arXiv:2301.06183v1 [math.FA] 15 Jan 2023

希尔伯特空间中框架的算子表示的抽象结果

JAHANGIR CHESHMAVAR*、AYYANEH DALLAKI 和
JAVADBARADARAN

Abstract. 本文给出了希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上有界自伴算子 T 的一种乘法算子表示，使得 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$的框架，其中某个 $\varphi \in \mathcal{H}$。我们陈述了框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 具有$\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$形式表示的一个必要条件。我们还根据 $U^*U|_{N(U)^\perp}$的行为谱刻画了合成算子为 U的框架序列 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$。接下来，利用元素相对于 $\mathcal{H}$中单位向量的算子响应，对形如 $\{T^n f_1\}_{n=0}^{\infty}$ 的框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 进行了刻画。我们还将稳定框架视为 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$。最后，本文提出一个联系框架理论与算子理论的猜想。

1. 引言与预备知识

希尔伯特空间中框架的表示问题 $\mathcal{H}$ 若其形式为迭代序列 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$，其中某个线性算子 T 作用于 $\mathcal{H}$ 且 $\varphi \in \mathcal{H}$ 满足某些条件，则称为动力采样问题。这是调和分析中的一个新研究课题，Aldroubi 和 Petrosyan [1] 针对有限维空间上正规算子的迭代作用所生成的框架给出了相关结果（例如，参见[2, 3]）。近期，Christensen 等人撰写了两篇论文 [8, 9] ，研究了希尔伯特空间上线性算子的迭代作用所产生的框架的算子表示及框架性质。

关于框架理论、动力采样问题及其应用的介绍，请参阅 [1, 3, 4, 7, 10]。设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一个框架，它张成了 $\mathcal{H}$的一个无限维子空间。一个自然的问题是，是否存在定义在 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 T，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $f_{k+1} = T f_k$。文献 [9] 证明，这样的算子存在当且仅当框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 线性

关键词与短语。框架；迭代作用；算子表示；Riesz表示定理；Hahn-Banach定理；算子谱。

* 通讯作者。2010年数学主题分类：主分类 42C15；次分类 47B99。

无关（命题 1.2）。此外，还证明了算子 T 有界当且仅当的合成算子的核在 ℓ^2上的右移算子作用下保持不变$(\mathbb{N})$。在肯定的情况下；$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ （见 [8, 定理 (2.3)]）。

本文研究希尔伯特空间中的框架，其形式为 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$。当 T 是 $\mathcal{H}$ 上的有界自伴算子时，应用函数演算，我们给出 T 的乘法算子表示，使得对于某个 $\varphi \in \mathcal{H}$，序列 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架（命题 2.1）。此外，我们获得了希尔伯特空间中的框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 具有形式 $\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ 的表示的必要条件，其中 $\mathcal{H}$ （命题 2.2）。我们根据 $U^*U|_{N(U)^\perp}$ 的行为谱，给出了框架序列 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 的刻画，其中合成算子为 U （命题 2.3）。利用 $\mathcal{H}$ 中一个元素相对于单位向量的算子响应，我们刻画了形式为 $\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ 的框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中有界线性算子为 T （命题 2.4）。最后，我们考察形式为 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 的稳定框架（命题 2.8）。

在本文中， $\mathcal{H}$ 表示一个可分希尔伯特空间。通常， $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的集合记为 $B(\mathcal{H})$。指标集为自然数 $\mathbb{N}$，且 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。集合 $\mathcal{V}$ 的线性张成记为 $span\mathcal{V}$，其闭包记为$\overline{span}\mathcal{V}$。最后，用记号 $\sigma(T)$表示算子$T \in B(\mathcal{H})$的谱。

定义 1.1。 [7] 向量序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ 是$\mathcal{H}$ 上的一个框架， A， $B > 0$ 使得

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B \parallel f \parallel^2, \ \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为框架序列，其适用于 $\mathcal{H}$ 若不等式 (1) 对所有 $f \in \overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$均成立。此外， $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为Bessel 序列，适用于 $\mathcal{H}$ 只要 (1) 中的上界条件成立即可。若$A = B$，则称其为 A-紧框架，适用于 $\mathcal{H}$。根据定义，若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$上的一个框架，则有 $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$.若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$上的 Bessel 序列，则其合成算子定义为

$$U : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}; \ U(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \ .$$

