*) \leq \mu(R_K B_2^n)\mu(B_2^n/R_K)$。此外，若 $t \mapsto \varphi(e^t)$ 是凹函数，则 $t \mapsto \mu(e^t B_2^n)$ 也是对数凹的（见 [CFM]）。因此，对于这类测度 μ 以及任意对称凸体 K，有

$$\mu(K)\mu(K^*) \leq \mu(B_2^n)^2. \tag{14}$$

文献 [CR] 证明，在上述假设下， $t \mapsto \mu(e^t K)$ 是对数凹的（将文献 [CFM]中确立的高斯测度的同一性质推广了）。文献 [Co] 提出了一个问题：对所有对称对数凹测度，式 (14) 是否成立？ μ。

我们将证明，当此外 μ 具有关于勒贝格测度的无条件密度 f 时，式（14）成立（若存在某个底面 $e_1, \dots, e_n$，使得对所有 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1;\ 1\}^n$ 以及 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = f(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i e_i)$，则称函数 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为无条件函数）。

定理7。 若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个测度，具有关于勒贝格测度的无条件且对数凹的密度，并且 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个对称凸体，则 $\mu(K)\mu(K^*) \leq \mu(B_2^n)^2$.

证明。首先，我们施加一个线性变换，使 μ 关于 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是无条件的。令 H 为一个坐标超平面，并令 $S_H K$ 为 K 关于 H 的施泰纳对称体。按照 Meyer-Pajor[MP1] 的证明（见上文第 2.1 节），利用 (6)，得到 $\mu(K^*) \leq \mu((S_H K)^*)$。此外，很容易看出 $\mu(K) \leq \mu(S_H K)$。因此，记 L 为从 K 出发，关于坐标超平面连续施泰纳对称化n次后得到的凸体，则有$\mu(K)\mu(K^*) \leq \mu(L)\mu(L^*)$。现在问题归结为 μ 和 K 均为无条件的情形。利用经典的 Pr´ekopa-Leindler 不等式（例如参见 [Pi，第 3] 页），[FM1] 中证明了此时 $\mu(L)\mu(L^*) \leq \mu(B_2^n)^2$。□

2.3.7. 布拉施克-桑塔洛´型球面不等式。布拉施克-桑塔洛´型的另一条不等式由 Gao、Hug 和 Schneider [GHS]在球面上建立。我们将$A \subset S^{n-1}$ 的极体定义为

$$A^\circ := \{y \in S^{n-1}; \langle x, y\rangle \leq 0, \text{ for all } x \in A\}.$$

若 $\mathrm{pos}(A) := \{tx; x \in A,\ t \geq 0\}$，则 $A^\circ = (\mathrm{pos}(A))^* \cap S^{n-1}$。令 σ 为 S^{n-1}上的 Haar 概率测度。 球冠是 S^{n-1} 与某个半空间的非空交集。这项工作后来由 Hu 和 Li 进一步推广 [HuLi] 他们证明了球面和双曲空间中的多条布拉施克-桑塔洛´型不等式。

定理 8. [GHS] 设 A 是 S^{n-1} 的一个非空可测子集，并且 C 是一个球冠，使得 $\sigma(A) = \sigma(C)$。那么 $\sigma(A^\circ) \leq \sigma(C^\circ)$。此外，若 A 是闭集且 $\sigma(A) < 1/2$，当且仅当 A是球冠时，等号成立。

GHS [给出了两种证明]。其中一种使用一种称为两点对称化的特殊对称化方法，而对于等号情形，则用到了 [AF]的结果。Hack 和 Pivovarov [HP] 按照定理 6的思路，给出了定理7的一个随机扩展。

3. Mahler conjecture. Special cases

关于 $\mathcal{P}(K)$ 下界的问题尚未解决，尽管近年来取得了显著进展。最早的结果由 Mahler 针对 $n = 2$ 得出，他证明了 $\mathcal{P}(K) \geq \mathcal{P}(\Delta_2) = \frac{27}{4}$ 其中 Δ_2 是一个三角形；而在中心对称情形下，$\mathcal{P}(\overline{K}) \geq \mathcal{P}([-1,1]^2) = \frac{8}{3}$ （另见 [To]）。证明中，他使用了多边形，因此无法给出等号成立的情形。值得注意的是，他一直对这个问题很感兴趣[Ma3, Ma4]。二维中的等号成立情形由 Meyer [Me2] 针对一般体，以及由 Reisner [Re1] 针对中心对称体给出（另见 [SR1, Me1, To]）。在维数 $n \geq 3$ 时情况如何？存在两个猜想，第一个由 Mahler 明确提出 [Ma1], ，第二个则并非如此。

猜想1. 对于每个凸体 K *in* $\mathbb{R}^n$，都有

$$\mathcal{P}(K) \geq \mathcal{P}(\Delta_n) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2},$$

其中 Δ_n 是 $\mathbb{R}^n$中的一个单纯形，当且仅当 $K = \Delta_n$时等号成立。

猜想 2. 对于每个维数为 n的中心对称凸体 K ，都有 s

$$\mathcal{P}(K) \geq \mathcal{P}(B_\infty^n) = \frac{4^n}{n!},$$

其中 $B_\infty^n = [-1,1]^n$ 是一个立方体，当且仅当 K 是一个汉纳多胞体（见下文定义 4 ）。

3.1. **对称情形下，猜想的最小值并不唯一。** 为了理解猜想 2 及其相关的不同现象，我们定义汉纳多胞体 [Ha], ，首先定义两个赋范空间 E 和 F的 ℓ_1-和 $E \oplus_1 F$ 以及 ℓ_∞-和 $E \oplus_\infty F$。

定义 3. 设$(E, \|\cdot\|_E)$ 和$(F, \|\cdot\|_F)$ 是两个赋范空间。于是，在 $E \times F$ 上，我们定义两个范数： E 和 F 的 ℓ_∞-和 $E \oplus_\infty F$ 的范数，以及它们的 ℓ_1-和 $E \oplus_1 F$ 的范数，定义如下

- $\|(x,\ y)\|_\infty =$最大值$(\|x\|_E,\ \|y\|_F)$。
- $\|(x,\ y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$。

注意，若 E 和 F 是赋范空间，则它们的 ℓ_∞-和的单位球是 E 和 F 在 $E \times F$ 中的单位球的闵可夫斯基和，而它们的 ℓ_1-和的单位球则是它们的凸包。类似地，若考虑两个凸体 $K \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $L \subset \mathbb{R}^{n_2}$，我们在 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 中定义两个凸体：

- $K \oplus_\infty L = K \times \{0\} + \{0\} \times L = \{x_1 + x_2 : x_1 \in K, x_2 \in L\}$, their ℓ_∞-sum.
- $K \oplus_1 L = \mathrm{conv}(K \times \{0\}, \{0\} \times L)$, their ℓ_1-sum.

ℓ_1 和 ℓ_∞ 次幂和的一个重要性质是

$$(K \oplus_\infty L)^* = K^* \oplus_1 L^*. \tag{15}$$

现在我们可以定义汉纳多胞体了。

定义 4。 在1维空间中，汉纳多胞体是对称线段。假设汉纳多胞体已在所有维数 $m \leq n-1$ 中定义。维数n 的汉纳多胞体是一个 n维赋范空间 H 的单位球，其中存在某个 k维子空间 E、 $1 \leq k \leq n$以及 H的一个（$n-k$）维子空间 F，它们的单位球都是汉纳多胞体，且 $1 \leq k \leq n-1$、 H 是 E 与 F的 ℓ_∞-和或 ℓ_1-和。

现在我们来讨论汉纳多胞体的基本性质：

- 在 $\mathbb{R}^2$ 中，汉纳多胞体只有一个（在同构意义下），即正方形。
- 在 $\mathbb{R}^3$ 中，汉纳多胞体恰有两个（在同构意义下），分别是立方体和中心对称八面体。
- 在 $\mathbb{R}^4$ 中，汉纳多胞体有 4 个不同的类别（在同构意义下），其中有两个既不同构于立方体，也不同构于交叉多胞体。而在 $\mathbb{R}^n$ 中，其数量会随着 n 快速增加。
- 单位球为汉纳多胞体的赋范空间 K 在等距意义下恰好是满足以下 $3-2$交性质的空间：对于任意三个向量 u_1， u_2和 u_3 若（$K+u_i$）$\cap$（$K+u_j$）$\neq \emptyset$，对所有 $1 \leq i < j \leq 3$均成立，则这三个球的交集非空 [HL]。
- 汉纳多胞体是无条件的（见下文定义5 ）。
- 若 K 是汉纳多胞体，则 K^*也是。这由（15）可得。
- 若 $K \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $L \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 是两个凸体，则

$$\mathcal{P}(K \oplus_\infty L) = \mathcal{P}(K \oplus_1 L) = \frac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2)!}\mathcal{P}(K)\mathcal{P}(L).$$

- 归纳 法可得， $\mathbb{R}^n$ 中汉纳多胞体的体积乘积为 $\binom{4^n}{n}$。

从某种意义上说，猜想1似乎比猜想 2更容易，因为在同构意义下，所提出的极小值只有一个。但极性是相对于凸体 K的 Santal´ó 点进行的，而该点的位置并不总是理想，因此必须证明，对于每个 $z \in \mathrm{int}(K)$， $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^z) \geq \mathcal{P}(\Delta_n)$。然而请注意，若 K 在所有其他凸体中具有最小体积乘积，那么它的 Santal´ó 点也就是它的重心。

3.2. **平面情形**。 首先，注意到该猜想在以下情形中成立，且等号成立的情形为$n=2$ (Mahler [Ma1], Meyer[Me2] （另一种证明以及等号成立的情形）。我们简要勾勒平面情形的证明，并借此举例说明如何使用影子系统方法以及定理 2 ；请注意，本例中的方法可以追溯到 [Ma1] 最初的证明，而且对于一般情形和对称情形，证明几乎完全相同。我们将重点讨论一般情形。

证明。（ $\mathbb{R}^2$中的下界）只需证明，对于所有凸多边形$T \subset \mathbb{R}^2$， $\mathcal{P}(T) \geq \mathcal{P}(\Delta_2)$。主要思路是移除 T的顶点。我们对顶点数 k 使用归纳法。设 T是一个有 $k \geq 4$ 个顶点的多边形。假设 $T = \mathrm{conv}(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$，其中 $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$按顺时针顺序排列。我们将证明，对于一个仅有 $k-1$ 个顶点的多边形 Q ，有 $\mathcal{P}(T) \geq \mathcal{P}(Q)$。对于 $i \neq j$，取一条经过 v_i 和 v_j的直线$\ell_{i,j}$。令$\theta \in S^1$ 与直线$\ell_{1,k-1}$平行。并定义 $T_t = \mathrm{conv}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k + t\theta)$（即将 v_k 沿着平行于$\ell_{1,k-1}$的直线移动）。直线 $\{v_k + t\theta; t \in \mathbb{R}\}$ 在 $t = a$和ℓ_1时分别于$\ell_{k-1,k}$ 交于 v_k'，在 $t = b$时交于 v_1'。由于 $T_0 = T$，可以假设 $a < 0 < b$。容易看出，对于 $t \in [a,b]$， $t \mapsto T_t$是一个影子系统，且 $\mathrm{vol}(T_t) = \mathrm{vol}(T)$。根据定理 2， $t \mapsto \mathcal{P}(T_t)^{-1}$ 在区间 $[a,b]$ 上是凸函数，因此在端点处取得极大值。因此

$\mathcal{P}(T) \geq \min(\mathcal{P}(T_a)\ \mathcal{P}(T_b))$，其中 $T_a = \mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_{k-2}, v_k')$和 $T_b = \mathrm{conv}(v_1', v_2, \ldots, v_{k-1})$是仅有 $k-1$ 个顶点的多边形。□

注 2. 上述方法曾用于证明马勒猜想的一些部分情形（参见 [MR2、FMZ、AFZ、AFGZ、Sar]）。遗憾的是，似乎无法将这种方法推广到3维及更高维数。其中一个原因是，多胞体 P 的一个顶点可能是许多非单纯面的顶点，那么如何在不破坏 P 的组合结构的情况下“移动” v？而一旦 P 的组合结构遭到破坏，计算体积就很困难。

注 3. 在 [Reb], 中，Rebollo Bueno 还建立了马勒猜想平面情形的随机版本。沿用第2.3.6节的记号，他证明，对于平面上的任意中心对称凸体 K 以及任意 $r \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{vol}(P_{K,N}^*)^{-r}) \leq \mathbb{E}(\mathrm{vol}(P_{Q,N}^*)^{-r}),$$

其中 Q 是一个正方形，且 $\mathrm{vol}(Q) = \mathrm{vol}(K)$。当 $r = 1$ 且 $N \to +\infty$时，这就还原了马勒猜想的平面情形。对于平面上的一般凸体，[Reb]中也证明了同类型的结果。

3.3. **佐诺体的情形。** 该猜想对佐诺体及带状体的极体成立，立方体是等号情形（Reisner [Re1、Re2] 以及 Gordon、Meyer 和 Reisner [GMR] 给出了第二种证明）。我们回忆一下，在 $\mathbb{R}^n$ 中的佐诺体是 带状多胞体的豪斯多夫极限，也就是说，是线段有限和的豪斯多夫极限。由于线段关于其中点对称，任何带状多胞体，以及因此任何佐诺体，都是中心对称的。从现在起，当谈到佐诺体 Z 时，我们将假设 $Z = -Z$。此外，佐诺体的极体可以看作 $L_1([0,1],\ dx)$ 中有限维子空间的单位球。注意，$\mathbb{R}^2$ 中的每个凸中心对称体都是佐诺体。关于佐诺体的基本性质，可参阅 [Bo、GW、Sc] 。

证明。（佐诺体的体积乘积下界 [GMR]）对于佐诺体 $Z \subset \mathbb{R}^n$，存在一个 μ 上的测度 S^{n-1}，使得对所有 $h_Z(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle| d\mu(u)$ 成立$x \in \mathbb{R}^n$。由于 $\mathrm{vol}(Z) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp} Z) d\mu(u)$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(Z^*)\int_{S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp} Z) d\mu(u) &= n\,\mathrm{vol}(Z)\,\mathrm{vol}(Z^*) = \frac{n+1}{2}\,\mathrm{vol}(Z)\int_{Z^*} h_K(x) dx \\ &= \frac{n+1}{2}\,\mathrm{vol}(Z)\int_{S^{n-1}}\left(\int_{Z^*} |\langle x, u\rangle| dx\right) d\mu(u).\end{aligned}$$

因此，对于某个 $u \in S^{n-1}$，有

$$\mathrm{vol}(Z^*)\,\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp} Z) \leq \frac{n+1}{2}\,\mathrm{vol}(Z)\int_{Z^*} |\langle x, u\rangle| dx.$$

现在 $\int_{Z^*} |\langle x, u\rangle| dx = 2\int_0^\infty t f(t) dt$，其中 $f(t) = \mathrm{vol}\left(Z^* \cap (u^\perp + tu)\right)$ 是在 $u^\perp$ 中，Z^* 与平行于 $u^\perp$ 的超平面的截面的体积。注意，$f(0) = \mathrm{vol}(Z^* \cap u^\perp)$，且$2\int_0^\infty f(t) dt = \mathrm{vol}(Z^*)$。根据布伦–明可夫斯基定理，函数 $f^{\frac{1}{n-1}}$ 在其支集上是凹函数。根据一个经典估计（例如参见 [MiP]），

$$\int_0^\infty t f(t) dt \leq \frac{n}{n+1}\frac{(\int_0^\infty f(t) dt)^2}{f(0)},$$

当 a 时等号成立 当且仅当 $f(t) = f(0)(1-ct)_+^{n-1}$，对某个 $c>0$ 及所有 $t \geq 0$ 均成立。这给出

$$\int_{Z^*} |\langle x,u\rangle| dx \leq 2\frac{n}{n+1}\frac{4^{-1}\operatorname{vol}(Z^*)^2}{\operatorname{vol}_{n-1}(Z^*\cap u^\perp)} = \frac{n}{2(n+1)}\frac{\operatorname{vol}(Z^*)^2}{\operatorname{vol}_{n-1}(Z^*\cap u^\perp)},$$

因此

$$\operatorname{vol}(Z^*)\operatorname{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}Z) \leq \frac{n+1}{2}\operatorname{vol}(Z)\frac{n}{2(n+1)}\frac{\operatorname{vol}(Z^*)^2}{\operatorname{vol}_{n-1}(Z^*\cap u^\perp)},$$

使得

$$\operatorname{vol}(Z)\operatorname{vol}(Z^*) \geq \frac{4}{n}\operatorname{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}Z)\operatorname{vol}_{n-1}(Z^*\cap u^\perp),$$

因此可以通过归纳法得出结论，且等号成立，因为 $P_{u^\perp}Z$ 在维数 $n-1$ 下是一个佐诺体，并且 $(P_{u^\perp}Z)^* = Z^*\cap u^\perp$。 □

注 4。 Campi 和 Gronchi [CG2] 提出了一个关于 L_p-带状多胞体体积的非常有趣的不等式，特别是由此得到不等式，并为上述结果提供了另一种证明。值得注意的是， [CG2] 中的证明基于影子系统技术。Saroglou 在 [Sar]中给出了另一种运用影子系统的证明。

注 5。 Marc Meckes [Mec]基于 Leinster 引入的 大小 这一概念， [Lei], 为佐诺体的马勒猜想给出了另一种证明。大小是度量空间的一种数值型等距不变量。他研究了超度量赋范空间中的凸体的大小（这类空间包括 ℓ_p^n， $p\in[1,2]$），并利用其单位球的 Holmes-Thompson 内在体积，证明了这类空间上的大小存在一个新的上界。

