arXiv:2301.06202v2 [cs.LO] 2 Jun 2023

迭代的面貌：从 Elgot 到克莱尼

Sergey Goncharov

弗里德里希-亚历山大大学埃尔朗根-纽伦堡，德国

摘要。迭代的概念涵盖范围广泛，从可以说最一般的形式*Elgot iteration*到非常具体的形式 *Kleene iteration*。Bloom 和 Esik 以 *iteration theories* 的形式深入探讨了 Elgot 迭代的基本性质，而 *Kleene iteration* 则作为（无类型）形式体系不可或缺的一部分而广受欢迎，例如自动机理论、正则表达式和克莱尼代数。本文分别以 Elgot 单子和克莱尼单子的形式，建立 Elgot 迭代与克莱尼迭代之间的形式联系。我们还引入了一类新颖的 *while-monads*，它们与克莱尼单子一样，可以用代数术语相对简单地描述。与 Elgot 单子一样，while 单子涵盖了大量能够有效支撑 while 循环的模型，但这些模型可能不满足克莱尼代数定律，甚至可能完全不支撑克莱尼迭代算子。

1 引言

迭代在计算机科学的许多领域都至关重要，例如语义、验证、定理证明、自动机理论、形式语言、可计算性理论、编译器优化等。Elgot 早期尝试确定一种通用的迭代概念， [7], 他提出考虑一种代数理论，它由某种抽象机概念（受到图灵机及其变体的启发）所诱导，并将迭代视为该代数理论上的一个算子。

粗略地说，代数理论包含可复合的态射空间 $L(n,\ m)$，这些空间以自然数 n 和 m 为索引，并包含从 n 到 m[1] 的所有函数，称为基态射。例如，按照 Elgot 的观点，可以将 $L(n,\ m)$ 视为所有函数 $n\times S\to m\times S$构成的空间，这些函数表示机器状态从 n 取值到机器状态从 m取值的转换，同时更新 S 上的背景存储（例如， S 是图灵机的纸带）。用现代术语来说， $L(n,\ m)$ 本质上是状态单子 $T=(\text{-- }\times S)^S$的 Kleisli 态射空间 $n\to Tm$。于是，一个具有 m 个停机状态和 n 个非停机状态的机器由 $L(n,\ m+n)$中的一个态射表示，而迭代算子旨在计算 $L(n,\ m)$中的一个态射，以表示机器的一次运行；该态射通过对所有非停机状态进行反馈而得到。Bloom 和 Esik [4]对此视角进行了深入阐述，他们确定了 Elgot 迭代的最终等式理论，并给出了许多其他由现有语义模型导出的代数理论示例；对于这些理论，该理论被证明是可靠且完备的。

[1] 在此，我们将数 $n\in\mathbb{N}$ 与有限序数 $\{0、\ldots\ldots、n-1\}$等同起来。

将自然数替换为具有有限余积的范畴中的任意对象，并从纯等式理论转向一种密切相关且在实践中颇具吸引力的迭代准等式理论，便可得到 （完备） *Elgot* 单子 [2,16], ，它们是配备了迭代算子的单子 T，

$$\frac{f\colon X \to T(Y + X)}{f^{\dagger}\colon X \to TY} \qquad (\dagger)$$

鉴于 Moggi [33], 开创的计算效应与单子之间的联系，Elgot 单子无疑为携带计算效应的函数上的迭代提供了最一般的模型，这些计算效应包括可变存储、非确定性、概率、异常终止与非正常终止，以及进程代数中的输入输出动作。通过域论实现语义的标准方法会得到一个一般的（最小）不动点算子，从而使 Elgot 迭代退居次要地位，也掩盖了它的根本作用。在标准方案无法应用或难以应用时，例如在构造性情形 [12], 下的确定性混合系统语义 [13],和无限迹语义 [31]中，这一作用便再次凸显。