众所周知 U 是一个定义良好且有界的算子（参见 [7]）。其伴随算子 U^* 由下式给出： $U^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$，对所有 $f \in \mathcal{H}$

而框架算子定义为

$$S := UU^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H};\ \ Sf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \ .$$

该表示 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ 的可用性由[9]刻画:

命题 1.2. 考虑 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中的任意序列 $\mathcal{H}$，其中 $span\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是无限维的。则以下条件等价:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 线性无关。(ii) 存在线性算子 T : $span\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \to \mathcal{H}$ ，使得 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ 。

在下文中，我们需要以下结果。

命题 1.3. [9] 若 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 是某个算子 $T \in B(\mathcal{H})$ 的框架，且某个 $\varphi \in \mathcal{H}$，则 T 具有闭值域。

定理 1.4. [1] 设 $T \in B(\mathcal{H})$ 且 $f \in \mathcal{H}$ 满足 $\{T^n f\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架。那么对于每个 $\varphi \in \mathcal{H}$，$(T^*)^n\varphi \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。

定理 1.5. [6] 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，其界为 A, B。设 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ 并假设存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0$ ，使得 $\max(\lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}, \lambda_2) < 1$ 且

$$\| \sum_{k=1}^{n} c_k (f_k - g_k) \| \leq \lambda_1 \| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \| + \lambda_2 \| \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \| + \mu (\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2)^{1/2},$$

对所有 $c_1, \cdots, c_n (n \in \mathbb{N})$。那么 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个框架，其界为

$$A(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2})^2, \ \ B(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{B}}}{1 - \lambda_2})^2.$$

2. 结果

对于给定的算子 $T \in B(\mathcal{H})$，我们定义

$$\mathcal{V}(T) := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty} \text{ is a frame for } \mathcal{H} \right\},$$

and

$$E(\mathcal{H}) := \left\{ T \in B(\mathcal{H}) : \{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty} \text{是 } \mathcal{H} \text{的一个框架，其中某个 } \varphi \in \mathcal{H} \right\}.$$

以下命题给出了 $E(\mathcal{H})$ 中自伴算子的乘法算子表示。回顾一下， $C(X)$ 表示

局部紧空间 X 上所有连续函数的集合，而 $C_0(X)$ 包含所有在无穷远处消失的函数。如果 X 是紧致的，那么 $C_0(X) = C(X)$。

命题 2.1. 设 $T \in E(\mathcal{H})$ 为自伴算子，且序列$\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个框架，其中 $\varphi \in \mathcal{H}$。那么，存在一个酉算子 V，从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(\sigma(T), \mu_\varphi)$，使得

$$(VTV^*f)(x) = xf(x), \ for \ all \ f \in L^2(\sigma(T), \mu_\varphi).$$

证明. 容易看出，由下式定义的线性泛函

$$\Lambda : C_0(\sigma(T)) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \Lambda(f) = \langle \varphi, f(T)\varphi \rangle,$$

是连续的，因此根据 Riesz表示定理，存在一个正测度 μ_φ ，满足 $\mu_\varphi(\sigma(T)) = ||\varphi||^2$ ，使得对任意 $f \in C_0(\sigma(T))$，都有

$$\Lambda(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu_\varphi(\lambda).$$

现在，对每个 $f \in C_0(\sigma(T))$，我们定义 $V(f(T)\varphi) := f$。显然， V定义良好，并且我们得到

$$\begin{aligned} ||f(T)\varphi||^2 &= \langle \varphi, f(T)^* f(T)\varphi \rangle = \langle \varphi, (\overline{f}f)(T)\varphi \rangle \\ &= \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 d\mu_\varphi(\lambda) = ||f||^2. \end{aligned}$$