3.4. **无条件体的情形**。

定义 5。 设 K *in* $\mathbb{R}^n$ 是一个凸体。若存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组底面 $e_1,\dots,e_n$，使得 $x_1e_1+\cdots+x_ne_n \in K$ 当且仅当 $|x_1|e_1+\cdots+|x_n|e_n \in K$，则称 K 为无条件的。若存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组底面 $e_1,\dots,e_n$，使得对每个 $1\leq i\leq n$，都有 $P_iK = K\cap H_i$，其中 H_i 是 $\{e_j, j\neq i\}$ 的线性张成空间， P_i 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 H_i 、平行于 e_i 的线性投影，则称 K 为几乎无条件的。

若 K 是无条件的，经过不改变 $\mathcal{P}(K)$的线性变换后，我们可以假设$(e_1,\dots,e_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。无条件体是几乎无条件的且中心对称。另请注意，若 K 关于某个底面是无条件的（分别为几乎无条件的），则 K^* 关于对偶底面也无条件（分别为几乎无条件）。

我们沿用 [Me1] 对不等式 $\mathcal{P}(K)\geq\mathcal{P}(B_\infty^n)$ 的证明（最初的证明见[SR1]）。我们不证明等号成立的情形（汉纳多胞体），因为这部分更复杂。

证明。 我们对 n使用归纳法。对于 $n=1$，结论显然成立。我们假设 $e_1,\dots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准基。令 $K_+ = K\cap\mathbb{R}^n_+$, $K^*{}_+ = K^*\cap\mathbb{R}^n_+$。于是 $\mathcal{P}(K) = 4^n\operatorname{vol}(K_+)\operatorname{vol}(K_+^*)$。对于 $x\in\mathbb{R}^n_+$， 有

$$x\in K_+ \text{ if and only if } \langle x,y\rangle\leq 1 \text{ for any } y\in K_+^*,$$
$$y\in K_+^* \text{ if and only if } \langle x,y\rangle\leq 1 \text{ for any } x\in K_+.$$

对于 $1\leq i\leq n$, $K_i := K\cap\{x_i=0\}$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的无条件体，且 $(K_i)^* = (K^*)_i$。设 $(K_i)_+ = K_i\cap(\mathbb{R}^+)^n$。对于 $x=(x_1,\dots,x_n)\in K_+$， 令 $C_i(x)$为 $\{x\}$ 与 $(K_i)_+$的凸包。由于 $C_i(x)$是一个以 x 为顶点、以 $(K_i)_+$为底面的锥，因此有

$$\operatorname{vol}\big(C_i(x)\big) = \frac{x_i}{n}\operatorname{vol}_{n-1}\big((K_i)_+\big).$$

Thus

$$\text{vol}(K_+) \geq \text{vol}\left(\cup_{i=1}^n C_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \text{vol}\left(C_i(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \,\text{vol}_{n-1}\left((K_i)_+\right). \tag{16}$$

令 $a := \frac{1}{\text{vol}(K_+)}\left(\text{vol}_{n-1}\left((K_1)_+\right), \ldots, \text{vol}_{n-1}\left((K_n)_+\right)\right)$ 属于 $\mathbb{R}^n$。由(16)可得，对所有 $x \in K_+$ 均有 $\langle a, x\rangle \leq 1$，即 $a \in K_+^*$。此外，$a^* := \frac{1}{\text{vol}(K_+^*)}\left(\text{vol}_{n-1}\left((K_1^*)_+\right), \ldots, \text{vol}_{n-1}\left((K_n^*)_+\right)\right) \in K_+^*$。因此 $\langle a, a^*\rangle \leq 1$，即

$$\frac{\sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}\left((K_i)_+\right)\text{vol}_{n-1}\left((K_i^*)_+\right)}{n^2\,\text{vol}(K_+)\,\text{vol}((K_+^*)} \leq 1,$$

从而

$$\mathcal{P}(K) = 4^n \,\text{vol}(K_+)\,\text{vol}(K_+^*) \geq \frac{4^n}{n^2}\sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}\left((K_i)_+\right)\text{vol}_{n-1}\left((K_i^*)_+\right).$$

对于 $1 \leq i \leq n$，有 $\text{vol}_{n-1}(K_i) = 2^{n-1}\text{vol}_{n-1}\left((K_i)_+\right)$，且 $\text{vol}_{n-1}(K_i^*) = 2^{n-1}\text{vol}_{n-1}\left((K_i^*)_+\right)$。由于这些 K_i 也是无条件的，归纳假设给出 $\mathcal{P}(K_i) \geq \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$，$1 \leq i \leq n$。因此

$$\mathcal{P}(K) \geq \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}(K_i)\,\text{vol}_{n-1}(K_i^*) \geq \frac{4}{n^2}\cdot n \cdot \frac{4^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{4^n}{n!}.$$

□

注 6. 对这个证明稍作修改，就可以处理几乎无条件的中心对称体的情形。注意，在 $\mathbb{R}^2$ 中，每个中心对称体都是几乎无条件的。

3.5. **三维对称情形。** 对称情形在 $\mathbb{R}^3$ 中由 Rieh 和 Shibota [IS1] 于 2017年 解决，证明相当复杂，篇幅约六十页。这里我们想概述其主要思路，并将其与上文介绍的无条件情形联系起来。我们将采用 [FHMRZ]中给出的较短证明。

对称体 $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 通常并非几乎无条件的，因此也不是无条件的。然而，每个平面凸体都有一个近乎无条件基。对于$n = 3$，我们的目标是证明，三维凸对称体 K 仍可能具有无条件体的核心性质。为此，我们借助以下等分结果：

定理 9. 设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 为一个对称凸体。那么存在 *3* 个经过原点的平面 H_1, H_2, H_3，使得：

- 它们将 K 分成8个等体积部分，并且
- 对于每个 $i = 1,2,3$，截面 $K \cap H_i$ 被另外两个平面分成4 个等面积部分。

请注意，定理 9 属于内容极为丰富的等分理论。例如，Hadwiger 的一个著名结果 [Hd], 回答了 Gr¨unbaum [Gr], 提出的问题，该结果表明，对于 $\mathbb{R}^3$中的任意绝对连续有限测度，都存在三个平面，使得每个八分体都具有总质量的 $1/8$ 。为了证明定理 9，可以使用 Klartag 的一个结果（定理 2.1，见 [Kl1]）；详情请参阅 [FHMRZ]。

我们的目标是构造公式（16）的一个类似形式。考虑一个足够规则的定向超曲面 $A \subset \mathbb{R}^n$ 并定义向量

$$\overrightarrow{V}(A) = \int_A \overrightarrow{n_A}(x)dx,$$

其中，$\overrightarrow{n_A}(x)$ 是由其定向定义的 A 在 x 处的单位法向量。接下来，对于满足 $0 \in \mathrm{int}(K)$ 的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，子集 $A \subset \partial K$ 的定向由 K 的外法向量 $\overrightarrow{n_K}$ 给出。如果 $\mathcal{C}(A) := \{rx;\ 0 \le r \le 1,\ x \in A\}$，那么

$$\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A)) = \frac{1}{n}\int_A \langle x, \overrightarrow{n_K}(x)\rangle dx.$$

以下命题是我们证明中的关键命题。

命题1。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为凸体，且 $0 \in \mathrm{int}(K)$，并设 A 为 ∂K 的博雷尔子集，满足 $\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A)) \neq 0$，则对所有 $x \in K$，

$$\frac{1}{n}\langle x, \overrightarrow{V}(A)\rangle \le \mathrm{vol}(\mathcal{C}(A)) \text{ and thus } \frac{\overrightarrow{V}(A)}{n\,\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A))} \in K^*.$$

证明。对所有 $x \in K$，我们有 $\langle x, \overrightarrow{n_K}(z)\rangle \le \langle z, \overrightarrow{n_K}(z)\rangle$，对每个 $z \in \partial K$ 均成立。因此对所有 $x \in K$，

$$\langle x, \overrightarrow{V}(A)\rangle = \int_A \langle x, \overrightarrow{n_K}(z)\rangle dz \le \int_A \langle z, \overrightarrow{n_K}(z)\rangle dz = n\,\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A)).$$

□

推论 1. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，且 $0 \in \mathrm{int}(K)$。若 $A \subset \partial K$ 和 $B \subset \partial K^*$ 是满足以下条件的博雷尔子集：$\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A)) > 0$，且 $\mathrm{vol}(\mathcal{C}(B)) > 0$，那么

$$\langle \overrightarrow{V}(A), \overrightarrow{V}(B)\rangle \le n^2\,\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A))\,\mathrm{vol}(\mathcal{C}(B)).$$

证明。利用命题 1，可得 $\frac{\overrightarrow{V}(A)}{n\mathrm{vol}(\mathcal{C}(A))} \in K^*$ 且 $\frac{\overrightarrow{V}(B)}{n\mathrm{vol}(\mathcal{C}(B))} \in K$。 □

猜想 2 在 $n = 3$：的证明 由于体积乘积是连续的，只需对一个中心对称、光滑且严格凸的凸体 K (参见 [Sc]第 3.4 节)。由体积乘积的线性不变性可知，我们不妨假设，由定理 9 得到的等分性质由标准正交基给出的坐标平面（e_1, e_2, e_3）满足。与无条件情形一样，我们将 $\mathbb{R}^3$ 和凸体 K 按照该底面定义的八分体划分，这些八分体如推论1中那样定义锥。主要问题在于，与无条件情形截然不同，由 K 与一个八分体相交所定义的锥的对偶锥，并非 K^* 与该八分体的交集。我们需要借助一些组合学来解决这个问题。

对于 $\varepsilon \in \{-1;1\}^3$，令 ε-八分体为 $\{x \in \mathbb{R}^3;\ \varepsilon_i x_i \ge 0$ 对于 $i = 1,\ 2,\ 3\}$ 并且对于 $L \subset \mathbb{R}^3$，令 L_ε 为 L 与 ε-八分体的交集：$L_\varepsilon = \{x \in L; \varepsilon_i x_i \ge 0;\ i = 1,\ 2,\ 3\}$. 令$N(\varepsilon) := \{\varepsilon' \in \{-1,1\}^3 : \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i - \varepsilon'_i| = 2\}$。那么，$\varepsilon' \in N(\varepsilon)$ 当且仅当 $[\varepsilon, \varepsilon']$ 是 $[-1,1]^3$ 的一条边。

如果 $K_\varepsilon \cap K_{\varepsilon'}$ 是一个超曲面，我们定义 $K_\varepsilon \overrightarrow{\cap} K_{\varepsilon'}$ 按照 ∂K_ε 的外法向量定向。利用斯托克斯定理，我们得到

$$\overrightarrow{V}(\partial K_\varepsilon) = \int_{\partial K_\varepsilon} \overrightarrow{n_{\partial K_\varepsilon}}(x)dx - \sum_{\varepsilon' \in N(\varepsilon)} \overrightarrow{V}(K_\varepsilon \overrightarrow{\cap} K_{\varepsilon'}).$$

利用 $K \cap e_i^{\perp}$ 面积的等分，我们得到

$$\overrightarrow{V}(\partial K_\varepsilon) = -\sum_{\varepsilon' \in N(\varepsilon)} \overrightarrow{V}(K_\varepsilon \overrightarrow{\cap} K_{\varepsilon'}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{vol}(K \cap e_i^{\perp})}{4} \varepsilon_i \overrightarrow{e_i}.$$

我们来考察对偶体。由于 K 是严格凸且光滑的，存在一个微分同胚φ：$\partial K \to \partial K^*$，使得对所有 $x \in \partial K$，都有 $\langle \varphi(x)\ x\rangle = 1$。利用一次齐次性，我们将 φ 延拓到 $\mathbb{R}^3$：对于 $\lambda \geq 0$，$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$。然后

$$K^* = \bigcup_{\varepsilon} \varphi(K_\varepsilon) \text{ and } \mathrm{vol}(K^*) = \sum_{\varepsilon} \mathrm{vol}\left(\varphi(K_\varepsilon)\right).$$

由体积等分可得

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) = \sum_{\varepsilon} \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(\varphi(K_\varepsilon)) = 8\sum_{\varepsilon} \mathrm{vol}(K_\varepsilon)\,\mathrm{vol}\left(\varphi(K_\varepsilon)\right).$$

由推论 1，我们推得，对于 $\varepsilon \in \{-1,1\}^3$

$$\mathrm{vol}(K_\varepsilon)\,\mathrm{vol}\left(\varphi(K_\varepsilon)\right) \geq \frac{1}{9}\langle \overrightarrow{V}(\partial K_\varepsilon), \overrightarrow{V}\left(\varphi\big(\partial K_\varepsilon\big)\right)\rangle.$$

Thus

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) &\geq \frac{8}{9}\sum_{\varepsilon} \langle \overrightarrow{V}(\partial K_\varepsilon), \overrightarrow{V}\left(\varphi(\partial K_\varepsilon)\right)\rangle \\
&= \frac{8}{9}\sum_{\varepsilon} \langle \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{vol}(K \cap e_i^{\perp})}{4} \varepsilon_i \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{V}\left(\varphi\big(\partial K_\varepsilon\big)\right)\rangle \\
&= \frac{8}{9}\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{vol}(K \cap {e_i}^{\perp})}{4} \langle \overrightarrow{e_i}, \sum_{\varepsilon} \varepsilon_i \overrightarrow{V}(\varphi(\partial K_\varepsilon)\rangle.
\end{aligned}$$

现在我们对 $\varphi(\partial K)$ 使用斯托克斯定理，得到

$$\overrightarrow{V}\left(\varphi((\partial K_\varepsilon)\right) = -\sum_{\varepsilon' \in N(\varepsilon)} \overrightarrow{V}\left(\varphi(K_\varepsilon \overrightarrow{\cap} K'_{\varepsilon'})\right).$$

下一步需要仔细计算各曲面按照定向取和，过程中会出现许多抵消。接下来，将 K 和 $\varphi(K)$ 的相应部分组合起来，得到

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) \geq \frac{4}{9}\sum_{i=1}^{3} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_i^{\perp}) \langle \overrightarrow{e_i}, V\left(\varphi(K \cap \overrightarrow{e_i}^{\perp})\right)\rangle$$

（参见 [FHMRZ]，了解精确计算）。设 P_i 是到 $e_i{}^{\perp}$的正交投影。那么 P_i：φ（$K \cap e_i{}^{\perp}$）$\to$ P_i（K^*）是一个双射。利用柯西公式计算投影体积，可得

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{e_i}, V\left(\varphi(K \cap {e_i}^{\perp})\right)\rangle &= \int_{\varphi(K \cap {e_i}^{\perp})} \langle \overrightarrow{n_{\varphi(K \cap {e_i}^{\perp})}}(x), \overrightarrow{e_i}\rangle dx \\
&= \mathrm{vol}_{n-1}\left(P_i(\varphi(K \cap {e_i}^{\perp}))\right) = \mathrm{vol}_{n-1}\left(P_i(K^*)\right).
\end{aligned}$$

并且如果 $\varepsilon=(\varepsilon_1、\ldots\ldots、\varepsilon_n)$,

$$\operatorname{vol}(K)\operatorname{vol}(K^*)\geq\frac{8}{9}\sum_{i=1}^{3}\frac{\operatorname{vol}_{n-1}\left(K\cap e_i^{\perp}\right)}{4}\langle\overrightarrow{e_i},\sum_{\varepsilon}\varepsilon_i\overrightarrow{V}\left(\varphi(\partial K_\varepsilon)\right)\rangle.$$

最后

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(K)\operatorname{vol}(K^*)&\geq\frac{4}{9}\sum_{i=1}^{3}\operatorname{vol}_{n-1}(K\cap e_i^{\perp})\operatorname{vol}_{n-1}\left(P_i(K^*)\right)\\&=\frac{4}{9}\sum_{i=1}^{3}\operatorname{vol}_{n-1}(K\cap e_i^{\perp})\operatorname{vol}_{n-1}\left((K\cap e_i^{\perp})^*\right)\\&\geq\frac{4}{9}\times 3\times\frac{4^2}{2!}=\frac{4^3}{3!}.\end{aligned}$$

□

3.6. **猜想成立的其他特殊情形**。下面列出若干其他已证明猜想中的不等式成立的特殊情形:

- 对称多胞体，具有 $\mathbb{R}^n$ 个 $2n+2$ 顶点，其中 $n\leq 9$ （Lopez 和 Reisner [LR]），以及任意 n （Karasev [Ka]）。
- 对于 $p\geq 1$，穿过 0 的超平面截面 $B_p^n=\{(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n|x_i|^p\leq 1\}$ （Karasev [Ka]）。迄今为止，Karasev 对这些结果的证明，是辛几何通过台球方法应用于证明马勒猜想特殊情形的少数几个具体例子之一。
- 旋转体 [MR1]。
- 具有许多对称性的某些凸体：Barthe 和 Fradelizi 在 [BF],中证明，对一族超平面对称、且这些超平面的交集仅为一点的凸体 K 满足猜想1。更一般地， [BF] 证明了，若 K 在固定 $P_1\times\cdots\times P_k$的反射下保持不变，其中对于$1\leq i\leq k$，这些 P_i 是正多胞体，或子空间 E_i 中的一个欧几里得球，且$\mathbb{R}^n=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$，则 $\mathcal{P}(K)\geq\mathcal{P}(P_1\times\cdots\times P_k)$。