与 Elgot 迭代不同，克莱尼迭代以*Kleene* 代数的形式呈现，植根于逻辑和自动机理论 [23], ，并且关键依赖于非确定性。Kleene 代数的定律从一开始就由一种相当保守的观测模型所决定，该模型描述按线性顺序先后发生、数量有限的离散事件。尽管如此，Kleene 代数以及由此而来的 Kleene 迭代仍然取得了极大的成功（尤其是在 Kozen [26]提出著名的 Kleene 代数完备代数公理化之后），并被纳入各种形式化与验证框架，从并发领域的框架 [19] 到混合系统建模领域的框架 [35]。Kleene 迭代的一项显著竞争优势在于，无需任何（哪怕极为基础的）类型文法来确保语法构造的定义良好；不过，当用标准编程特性 [27,1,28]扩展 Kleene 代数时，这一点便无法避免。在语义层面，与 Elgot 迭代一样，Kleene 迭代也能与计算效应相协调，从而得到<Kleene 单子 [11], ，它们规定了具有以下类型轮廓的 Kleene 迭代：

$$\frac{f\colon X \to TX}{f^{*}\colon X \to TX} \qquad (*)$$

给定 f, f^{*} 非确定性地将自身复合任意多次。与 Elgot 单子相比，Kleene 单子所建模的计算效应种类相当有限，这是因为许多计算效应都受某些定律约束，而这些定律与 Kleene 代数定律相矛盾。举个简单的例子，考虑异常抛出这一计算效应，它受一条定律约束：在异常抛出程序后再复合另一个程序不会产生效果。结合 Kleene 代数定律，我们便会得到混乱：

$$\mathsf{raise}\, e_1 = \mathsf{raise}\, e_1;\ \bot = \bot = \mathsf{raise}\, e_2;\ \bot = \mathsf{raise}\, e_2,$$

其中 $\perp$ 是非确定性选择的单位。这一问题及类似问题促使人们提出了许多 [9,34,32,10] 削弱 Kleene 代数定律的方案（可能由此得到其他类别的单子，位于 Elgot 与克莱尼之间），但这些方案并未从基础理论的角度尝试确定这样一组定律的最弱形式。与此同时，Kleene 迭代与 Kleene 代数定律构成了最受限的迭代概念，这一点似乎毋庸置疑。

由此，我们得到了 Elgot 单子与 Kleene 单子之间各种可能的迭代概念。本文的目标一方面是探索这一范围，另一方面是助力弥合 Kleene 迭代与 Elgot 迭代之间的概念鸿沟。为此，我们引入*while* 单子，以常见的 while 循环形式刻画迭代。有些出人意料的是，尽管已有大量工作尝试用（†）来公理化迭代，但似乎尚无相应的、以“while”为基础的通用公理化方法。本文的主要技术贡献如下：

- 我们提出了一种新颖的 Kleene 代数定律公理化方法，该方法对 Kleene 代数和 Kleene 单子均适用（命题4）；•我们证明，现有的 Elgot 单子公理化是极简的（命题 12）；• 我们确立了 Elgot 单子与 while 单子之间的联系（定理 18）；• 我们将 Kleene 单子表述为具有附加性质的 Elgot 单子（定理 22）。

2 预备知识

我们将依赖范畴论中的一些基础概念和事实，这些概念和事实常用于语义学，尤其是单子 [3]。对于一个（局部小）范畴$\mathbf{C}$，我们用 $|\mathbf{C}|$表示其对象类，用 $\mathbf{C}(X,Y)$ 表示从 $X \in |\mathbf{C}|$到 $Y \in |\mathbf{C}|$的态射集合。为避免累赘，我们常省略自然变换各分量上的指标。**集合范畴** 表示经典集合与函数构成的范畴，即在满足排中律的经典逻辑中形式化的集合与函数（我们不会用到选择公理）。在具有二元积的范畴中，我们用 $\langle f,g\rangle\colon X \to Y \times Z$表示两个态射 $f\colon X \to Y$和 $g\colon X \to Z$的配对；对偶地，在具有二元余积的范畴中，我们用 $[f,g]\colon X + Y \to Z$表示 $f\colon X \to Z$和 $g\colon Y \to Z$的余配对。若 $\mathbf{1}$ 是终端对象，则用 $!\colon X \to 1$ 表示终端态射。

对于自函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$，一个（$F$-）代数是一个对 $(A, a\colon FA \to A)$。代数在以下态射概念下构成一个范畴：$f\colon A \to B$，若 (A,a) 到 (B,b) 的态射满足 $bf = (Ff)\,a$。初始代数 是该范畴的初始对象（可能存在，也可能不存在）。我们将此对象记作 $(\mu F, \mathsf{in})$。（F-）余代数对偶地定义为形如 $(A, a\colon A \to FA)$ 的对。终余代数记作 $(\nu F, \mathsf{out})$。根据 Lambek引理 [30], , in 和 out 都是同构，我们通常会用到它们的逆 in^{-1} 和 out^{-1}。