这表明， V 在 $C_0(\sigma(T))$上是等距映射，因此它是连续的。于是，我们可以将 V延拓到 $\{f(T)\varphi$的闭包； $f \in C_0(\sigma(T))\}$ ，它等于 $\mathcal{H}$；因为一方面

$$\{P(T)\varphi : \ P \ is \ a \ polynomial\} = span\{T^k\varphi, k = 0, 1, ..\},$$

在 $\mathcal{H}$ 中稠密，另一方面，我们有

$$\{P(T)\varphi : \ P \ is \ a \ polynomial\} \subseteq \{f(T)\varphi : f \in C_0(\sigma(T))\}.$$

此外，延拓后的映射也是等距映射。由于 V 是等距映射， $ranV$ 是闭的，并且包含 $C_0(\sigma(T))$。但是 $C_0(\sigma(T))$在$L^2(\sigma(T), \mu_\varphi)$中稠密，因此可得 $ranV = L^2(\sigma(T), \mu_\varphi)$。因此， V是酉算子，并且对所有 $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\varphi)$，都有 $V^*f = f(T)\varphi$。现在，利用 V 的定义以及有界自伴算子的函数演算，对于任意 $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\varphi)$，我们得到

$$(VTV^*f)(x) = (VTf(T)\varphi)(x) = xf(x),$$

由此证明完毕。 □

根据命题 1.3，若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 具有如下形式的表示 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$，其中 $T \in B(\mathcal{H})$ 以及某个 $\varphi \in \mathcal{H}$，则 T 具有闭值域。下面的结果给出了框架$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ to 具有结构形式 $\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$所需的条件：

命题 2.2. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，其形式为 $\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$，其中 $T \in B(\mathcal{H})$。那么对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，$T - \lambda I$ 的值域在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

证明. 由于 $\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，$T \in E(\mathcal{H})$。若对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，$T - \lambda I$ 的值域在 $\mathcal{H}$ 中不稠密，则取 $\varphi_0 \in \mathcal{H}\backslash(T - \lambda I)\mathcal{H}$ 使得 $\overline{span}\{T^k\varphi_0\}_{k=0}^{\infty} = \mathcal{H}$。因此，存在一个 $c > 0$ 使得

$$\|\phi - \phi_0\| > c, \text{ for all } \varphi \in (T - \lambda I)\mathcal{H} .$$

令 $\mathcal{M}$ 为由 $(T - \lambda I)\mathcal{H}$ 和 φ_0 生成的子空间。定义

$$\Lambda : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}, \ \Lambda(\varphi + \alpha\varphi_0) = \alpha ,$$

对于任意 $\varphi \in (T - \lambda I)\mathcal{H}$ 以及所有 $\alpha \in \mathbb{C}$。于是，由于

$$c|\alpha| < |\alpha|\|\varphi_0 + \alpha^{-1}\varphi\| = \|\alpha\varphi_0 + \varphi\| ,$$

容易看出，Λ 是 $\mathcal{M}$ 上的连续线性泛函，且其范数至多为 c^{-1}。此外，$\Lambda = 0$ 在 $(T - \lambda I)\mathcal{H}$ 上，且 $\Lambda(\varphi_0) = 1$。因此，根据 Hahn-Banach定理，它可以延拓到 $\mathcal{H}$，即 Λ 是 $\mathcal{H}$ 上的连续线性泛函，且 $\Lambda((T - \lambda I)\mathcal{H}) = \{0\}$，以及 $\Lambda(\varphi_0) \neq 0$。因此，我们得到

$$\Lambda(T\varphi) = \lambda\Lambda(\varphi), \text{ for all } \varphi \in \mathcal{H} ,$$

然后

$$\Lambda(T^n\varphi) = \lambda^n\Lambda(\varphi), \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } \varphi \in \mathcal{H}.$$

特别地，$\Lambda(T^n\varphi_0) = \lambda^n\Lambda(\varphi_0)$。

由于 0，$\varphi \in \mathcal{H}$ 且 $\overline{span}\{T^k f_1\}_{k=0}^{\infty} = \mathcal{H}$，因此存在两个正整数序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$，当 $k \longrightarrow \infty$ 时，它们趋于 ∞，使得

$$\sum_{i=1}^{n_k} c_{n_i} T^{n_i}\varphi_0 \longrightarrow 0, \text{ as } k \longrightarrow \infty ,$$

and

$$\sum_{i=1}^{m_k} d_{m_i} T^{m_i}\varphi_0 \longrightarrow \varphi_0, \text{ as } k \longrightarrow \infty .$$