- Iriyeh 和 Shibata 在 [IS2、IS3]中证明了类似的结果。他们确定了在某些对称群作用下保持不变的凸体的体积乘积的精确下界（维数为 3 [IS2] 时的许多经典对称群，以及单纯形和立方体的特殊正交群 [IS3]）。
- 中的多胞体 $\mathbb{R}^n$ 顶点数不超过 $n+3$ 的 [MR2]。
- 几乎无条件的对称体（Saint Raymond [SR1]）与汉纳多胞体的等号情形（ Meyer [Me1], Reisner [Re3]）。此外， [SR1] 还证明了一个关于凸体无条件和的结果：设 $1\leq i\leq m$，令 $K_i\subset\mathbb{R}^{d_i}$ 为中心对称凸体，并令 $L\subset\mathbb{R}^m$ 为相对于标准基 $e_1,\ldots,e_m$ 的无条件体。我们定义 相对于 $K_1,\ldots,K_m$ 的无条件和 L 为

$$K_1\oplus_L\cdots\oplus_L K_m=\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^{d_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{d_m};\|x_1\|_{K_1}e_1+\cdots+\|x_m\|_{K_m}e_m\in L\}.$$

显然， $K_1\oplus_L\cdots\oplus_L K_m$是 $\mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_m}$中的对称凸体。此外，容易看出 $\left(K_1\oplus_L\cdots\oplus_L K_m\right)^*=K_1^*\oplus_{L^*}\cdots\oplus_{L^*}K_m^*$，并记 $L_+=L\cap\mathbb{R}_+^m$

以及 ${}^*L_+ = L^* \cap \mathbb{R}^m_+$，有

$$\mathcal{P}(K_1 \oplus_L \cdots \oplus_L K_m) = \Big(\int_{(t_1,\ldots,t_m)\in L_+} \prod_{i=1}^m t_i^{d_i-1} dt_1 \ldots dt_m \Big) \times$$

$$\Big(\int_{(t_1,\ldots,t_m)\in L_+^*} \prod_{i=1}^m t_i^{d_i-1} dt_1 \ldots dt_m \Big) \prod_{i=1}^m \mathcal{P}(K_i)$$

and

$$\Big(\int_{(t_1,\ldots,t_m)\in L_+} \prod_{i=1}^m t_i^{d_i-1} dt_1 \ldots dt_m \Big) \Big(\int_{(t_1,\ldots,t_m)\in L_+^*} \prod_{i=1}^m t_i^{d_i-1} dt_1 \ldots dt_m \Big) \geq \frac{d_1! \times \cdots \times d_m!}{(d_1 + \cdots + d_m)!}.$$

注意，由 [Me1]or [Re3]可知，最后一个不等式取等号当且仅当 L 是汉纳多胞体。最后，如果 $\mathcal{P}(K_i) \geq 4^i/i!$，$1 \leq i \leq m$，则

$$\mathcal{P}(K_1 \oplus_L \cdots \oplus_L K_m) \geq \frac{4^{d_1+\cdots+d_m}}{(d_1 + \cdots + d_m)!}.$$

- 尽管经典算子理想的单位球体积已被计算出来（见 [SR2]），但其是否满足猜想 2 尚不清楚。

- A关于猜想 2 的一种基于小波的解释见 [Ba4]
- Mahler 猜想与布拉施克-桑塔洛不等式同´对 $\lambda_1(K)\lambda_1(K^*)$ 的最大值和最小值之间联系的讨论见 K 是一个凸体，而 $\lambda_1(K)$ 是 K 相对内部上带狄利克雷条件的拉普拉斯算子的第一特征值 $u = 0$ 在 ∂K，见 [BuF]。

3.7. **局部极小值与稳定性结果**。可以研究 $\mathcal{P}(K)$ 的局部极小值的性质。一个自然的未决问题是，这样的极小值是否必定是多胞体。通过研究具有正曲率的凸体，人们证明了这一方向上的若干结果。Stancu [St] 证明，若 K 是一个足够光滑且处处具有严格正高斯曲率的凸体，那么 K 的体积乘积不可能是局部极小值。她证明了这一点，依据的是对于某个 $\delta(K) > 0$，有

$$\mathrm{vol}(K_\delta)\,\mathrm{vol}((K_\delta)^*) \geq \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) \geq \mathrm{vol}(K^\delta)\,\mathrm{vol}((K^\delta)^*),$$

对于任意 $\delta \in (0,\ \delta(K))$，其中 K_δ 和 K^δ 分别表示与 K 相关的凸浮体和照明体，参数为 δ。关于局部极小值，一个更强的结果由 [RSW] 证明：若 K 是体积乘积的局部极小凸体，那么 K 其边界上任何一点都不具有正曲率。关于局部极小值的研究在 [HHL], 中得以继续，作者根据支撑函数计算了体积乘积的一阶和二阶导数。这些结果可视为一种迹象，暗示极小值必定是多胞体。我们还注意到，[GM]将其推广到了函数情形（见下文第 5 节）。

众所周知，猜想中的全局极小值点——中心对称情形下的汉纳多胞体，以及一般情形下的单纯形——实际上都是局部极小值。这个问题源自陶哲轩的博客 [T1，T2], 其中讨论了许多可能有助于更深入理解体积乘积的观点。Nazarov、Petrov、Ryabogin 和 Zvavitch[NPRZ] 证明了立方体和交叉多胞体都是局部极小值。Kim 和 Reisner [KiR] 将这一结果推广到非对称体的情形，证明单纯形是局部极小值。

对称情形下最一般的结果由 Kim [Ki] 得出，他研究了汉纳多胞体的情形。更确切地说，设

$$d_{BM}(K,\ L)\ =\text{下确界}\{d\colon\ \ d>0,\ \text{存在}\ T\in GL(n)\ \text{使得}\ K\subseteq TL\subseteq dK\}$$

是两个对称凸体 K，$L\subset\mathbb{R}^n$之间的班纳赫-马祖尔乘法距离。于是

定理10。存在常数 $\delta(n)\ c(n)\ >0$，它们仅依赖于 n，使得若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体，且

$$\min\{d_{BM}(K,H):H\ is\ a\ Hanner\ polytope\ in\ \mathbb{R}^n\}=1+\delta,$$

对于某个 $0<\delta\leq\delta(n)$，则

$$\mathcal{P}(K)\geq(1+c(n)\delta)\cdot\mathcal{P}(B_\infty^n).$$

上述定理被用于 [KiZ]，以证明无条件体这一类附近体积乘积的稳定性。关于极小值和极大值的稳定性问题也在多种情形下得到了研究 [BMMR，BH，KiZ，Bor，FHMRZ]。文献 [FHMRZ], 探讨了体积乘积全局稳定性的一般方法，并证明了以下自然引理:

引理1。设$(\mathcal{A}_1,d_1)$ 是一个紧致度量空间，$(\mathcal{A}_2,d_2)$ 是一个度量空间，$f\colon\ \mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$是一个连续函数，且 D 是 $\mathcal{A}_2$的闭子集。那么，
(1) 对任意 $\beta>0$，存在 $\alpha>0$，使得 $d_1(x,f^{-1}(D))\geq\beta$蕴含 $d_2(f(x)\ D)\geq\alpha$。*(2)* 若对某个 $c_1,c_2>0$，$d_1(x,f^{-1}(D))<c_1$蕴含 $d_2(f(x)\ D))\geq c_2d_1(x,f^{-1}(D))$，则存在某个 $C>0$，使得对每个 $x\in\mathcal{A}_1.$，都有 $d_1(x,f^{-1}(D))\leq cd_2(f(x)\ D))$

结合一条关于局部极小值的结果（例如定理10），引理1 几乎立即给出体积乘积已知界的一个稳定性结果。我们以 $\mathbb{R}^3$中的对称凸体为例来说明这一技巧。

定理11。存在一个绝对常数 $C>0$，使得对于任意满足 $\mathcal{P}\left(K\right)\ \leq\ (1+\delta)\ \mathcal{P}\left(B_\infty^3\right)$ 的对称凸体 $K\subset\mathbb{R}^3$ 和 $\delta>0$，都有

$$\min\{d_{BM}(K,B_\infty^3),d_{BM}(K,B_1^3)\}\leq1+C\delta.$$

证明。利用体积乘积的线性不变性和约翰定理，我们将问题归结为情形 $B_2^3\subseteq K\subseteq\sqrt{3}B_2^3$。我们的度量空间 $\mathcal{A}_1$ 是由这类凸体构成的集合，并配备豪斯多夫度量 d_H。令 $\mathcal{A}_2=\mathbb{R}$。那么 f：由 $f(K)=\mathcal{P}(K)$ 定义的 $\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$，在 $\mathcal{A}_1$ 上连续（例如参见 [FMZ]）。最后，令 $D=\mathcal{P}(B_\infty^3)$。根据 [IS1, FHMRZ] 中证明的等号情形描述（即 K 或 K^* 必须是平行六面体），我们得到

$$\begin{aligned}f^{-1}(D)&=\{K\in\mathcal{A}_1;\mathcal{P}(K)=\mathcal{P}(B_\infty^3)\}\\&=\{K\in\mathcal{A}_1;K=SB_\infty^3\ \text{or}\ K=\sqrt{3}SB_1^3,\ \text{for some}\ S\in\mathrm{SO}(3)\}.\end{aligned}$$

注意，B_∞^3 处于约翰位置（例如参见 [AGM1]），因此若 $B_2^3\subset TB_\infty^3\subset\sqrt{3}B_2^3$对于某个 $T\in GL$满足（3），则 $T\in SO$（3）。

接下来，我们证明引理1第二部分中的假设成立。由于$d_{BM}(K^*,L^*)\ =d_{BM}(K,L)$，我们可以将定理10的 $\mathbb{R}^3$版本改写如下：存在绝对常数 $c_1,c_2>0$，使得对于每个满足 $\min\{d_{BM}(K,B_\infty^3)\ d_{BM}(K,B_1^3)\}:=1+d\leq1+c_1$ 的$\mathbb{R}^3$中的对称凸体 K，都有 $\mathcal{P}(K)\ \geq\mathcal{P}(B_\infty^3)+c_2d.$

为完成对该假设的检验，注意，对于所有 K， L 凸体，只要满足 $B_2^3 \subseteq K$， $L \subseteq \sqrt{3}B_2^3$，就有：

$$d_{BM}(K,L) - 1 \leq \min_{T \in GL(3)} d_H(TK, L) \leq \sqrt{3}(d_{BM}(K,L) - 1). \tag{17}$$

应用引理 ma 1，我们推得存在 $c > 0$ 使得若 $B_2^3 \subseteq K \subseteq \sqrt{3}B_2^3$，则 n

$$\min_{S \in SO(3)} \min(d_H(K, SB_\infty^3), d_H(K, S\sqrt{3}B_1^3)) \leq c|\mathcal{P}(K) - \mathcal{P}(B_\infty^3)|.$$

利用（17）我们完成了证明。

□

4. Asymptotic estimates and Bourgain-Milman's theorem

若猜想 2 对中心对称体 K 成立，则有

$$\frac{4}{n!^{\frac{1}{n}}} \leq \mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\pi}{\Gamma(1+\frac{n}{2})^{\frac{2}{n}}},$$

从而

$$\frac{4e + o(1)}{n} \leq \mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2e\pi + o(1)}{n}. \tag{18}$$

同样， 猜想 1 成立将意味着，对于任意凸体 K，都有

$$\mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}} \geq \mathcal{P}(\Delta_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{e^2 + o(1)}{n}.$$

因此，函数 $K \mapsto n\mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}}$ 将在两个正的常数之间变化。Bourgain和Milman [BM] 于1986年实际上证明了这一事实。事实上，上界由布拉施克-桑塔洛不等式保证。关于下界，Gordon和Reisner [GR], 迈出了第一个重要步伐，他们证明了

$$\mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{n\log(n)}.$$

随后，Bourgain和Milman [BM]证明了

$$\mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{n}. \tag{19}$$

关于（19）的原始证明及其他同类型的证明，见 [BM、LMi、Pi]。这些证明中得到的常数 c 完全不是显式的，即使能够明确给出，也相当小。在给出了戈登-赖斯纳结果 [Ku1], 的一个低技术含量证明后，G. Kuperberg [Ku2]又基于微分几何给出了（19）的另一种证明，并得到了对称情形下（19）中的显式常数 $c = \pi e$；该常数与可能的最佳下界 $4e$ 相差不远，也是目前已知的最佳常数。一般情形（即不一定对称）下的最佳常数可利用 Rogers-Shephard 不等式得到，见本节末尾。Nazarov [Na] 利用傅里叶变换技巧给出了其他证明（另见 Blocki [Blo1、Blo2],Berndtsson[Be2、Be3] 以及 Mastroianis 和 Rubinstein [MaR]）。Giannopoulos、Paouris 和 Vritsiou 也利用巴拿赫空间局部理论中的经典技巧给出了一个证明[GPV]。

（18）中下界的同构版本，是在真正证明（或证伪）马勒猜想之前所能迈出的“最理想一步”。事实上，假设我们能够实现优于 $\mathcal{P}(K) \geq c^n \mathcal{P}(B_\infty^n)$ $0 < c < 1$的渐近行为，也就是说，我们有

$$\alpha(n)\mathcal{P}(B_\infty^n) \leq \mathcal{P}(K), \text{ and } \lim_{n\to\infty} \alpha(n)/c^n = \infty, \tag{20}$$

但存在一个维数，记作 l，使得马勒猜想在 $\mathbb{R}^l$ 中不成立，也就是说，存在一个凸对称体 $K \subset \mathbb{R}^l$，使得 $\mathcal{P}(K) < \mathcal{P}(B_\infty^l)$ 或

$$\mathcal{P}(K) \leq c_2 \mathcal{P}(B_\infty^l), \text{ for some } 0 < c_2 < 1.$$

令 K'为 m 个 K 的直和，$K' = K \oplus \cdots \oplus K \subset \mathbb{R}^n$，$n = ml$，利用直和公式和（20）不等式可得

$$\alpha(lm)\mathcal{P}(B_\infty^{lm}) \leq \mathcal{P}(K') = \mathcal{P}(K \oplus \cdots \oplus K) \leq c_2^m \mathcal{P}(B_\infty^{lm}) = (c_2^{1/l})^{lm} \mathcal{P}(B_\infty^{lm}).$$

这给出 $\alpha(n) \leq c^n$，适用于 $n = ml$ 和 $c = c_2^{1/l}$；当 m 足够大时，由 $\lim_{n\to\infty} \alpha(n)/c^n = \infty$ 可得矛盾。

我们注意到，一般凸体的（19）可由对称情形推出（常数减半）。事实上，设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，并设 $z \in \operatorname{int}(L)$。令 $K = L - z$。那么由 Rogers-Shephard 不等式 [RS], $\operatorname{vol}(\frac{K-K}{2}) \leq 2^{-n}\binom{2n}{n} \operatorname{vol}(K) \leq 2^n \operatorname{vol}(K)$ 以及

$$\operatorname{vol}\left(\left(\frac{K-K}{2}\right)^*\right) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_K(u) + h_{-K}(u)}{2}\right)^{-n} d\sigma(u) \leq \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K(u)^{-n} d\sigma(u) = \operatorname{vol}(K^*).$$

由此可得

$$\operatorname{vol}(K)\operatorname{vol}(K^*) \geq 2^{-n}\mathcal{P}\left(\frac{K-K}{2}\right).$$

由于这对每个 $z \in \operatorname{int}(L)$ 都成立，因此 $\mathcal{P}(L) \geq 2^{-n}\mathcal{P}\left(\frac{L-L}{2}\right)$。由此关系以及 Kuperberg 在 $c = \pi e$ 式 (19) 中针对对称体给出的最佳上界可知，对于一般凸体，式 (19) 中的 $c = \pi e/2$ 成立。

4.1. **通过 Milman 子空间商定理的方法。** 下一个引理是 Rogers-Shephard 不等式 [RS]的推论。

引理 2. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸对称体，E 是 E 的一个 m 维子空间，$E^\perp$ 是其正交子空间。则

$$\binom{n}{m}^{-2} \mathcal{P}(K \cap E)\mathcal{P}(K \cap E^\perp) \leq \mathcal{P}(K) \leq \mathcal{P}(K \cap E)\mathcal{P}(K \cap E^\perp).$$

下面的结果是 V. Milman 的 子空间商定理（[Mi], ；简单证明见 [Gor]）。

定理 12. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸对称体，且 n 是 *4* 的倍数。则存在一个与 n 无关的常数 $c > 0$、$\mathbb{R}^n$ 的一个 $\frac{n}{2}$ 维子空间 E、E 的一个 $\frac{n}{4}$ 维子空间 F，以及一个椭球 $\mathcal{E} \subset F$，使得

$$\mathcal{E} \subset P_F(E \cap K) \subset c\mathcal{E}$$

其中，与之前一样，P_F 是到 F的正交投影。

Pisier 对 *Bourgain-Milman* 定理的证明 [Pi]。对于凸对称体 $K \subset \mathbb{R}^n$，令 n 为 4 的倍数，并设 $a_n(K) = n\mathcal{P}(K)^{\frac{1}{n}}$。令 E 和 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中定理 12中选取的子空间。由引理 2，存在某个常数 $d > 0$，与 n 无关，使得

$$d\sqrt{a_{\frac{n}{2}}(K \cap E)a_{\frac{n}{2}}(K \cap E^{\perp})} \leq a_n(K) \leq \sqrt{a_{\frac{n}{2}}(K \cap E)a_{\frac{n}{2}}(K \cap E^{\perp})}$$

and

$$d\sqrt{a_{\frac{n}{4}}(P_F(K \cap E))a_{\frac{n}{4}}(K \cap E \cap F^{\perp})} \leq a_{\frac{n}{2}}(K \cap E) \leq \sqrt{a_{\frac{n}{4}}(P_F(K \cap E))a_{\frac{n}{4}}(K \cap E \cap F^{\perp})}.$$