3 用于计算的单子

我们使用 *Kleisli* 三元组 $(T, \eta, (-)^\sharp)$ 表示单子——其中 T 是一个映射 $|\mathbf{C}| \to |\mathbf{C}|$，$\eta$ 是族 $(\eta_X \colon X \to TX)_{X \in |\mathbf{C}|}$，而 $(-)^\sharp$ 将 $f \colon X \to TY$ 映射为 $f^\sharp \colon TX \to TY$，并满足标准的单子定律

$$\eta^\sharp = \mathsf{id}, \qquad f^\sharp \eta = f, \qquad (f^\sharp g)^\sharp = f^\sharp g^\sharp$$

成立。因此可以证明，T可扩展为一个函子，并且 $Tf = (\eta f)^\sharp$和 η构成一个单位 自然变换。此外，我们可以定义乘法 自然变换 $\mu \colon TT \to T$，其中 $\mu_X = \mathsf{id}^\sharp$（从而将 T扩展为自函子范畴中的一个幺半群）。为与底层函子 T区分，我们倾向于用粗体字母（例如$\mathbf{T}$）表示单子。单子的公理蕴含，形如 $X \to TY$ 的态射构成一个范畴，称为*Kleisli* 范畴，记作$\mathbf{C}_\mathbf{T}$；其复合运算为*Kleisli*复合 $f \cdot g = f^\sharp g$，单位态射为 η。直观而言，Kleisli 范畴是一个范畴，其中的对象是相对于$\mathbf{C}$ 而言的（广义）有效应程序；而$\mathbf{C}$ 则是“纯”程序（即无效应程序）所在的范畴。更准确地说，我们将$\mathbf{C}_\mathbf{T}$ 中形如 ηf的态射称为纯 态射。因此，我们使用图示复合 g； f，并将其与函数复合 $f \cdot g$并列且等同地使用，因为前者与传统编程语言中的顺序复合算子相契合。

单子 $\mathbf{T}$ 称为 强的，如果它带有一个自然变换 $\tau_{X,\,Y} \colon X \times TY \to T(X \times Y)$ 称为强度，并满足若干相容条件 [33]。任何定义在 **集合范畴** 上的单子都是典范强的 [24]。

例1（单子）。回顾一些与计算相关的、定义在**集合范畴**上的单子（所有定义在**集合范畴** 上的单子都是强的 [33]）。

1. Maybe 单子：$TX = X + 1, \eta(x) = \mathsf{inl}\ x, f^\sharp(\mathsf{inl}\ x) = f(x), f^\sharp(\mathsf{inr}\ \star) = \mathsf{inr}\ \star$。2. 幂集单子：$TX = \mathcal{P}X, \eta(x) = \{x\}, f^\sharp(S \subseteq X) = \{y \in f(x) \mid x \in S\}$。3. $TX = \{S \mid S \in \mathcal{P}^+(X + 1),$ 若 S 是无限集，则 $\mathsf{inr}\ \star \in S\}$，其中 $\mathcal{P}^+$ 是非空幂集函子，$\eta(x) = \{\mathsf{inl}\ x\}, f^\sharp(S \subseteq X) = \{y \in f(x) \mid \mathsf{inl}\, x \in S\} \cup (\{\mathsf{inr}\ \star\} \cap S)$。4. 异常单子：$TX = X + E$，其中 E 是固定的（无结构的）非空异常集，$\eta(x) = \mathsf{inl}\ x, f^\sharp(\mathsf{inl}\ x) = f(x), f^\sharp(\mathsf{inr}\ e) = \mathsf{inr}\ e$。5. 非确定性写入单子：$TX = \mathcal{P}(M \times X)$，其中 $(M, \epsilon, \bullet)$ 是任意幺半群，$\eta(x) = \{(e, x)\}, f^\sharp(S \subseteq M \times X) = \{(n \bullet m, y) \mid (m, x) \in S, (n, y) \in f(x)\}$。6. 离散次概率分布单子：$TX = \{d \colon [0, 1] \to X \mid \sum_{x \in X} d(x) \leqslant 1\}$（$d, \{x \in X \mid d(x) > 0\}$ 的支撑集必为可数集——否则总和 $\sum_{x \in X} d(x)$ 将发散），$\eta(x)$ 是以 x 为中心的狄拉克分布 δ_x，即当 $x = y$ 时为 $\delta_x(y) = 1$，否则为 $\delta_x(y) = 0$，$(f \colon X \to \mathcal{D}Y)^\sharp(d)(y) = \sum_{x \in X} f(x)(y) \cdot d(x)$。