那么， Λ 的连续性意味着

$$\sum_{i=1}^{n_k} c_{n_i}\lambda^{n_i}\Lambda(\varphi_0) \longrightarrow 0, \text{ as } k \longrightarrow \infty ,$$

and

$$\sum_{i=1}^{m_k} d_{m_i}\lambda^{m_i}\Lambda(\varphi_0) \longrightarrow \Lambda(\varphi_0), \text{ as } k \longrightarrow \infty .$$

因此，可得 $\Lambda(\varphi_0) = 0$，这一矛盾证明了该结论。□

我们根据 $U^*U|_{N(U)^\perp}$ 的行为谱，对框架序列 $\{T^k\varphi\}_{k=0}^\infty$ 进行刻画：

命题 2.3. 设 $0 \neq T \in B(\mathcal{H})$，且对某个 $\varphi \in \mathcal{H}$，级数$\sum_{k=0}^\infty c_k T^k\varphi$对所有 $\{c_k\}_{k=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ 均收敛。那么，$\{T^k\varphi\}_{k=0}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架序列，当且仅当 $U^*U|_{N(U)^\perp}$ 的谱包含于半开区间 $]0, \|U\|^2]$ 中，其中 $(N(U))^\perp$ 表示零空间 $N(U)$ 的正交补。在这种情况下，我们有

$$\sigma(U^*U) \subseteq [0, \|U\|^2].$$

证明。由于 $\sum_{k=0}^\infty c_k T^k\varphi$ 对所有 $\{c_k\}_{k=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ 都有定义，$\{T^k\varphi\}_{k=0}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的 Bessel 序列，其合成算子定义为

$$U(\{c_k\}_{k=0}^\infty) = \sum_{k=0}^\infty c_k T^k\varphi,$$

在 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 上定义良好且有界。我们首先回顾有界线性算子 $\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ 的两个著名结果，其中 $\mathcal{K}$ 表示一个希尔伯特空间：

- $R(\Lambda)$ 在 $\mathcal{K}$ 中是闭的，当且仅当 $R(\Lambda^*\Lambda)$ 在 $\mathcal{H}$ 中是闭的，并且

$$\overline{R(\Lambda^*)} = (N(\Lambda))^\perp = (N(\Lambda^*\Lambda))^\perp = \overline{R(\Lambda^*\Lambda)}.$$

- $N(\Lambda)$ 和 $(N(\Lambda))^\perp$ 在 $\Lambda^*\Lambda$ 下是不变的，并且

$$\sigma(\Lambda^*\Lambda) = \sigma(\Lambda^*\Lambda|_{N(\Lambda)}) \cup \sigma(\Lambda^*\Lambda|_{N(\Lambda)^\perp}) \subseteq [0, \|\Lambda\|^2].$$

现在考虑正算子：

$$U^*U|_{N(U)^\perp} : (N(U))^\perp \to (N(U))^\perp.$$

显然，它是单射的，其值域 $R(U^*U|_{N(U)^\perp}) = R(U^*U)$ 在 $(N(U))^\perp$ 中稠密。现在，我们有

$$R(U) \text{ is closed in } \mathcal{H} \iff R(U^*U) \text{ is closed in } \mathcal{H},$$

$$\begin{aligned} &\iff U^*U|_{N(U)^\perp} \text{ is bijective,}\\ &\iff 0 \notin \sigma(U^*U|_{N(U)^\perp}),\\ &\iff \sigma(U^*U|_{N(U)^\perp}) \subseteq]0, \|U\|^2]. \end{aligned}$$

在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned} \sigma(U^*U) = \sigma(U^*U|_{N(U)}) \cup \sigma(U^*U|_{N(U)^\perp}) &\subseteq \{0\} \cup]0, \|U\|^2]\\ &= [0, \|U\|^2]. \end{aligned}$$