接下来，由定理12可知，对于某些绝对常数 c'，$d' > 0$，有

$$c' \leq a_{\frac{n}{4}}(P_F(K \cap E)) \leq d'.$$

由此可知，存在某个通用常数 $c > 0$，使得

$$a_n(K) \geq c\big(a_{\frac{n}{2}}(K \cap E^{\perp})\big)^{\frac{1}{2}}\big(a_{\frac{n}{4}}(K \cap E \cap F^{\perp})\big)^{\frac{1}{4}}. \tag{21}$$

现在对每个 $n \geq 1$ 定义，

$$a_n = \min\{a_m(L); 1 \leq m \leq n,\ L \text{ convex symmetric body in } \mathbb{R}^m\}.$$

注意到 $a_n > 0$，由（21）可得

$$a_n \geq c\big(a_n\big)^{\frac{1}{2}}\big(a_n\big)^{\frac{1}{4}}. \tag{22}$$

因此 $a_n \geq c^4$。

4.2. **复分析方法**。我们非常简要地讨论一种通过复分析与调和分析开展的方法，该方法由 Nazarov 开创 [Na]。这里我们将遵循 Berndtsson 的一项工作 [Be3], ，该工作通过函数不等式展开（这是下一节的核心）。

我们将考虑 Bergman 空间的一个特殊情形。设 $\psi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为一个凸函数，且 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}\colon \psi(x+iy) < \infty\}$. Bergman 空间 $A^2(e^{-\psi})$ 是由定义在 Ω 上且满足下述条件的全纯函数构成的希尔伯特空间

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(x+iy)|^2 e^{-\psi(x+iy)} dxdy < \infty.$$

$(e^{-\psi})$ 的（对角）伯格曼核 B 定义为

$$B(z) = \sup_{f \in A^2(e^{-\psi})} \frac{|f(z)|^2}{\|f\|^2}.$$

接下来，考虑一个偶凸函数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 使得 $e^{-\phi(x)}$ 在 $\mathbb{R}^n$上可积。对于 $\alpha \in \mathbb{C}$，考虑伯格曼核 $B_\alpha(z)$，它对应于函数$\psi(z) = \phi(\mathrm{Re}(z)) + \phi(\mathrm{Re}(\alpha z))$。文献 [Be3] 中的主要定理声称

$$B_i(0) \leq c^n B_1(0), \tag{23}$$

其中 c 是一个绝对常数（其精确值见 [Be3]）。注意，B_1 是 $\psi(x+iy) = 2\phi(x)$ 的伯格曼核，即与 $\mathrm{Im}(z)$ 无关；而 B_i 是 $\psi(x+iy) = \phi(x) + \phi(y)$ 的伯格曼核。必须认识到，与这些密度对应的伯格曼空间彼此不同。因此，这种联系并非显而易见。对于

例如，函数 $f=1$ 属于第二个空间，但不属于与 $\psi(x+iy)=2\phi(x)$ 对应的空间。利用 $f=1$，我们得到

$$B_i(0)\geq\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\phi(x)}dx\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\phi(y)}dy}\,.$$

结合（23），可得

$$B_1(0)\geq\frac{c^{-n}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\phi(x)}dx\right)^2}\,, \tag{24}$$

这是证明 Bourgain-Milman不等式所需的一个关键估计。（23）在 [Be3] 中的证明基于一种非常巧妙且精妙的方法，即通过 B_i 与 B_1 借助 B_α建立联系。事实上，结果表明，$b(\alpha):=\log B_\alpha(0)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是次调和的（见 [Be1、Be3]），并且$b(\alpha)\leq C+n\log|\alpha|^2$，这可以通过变量代换看出

$$\begin{aligned}\|f\|_\alpha^2&=\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2e^{-(\phi(\mathrm{Re}(z)))+\phi(\mathrm{Re}(\alpha z)))}dz\\&=|\alpha|^{-2n}\int_{\mathbb{C}^n}|f(z/\alpha)|^2e^{-(\phi(\mathrm{Re}(z/\alpha)))+\phi(\mathrm{Re}(z)))}dz.\end{aligned}$$

因此 $B_\alpha(0)=|\alpha|^{2n}B_{1/\alpha}(0)$。此外，$B_{1/\alpha}(0)$ 有界，因为 $\alpha\to\infty$.。于是，可以对函数 $b(\alpha)-n\log|\alpha|^2$ 应用上半平面中的泊松表示公式，得到

$$\log B_i(0)=b(i)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(s)-n\log(s^2)}{1+s^2}ds=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{b(s)-n\log(s^2)}{1+s^2}ds.$$

利用 $s\mapsto\phi(sx)$ 在 $(0,1]$ 上递增这一性质，对于 $s\in(0,1]$,

$$\|f\|_s^2=\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2e^{-(\phi(\mathrm{Re}(z))+\phi(\mathrm{Re}(sz))}dz\geq\|f\|_1^2,$$

因此 $b(s)\leq b(1)$。若 $s\geq1$,

$$\|f\|_s^2=|s|^{-2n}\int_{\mathbb{C}^n}|f(z/s)|^2e^{-(\phi(\mathrm{Re}(z/\alpha))+\phi(\mathrm{Re}(z))}dz\geq s^{-2n}\|f\|_1^2,$$

因此 $b(s)\leq b(1)+n$对数 s^2。将这些估计合并起来，即完成了对 (23) 的证明。

下一步是将与凸体相关联的帕利-维纳空间（定理 4中讨论）推广到凸函数的情形。对于凸函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，我们将 $PW(e^\varphi)$ 所表示的全纯函数空间记作 f，其元素具有如下形式

$$f(z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{\langle z,\xi\rangle}\tilde{f}(\xi)d\xi,\ \text{where } z\in\mathbb{C}^n,$$

满足

$$\|f\|_{PW}^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\tilde{f}|^2e^\varphi dt<\infty,$$

˜对于某个函数 f，使得上述两个公式都有意义。定理4 中讨论的经典帕利-维纳空间，对应于以下情形：$\varphi(x)=0$ 当 $x\in K$ 且$\varphi(x)=+\infty$ 当 $x\notin K$. 对于定义在 ψ 上的凸函数 $\mathbb{R}^n$，我们考虑其对数拉普拉斯变换，定义如下：

$$\Lambda\psi(\xi)=\log\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\langle x,\xi\rangle}e^{-\psi}dx.$$

Berndtsson 证明中的第二个关键要素是，空间 $PW(e^{\Lambda\psi})$ 和$A^2(e^{-\psi})$ 相同，并且

$$\|f\|_{A^2}^2 = (2\pi)^{2n}\|f\|_{PW(e^{\Lambda\psi})}^2. \tag{25}$$

这一事实源于以下观察：任意 $f \in PW(e^{\Lambda\psi})$ 都是 $\tilde{f}$ 的傅里叶-拉普拉斯变换，并且对于所有满足 $\psi(x) < \infty$的 x， $e^{\langle x,t\rangle}\tilde{f}(t)$ 都属于 $L_2(\mathbb{R}^n)$。接着，我们应用帕ɪśɪʊ瓦尔公式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^2 dy = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\langle x,t\rangle}|\tilde{f}(t)|^2 dt.$$

将上述等式乘以 $e^{-\psi(x)}$，再对 x 积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^2 e^{-\psi(x)} dx dy = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(t)|^2 e^{\Lambda\psi(t)} dt.$$

因此， $f \in A^2(e^{-\psi})$ 与 A^2 范数和 $PW(e^{\Lambda\psi})$ 中的范数相差一个常数倍。这证实了帕利-维纳空间等距嵌入相应的伯格曼空间，而其余结论可由它是稠密的这一观察得出。

可以计算 $PW(e^{\Lambda\psi})$ 的伯格曼核，并利用 (25) 证明 $A^2(e^{-\psi})$ 的伯格曼核等于

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\langle x,t\rangle - \Lambda\psi(t)} dt. \tag{26}$$

我们将利用 (26) 对伯格曼核在原点处的值给出一个上界估计。函数 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 的勒让德变换定义为

$$\mathcal{L}\psi(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(\langle x,y\rangle - \psi(x)), \quad \text{for } y\in\mathbb{R}^n. \tag{27}$$

考虑伯格曼空间 $A^2\left(e^{-2\phi(x)}\right)$，其中 $\phi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 是凸且为偶函数（如（24）所示）。那么，

$$B(0) \le \pi^{-n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\phi(y)}dy}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(x)}dx}. \tag{28}$$

事实上，利用（26）可得

$$B(0) \le (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Lambda(2\phi(t))}dt. \tag{29}$$

注意，对于任意 $y\in\mathbb{R}^n$，都有

$$\begin{aligned} e^{\Lambda(2\phi(t))} &= 2^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle t,u\rangle - 2\phi(u/2)}du = 2^{-n}e^{\langle t,y\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle t,v\rangle - 2\phi(v/2+y/2)}dv \\ &\ge 2^{-n}e^{\langle t,y\rangle-\phi(y)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle t,v\rangle-\phi(v)}dv, \end{aligned}$$

其中在最后一个 在第一个不等式中，我们使用了 ϕ 的凸性。利用 ϕ 是偶函数这一点，我们得到 t

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle t,v\rangle-\phi(v)}dv \ge \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(v)}dv$$

and

$$e^{\Lambda(2\phi(t))} \ge 2^{-n}e^{\langle t,y\rangle-\phi(y)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(v)}dv.$$

对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 取上确界，我们得到

$$e^{\Lambda(2\phi(t))} \geq 2^{-n} e^{\mathcal{L}\phi(t)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(v)} dv.$$

结合式（29），得到式（28）。将式（28）与式（24）结合，可得以下定理：

定理13。（Bourgain-Milman不等式的泛函版本）设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为偶凸函数；则存在某个 $c > 0$ 与 n无关，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(x)} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\phi(x)} dx \geq c^n.$$

注7。定理13最初是通过针对 [AKM] 中对称凸体的 Bourgain-Milman 不等式证明的，随后在 [FM3]中推广到非偶函数。正如我们将在下一节（下文的注11 ）中看到的，它蕴含了经典的凸体 Bourgain-Milman 不等式。

5. Functional inequalities and link with transport inequalities

本节致力于研究与体积乘积相关的函数不等式。

5.1. **上界。** 以下形式更一般的泛函布拉施克-桑塔洛′不等式由 Ball 证明 [Ba1]，适用于 f 偶函数；Fradelizi 和 Meyer 证明了 [FM4]，适用于 f 对数凹函数；Lehec [Le1] 则证明了其一般情形。

定理 14。 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 勒贝格可积。存在 $z \in \mathbb{R}^n$，使得对任意 $\rho: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 以及任意 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 可测函数，均有

$$f(x+z)g(y) \leq \rho(\langle x, y\rangle)^2 \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } \langle x, y\rangle > 0,$$

有

$$\int f(x)\, dx \int g(y)\, dy \leq \left(\int \rho(|x|^2)\, dx \right)^2.$$

若 f 为偶函数，则可取 $z = 0$。

将此结果应用于 $\rho = \mathbf{1}_{[0,1]}$ 和 $f = \mathbf{1}_K$，即可得到凸集的布拉施克-桑塔洛′不等式。将其应用于 $\rho(t) = e^{-t/2}$，则可得到以下关于勒让德变换的泛函布拉施克-桑塔洛′不等式的证明，该不等式由 Artstein、Klartag 和 Milman 提出[AKM]（另一个证明见 [Le2]）。

定理 15. 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足 $0 < \int e^{-\varphi} < +\infty$。若对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$,$\varphi_y(x) := \varphi(x+y)$，存在 $z \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}(\varphi_z)(y)} dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \right)^2 = (2\pi)^n,$$

等号成立，当且仅当 且仅有 $\varphi_z(x) = |Ax|^2$，其中某个 A 是可逆线性映射，且某个 $z \in \mathbb{R}^n$。

注 8. 在 [Le2], Lehec 从定理 15 推导出，如果“重心” $b(\varphi) := \int x e^{-\varphi(x)} dx / \int e^{-\varphi}$ 满足 $b(\varphi) = 0$，那么

$$\int e^{-\varphi} \int e^{-\mathcal{L}\varphi} \leq (2\pi)^n.$$

事实上，对于任意 z，都有 $\mathcal{L}(\varphi_z)(y) = \mathcal{L}\varphi(y) - \langle y,z\rangle$。由此可得 $\mathcal{L}((\mathcal{L}\varphi)_z)(y) = \mathcal{L}\mathcal{L}\varphi(y) - \langle y,z\rangle \le \varphi(y) - \langle y,z\rangle$。利用詹森不等式和 $b(\varphi) = 0$，我们得到

$$\int e^{-\mathcal{L}((\mathcal{L}\varphi)_z)} \ge \int e^{-\varphi(y)+\langle y,z\rangle}dy \ge e^{\langle b(\varphi),z\rangle}\int e^{-\varphi} = \int e^{-\varphi}.$$

应用定理15 于 $\mathcal{L}\varphi$，因此存在一个 z 使得

$$\int e^{-\varphi}\int e^{-\mathcal{L}\varphi} \le \int e^{-\mathcal{L}((\mathcal{L}\varphi)_z)}\int e^{-\mathcal{L}\varphi} \le (2\pi)^n.$$

As Lehec 还指出，这也为 Lutwak 的结果提供了一个新的证明 [Lu4]:

命题2。对于重心位于0的星形体 $K \subset \mathbb{R}^n$（对所有 $(x,t) \in K \times [0,1]$，有 $tx \in K$），有

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) \le \mathrm{vol}(B_2^n)^2.$$

证明。令 $\varphi(x) = \frac{\|x\|_K^2}{2}$ 那么，由于

$$\int_{\mathbb{R}^n} xe^{-\frac{\|x\|_K^2}{2}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} x\int_{\|x\|_K}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dtdx = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_K xdx = 0,$$

有 $b(\varphi) = 0$。此外，对于任意 $y \in \mathbb{R}^n$，有 $\mathcal{L}\varphi(y) = \sup_x \langle x,y\rangle - \frac{\|x\|_K^2}{2} = \frac{\|y\|_{K^*}^2}{2}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|_K^2}{2}}dx = 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ 体积(K). □

在 g 之前各种定理证明的简要概述14和15，我们需要一个引理 :

引理 3。设 $\alpha,\beta,\gamma: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为可测函数，使得对每个 $s,t>0$ 都有 $\alpha(s)\beta(t) \le \gamma(\sqrt{st})^2$，则 $\int_{\mathbb{R}_+}\alpha(t)dt\int_{\mathbb{R}_+}\beta(t)dt \le \left(\int_{\mathbb{R}_+}\gamma(t)dt\right)^2$.

证明。定义 $f,g,h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下： $f(x) = \alpha(e^x)e^x$, $g(x) = \beta(e^x)e^x$ 以及 $h(x) = \gamma(e^x)e^x$。于是，对所有 $x,y \in \mathbb{R}$，都有$f(x)g(y) \le h(\frac{x+y}{2})$。根据 Pr´ekopa-Leindler 不等式（见 [Pi], p.3），我们得到$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} h(x)dx\right)^2$. 最后作变量代换。 □

定理的证明14：
1）当 f 为偶函数且 ρ 递减时，此证明归功于 Ball [Ba1]。对于 $s,t \in \mathbb{R}_+$，令 $K_s = \{f \ge s\}$ 和 $L_t = \{g \ge t\}$。关于 f 和 g 的假设蕴含 $L_t \subset \rho^{-1}(\sqrt{st})K_s^*$。由于 f 为偶函数，K_s 是对称的。由布拉施克-桑塔洛不等式可得，对任意 $s,t \in \mathbb{R}_+$，若 $\alpha(s) = \mathrm{vol}(K_s)$ 且 $\beta(t) = \mathrm{vol}(L_t)$，则有

$$\alpha(s)\beta(t) = \mathrm{vol}(K_s)\,\mathrm{vol}(L_t) \le (\rho^{-1}(\sqrt{st}))^n\,\mathrm{vol}(K_s)\,\mathrm{vol}(K_s^*) \le (\rho^{-1}(\sqrt{st}))^n\,\mathrm{vol}(B_2^n)^2.$$

记 $\gamma(t) = (\rho^{-1}(t))^{n/2}\,\mathrm{vol}(B_2^n)$，应用引理 3 并利用 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\alpha(s)ds$.....即可得证。

2）在 f 不必是偶函数、但为对数凹函数的情形下，14中给出的定理证明 [FM4] 使用了与对数凹函数 $K_f(z)$相关联的所谓 Ball 体 f，其定义如下：

$$K_f(z) = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \int_0^{+\infty} r^{n-1}f(z+rx)dr \ge 1\right\}.$$

由 Ball 的结果 [Ba2] 可知，$K_f(z)$ 是凸的，且其径向函数为$r_{K_f(z)}(x) = \left(\int_0^{+\infty} r^{n-1} f(z+rx)dr\right)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$。若 x、$y \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\langle x, y\rangle > 0$，则对 $r \geq 0$，定义 $\alpha(r) = r^{n-1} f(z+rx)$，$\beta(r) = r^{n-1} g(rx)$ 以及 $\gamma(r) = r^{n-1}\rho(r^2\langle x, y\rangle)$。由引理 3 可知

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} f(z+rx)dr \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(rx)dr \leq \left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}\rho(r^2\langle x, y\rangle)dr\right)^2.$$

这意味着

$$\langle x, y\rangle \leq \frac{c_n(\rho)}{r_{K_f(z)}(x) r_{K_g(0)}(y)}, \text{ where } c_n(\rho) := \left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}\rho(r^2)dr\right)^{2/n},$$

换句话说，$K_g(0) \subset c_n(\rho) K_f(z)^*$。此外，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = n \operatorname{vol}\left(K_f(z)\right) \text{ for every } z \in \operatorname{supp}(f).$$

利用布劳威尔不动点定理，文献 [FM4] 证明，对于某个 $z \in \mathbb{R}^n$，$K_f(z)$ 的质心位于原点。由布拉施克-桑塔洛′不等式即可得出该结果。

该方法也用于 [BBF]，以证明布拉施克-桑塔洛′不等式函数形式的稳定性版本。

定理 15 的证明：

1) [AKM] 给出的证明将以下函数 $f_m(x) = \left(1 - \frac{\varphi(x)}{m}\right)_+^m$（其中 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$：$\varphi$，此处假设为偶函数）与 $\overline{m} \geq 1$ 以及凸体联系起来

$$K_m(f_m) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}; |y| \leq f_m(\sqrt{m}x)^{1/m}\}.$$

当 $m \to +\infty$、$f_m \to e^{-\varphi}$ 和

$$m^{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{vol}\left(K_m(f_m)\right)}{\operatorname{vol}(B_2^m)} = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)}dx.$$

此外，$K_m(f_m)^* = K_m(\mathcal{L}_m f_m)$，其中 $\mathcal{L}_m(f_m)(y) = \inf_x \left(1 - \frac{\langle x,y\rangle}{m}\right)_+^m f(x)$。此外，当 $m \to +\infty$

$$\mathcal{L}_m(f_m)(y) \to e^{-\mathcal{L}\varphi(y)} \text{ and } m^{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{vol}\left(K_m(\mathcal{L}_m\varphi)\right)}{\operatorname{vol}(B_2^m|} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m f_m(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\varphi(x)}dx.$$

接着对凸体 $K_m(f_m)$ 应用布拉施克-桑塔洛不等式。

2) Lehec 对定理 15 的证明 [Le2] 采用关于维数的归纳法。对于 $n = 1$，选取 $z \in \mathbb{R}$，使得 $\int_z^{+\infty} e^{-\varphi(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varphi(t)}dt/2$。对于所有 s、$t \geq 0$，都有 $\varphi_z(s) + \mathcal{L}(\varphi_z)(t) \geq st$。因此，函数 $\alpha(s) = e^{-\varphi_z}(s)$、$\beta(t) = e^{-\mathcal{L}(\varphi_z)}(t)$ 和 $\gamma(u) = e^{-u^2/2}$ 满足 $\alpha(s)\beta(t) \leq \gamma(\sqrt{st})^2$，对任意 s、$t \geq 0$ 均成立。由引理 3 可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varphi_z(t)}dt \int_0^{+\infty} e^{-\mathcal{L}(\varphi_z(t))}dt = \int_{\mathbb{R}_+} \alpha(t)dt \int_{\mathbb{R}_+} \beta(t)dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \gamma(u)du\right)^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{30}$$

此 i 不等式在 $\mathbb{R}_-$ 上同样成立；将这两个不等式相加，即得结果 .