7. 部分状态单子：$TX = (X \times S + 1)^S$，其中 S是一个固定的全局状态集合，$\eta(x)(s) = \mathsf{inl}(x,\ s), f^\sharp(g \colon S \to X \times S + 1)(s) =$若为 inr，则为 $\mathsf{inr}\ \star$；若为 inr，则为 $g(s) = \mathsf{inr}\ \star$，且$f^\sharp(g \colon S \to Y \times S + 1)(s) = f(x)(s')$若为 inl，则为 $g(s) = \mathsf{inl}(x,\ s')$。

8. 部分交互式输入： $TX = \nu\gamma.((X + \gamma^I) + 1)$，其中 I是输入值的集合， $\eta(x) = \mathsf{out}^{-1}(\mathsf{inl}\ \mathsf{inl}\ x)$, $(f\colon X \to TY)^\sharp$是唯一满足条件的此类态射$f^\sharp\colon TX \to TY$即（略去同构 $T \cong (\text{-- } + T^I) + 1$）

$$f^\sharp(\mathsf{inl}\ \mathsf{inl}\ x) = f(x), \quad f^\sharp(\mathsf{inl}\ \mathsf{inr}\ h) = \mathsf{inl}\ \mathsf{inr}(f^\sharp\ h), \quad f^\sharp(\mathsf{inr}\ \star) = \mathsf{inr}\ \star.$$

直观而言， $p \in TX$ 是一种计算：它要么完成并给出一个属于 X的结果，要么接收一个来自 I 的输入并递归地继续，或者（无效地）发散。

9. 部分交互式输出： $TX = \nu\gamma.((X + \gamma \times O) + 1)$，其中 O是一个输出值集合， $\eta(x) = \mathsf{out}^{-1}(\mathsf{inl}\ \mathsf{inl}\ x)$, $(f\colon X \to TY)^\sharp$是唯一满足此条件的态射 $f^\sharp\colon TX \to TY$（省略同构 $T \cong (\text{-- } + T \times O) + 1$）

$$f^\sharp(\mathsf{inl}\ \mathsf{inl}\ x) = f(x), \quad f^\sharp(\mathsf{inl}\ \mathsf{inr}(p, o)) = \mathsf{inl}\ \mathsf{inr}(f^\sharp(p), o), \quad f^\sharp(\mathsf{inr}\ \star) = \mathsf{inr}\ \star.$$

$p \in TX$ 的行为与前一种情况相同，不同之处在于，在相关分支中，它输出到 O，而不是期待来自 I 的输入。

Kleisli 范畴通常等价于具有更熟悉的独立描述的范畴。例如，Maybe 单子的 Kleisli 范畴等价于偏函数范畴，而幂集单子的 Kleisli 范畴等价于关系范畴。在单子即效应隐喻下，偏函数因此可视为可能不终止的函数，而关系则可视为非确定性函数。

上述示例通常可以组合起来。例如，非确定性有状态计算可表示为 $TA = S \to \mathcal{P}(A \times S)$。 [21],的 Java 单子

$$TX = S \to (X \times S + E \times S) + 1$$

其中 S 为状态集合， E 为异常集合 。

4 克莱尼单子

Kleene 代数可以简洁地定义为幂等半环 $(S,\ \bot,\ \eta,\ \vee,\ ;\ )$ 并配备一个算子 $(\text{-- })^*\colon\ S \to S$，使得

- g; f^*是 $g \vee (\text{--})$的最小（预）不动点； f,
- f^*; h是 $h \vee f$ 的最小不动点； (--),

其中，序关系由 $\vee$诱导： $f \leqslant g$ 当且仅当 $f \vee g = g$。我们在此处及下文均假设，顺序复合 ; 的优先级高于 $\vee$。

更具体地说，Kleene 代数 $(S,\ \bot,\ \eta,\ \vee,\ ;\ \ (\text{--})^*)$ 是一种代数结构，满足图 1中的定律。Kleene 代数的范畴版本可表述为一类单子，称为*Kleene* 单子 [15], ，可用于解释具有迭代和非确定性的效应语言。