现在，利用 [7]证明即告完成。 □

设 e 是 $\mathcal{H}$中的一个单位向量。对于每个 $g \in \mathcal{H}$，定义 Λ_g^e： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$如下

$$\Lambda_g^e f = \langle f, g\rangle e, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

那么， Λ_g^e 是 $\mathcal{H}$ 上的一个有界线性算子，称为 g 相对于 e的算子响应。

[5], 中的作者刻画了形如 $\{T^n f_k\}_{n\in\mathbb{N},\ K\in I}$的框架，其中 $T \in B(\mathcal{H})$ 是正规算子， I 是可数指标集，且 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H}$。在下面的结果中，我们借助 f_1 相对于 $e = \frac{f_1}{\|f_1\|}$的算子响应，刻画形如 $\{T^n f_1\}_{n=0}^\infty$ 的框架:

命题 2.4. 设 $\mathcal{H}$ 中的 Bessel 序列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 具有如下形式： $\{T^n f_1\}_{n=0}^\infty$，其中某个 $T \in B(\mathcal{H})$ 。那么， $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$的框架，当且仅当满足以下条件:

(i) $(T^*)^n\varphi \to 0$ 如 $n \to \infty$，对所有 $\varphi \in \mathcal{H}$ 均成立。(ii) 存在一个有界可逆算子 $S \in B(\mathcal{H})$，使得$TST^* = S - \|f_1\|\Lambda_{f_1}^e$，其中 $e = \frac{f_1}{\|f_1\|}$。

证明。 设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{T^n f_1\}_{n=0}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架，其框架算子为 S。由定理 1.4，可知 (i) 成立。为证明 (ii)，由于 S 有界可逆且 $e = \frac{f_1}{\|f_1\|}$, 对任意 $f \in \mathcal{H}$，有

$$\begin{aligned} TST^* f &= \sum_{k=0}^\infty \langle T^* f, T^k f_1\rangle T^{k+1} f_1\\ &= \sum_{k=0}^\infty \langle f, T^{k+1} f_1\rangle T^{k+1} f_1\\ &= \sum_{k=0}^\infty \langle f, T^k f_1\rangle T^k f_1 - \langle f, f_1\rangle f_1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &= Sf - \|f_1\|\Lambda^e_{f_1} f \\ &= (S - \|f_1\|\Lambda^e_{f_1})f, \end{aligned}$$

这就证明了 (ii)。反过来，假设 (i) 和 (ii) 成立，并取 $\Lambda := \|f_1\|\Lambda^e_{f_1}$。于是得到

$$\begin{aligned} T^2S(T^*)^2 &= T(TST^*)T^* = T(S-\Lambda)T^* \\ &= TST^* - T\Lambda T^* = S - (\Lambda + T\Lambda T^*). \end{aligned}$$

通过归纳，我们得到

$$T^nS(T^*)^n = S - \sum_{k=0}^{n-1} T^k\Lambda(T^*)^k. \tag{4}$$

另一方面，对于任意 $f \in \mathcal{H}$，我们得到

$$\begin{aligned} \Lambda(T^*)^k f = \|f_1\|T^e_{f_1}(T^*)^k f &= \|f_1\|\langle (T^*)^k f, f_1\rangle e \\ &= \langle (T^*)^k f, f_1\rangle f_1. \end{aligned} \tag{5}$$

因此，由（4）和（5）可得

$$T^nS(T^*)^n f = Sf - \sum_{k=0}^{n-1}\langle f, T^k f_1\rangle T^k f_1.$$

因此，对于任意 $f \in \mathcal{H}$，我们得到

$$\langle S(T^*)^n f, (T^*)^n f\rangle = \langle Sf, f\rangle - \sum_{k=0}^{n-1}|\langle f, T^k f_1\rangle|^2.$$

对任意 $f \in \mathcal{H}$ 应用 (i)，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\langle f, T^k f_1\rangle|^2 = \langle Sf, f\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle S(T^*)^n f, (T^*)^n f\rangle = \langle Sf, f\rangle.$$