现在假设结果对 n 成立，并进行归纳步骤。令 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$。如果 $X\in\mathbb{R}^{n+1}$，我们记 $X=(x,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$。令

$$\mathcal{P}(\varphi):=\min_z\int_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-\varphi(X)}dX\int_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-\mathcal{L}(\varphi_z)(X)}dX.$$

对于任意可逆仿射映射 A，都有 $\mathcal{P}(\varphi\circ A)=\mathcal{P}(\varphi)$。沿 e_{n+1} 方向平移 φ，我们可以假设

$$\int_{s>0}\int e^{-\varphi(x,s)}dxds=\int_{s<0}\int e^{-\varphi(x,s)}dxds.$$

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义 $b_+(\varphi)$ 和 $b_-(\varphi)$ 如下：

$$b_+(\varphi)=\frac{\int_{s>0}\int(x,s)e^{-\varphi(x,s)}dxds}{\int_{s>0}\int e^{-\varphi}dxds}\quad\text{and}\quad b_-(\varphi)=\frac{\int_{s<0}\int(x,s)e^{-\varphi(x,s)}dxds}{\int_{s<0}\int e^{-\varphi}dxds}.$$

由于 $\langle b_+(\varphi)\ e_{n+1}\rangle>0$ 且 $\langle b_-(\varphi)\ e_{n+1}\rangle<0$，点 $\{z\}:=[b_-(\varphi)\ b_+(\varphi)]\cap e_{n+1}^{\perp}$ 有明确的定义。沿其余方向平移 φ，我们可以假设 $z=0$。令A 为由 $Ax=x$（对 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $Ae_{n+1}=b_+(\varphi)$）定义的线性可逆映射。于是$b_+(\varphi\circ A)=A^{-1}b_+(\varphi)=e_{n+1}$。将 φ 改为 $\varphi\circ A$，我们可以假设 $b_+(\varphi)=e_{n+1}$。定义 Φ，$\Psi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 如下：

$$e^{-\Phi(x)}=\int_0^{+\infty}e^{-\varphi(x,t)}dt\quad\text{and}\quad e^{-\Psi(x)}=\int_0^{+\infty}e^{-\mathcal{L}\varphi(x,t)}dt.$$

由于 $b_+(\varphi)=e_{n+1}$，我们得到 $\int_{\mathbb{R}^n}xe^{-\Phi(x)}dx=\int_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}xe^{-\varphi(x,t)}dxdt=0$. 因此 $b(\Phi)=0$。由归纳假设以及定理15之后的注记可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\Phi(x)}dx\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mathcal{L}\Phi(y)}dy\le(2\pi)^n.\tag{31}$$

对于每个 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ 以及 $s,\ t\in\mathbb{R}$，令 $\varphi^x(s)=\varphi(x,\ s)$ 和 $(\mathcal{L}\varphi)^y(t)=\mathcal{L}\varphi(y,\ t)$。如式 (30) 中那样再次应用引理3，得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-\varphi^x(s)}ds\int_0^{+\infty}e^{-\mathcal{L}(\varphi^x)(t)}dt\le\frac{\pi}{2}.$$

由于 $\varphi^x(s)+(\mathcal{L}\varphi)^y(t)\ge\langle x,y\rangle+st$，有 $(\mathcal{L}\varphi)^y(t)-\langle x,y\rangle\ge\mathcal{L}(\varphi^x)(t)$。因此，对于 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$，

$$e^{-\Phi(x)-\Psi(y)}=\int_0^{+\infty}e^{-\varphi^x(s)}ds\int_0^{+\infty}e^{-(\mathcal{L}\varphi)^y(t)}dt\le\frac{\pi}{2}e^{-\langle x,y\rangle}.$$

这意味着 $e^{-\Psi(y)}\le\frac{\pi}{2}e^{-\mathcal{L}\Phi(y)}$。利用式 (31)，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\Phi(x)}dx\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\Psi(y)}dy\le\frac{\pi}{2}(2\pi)^n.$$

也就是说

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\varphi(x,s)}dxds\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mathcal{L}\varphi(y,t)}dydt\le\frac{\pi}{2}(2\pi)^n.$$

将此结果与 $s<0$ 的类似界相加，并利用 $\int_{s>0}\int e^{-\varphi(x,s)}dxds=\int_{s<0}\int e^{-\varphi(x,s)}dxds$，即可得出结论。

注释9。 各种 L_p形式的函数型布拉施克-桑塔洛 ′不等式已有研究（例如参见 [HJM]）。此外，在极值一般仿射表面积的研究中，也建立了布拉施克-桑塔洛 ′型不等式 [GHSW、Y、Hoe]。近期，′中给出了布拉施克-桑塔洛不等式的一个推论 [VY]。

5.2. **对数凹函数体积乘积的下界**。设 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为凸函数。其定义域 φ 为 dom(φ)：$= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) < +\infty\}$。若 $0 < \int e^{-\varphi} < +\infty$，我们将函数型体积积 φ 定义为

$$\mathcal{P}(\varphi) = \min_z \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}(\varphi_z)(y)} dy.$$

若 φ 为偶函数，则该最小值在 0 处达到。以下猜想由 [FM3]提出。

猜想3。 若 $n \geq 1$ 且 φ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个凸函数，满足 $0 < \int e^{-\varphi} < +\infty$。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\varphi(y)} dy \geq e^n,$$

等号成立当且仅当 存在常数 $c > 0$ 和可逆线性映射 T，使得 at

$$e^{-\varphi(Tx)} = c \prod_{i=1}^n e^{-x_i} \mathbf{1}_{[-1,+\infty)}(x_i).$$

猜想4。若 $n \geq 1$ 和 φ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是满足$0 < \int e^{-\varphi} < +\infty$的偶凸函数。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\varphi(y)} dy \geq 4^n,$$

当且仅当存在常数 $c > 0$、两个互补子空间 F_1 和F_2 以及两个汉纳多胞体 $K_1 \subset F_1$ 和 $K_2 \subset F_2$，使得对所有 $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$，等号成立，

$$e^{-\varphi(x_1+x_2)} = c e^{-||x_1||_{K_1}} \mathbf{1}_{K_2}(x_2).$$

注释10。 对于凸函数 φ，采用不同的对偶性，还得到了另一种布拉施克-桑塔洛 ′不等式以及逆桑塔洛 ′不等式，见 [AS、FS]。文献 ′还探讨了布拉施克-桑塔洛 [HoS], 对偶性与单调非平凡闵可夫斯基自同态相关不等式研究相结合，从而得到对布拉施克-桑塔洛不等式及其函数形式的另一种推广。

部分结果 t　　关于这些猜想的证明汇集于以下定理中　　.

定理16。 设 $n \geq 1$ 和 φ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是凸函数，且满足 $0 < \int e^{-\varphi} < +\infty$。那么

(1) 猜想*3*对 $n = 1$成立。若存在可逆仿射映射 T，使得 *dom*($\varphi \circ T$) $= \mathbb{R}^n_+$ 且 $\varphi \circ T$在 P 上非递减（即对所有 $1 \leq i \leq n$，若 $x_i \leq y_i$，则 $(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_n) \leq (\varphi \circ T)(y_1, \ldots, y_n)$），则猜想 *3* 对所有 $n \geq 1$ 也成立。*(2)* 若 $n = 1$ 或 $n = 2$，则猜想 *4* 成立。若 φ 是无条件的（即存在可逆线性映射 T，使得对所有 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，都有 $(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi \circ T)(|x_1|, \ldots, |x_n|)$），则猜想*4*对所有 $n \geq 1$ 也成立。

(1) 对于 $n = 1$，猜想 3 以两种不同的方式在 [FM1、FM3] 中得到了证明。关于正八分体上非递减凸函数的情形也在 [FM3] 中得到了证明。

（2）对于 $\mathbb{R}^n$ 上的无条件凸函数，猜想 4 以两种不同的方式在 [FM2、FM3], 中得以证明，等号成立的情形见 [FGMR]）。特别是，这解决了一般情形 $n = 1$。对于 $n = 2$，证明见 [FN]。

注11。凸体的猜想1和猜想2与其函数对应版本猜想3和4之间存在密切联系。事实上，正如 [FM3], 中所指出的，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个对称凸体 K，若 $\varphi_K(x) = \|x\|_K$，则可得 $e^{-\mathcal{L}\varphi_K} = \mathbf{1}_{K^*}$；对等值集积分可得 $\mathcal{P}(\varphi_K) = n!\mathcal{P}(K)$。因此，若猜想4对 φ_K 成立，则猜想2对 K 成立。反过来，若猜想2在 $\mathbb{R}^n$ 中对每个维数 n 都成立，那么给定一个偶凸函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，我们可以在维数 $n+m$ 下将其应用于凸集

$$K_m(\varphi) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m; \|y\|_\infty \le \left(1-\frac{\varphi(mx)}{m}\right)_+\right\}.$$

利用

$$\mathrm{vol}_{n+m}(K_m(\varphi)) = \frac{2^m}{m^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-\frac{\varphi(x)}{m}\right)_+^m dx$$

and

$$K_m(\varphi)^* = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m; \|y\|_1 \le \inf_{\varphi(x')\le m}\frac{(1-\langle x,x'\rangle)_+}{1-\frac{\varphi(x')}{m}}\right\},$$

已证明 [FM3]中指出，当 $m\to+\infty$时，不等式 $\mathcal{P}(K_m(\varphi)) \ge \frac{4^{n+m}}{(n+m)!}$ 给出 $\mathcal{P}(\varphi) \ge 4^n$。类似地，若猜想3 在维数 $n+1$成立，给定一个 K 位于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且其 Santal´点为原点，我们将其应用于 $\varphi\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 定义为:

$$e^{-\varphi(x,t)} = \mathbf{1}_{[-n-1,+\infty)}(t)\mathbf{1}_{(t+n+1)K}(x)e^{-t}.$$

那么， φ 的勒让德变换为

$$e^{-\mathcal{L}\varphi(y,s)} = \mathbf{1}_{(-\infty,1]}(s)\mathbf{1}_{(1-s)K^*}(y)e^{(n+1)(s-1)},$$

and

$$\mathcal{P}(\varphi) = \frac{(n!)^2e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}|K||K^*|.$$

这证明了若猜想3 对 φ成立，则

$$\mathcal{P}(K) \ge \mathcal{P}(\Delta_n) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2},$$

这就是1 对 K的猜想。最后，正如 [FM3], 中所示，可以调整关于偶函数的论证来证明: 给定一个凸函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$。将猜想2应用于一列精心选取的凸体 $\Delta_m(\varphi)$，其维数为 $n+m$，即可得到猜想3 对φ 成立，其中 $m\to+\infty$。

在 [GM] 中还证明了，如果 $\mathcal{P}(\varphi)$ 是极小的，那么 φ 在任何一点的海森矩阵都没有正特征值。渐近估计也成立：在偶函数情形下， [KM] 证明了，对于某个常数 $c>0$，对所有偶凸函数 φ 以及所有 $n\ge 1$，都有 $\mathcal{P}(\varphi) \ge c^n$。在 [FM3]中，这一结果被推广到所有凸函数。

5.3. **体积乘积与输运不等式。** Maurey [Mau] 引入了以下性质（τ）：设 μ是定义在 $\mathbb{R}^n$上的一个测度，且 $c\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$是一个下半连续函数（称为代价函数）；我们称这对（$\mu$， c）满足性质 (τ)，如果对任意连续有界函数 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，定义

$$Q_cf(y) = \inf_x\left(f(x)+c(x,y)\right) \text{ for } y\in\mathbb{R}^n,$$

则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}d\mu(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{Q_c f(y)}d\mu(y)\le 1.$$

Maurey [Mau] 证明，若 γ_n 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的标准高斯概率测度，其密度为（2π）$^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$，且 c_2（x， y） $=\frac{1}{2}|x-y|^2$那么，根据 Prékopa-Leindler 不等式，（γ_n， $\frac{c_2}{2}$）满足性质（τ）。

在 [AKM],中指出，布拉施克-桑塔洛不等式关于勒让德变换的函数形式（定理 15）等价于偶函数满足一个加强的性质（τ）：我们称一对（γ_n， c_2）满足偶性质（τ），如果对任意偶函数f，都有

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}d\gamma_n(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{Q_{c_2} f(y)}d\gamma_n(y)\le 1. \tag{32}$$

这一等价关系源于函数变换： $\varphi(x) = f(x) + \frac{|x|^2}{2}$ 以及以下事实：

$$-\mathcal{L}\varphi(y)=\inf_x\left(f(x)+\frac{|x|^2}{2}-\langle x,y\rangle\right)=Q_{c_2}f(y)+\frac{|y|^2}{2}.$$

随后，Lehec 给出了（32）的直接证明，见 [Le]。由 Lehec 的上述备注 8 可知，见 [Le2], ，只要满足 32）也成立。 $\int_{\mathbb{R}^n} xe^{-f(x)}d\gamma_n(x) = 0$。

此外，例如 [GL], 的命题8.2表明，性质（τ）与传输-熵不等式的对称形式之间存在一般性的等价关系。塔格朗 [Ta], 引入了这些传输-熵不等式，并证明对于每个概率测度 ν 在 $\mathbb{R}^n$ 上，都有

$$W_2^2(\nu,\gamma_n)\le 2H(\nu|\gamma_n), \tag{33}$$

其中 W_2 是由下式定义的康托罗维奇-瓦瑟斯坦距离：

$$W_2^2(\nu,\gamma_n)=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|x-y|^2d\pi(x,y);\pi\in\Pi(\nu,\gamma_n)\right\},$$

其中 $\Pi(\nu,\ \gamma_n)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上第一边缘分布为 ν、第二边缘分布为 γ_n 的概率测度集合，而 H 是相对熵，对 $d\nu = f d\gamma_n$ 定义如下：

$$H(\nu|\gamma_n)=-\int_{\mathbb{R}^n} f\log f d\gamma_n.$$

利用性质（τ）与传输-熵不等式之间的这种等价关系，法提[Fat] 证明了 Talagrand输运-熵不等式的以下对称形式：如果ν_1 （或 ν_2）是中心化的，即 $\int x d\nu_1$（x） $= 0$，那么

$$W_2^2(\nu_1,\nu_2)\le 2(H(\nu_1|\gamma_n)+H(\nu_2|\gamma_n)). \tag{34}$$

他实际上证明了（34）等价于布拉施克-桑塔洛不等式（定理 15）的函数形式。将（34）应用于 $\nu_1=\gamma_n$，即可得到塔拉格朗的不等式（33）。在证明中，法提使用了 [AKSW] 中建立的对数凹函数的反向对数索博列夫不等式，该结果在一些正则性假设下成立；后来， [CFGLSW]给出了一个简化的证明，并去除了这些假设。

类似地，戈兹兰 [戈]给出了猜想3和4以及布尔甘-米尔曼渐近不等式的等价传输-熵形式。这项工作在 [FGZ],中得到进一步推进，文中还为猜想3和4的一维情形提供了新的证明。

6. Generalization to many functions and bodies

以下 Kolesnikov和Werner提出了一个颇具启发性的猜想 [KoW] .