定义 2（克莱尼-科岑范畴/克莱尼单子）。我们称范畴 $\mathbf{C}$ 为克莱尼-科岑范畴，如果$\mathbf{C}$ 是以有界（即具有最小元素）并半格和严格保并态射为富化的，并且存在*Kleene* 迭代算子

$$(\text{–})^*\colon \mathbf{C}(X, X) \to \mathbf{C}(X, X),$$

Idempotent semiring laws:

idempotence:	$f \vee f = f$
commutativity:	$f \vee g = g \vee f$
neutrality of $\bot$*:*	$f \vee \bot = f$
associativity of $\vee$*:*	$f \vee (g \vee h) = (f \vee g) \vee h$
associativity of $;$ *:*	$f;\ (g;\ h) = (f;\ g);h$
right strictness:	$f;\bot = \bot$
right neutrality of η*:*	$f;\eta = f$
right distributivity:	$(f \vee g);h = f;\ h \vee g;\ h$
left strictness:	$\bot;f = \bot$
left neutrality of η*:*	$\eta;f = f$
left distributivity:	$f;(g \vee h) = f;g \vee f;h$

Iteration laws:

right unfolding:	$f^* = \eta \vee f;f^*$
right induction:	$f;g \leqslant f \implies f;g^* \leqslant f$
left unfolding:	$f^* = \eta \vee f^*;f$
left induction:	$f;g \leqslant g \implies f^*;g \leqslant g$

图 1. Kleene 代数/单子的公理。

使得，给定 $f\colon Y \to Y, g\colon Y \to Z$和 $h\colon X \to Y, g\, f^*$是 $g \vee (\text{--})\, f$ 的最小（预）不动点，而 $f^*\, h$是 $h \vee f\, (\text{--})$的最小（预）不动点。

单子$\mathbf{T}$ 是克莱尼单子，当且仅当$\mathbf{C}_\mathbf{T}$ 是一个克莱尼-科岑范畴。

回顾一下，幺半群不过是一个单对象范畴，其中态射对应于幺半群元素，而恒等态射和态射复合分别对应于幺半群单位元和复合运算。这表明克莱尼-科岑范畴与 Kleene 代数之间存在联系。

命题3. *Kleene* 代数恰好是只有一个对象的克莱尼-科岑范畴。

我们记录克莱尼-科岑范畴（因此，根据 命题3，也包括 Kleene 代数）的以下刻画。

命题4. 范畴$\mathbf{C}$ 是克莱尼-科岑范畴，当且仅当

- $\mathbf{C}$ 在有界并半格与严格保并态射上富化；

- 存在一个算子 $(\text{--})^*\colon \mathbf{C}(X,X) \to \mathbf{C}(X,X)$，使得：*1.* $f^* =$ 恒等态射 $\vee\, f^*\, f$；*2.* 恒等态射* =恒等态射；*3.* $f^* = (f \vee$ 恒等态射$)^*$；*4.* $h\, f = f\, g$ 蕴含 $h^*\, f = f\, g^*$。

证明。下面证明必要性。

1. 根据假设，定律 $f^* = \mathsf{id} \vee f^*\, f$ 成立。2. 由于 $\mathsf{id} = \mathsf{id} \vee \mathsf{id}\,\mathsf{id}$，id 是 $f \mapsto \mathsf{id} \vee f\,\mathsf{id}$ 的不动点，因此 $\mathsf{id}^* \leqslant \mathsf{id}$。此外，$\mathsf{id}^* = \mathsf{id} \vee \mathsf{id}^*\mathsf{id} \geqslant \mathsf{id}$。因此，根据互相包含可得 $\mathsf{id} = \mathsf{id}^*$。

3. 为证明 $(f \vee \mathsf{id})^* \leqslant f^*$，注意到 $f^* = \mathsf{id} \vee f^*\, f = \mathsf{id} \vee f^*\, f \vee f^* = \mathsf{id} \vee f^*\,(f \vee \mathsf{id})$，并利用 $(f \vee \mathsf{id})^*$ 是最小不动点这一事实。反向不等式可类似地证明，利用 f^* 是最小不动点这一事实即可。

4. 假设 $h\, f = f\, g$，并证明 $h^*\, f = f\, g^*$。注意

$$f \vee (h^*\, f)\, g = f \vee h^*\, f\, g = f \vee h^*\, h\, f = h^*\, f,$$

也就是说，$h^*\, f$ 满足 $f\, g^*$ 的不动点方程，因此 $h^*\, f \geqslant f\, g^*$。通过对称论证可得 $h^*\, f \leqslant f\, g^*$，从而 $h^*\, f = f\, g^*$。