因此，S 是自伴的非负算子。现在，若 S_1 表示 Bessel 序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T^n f_1\}_{n=0}^{\infty}$ 的框架算子，则有

$$\langle S_1 f, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}|\langle f, T^k f_1\rangle|^2.$$

因此，对任意 $f \in \mathcal{H}$、$\langle Sf、 f\rangle = \langle S_1 f、 f\rangle$，这意味着 $S = S_1$。现在，算子 S 的有界可逆性完成了证明。□

在下面的引理中，我们用框架系数 $\{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ 对框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 进行刻画：

引理 2.5. 序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，当且仅当对任意 $0 \neq f \in \mathcal{H}$，$\{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ 都是 $\mathbb{C}$ 的一个框架。

证明。设 $0 \neq f \in \mathcal{H}$，且 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，其界为 A、B。对于任意 α、$\beta \in \mathbb{C}$，有 $\langle \alpha, \beta\rangle = \alpha\overline{\beta}$。因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle\langle f, f_k\rangle, g\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle \overline{g}|^2 = |g|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2, \ \forall g \in \mathbb{C}.$$

利用框架 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的下框架不等式和上框架不等式，得到

$$A|g|^2\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle\langle f, f_k\rangle, g\rangle|^2 \leq B|g|^2\|f\|^2, \ \forall g \in \mathbb{C}.$$

也就是说，$\{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个框架，其界为 $A\|f\|^2$ 和 $B\|f\|^2$。反过来，设对于任意 $0 \neq f \in \mathcal{H}$，$\{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个框架，其界为 A 和 B。那么对于任意 $0 \neq g \in \mathbb{C}$，有

$$A|g|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle\langle f, f_k\rangle, g\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle \overline{g}|^2 \leq B|g|^2.$$

因此，我们得到

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B, \ \forall f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \tag{6}$$

如果将 f 替换为$\frac{f}{\|f\|}$ 在（6）中，那么对于任意 $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$，得到

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

也就是说，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$的一个框架。 □

如果我们考虑以整数集合$\mathbb{Z}$ 而不是 $\mathbb{N}$为索引的框架，那么可以得到以下结果。

命题 2.6. 如果 $\{T^k f_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个紧框架，且存在某个可逆算子 $T \in B(\mathcal{H})$，那么 T 是一个酉算子。

证明。 由于 $\{T^k f_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一个紧框架，利用 [8], 中定理 2.3，对于任意 $f \in \mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|T^{-1}Tf\| \leq \|T^{-1}\|\|Tf\| \\ &= \|Tf\| \leq \|T\|\|f\| = \|f\|. \end{aligned} \tag{7}$$

因此， $\|Tf\| = \|f\|$对于所有 $f \in \mathcal{H}$，所以 T是一个等距映射，即 $T^*T = I$。类似地，利用 (7) 中 T^{-1}是一个等距映射，我们得出 $(T^{-1})^*T^{-1} = I$。

因此可知， $TT^* = T^*T = I$和 T是一个酉算子。 □

推论 2.7. 考虑一个具有结构形式 $\{T^k f_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的紧框架，其中 $T \in B(\mathcal{H})$ 是某个可逆算子。若 $\{U^k g_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\{T^k f_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的对偶框架，其中涉及某个 $U \in B(\mathcal{H})$ 和某个 $g_0 \in \mathcal{H}$，则 $U = T$。

证明. 根据前面的命题，我们有 $T^* = T^{-1}$。另一方面，根据定义，对于任意 $f \in \mathcal{H}$，可得

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ U^k g_0\rangle T^k f_0 = T\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle U^* f,\ U^k g_0\rangle T^k f_0\right) = TU^* f,$$

即 $TU^* = I$.。由于 T 是可逆算子且 $T^* = T^{-1}$，我们得到 U^* =T^*。□

最终结果给出了一个扰动条件，该条件能够保持框架的算子表示结构。

命题 2.8. 假设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T^k f_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 上某个 T 的框架，且 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个序列。若对于 $0 < \lambda_1$、 $\lambda_2 < 1$ 以及任意 $f \in \mathcal{H}$，有

$$(8)\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\langle f_k - g_k, f\rangle\| \le \lambda_1\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\langle f_k, f\rangle\| + \lambda_2\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\langle g_k, f\rangle\|,$$