猜想5. 设 $\rho\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 为递增函数，且对于 $m\geq 2$，令 $f_i\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$为满足以下条件的偶勒贝格可积函数

$$\prod_{i=1}^m f_i(x_i)\leq \rho\left(\sum_{1\leq i<j\leq m}\langle x_i,x_j\rangle\right) \text{ for all } x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n.$$

Then

$$\prod_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n} f_i(x_i)dx_i\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}\rho^{\frac{1}{m}}\left(\frac{m(m-1)}{2}|u|^2\right)du\right)^m.$$

猜想5 已由 Kolesnikov 和 Werner 在函数 f_i 为无条件时证明。注意，猜想5 是一个新的布拉施克-桑塔洛猜想的不等式的函数形式，该不等式涉及两个以上的凸体。事实上，对于′，令 $1\leq i\leq m$为星体， K_i (f_i) $x(=v_n)2\pi$以及$^{-n/2}e^{-\|x\|^2_{K_i}/2}$ (ρ) t。由于 vol($=e^{-t/(m-1)}$) $K_i(=v_n)2\pi$，由猜想5可得:

猜想6. L *et* $m\geq 2$，并令 $K_1,\dots,K_m$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体，使得

$$\sum_{1\leq i<j\leq m}\langle x_i,x_j\rangle\leq\frac{m-1}{2}\sum_{i=1}^m\|x_i\|^2_{K_i},\ \textit{for all } x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n, \tag{35}$$

然后 $\prod_{i=1}^m$体积$(K_i)\ \leq$体积$(B_2^n)^m$.

猜想 5 已对以下情形得到证明： [KoW] 无条件体；对于 $m\geq 3$，当且仅当 $K_i=B_2^n$时，等号成立；对于 $i=1,\dots,m$.

Kalantzopoulos 和 Saroglou 进一步发展了这一方向 [KaSa]并推广了极性条件（35）。对于 $2\leq p\leq m$和 $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n$，令 令

$$\mathcal{S}_p(x_1,\dots,x_m)=\binom{m}{p}^{-1}\sum_{l=1}^n s_p(x_1(l),\dots,x_m(l)),$$

其中 $x_i=\sum_{l=1}^n x_i(l)e_l$ ，而 s_p 是关于 m 个变量的 p 次基本对称多项式。情形 $p=2$ 对应于标量积之和，即

$$\mathcal{S}_2(x_1,\dots,x_m)=\frac{2}{m(m-1)}\sum_{1\leq i<j\leq m}\langle x_i,x_j\rangle.$$

在 [KaSa] 提出了以下 *p-Santal´o* 猜想:

猜想7。设 $2\leq p\leq m$ 为两个整数。若 $K_1,\dots,K_m$ 是 $\mathbb{R}^n$中的对称凸体，且满足

$$\mathcal{S}_p(x_1,\dots,x_m)\leq 1,\ \textit{for all } x_i\in K_i,$$

则 $\prod_{i=1}^m$体积$(K_i)\ \leq$体积$(B_p^n)^m$，其中 B_p^n是ℓ_p^n-范数的单位球 .

Kalantzopoulos 和 Saroglou [KaSa] 证实了猜想 7 在 $p=m$的情形下成立；对于无条件凸体，在所有 $p=2,\dots,m$的情形下也成立。此外，当 $p=2$时，只需假设只有 $K_3,\dots,K_m$ 是无条件的。在所有这些已知情形中，猜想中的不等式在 $K_1=\cdots=K_m=B_p^n$ 处实际上是尖锐的。猜想 7 的一个函数类比也在 [KaSa]中提出。

7. Links to other inequalities

本节仅介绍体积乘积与凸几何中其他不等式之间联系的若干例子。与前文一样，我们参考著作 [AGM1、AGM2、Ga1、Ga2、Gru、Kol、Pi、Sc、Tom]，特别是 Richard Gardner 在 [Ga2中绘制的、展示凸几何中不同公开问题之间联系的精彩图表，见图 1]。

7.1. **切片猜想**。 Klartag [Kl2] 发现了尖锐版本的布尔根切片猜想与一般凸体的马勒猜想（猜想 1。凸体 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中的协方差矩阵是 $n \times n$ 矩阵 Cov(K)，定义如下：

$$\mathrm{Cov}(K)_{i,j} = \frac{\int_K x_i x_j dx}{\mathrm{vol}(K)} - \frac{\int_K x_i dx}{\mathrm{vol}(K)} \frac{\int_K x_j dx}{\mathrm{vol}(K)}$$

各向同性常数 L_K 定义为 $L_K^{2n} = \det(\mathrm{Cov(K)})\ \mathrm{vol(K)}^{-2}$. 众所周知，$L_K$ 有一个绝对正下界，且椭球达到该下界。布尔根切片问题问的是，是否存在某个普适常数 $C > 0$，使得对每个凸体 K 都有 $L_K \leq C$。切片猜想之名源于以下一个非常有趣的等价表述：是否存在某个普适常数 $c > 0$，使得 $\mathbb{R}^n$ 中每个体积为一的凸体都含有一个超平面截面，其（$n-1$）维体积大于 c? （其他等价表述见[MiP] 。） L_K 是否有绝对常数上界，至今仍是一个开放问题。Bourgain [Bou] 证明了 $L_K \leq Cn^{1/4}$ 在一个对数因子以内的界，随后 Klartag [Kl3]去除了该因子。Chen [Ch] 证明了 $L_K \leq C_\varepsilon n^\varepsilon$ 对每个 $\varepsilon > 0$都成立。之后，Klartag和Lehec [KlL] 建立了一个多对数上界 $L_K \leq C \log^5 n$，随后 Jambulapati、Lee和Vempala [JLV]将其进一步改进为 $L_K \leq C \log^{2.2} n$ 。切片猜想的一个强版本提出了以下问题：

猜想 8. 对于任意凸体 K，在 $\mathbb{R}^n$ 中有

$$L_K \leq L_{\Delta_n} = \frac{(n!)^{1/n}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2n}}\sqrt{n+2}}. \tag{36}$$

设 K 是所有$\mathbb{R}^n$ 中凸体的体积乘积的局部极小值点（赋予豪斯多夫距离），那么 Klartag [Kl2] 证明了

$$\mathrm{Cov}(K^*) \geq (n+2)^{-2}\mathrm{Cov}(K)^{-1}.$$

取行列式并将其提升至 $1/n$ 次幂，得到

$$\frac{1}{n+2} \leq L_K L_{K^*} \mathcal{P}(K)^{1/n}. \tag{37}$$

因此，结合（37）和（36），

$$\frac{1}{n+2} \leq L_K L_{K^*} \mathcal{P}(K)^{1/n} \leq \frac{(n!)^{2/n}}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}(n+2)} \mathcal{P}(K)^{1/n}.$$

因此，我们证明了以下定理：

定理17。 ***(Klartag)*** 猜想 *8* 中给出的 ***Bourgain***切片猜想 *1* 的强版本蕴含了针对一般凸体的猜想（马勒猜想）。

在证明 Bourgain-Milman不等式的过程中，Kuperberg 曾在 [Ku2]中询问该量

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*)}\int_K\int_{K^*}\langle x,y\rangle^2 dxdy$$

在中心对称凸体这一类中，椭球使其达到最大值 $K\subset\mathbb{R}^n$。Alonso-Guti´errez[AG] 证明了这一猜想蕴含布拉施克-桑塔洛不等式和超平面猜想，并且该猜想对于 B_p^n（ ℓ_p^n 的单位球）、对于 $p\geq 1$均成立。与超平面猜想的联系也在 [Gi]中得到研究。Kuperberg 对自己的猜想并不抱太大希望，而 Klartag [Kl2] 证明了该猜想在高维情形下是错误的，即便对于无条件体也是如此。

7.2. 辛几何与维泰博猜想。Artstein-Avidan、Karasev 和 Ostrover 在 [AKO] 中发现了体积乘积与辛几何之间令人惊叹的联系。设 (X,ω) 是一个辛流形： X 是一个带有闭非退化二形式 ω 的光滑流形。例如，$(\mathbb{R}^{2n},\omega_{st})$，其中 $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n_p\times\mathbb{R}^n_q$ 且$\omega_{st}=\sum dp_i\wedge dq_i$。辛几何中的一个核心事实是，辛流形没有局部不变量（维数除外）。显然，这使得它的结构与黎曼流形截然不同。Gromov [Gro]引入了首批全局辛不变量，其被称为 Gromov 的“非挤压定理”。Gromov 的工作启发了全局辛不变量——辛容量——的引入；它们可被视为衡量 $\mathbb{R}^{2n}$ 中集合辛尺度的一种方式。更准确地说，$(\mathbb{R}^{2n},\omega_{st})$ 上的辛容量 c 是一个映射 $c:\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\to\mathbb{R}_+$，其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 所有子集组成的集合，它满足以下条件

- 单调性： $c(U)\leq c(V)$，对所有 $U\subset V$.
- 保角性： $c(\phi(U))=|\alpha|c(U)$，对所有满足 $\phi^*\omega_{st}=\alpha\omega_{st}$. 的微分同胚 ϕ
- 归一化： $c(B_2^{2n})=c(B_2^2\times\mathbb{R}^{2(n-1)})=\pi$.

以下是 Viterbo 关于 [Vi] 凸体辛容量的猜想。

猜想 9。 对于任意辛容量 c和任意凸体 Σ ，若其位于 $\mathbb{R}^{2n}$，则有

$$\frac{c(\Sigma)}{c(B_2^{2n})}\leq\left(\frac{\mathrm{vol}_{2n}(\Sigma)}{\mathrm{vol}_{2n}(B_2^{2n})}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

猜想 9 属于等周型：事实上，它断言，在 $\mathbb{R}^{2n}$中所有体积给定的凸体里，与其体积相同的欧几里得球具有最大的辛容量。即使对于 $n=2$，这仍是一个开放问题；但对某些类别的凸体（包括椭球） [H] ，以及在一个普适乘法常数范围内 [AMO]，以下结果已在 [AKO]中得到证明。

定理 18. 猜想 *9* 蕴含猜想 *2*。

更准确地说， [AKO] 证明了，对于任意凸对称体 $K\subset\mathbb{R}^n$，$c_{HZ}(K\times K^*)=4$，其中 c_{HZ} 表示 Hofer-Zehnder 容量，它是重要的辛容量之一。这一事实与猜想 9 以及 c_{HZ} 的归一化性质结合起来，便立即为猜想 2 给出了肯定的答案：

$$\frac{4^n}{\pi^n}=\left(\frac{c_{HZ}(K\times K^*)}{c_{HZ}(B_2^{2n})}\right)^n\leq\frac{\mathrm{vol}_{2n}(K\times K^*)}{\mathrm{vol}_{2n}(B_2^{2n})}=\frac{n!\,\mathrm{vol}_{2n}(K\times K^*)}{\pi^n}.$$

关于这些联系的更多细节，请参阅 [AKO] 和 [O] 。猜想 2 与辛几何的联系后来在 [ABKaS、BeKa、Ka、KaS]中得到进一步探讨。在 [Ru],中，维泰博猜想与蠕虫问题的闵可夫斯基版本联系起来，这一研究受到几何领域著名的 Moser 蠕虫问题的启发。对于拉格朗日乘积这一特殊情形，这种联系进一步关联到闵可夫斯基台球的 systolic 不等式和马勒猜想。

7.3. **芬克几何**。 Faifman 最近发现了体积乘积与芬克几何之间一个非常有趣的联系 [Fa]。关于芬斯勒流形和芬克几何的详细介绍，请参阅 [PT] 。下面简要回顾一些最基本的概念。

非可逆芬斯勒流形（M， F）是一个光滑流形 M，其切丛上配备了一个光滑函数 F；该函数限制在任意切空间上时，都是某个凸体的规范函数。与黎曼几何的关键区别在于这里没有内积。点 $x \in M$ 处的切空间单位球记作 $B_x M$，由切空间 $T_x M$ 中所有满足 $F(x, v) \leq 1$. 的向量 v 组成

对于固定仿射空间中的凸体 K ，其内部 K 上的芬克度量定义为 $B_x K = K$；也就是说，对于 K 内部的任意点 x ，以 x 为原点的凸体 K 是单位球。具体构造如下：取 x， $y \in \text{int}(K)$，并令 $R(x, y)$ 为从 x 出发并经过 y 的射线。令 $a(x, y) = R(x, y) \cap \partial K$，则定义在 $x \neq y \in \text{int}(K)$ 上的芬克度量为

$$d_K^F(x, y) = \log \frac{|x - a(x, y)|}{|y - a(x, y)|},$$

且 $d_K^F(x, x) = 0$. Funk 度量是射影的，即直线线段是测地线。半径为 $r > 0$ 、中心为 $z \in \text{int}(K)$ 的外向球为

$$B_K^F(z, r) = \{x \in \text{int}(K) : d_K^F(z, x) \leq r\} = (1 - e^{-r})(K - z) + z.$$

$A \subset \text{int}(K)$ 的 Holmes-Thompson 体积定义为

$$\text{vol}_K^F(A) = \frac{1}{v_n} \int_A \text{vol}(K^x) dx.$$

当 $r \to 0$ 时， $B_K^F(z, r)$ 的体积渐近表现为 $v_n^{-1} \text{vol}_{2n}(K \times K^z) r^n$。文献 [BBV] 还证明，对于严格凸且光滑的体 K，当 $r \to +\infty$ 时， $B_K^F(z, r)$ 的体积渐近表现为 $c_n e^{\frac{n-1}{2} r} \mathcal{A}(K, z)$，其中 $c_n > 0$ 仅取决于 n，而 $\mathcal{A}(K, z)$ 是由以下公式定义的 K 的中心仿射表面积：

$$\mathcal{A}(K, z) = \int_{\partial K} \frac{\kappa_K^{1/2}(x)}{\langle x - z, n_K(x) \rangle^{(n-1)/2}} dx,$$

其中 $\kappa_k(x)$ 是 ∂K 在点 x 处的高斯曲率，而 $n_K(x)$ 是外法向量。注意， $\mathcal{A}(K, 0) = \mathcal{A}(K)$。对于中心对称的 K，以下关于 vol K的对偶关系在 [Fa]中得到了证明：

$$\text{vol}_K^F(B_K^F(0, r)) = \text{vol}_{K^*}^F(B_{K^*}^F(0, r)).$$

在芬克几何中，凸体 K 的 Santal´o 点 $s(K)$ 的一个类似物的存在性已在 [FaVW] 中得到证明：对于任意 $r > 0$，存在唯一一点 $s_r(K) \in \text{int}(K)$，使得 $B_K^F(q, r)$ 的芬克体积最小。对于对称的 K，有 $s_r(K) = 0$，且 $s_r(K) \to s(K)$ as $r \to 0$。设

$$M_r(K) = v_n \text{vol}_K^F(B_K^F(s_r(K), r))$$

以下猜想由 [Fa] 提出:

猜想10。 对于所有的 $r > 0$, $M_r(K)$, 当 为椭球时，达到极大值 .

猜想10 的极限情形分别是当 ´时的布拉施克-桑塔洛 $r \to 0$ 不等式，以及当 $r \to \infty$时的中心仿射等周不等式。Faifman [Fa]证明了猜想10 对无条件体 K成立。证明思路包括对 K. Ball 猜想的推广（见不等式（ 13 ）），即

$$\int_K \int_{K^*} \langle x, y\rangle^{2j} dxdy \le \int_{B_2^n} \int_{B_2^n} \langle x, y\rangle^{2j} dxdy, \tag{38}$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$均成立；Faifman 证明了它对 K 无条件情形成立。关于量 $M_r(K)$的一个下界由 [FaVW]提出:

猜想11。 对于 $r > 0$, $M_r(K)$, 一般情形下，单纯形使其达到极小值；对于对称体 K，则由汉纳多胞体使其达到极小值。

猜想 $r \to 0$ 趋近于 11 时，对称 K 的极限情形是猜想 2；而当$r \to +\infty$ 时，则是 Kalai [K] 关于最小化 K的旗数的猜想。猜想11 在 [FaVW] 中针对无条件体得到了证明，其依据是 [FaVW]中发现并针对无条件体证明的一个有趣新不等式

$$\int_H \int_{H^*} \langle x, y\rangle^{2j} dxdy \le \int_K \int_{K^*} \langle x, y\rangle^{2j} dxdy, \tag{39}$$

其中 H 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个汉纳多胞体，且 $j \in \mathbb{N}$. 文献 39中 [FaVW] 对（´）的证明基于函数型逆 Santalo [FM2]不等式。

7.4. **数的几何与等周长不等式**。 体积乘积是数的几何中的标准工具。这种联系可以追溯到 Mahler 定理[Ma2] （参见 [BM], [Gru], 第 3 章或 [Ev]），该定理给出了凸体及其对偶体的逐次极小值界。

下面介绍体积乘积与数的几何以及收缩几何之间的另一种联系，这是由 ´Alvarez Paiva、Balacheff 和 Tzanev [APBT]发现的。

数的几何中的闵可夫斯基第一定理指出，若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体，且 vol(K) $\ge 2^n$，那么 K 至少包含一个非零整数点（在 $\mathbb{Z}^n$中）。对称性假设是必要的，因为存在一些体积很大、包含原点却不含其他整数点的凸体。我们知道，这类凸体必定“扁平”[KL] ，而 ´Alvarez Paiva 和 Balacheff [APB] 猜想，它们的极体体积 K^* 不会太小:

猜想 12。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，满足 $\mathrm{int}(K) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$。那么 $\mathrm{vol}(K^*) \ge (n+1)/n!$，当且仅当 K 是一个顶点位于 $\mathbb{Z}^n$ 中的单纯形，且除其顶点和0外不含其他整数点时，等号成立。

在 [APBT], 猜想 12 已在 $\mathbb{R}^2$ 中得到证明，并且给出了适用于所有维数的 vol(K^*) 的同构界。具体而言，存在某个绝对常数 $c > 0$，使得 vol(K^*) $\ge c^n(n+1)/n!$ 对任意凸体 K 均成立，只要它满足 $\mathbb{R}^n$ int(K) 中除原点外不含其他整数点。 [APBT] 中的这一事实证明用到了 Bourgain-Milman 不等式，并证明了猜想 12 的这个同构版本实际上与其等价。

猜想 12 还可以进一步推广为收缩几何中的一个猜想。关于精确表述和定义，请参阅[APBT] 。这里我们给出该猜想的一个版本

以芬斯勒几何的语言表述（见第 7.3 节）。芬斯勒流形（M， F）的 Holmes-Thompson 体积定义为

$$\mathrm{vol}_{HT}(M,F)=\frac{1}{v_n}\int_M \mathrm{vol}((B_xM)^*)dx.$$

猜想 13。 对于 F 上的任意芬斯勒度量 $\mathbb{RP}^n$，都存在一条闭非可缩测地线，其长度不超过 $(n!v_n)_2^{1/n}$ 体积$_{HT}(\mathbb{RP}^n,\ F)^{1/n}$。 ———

我们提醒读者，若一个集合可以通过连续变形收缩到其中一点，则称其为可缩。对于 $n=2$，猜想 13 可由 Ivanov 的工作推出 [Iv1、Iv2]。下一个定理由 [APBT]证明：

定理 19。 猜想 *13* 蕴含：对于中心对称体，猜想 *2* 成立。

定理 19 的证明使用凸对称体上的芬斯勒度量 K ，该度量在每一点都与对应于 K的范数相同。通过在 x 中将$-x$ 与 ∂K中的点等同，我们在 $\mathbb{RP}^n$上得到一个长度空间（其内蕴度量与原度量相同的空间）。我们将这个芬斯勒空间记为（$\mathbb{RP}^n$， d_K）。由此可得

$$\mathrm{vol}(\mathbb{RP}^n,d_K)=\frac{1}{v_n}\mathcal{P}(K)$$

并且（$\mathbb{RP}^n$， d_K）中的闭塞线（最短的非可缩测地线）长度等于 2。结合这些交换关系，并假设猜想 13成立，我们便可由猜想 13 证明猜想 2 对 $\mathbb{R}^n$中的对称凸体成立。

References

[*ABKaS*] A. Akopyan, A. Balitskiy, R. Karasev and A. Sharipova, 非对称赋范空间中闭台球轨道的初等研究，《美国数学会会刊》*144 (2016),* 第 *10* 期, *4501–4513.*[*AFGZ*] M. Alexander, M. Fradelizi, L. Garcia-Lirola and A. Zvavitch, 有限维利普希茨自由空间的几何与体积乘积，《泛函分析杂志》*280 (2021),* 第 *4* 期, 论文编号 *108849, 38* 页.[*AFZ*] M. Alexander, M. Fradelizi and A. Zvavitch, 最大体积乘积多胞体，《离散与计算几何》*62 (2019),* 第 *3* 期, *583-600.*[*AG*] D. Alonso-Gutierez,关于布拉施克-桑塔洛不等式的推广及超平面猜想，《数学分析及其应用杂志》*344 (2008) 1, 292–300.*[*APB*] J. C. Álvarez Paiva and F. Balacheff, 接触几何与等周长不等式，《几何与泛函分析》*24 (2014),* 第 *2* 期, *648–669.*[*APBT*] J. C. Álvarez Paiva, F. Balacheff and K. Tzanev, 光学超曲面的等周长不等式，*Adv. Math. 301 (2016), 934–972.*[*AGM*1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V.D. Milman, 渐近几何分析。第一部分。《数学调查与专著》第 *202* 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2015.*[*AGM*2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V.D. Milman, 渐近几何分析。第二部分。《数学调查与专著》第 *262* 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2021.*[*AKO*] S. Artstein-Avidan, R. Karasev and Y. Ostrover, 从辛测量到马勒猜想，《杜克数学杂志》*(2014) 163(11) 2003-2022,.*[*AKM*] S. Artstein-Avidan, B. Klartag and V.D. Milman, 函数的桑塔洛点与函数型桑塔洛不等式，《*Mathematika*》*54 (2004), 33-48.*[*AKSW*] S. Artstein-Avidan, B. Klartag C. Schütt and E. Werner, 函数型仿射等周问题与逆对数 *Sobolev* 不等式，《泛函分析杂志》*262 (2012),* 第 *9* 期, *4181–4204.*

[*AMO*] S. Artstein-Avidan, V.D. Milman, and Y. Ostrover, *M*-椭球、辛容量与体积，*Comment. Math. Helv. 83 (2008), 359–369.*[*AS*] S. Artstein-Avidan and B.A. Slomka, 关于极性变换的桑塔洛不等式及其逆不等式的注记，《美国数学会会刊》*143 (2015) 4, 1693-1704.*[*AF*] G. Aubrun and M. Fradelizi, 两点对称化与凸性。*Arch. Math. (Basel) 82 (2004),* 第 *3* 期, *282–288.*[*Ba*1] K. Ball, *n* 维实空间中的等距问题与凸集截面，博士论文，剑桥，*1986*年。[*Ba*2] K. Ball, 对数凹函数与 *n* 维实空间中的凸集截面，*Studia Math. 88 (1988) 1, 69–84.*[*Ba*3] K. Ball, 关于凸集几何的若干评述，载于《泛函分析的几何方面》，《数学讲义》*317*，施普林格，*1988*，*224-231.*[*Ba*4] K. Ball, 马勒猜想与小波，《离散与计算几何》*13 (1995), 271–277.*[*BB*] K. Ball and K.J. Böröczky, 某些版本的普雷科帕-莱因德勒不等式的稳定性，*Monatsh. Math. 163 (2011),* 第 *1* 期, *1–14.*[*B*] R. P. Bambah, 极对偶凸体，*Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 377–378.*[*BBF*] F. Barthe, K.-J. Böröczky and M. Fradelizi, 布拉施克-桑塔洛不等式函数形式的稳定性。*Monatsh. Math. 173 (2014),* 第 *2* 期, *135–159.*,[*BF*] F. Barthe and M. Fradelizi, 具有多个超平面对称性的凸体的体积乘积，*Amer. J. Math. 135 (2013), 1-37.*[*BBV*] G. Berck, A. Bernig and C. Vernicos, 希尔伯特几何的体积熵，*Pacific J. Math., 245(2):201–225, 2010.*[*BeKa*] M. Berezovik and R. Karasev, 辛极性与马勒猜想。*arXiv:2211.14630.*[*Be*1] B. Berndtsson, 伪凸域的伯格曼核及其他相关函数的次调和性质，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006),* 第 *6* 期, *1633–1662.*[*Be*2] B. Berndtsson, 复积分与库珀伯格的 *Bourgain-Milman* 定理证明，*Adv. Math. 388 (2021),* 论文编号 *107927, 10* 页.[*Be*3] B. Berndtsson, 帕利-维纳空间的伯格曼核与纳扎罗夫的 *Bourgain-Milman* 定理证明，*Pure Appl. Math. Q. 18 (2022),* 第 *2* 期, *395–409.*[*BK*] G. Bianchi and M. Kelli, 布拉施克-桑塔洛不等式的傅里叶分析证明 *Proc. A. M. S.143-11, (2015), 4901–4912..*[*Bl*1] W. Blaschke, 论仿射几何 *VII*：椭圆与椭球的新极值性质，*Leipziger Berichte. 69 (1917*年*), 306-318 and 436-453.*[*Bl*2] W. Blaschke, 微分几何讲义 *II*：仿射微分几何，柏林，施普林格 *(1923).*[*Blo*1] Z. Blocki, 伯格曼核与 *Bourgain–Milman* 不等式的下界，载于：《泛函分析的几何方面》*(B. Klartag, E. Milman* 编*)*，施普林格，*2014*，第 *53–63* 页.[*Blo*2] Z. Blocki, 关于纳扎罗夫对马勒猜想与 *Bourgain–Milman* 不等式的复分析方法，载于：《复分析与几何》*(F. Bracci* 等编*)*，施普林格，*2015*，第 *89–98* 页.[*Bo*] E. D. Bolker, 一类凸体，*Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 323-345.*[*BMMR*] K. J. Böröczky, E. Makai, M. Meyer, and S. Reisner, 平面体积乘积——具有稳定性的下界估计。*Studia Sci. Math. Hung., 50 (2013), 159-198.*[*Bor*] K. J. Böröczky, 布拉施克-桑塔洛不等式与仿射等周不等式的稳定性，《数学进展》*225 (2010) 4, 1914-1928.*[*BH*] K. J. Böröczky and D. Hug, 佐诺体逆布拉施克-桑塔洛不等式的稳定性，*Adv. Appl. Math., 44:309–328, 2010.*[*Bou*] J. Bourgain, 高维凸集上的多项式分布，《数学讲义》*1469 (1991), 127–137.*[*BM*] J. Bourgain and V.D. Milman, *n* 维实空间中对称凸体的新体积比性质，*Invent. Math.88 (1987), 319-340.* $\mathbb{R}^n$*BLL*] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, and J. M. Luttinger, 多重积分的一般重排不等式，*J. Functional Analysis 17 (1974), 227–237.*[*BuF*] D. Bucur and I. Fragala, 狄利克雷拉普拉斯算子第一特征值的布拉施克-桑塔洛不等式与马勒不等式，*Proc. London Math. Soc 113 (2016) 3, 387-417.*

[*Bu*] H. Busemann, 一条布伦-明可夫斯基型凸体定理，*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 35, (1949). 27–31.*[*CFGLSW*] U. Caglar, M. Fradelizi, O. Guédon, Olivier, J. Lehec, C. Schütt and E. Werner, *Lp*仿射表面积和熵不等式的函数形式，*Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 4, 1223–1250.*[*CG* 1] S. Campi and P. Gronchi, 关于凸集的体积乘积不等式，*Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 8, 2393–2402.*[*CG*2] S. Campi and P. Gronchi, 关于 L_p带状多胞体的体积不等式，*Mathematika 53 (2006)1, 71–80.*[*Ch*] Y. Chen, *KLS*猜想中等周系数的一个近似常数下界，[*Co*] D. Cordero-Erausquin, 通过复插值证明的*Santal´o*不等式，*C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 767-772.*.[*CFM*] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, 对称凸集伸缩像的高斯测度的*(B)*猜想及相关问题，*J. Functional Analysis 214 (2004), 410-427.*[*CFPP*] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, G. Paouris and P. Pivovarov, 随机集极体的体积与影子系统，*Math. Ann. 362 (2015) 3-4, 1305-1325.*[*CR*] D. Cordero-Erausquin and L. Rotem, 关于*(B)*猜想的若干结果，泛函分析的几何方面。第 *I* 卷，*247–262*，*Lecture Notes in Math., 2256, Springer, Cham, (2020).*[*Ev*] J.-H. Evertse, *Mahler*在数的几何方面的工作，*Doc. Math, Extra Vol., Mahler Selecta (2019) 29-43.*[*Fa*] D. Faifman, 从*Funk*视角看台球、射影几何和*Mahler*体积，即将在*Journal of Differential Geometry*发表，*arXiv:2012.12159.*[*FaVW*] D. Faifman, C. Vernicos and C. Walsh, 即将发表的论文。[*Fat*] M. Fathi, 高斯测度下 *Talagrand* 输运 - 熵不等式的一个尖锐对称化形式，*Electron. Commun. Probab. 23 (2018), 81.*[*FS*] *I* D. Florentin and A. Segal, 关于 $\mathcal{J}$ 变换的*Santal´o*型不等式，*Communications in Contemporary Mathematics 23 (2021)1 1950090.*[*FGMR*] M. Fradelizi, Y. Gordon, M. Meyer and S. Reisner, 逆*Santal´o*函数不等式的等号成立情形，*Adv. Geom. 10 (2010), no. 4, 621–630*[*FGZ*] M. Fradelizi, N. Gozlan and S. Zugmeyer, 若干函数型逆*Santal´o*不等式的输运证明，*arXiv:2109.00871.*[*FHMRZ*] M. Fradelizi, A. Hubard, M. Meyer, E. Roldán-Pensado and A. Zvavitch, 对称凸体的等分与*Mahler*体积，*Amer. J. Math. 144 (2022), no. 5, 1201–1219.*[*FM*1] M. Fradelizi and M. Meyer, 与马勒猜想相关的函数不等式。*Monatsh. Math. 159 (2010) 1-2, 13-25.*[*FM*2] M. Fradelizi and M. Meyer, 无条件函数的递增函数与逆*Santal´o*不等式，*Positivity 12 (2008) 3, 407-420.*[*FM*3] M. Fradelizi and M. Meyer, 若干函数型逆*Santal´o*不等式，*Adv. Math. 218 (2008) 5, 1430-1452.*[*FM*4] M. Fradelizi and M. Meyer, *Blaschke-Santal´o*不等式的若干函数形式。*Math. Z. 256 (2007) 2, 379–395.*[*FN*] M. Fradelizi and E. Nakhle, 二维偶对数凹函数的马勒猜想函数形式，*Int. Math. Res. Not. IMRN, 2022, rnac120.*[*FMZ*] M. Fradelizi, M. Meyer and A. Zvavitch, 影子系统在马勒猜想中的应用，*Discrete Comput. Geom. 48 (2012) 3, 721-734.*[*GHS*] F. Gao, D. Hug and R. Schneider, 球面空间中的内在体积与极集。献给*Luis Santal´o*。第*1*卷（西班牙文）。*Math. Notae 41 (2001/02), 159–176 (2003).*[*Ga*1] R. Gardner, 几何断层成像。第二版。《数学及其应用百科全书》*58*。剑桥大学出版社，纽约，*2006.*[*Ga*2] R. Gardner, 几何断层成像：第二版补编，*https://www.wwu.edu/faculty/gardner/research.html.*[*Gi*] A. Giannopoulos, 凸体问题（希腊文），博士论文，在*Papadopoulou*教授指导下完成，克里特大学，希腊（*1993*）。

[*GHSW*] O. Giladi, H. Huang, C. Schütt and E. M. Werner, 具有极值仿射表面积的受约束凸体，*J. Funct. Anal. 279 (2020), no. 3, 23 p.*[*GPV*] A. Giannopoulos, G. Paouris and B. Vritsiou, 各向同性位置与逆*Santal´o*不等式，*Israel J. Math. 203 (2015) 1, 1-22.*[*GW*] P. Goodey and W. Weil, 佐诺体及其推广，《凸几何手册》，第*A*、*B*卷，*1297–1326*，*North-Holland*，阿姆斯特丹，*(1993).*[*Gor*] Y. Gordon, 关于*Milman*不等式及穿过 $\mathbb{R}^n$中的网而逃逸的随机子空间，《泛函分析的几何方面》，*Lecture Notes in Math.*，柏林，施普林格，*1317*，*1988*，*84–106*[*GM*] Y. Gordon and M. Meyer, 关于函数*Mahler*乘积的极小值，*Houston J. Math. 40 (2014) 2, 385-393.*[*GMR*] Y. Gordon, M. Meyer and S. Reisner, 具有最小体积乘积的佐诺体——一种新证明，*Proc. Amer.Math.Soc. 104 (1988), 273-276.*[*GR*] Y. Gordon and S. Reisner, *Banach*空间中各种参数的体积估计的若干方面。*Banach*空间理论研究研讨会论文集（美国爱荷华州艾奥瓦城，*1981*），*23-53*，*Univ. Iowa*，*Iowa City, IA, 1982.*[*Go*] N. Gozlan, 高斯对数*Sobolev*不等式的亏损与逆*Santal´o*不等式，*Int. Math. Res. Not. IMRN 17 (2022), 13396–13446.*[*GL*] N. Gozlan and C. Léonard, 输运不等式：综述。《马尔可夫过程及相关领域》*16 (2010), no. 4, 635–736.*[*Gri*] E. L. Grinberg, 凸体*k*维截面的等周不等式与恒等式，*Math. Ann., 291:75–86, 1991.*[*Gro*] M. Gromov, 辛流形中的伪全纯曲线，*Invent. Math. 82 (1985), 307–347.*[*Gru*] P.M. Gruber, 凸几何与离散几何，数学科学基础丛书[数学科学基本原理], 336。施普林格，柏林，*2007*。*xiv*+578 页[*Gr*] B. Grünbaum, 用超平面对质量分布和凸体进行划分，*Pacific J. Math., 10:1257–1261, 1960.*[*Gu*1] H. Guggenheimer, 极对偶凸体，*Israel J. Math. 14 (1973), 309–316.*[*Gu*2] H. Guggenheimer, 更正：“极对偶凸体”，*Israel J. Math. 14 (1973), no. 3, 309–316*）。*Israel J. Math. 29 (1978), no. 2-3, 312.*[*HP*] T. Hack and P. Pivovarov, 随机化*Urysohn*型不等式，《*Mathematika*》*67 (2021), no. 1, 100–115.*[*HJM*] J. Haddad, C.H. Jiménez and M.A. Montenegro, 非对称 *Blaschke-Santal´o* 函数不等式，*J. Funct. Anal. 278 (2020), no. 2, 108319.*[*Hd*] H. Hadwiger, 两个*K¨orper*的同时四等分，*Arch. Math. (Basel), 17:274–278, 1966.*[*Ha*] O. Hanner, 凸体平移像的交，*Mathematica Scandinavica 4 (1956),: 65–87,*[*HL*] A. B. Hansen and A. Lima, 具有*3.2*交性质的有限维*Banach*空间的结构，*Acta Math. 146 (1981), no. 1-2, 1–23.*[*HHL*] E. M. Harrell, A. Henrot and J. Lamboley, *Mahler*体积的局部极小值，*J. Convex Anal. 22 (2015) 3, 809-825.*[*H*] D. Hermann, 具有受限接触型边界的开集上的辛容量不等价，预印本，*1998.*[*HoS*] G.C. Hofstatter and F.E. Schuster, *Minkowski*端同态和*Asplund*端同态的*Blaschke-Santal´o*不等式，《国际数学研究通知》*(2021)*[*Ho*] L. Hörmander, 线性偏微分算子分析 *I*，*Springer-Verlag*，*1983.*[*Hoe*] S. Hoehner, 极值一般仿射表面积，*J. Math. Anal. Appl. 505 (2022) 2, 21 p.*[*HuLi*] Y. Hu and H. Li空间形式中的*Blaschke-Santal´o*型不等式与拟体积积分不等式，*Adv. Math. 413 (2023), Paper No. 108826.*[*Hu*] D. Hug, 仿射表面积方面的贡献，*Manuscripta Math. 91 (1996) 3, 283–301.*[*IS*1] H. Iriyeh and M. Shibata, 三维情形下体积乘积的对称*Mahler*猜想，《杜克数学杂志》，*169 (6): 1077-1134, 2020.*[*IS*2] H. Iriyeh and M. Shibata, 具有各种离散对称性的三维凸体的最小体积乘积，《离散与计算几何》*68 (2022), 738–773.*[*IS*3] H. Iriyeh and M. Shibata, 具有某些离散对称性的凸体的最小体积乘积及其应用，*arXiv*预印本：*arXiv:2203.13990*。