对于所有有限序列 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$均成立。那么 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架，且具有算子表示形式。

证明。 取 $h_k := \langle f_k,\ f\rangle$以及 $t_k := \langle g_k,\ f\rangle$对所有 $f \in \mathcal{H}$。那么扰动条件（8）意味着

$$(9)\qquad \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k(h_k - t_k)\| \le \lambda_1\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k\| + \lambda_2\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k t_k\|.$$

由于 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$的一个框架，根据引理 2.5，对于所有 $0 \neq f \in \mathcal{H}$，$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$的一个框架。现在，根据定理 1.5， $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$\mathbb{C}$的一个框架。再次根据引理 2.5， $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架。

设对任意有限子集 $J \subset \mathbb{N}$， $\sum_{k\in J} c_k g_k = 0$。应用不等式（8），得到

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\langle f_k, f\rangle\| \le \lambda_1\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\langle f_k, f\rangle\|,\ \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

由于 $0 < \lambda_1 < 1$，我们得到 $\sum_{k\in J} c_k \langle f_k, f\rangle = 0$，即

$$\langle \sum_{k\in J} c_k f_k, f\rangle = 0, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

因此，$\sum_{k\in J} c_k f_k = 0$。现在，根据命题 1.2，对于任意 $k \in J$，可得 $c_k = 0$。因此，$\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 线性无关，再次应用命题 1.2，可得其算子表示形式为 $\{V^n g_k\}_{n=0}^{\infty}$ 其中线性算子 V。□

我们以提出以下猜想作为本文的结尾：

猜想。设 $T \in E(\mathcal{H})$。希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 可分解为以下希尔伯特空间的直和

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n \ ,$$

其中

(i) $T\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$。(ii) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\phi_n \in \mathcal{H}_n$，使得 $\{T^k\phi_n\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的一个框架。

References

[1] A. Aldroubi 和 A. Petrosyan，《算子的迭代作用所产生的动力学采样与系统》，应用与数值调和分析丛书，Birkhauser，波士顿，2016。[2] A. Aldroubi、C. Cabrelli、U. Molter 和 S. Tang，《动力学采样》，Appl. Harmon. Anal. Appl.，42 3（2017），378-401。[3] A. Aldroubi、C. Cabrelli、A.F. Cakmak、U. Molter 和 A. Petrosyan，《正规算子的迭代作用》，J. Funct. Anal.，272 3（2017），1121-1146。[4] F. Bayart、E. Matheron，《线性算子的动力学》，剑桥大学出版社，2009。[5] C. Cabrelli、U. Molter、V.Paternostro、F.Philipp，《有限指标集上的动力学采样》，J. d'Anal. Math.，140，（2020），637-667。[6] P. Cazassa、O. Christensen，《算子扰动及其在框架理论中的应用》，J. Fourier Anal. Appl.，3 5，（1997），543-557。[7] O. Christensen，《框架与 Riesz 基导论》，第二版，Birkh¨auser，巴塞尔，2016。[8] O. Christensen、M. Hasannasab，《框架的算子表示、有界性、对偶性与稳定性》，Integr. Equ. Oper. theory，88（2017），483-499。[9] O. Christensen、M. Hasannasab，《由算子迭代作用所产生系统的框架性质》，Appl. Comput. Har. Anal.，46 3（2019），664-673。[10] F. Philipp，《正规算子的 Bessel 轨道》，J. Math. Anal. Appl.，bf 448（2017），767-785。

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O.BOX 19395-3697, Tehran, IRAN.
电子邮箱地址：j_cheshmavar@pnu.ac.ir

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O.Box 19395-3697, Tehran, Iran.
电子邮箱地址：ayyanehdallaki@student.pnu.ac.ir

Department of Mathematics, Jahrom University, P.B.7413188941, Jahrom,Iran.

电子邮件地址：baradaran@jahromu.ac.ir