[*Iv*1] S. Ivanov，关于二维极小填充，圣彼得堡数学杂志 *13 (2002)*，*17–25*。[*Iv*2] S. Ivanov，芬斯勒二维圆盘的填充极小性，斯捷克洛夫数学研究所论文集 *273*（*2011*），《数学现代问题》，*192–206*。[*JLV*] A. Jambulapati，Y.T. Lee and S.S. Vempala关于 *KLS* 常数的一个略有改进的界，*arXiv:2208.11644*。[*K*] G. Kalai，中心对称多胞体的面数，《图与组合》*5 (1989)*，第 *1* 期，*389–391*。[*KaSa*] P. Kalantzopoulos and C. Saroglou，关于 j桑塔洛 ´猜想，*arXiv:2203.14815*。[*KL*] R. Kannan and L. Lovász，覆盖极小值与无格点凸体，《数学年刊》（第 *2* 辑）*128*（*3*）（*1988*）*577–602*。[*Ka*] R. Karasev 某些超平面截面的马勒猜想，《以色列数学杂志》*241*（*2021*）*795–815*。[*KaS*] R. Karasev and A. Sharipova经典力学中某些哈密顿量的维泰博猜想，《阿诺德数学杂志》*5*（*2019*），第 *4* 期，*483–500*。[*Ki*] J. Kim汉纳多胞体附近的最小体积乘积，《泛函分析杂志》*266*（*2014*），第 *4* 期，*2360–2402*。[*KiR*] J. Kim and S. Reisner单纯形处体积乘积的局部极小性，《*Mathematika*》*57*（*2011*），*121–134*。[*KiZ*] J. Kim and A. Zvavitch无条件凸体反向布拉施克–桑塔洛不等式的稳定性，《美国数学会会刊》*143*（*2015*）第 *4* 期，*1705–1717*。[*Kl*1] B. Klartag凸几何与腰不等式，《几何与泛函分析》*27*（*1*）：*130–164*，*2017*。[*Kl*2] B. Klartag各向同性常数与马勒体积，《*Adv. Math.*》*330*（*2018*），*74–108*。[*Kl*3] B. Klartag关于各向同性常数有界的凸扰动，《几何与泛函分析》*16*（*2006*），*1274–1290*。[*KlL*] B. Klartag and J. Lehec布尔根切片问题与多对数精度下的 *KLS* 等周不等式，*arXiv:2203.15551*。[*KM*] B. Klartag and V. D. Milman对数凹函数与测度的几何，《奉献几何》*112*（*2005*），*169–182*。[*Kol*] A. Koldobsky凸几何中的傅里叶分析，《数学调查与专著》*116*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2005*。*vi*+170 页。[*KoW*] A. Kolesnikov and E.W. Werner，多函数的布拉施克–桑塔洛不等式与测度的测地重心，《*Adv. Math.*》*396*（*2022*）。[*Ku*1] G. Kuperberg，凸几何中的一种低技术估计，《国际数学研究通报》*1992*年第*9*期，*181–183*。[*Ku*2] G. Kuperberg，从马勒猜想到高斯链接积分，《几何与泛函分析》*3*（*2008*），*870–892*。[*Le*] J. Lehec 高斯测度的对称性质（τ），《图卢兹数学科学学院年刊》（第 *6* 辑）*17*（*2008*），第 *2* 期，*357–370*。[*Le*1] J. Lehec 划分与泛函桑塔洛不等式。《数学档案》*2009*，*92*（*1*），*89–94*。[*Le*2] J. Lehec，泛函桑塔洛不等式的直接证明，《巴黎科学院报告，数学辑》*347*（*2009*）*55–58*。[*Leh*] D. H. Lehmer，某些分圆函数的因式分解，《数学年刊》*34*，*1933*，*461–469*。[*Leic*1] K. Leichtweiss，几何凸性与微分几何，载于《凸性及其应用》，*163–169*，*Birkhäuser*，巴塞尔，*1983*。[*Leic*2] K. Leichtweiss，凸体的仿射几何，*Johann Ambrosius Barth* 出版社，海德堡，*1998*。[*Lei*] T. Leinster，度量空间的大小，《数学文献》*18*：*857–905*，*2013*。[*LSW*] B. Li，C. Schütt and E.W. Werner对数凹函数的仿射不变映射，《几何分析杂志》*32*（*2022*），第 *4* 期，第 *123* 号，*50* 页。[*LMi*] I. Lindenstrauss and V. Milman，赋范空间的局部理论与凸性，《凸几何手册》，*North Holland*，阿姆斯特丹（*1993*），第 *2* 卷，*1151–1220*。[*LR*] M.A. Lopez and S. Reisner，马勒猜想的一个特殊情形，《离散与计算几何》*20*（*1998*），*151–176*。[*Lu*1] E. Lutwak，一般等周投影不等式，《美国数学会会刊》*90*（*3*）：*415–421*，*1984*。[*Lu*2] E. Lutwak，关于布拉施克–桑塔洛不等式，载于《离散几何与凸性》（纽约，*1982*），*106–12*，《纽约科学院年刊》*440*，纽约科学院，纽约，*1985*。

[*Lu*3] E. Lutwak，*Hadwiger* 调和拟混合体积的不等式，《数学年刊》*280*（*1*）：*165–175*，*1988*。[*Lu*4] E. Lutwak，广义仿射表面积，《*Adv. Math.*》*85*（*1991*）第 *1* 期，*39–68*。[*Lu*5] E. Lutwak，精选仿射等周不等式，《凸几何手册》，*North Holland*，阿姆斯特丹（*1993*），第 *1* 卷，*1263–177*。[*LuYZ* 1] E. Lutwak， D. Yang and G. Zhang L^p 仿射等周不等式，《微分几何杂志》*56*（*2000*），第 *1* 期，*111–132*。[*LuYZ*2] E. Lutwak， D. Yang and G. Zhang矩熵不等式，《概率年刊》*32*（*2004*），第 *1B* 期，*757–774*。[*LuZ*] E. Lutwak and G. Zhang，布拉施克–桑塔洛不等式，《微分几何杂志》*47*（*1997*）第 *1* 期，*1–16*。[*Ma*1] K. Mahler，凸多边形的一个极小问题，《*Mathematica B*（聚特芬）》*B7*（*1938*），*118–127*。[*Ma*2] K. Mahler，凸体的一个转移原理，《数学与物理学报》*68*（*1939*）第 *3* 期，*93–102*。[*Ma*3] K. Mahler，闵可夫斯基两个定理的极对偶类比，《澳大利亚数学会通报》*11*（*1974*）*121–129*。[*Ma*4] K. Mahler，我一篇短文的补充：闵可夫斯基两个定理的极对偶类比（《澳大利亚数学会通报》*11*（*1974*）*121–129*），《澳大利亚数学会通报》*14*（*1976*）第 *3* 期，*397–398*。[*MaR*] V. Mastrantonis and Y.A. Rubinstein，非对称 *Bourgain–Milman* 不等式的 *Nazarov* 证明，*arXiv:2206.06188*。[*Mau*] B. Maurey，一些偏差不等式，《几何与泛函分析》*1*（*1991*），第 *2* 期，*188–197*。[*Mec*] M. Meckes，凸体的大小与 *Holmes-Thompson* 内在体积，《加拿大数学通报》，即将出版，*arXiv:2206.02600*。[*Me*1] M. Meyer，某些赋范空间的体积刻画，《以色列数学杂志》*55*（*1986*），*317–326*。[*Me*2] M. Meyer， $\mathbb{R}^2$中具有最小体积乘积的凸体，《*Monatshefte für Mathematik*》*12*（*1991*）*297–301*。[*MP*1] M. Meyer and A. Pajor，关于桑塔洛不等式，《数学讲义》丛书第 *1376* 卷，施普林格，*1989*，*261–163*。[*MP*2] M. Meyer and A. Pajor，关于布拉施克–桑塔洛不等式，《*Arch. Math. (Basel)*》*55*（*1990*）第 *1* 期，*82–93*。[*MR*0] M. Meyer and S. Reisner，通过截面质心位置刻画椭球，《奉献几何》*31*（*1989*），第 *3* 期，*345–355*。[*MR*1] M. Meyer and S. Reisner，涉及极共轭凹函数积分的不等式，《*Monatsh. Math.*》*125*（*1998*），*219–227*。[*MR* 2] M. Meyer and S. Reisner，影子系统与极凸体的体积，《*Mathematika*》*53*（*2006*）第 *1* 期，*129–148*。[*MR*3] M. Meyer and S. Reisner，关于多边形的体积乘积，《汉堡大学数学研讨会论文集》*81*（*2011*），*93–100*。[*MR*4] M. Meyer and S. Reisner，椭球是体积乘积唯一的局部极大化体，《*Mathematika*》*65*（*2019*）第 *3* 期，*500–504*。[*MR*5] M. Meyer and S. Reisner，凸体的凸交体，《格拉斯哥数学杂志》*53*（*2011*），第 *3* 期，*523–534*。[*MSW*] M. Meyer， C. Schütt and E. Werner凸体的新仿射对称度量，《*Adv. Math.*》*228*（*2011*），第 *5* 期，*2920–2942*。[*MW*1] M. Meyer and E. Werner，´凸体的桑塔洛区域，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》*350*（*1998*），第 *11* 期，*45694591*。[*MW*2] M. Meyer and E. Werner，关于 *p*-仿射表面积，《*Adv. Math.*》*152*（*2000*），第 *2* 期，*288313*。[*Mi*] V. D. Milman，有限维赋范空间子空间的近欧几里得商空间，《美国数学会会刊》*94*，*3*，（*1985*），*445–449*。[*MiP*] V. Milman and A. Pajor*A.* 各向同性位置、惯性椭球以及 *n* 维赋范空间单位球的佐诺体，《泛函分析的几何方面》（*1987—1988*），*64–104*，《数学讲义》*1376*，施普林格，柏林，*1989*。[*MY*] E. Milman and A. Yehudayoff，仿射拟混合体积的尖锐等周不等式，即将发表于《美国数学会杂志》，*arXiv:2005.04769*。

[NNR] M. Naszódi, F. Nazarov and D. Ryabogin, 凸体由多胞体精细逼近，《美国数学杂志》142 (2020) 3, 809-820.[Na] F. Nazarov, Bourgain-Milman 定理的 H ¨ormander 证明，GAFA 研讨班笔记，《数学讲义》2050 (2012), 335-343.[NPRZ] F. Nazarov, F. Petrov, D. Ryabogin, and A. Zvavitch, 关于马勒猜想的一点说明：单位立方体的局部极小性，《杜克数学杂志》154 (2010), 419-430.[O] Y. Ostrover, 两个猜想的故事：从 Mahler 到 Viterbo，特拉维夫大学 (2018) https://www.ias.edu/sites/default/files/video/IAS-2018.pdf[PP] G. Paouris and P. Pivovarov, 等周型不等式的概率视角，Adv. Math. 230 (2012), 1402-1422.[PT] A. Papadopoulos and M. Troyanov, 编者。《希尔伯特几何手册》，IRMA 数学与理论物理讲义第22卷。欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2014年。[Pe1] C.M. Petty, 质心曲面，Pacific J. Math. 11 (1961), 1535–1547.[Pe2] C.M. Petty, 等周问题，载于《凸性与组合几何会议论文集》（俄克拉何马大学，诺曼，俄克拉何马州，1971），第26–41页，1971年。[Pe3] C.M. Petty, 几何极小表面积，《几何学献刊》3 (1974), 77–97.[Pe4] C.M. Petty, 仿射等周问题，《纽约科学院年刊》(1985) 440, 113-127,[Pi] G. Pisier, 凸体体积与巴拿赫空间几何，《数学论丛》，剑桥，剑桥大学出版社，1994年。[Reb] J. Rebollo Bueno, 平面上的随机反等周不等式，《奉献几何》215 (2021), 401–413.[Re1] S. Reisner, 随机多胞体与对称凸体的体积乘积，《斯堪的纳维亚数学》57(2) (1985) 386-392[Re2] S. Reisner, 具有最小体积乘积的佐诺体，《数学杂志》192 (1986), 339-346.[Re 3] S. Reisner, 具有1-无条件基的巴拿赫空间中的最小体积乘积，《伦敦数学会杂志》36 (1987), 126-136.[RSW] S. Reisner, C. Schütt and E. M. Werner, 马勒猜想与曲率，《国际研究纪事》2012, no. 1, 1–16.[R] C. A. Rogers, 一个单积分不等式，《伦敦数学会杂志》，32 (1957), 102–108.[RS] C. A. Rogers and G. C. Shephard, 凸体的一些极值问题，《Mathematika》5 (1958), 93-102.[Ru] D. Rudolf, 作为蠕虫问题的维泰博猜想，arXiv:2203.02043.[SR1] J. Saint Raymond, 关于对称凸体的体积。分析入门研讨班，1980-81，巴黎第六大学，1981年。[SR2] J. Saint Raymond, 经典算子理想的体积，《Studia Math.》80 (1984), no. 1, 63-75.[San1] L. A. Santaló, 平面凸曲线的一个仿射不变量，《Mathematicae Notae》8, 103-111.[San2] L. A. Santaló, n维空间凸体的一个仿射不变量，《葡萄牙数学》8 (1949) 4, 155-161.[Sar] C. Saroglou, 影子系统：评注与推广，Arch. Math. (Basel) 100 (2013), 389-399.[Sc] R. Schneider, 凸体：布伦-明可夫斯基理论。第二版，扩充版。《数学及其应用百科全书》151，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[SW] C. Schütt and E.W. Werner, 仿射表面积，arXiv:2204.01926.[Sh1] G. C. Shephard, 凸体的影子系统，《以色列数学杂志》2 (1964), 229–236.[S m] C. Smyth, 代数数的 Mahler 测度：综述。载于 McKe，James；Smyth，Chris（编）。《数论与多项式》。伦敦数学会讲义丛书，第352卷。剑桥大学出版社，2008年，322–349[St] A. Stancu, 两个体积乘积不等式及其应用，《加拿大数学通报》52 (2009), 464-472.[StWe] E. M. Stein and G. Weiss, 欧几里得空间上的傅里叶分析导论，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971年，普林斯顿数学丛书，第32号。[Ta] M. Talagrand, 高斯测度及其他乘积测度的运输成本，《几何与泛函分析》6 (1996), no. 3, 587–600。

[T1] T. Tao, 桑塔洛不等式, http://terrytao.wordpress.com/2007/03/08/open-problem-the-mahler-conjecture-on-convex-bodies/.[T2] T. Tao,《结构与随机性：数学博客第一年的篇章》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[To] M. C. H. Tointon通过概率方法证明二维马勒猜想，《美国数学月刊》25 (2018) 9, 820-828.[Tom] N. Tomczak-Jaegermann,班纳赫-马祖尔距离与有限维算子理想Pitman纯粹与应用数学专著与综述丛书，38。朗文科学与技术出版社，哈洛；美国联合出版方为约翰·威立父子公司，纽约，1989年。xii+395 页。[VG] L. Verger-Gaugry, 莱默猜想的一个证明，https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.10590, 2021年[Vi] C. Viterbo, 辛几何中的度量与等周问题，J. Amer.Math. Soc. 13 (2000), 411–431.[VY] C. Vernicos and D. Yang, 一个中心射影不等式，《巴黎科学院数学报告》357 (2019) 8, 681–685.[Y] D. Ye, L_p 几何极小表面积及其不等式,《国际数学研究通知》 (2015) 9, 2465-2498。

MATTHIEU FRADELIZI 古斯塔夫·埃菲尔大学、巴黎东克雷泰伊大学、法国国家科学研究中心、LAMA UMR8050，F-77447 马恩河谷，法国 电子邮件地址：
matthieu.fradelizi@univ-eiffel.fr

MATHIEU MEYER 古斯塔夫·埃菲尔大学、巴黎东克雷泰伊大学、法国国家科学研究中心、LAMA UMR8050，F-77447 马恩河谷，法国 电子邮件地址：
mathieu.meyer@univ-eiffel.fr

ARTEM ZVAVITCH 数学科学系 肯特州
立大学 肯特，俄亥俄州 44242，美国
电子邮件地址：
zvavitch@math.kent.edu