我们接下来证明充分性。假设 $(\text{--})^*$ 满足本命题第二个条件的描述。注意，结合假设 1 和 4，我们可以立即得到 1 的对偶版本，即 $f^* = \mathsf{id} \vee f\, f^*$。现在，固定 $f\colon Y \to TY$和 $g\colon Y \to TZ$，并证明 $f^*\, g$是$g \vee f\,(\text{--})$ 的最小不动点——我们省略对偶性质的证明，因为它可以通过对偶论证得出。由 $f^* = \mathsf{id} \vee f^*\, f$ 可得 $f^*\, g = g \vee f\,(f^*\, g)$，也就是说，$f^*\, g$是不动点。接下来只需证明它是最小的不动点。假设对于某个 h，有 $h = g \vee f\, h$，这意味着

$$(\mathsf{id} \vee f)\, h = h \vee f\, h = g \vee f\, h \vee f\, h = h = h\,\mathsf{id}.$$

由于 $g \leqslant h$，利用假设 2、3 和 4，我们得到

$$f^*\, g \leqslant (\mathsf{id} \vee f)^*\, g \leqslant (\mathsf{id} \vee f)^*\, h = h\,\mathsf{id}^* = h,$$

如所需。 □

Kleene 单子的公理实际上并不需要单子，可以在任意范畴中解释。我们聚焦于 Kleisli 范畴，原因有二：(i) 在实践中，克莱尼 - 科岑范畴通常实现为 Kleisli 范畴，而单子提供了一种组合机制，可以通过一般化构造出更多克莱尼-科岑范畴；(ii) 我们将关联 Kleene 单子与 Elgot 单子，后者由公理定义，而这些公理确实同时涉及一般的 Kleisli 态射和基范畴中的态射。

例5。 我们重新考察 例1。其中许多单子不是克莱尼单子，只是因为它们不支持二元非确定性。 例1。6 是一个有趣的情形，因为我们可以定义概率选择运算 $+_p\colon\ \mathbf{C}(X,TY) \times \mathbf{C}(X,TY) \to \mathbf{C}(X,TY)$ 由 $p \in [0,1]$索引，其含义是

$x +_p y$ 以概率 x 确定， p 并以概率 y 确定， $1-p$。对于每个 $x \in X$， $f(x) +_p g(x)$ 是分布的凸和 $f(x)$ 和 $g(x)$。此运算满足重心代数 （或 抽象凸集 [37]）的公理，这些公理与幺半群的公理有些相似，但乘法算子由 $[0,1]$索引。要消除这种索引，可以去掉概率总和至多为 1 的要求，从而得到赋值 [38] 空间，而非概率分布空间。赋值可以方便地逐点相加，因此如此定义的加法满足幺半群律，但不满足幂等性，所以仍不能构成克莱尼单子。给定两个赋值 v和 w，我们还可以将 $v \vee w$定义为逐点取最大值。它满足半格的公理，但不满足两条分配律。

例1。3 是 **集合范畴**-约化，或是 平坦域上的 *Plotkin* 幂域 [36] 。它支持适当的非确定性选择，但唯一的候选 $\perp$ 并不是它的单位。

例1的 Kleene 单子 只有 2 和5。通过以显而易见的方式改编 $TX = (\mathcal{P}(X \times S))^S$而得到的 例1。7 上的非确定性状态单子也是 Kleene 的。

除幂集单子外，我们的 Kleene 单子示例实际上都是通过通用模式得到的。

命题 6。 设 **T** 是一个 *Kleene* 单子。那么以下单子也都是 *Kleene* 单子：

1. 对每个 S，状态单子变换器 $(T(\text{-- } \times S))^S$；

2. 对每个幺半群 $(M, \epsilon, \bullet)$，若 **T**是强的，且强度 $\tau_{X,Y}\colon X \times TX \to T(X \times Y)$ 遵循 *Kleene* 单子的结构，则写入单子变换器 $T(M \times \text{--})$，如下所示：

$$\begin{gathered} \tau\,(\mathsf{id} \times \perp) = \perp, \qquad \tau\,(\mathsf{id} \times f^*) = (\tau\,(\mathsf{id} \times f))^*, \\ \tau\,(\mathsf{id} \times (f \vee g)) = \tau\,(\mathsf{id} \times f) \vee \tau\,(\mathsf{id} \times g). \end{gathered} \tag{1}$$

证明。 1. 根据定义，状态变换子的 Kleisli 范畴等价于 $\mathbf{C}_\mathbf{T}$ 上由形如 $X \times S$ 的对象构成的满子范畴（利用同构 $\mathbf{C}(X, (T(Y \times S))^S) \cong \mathbf{C}(X \times S, T(Y \times S))$） 。富集、迭代算子和公理显然可沿诱导的包含函子加以限制。

2. 每个 $\mathbf{C}(X, T(M \times Y))$ 的半格结构都继承自 $\mathbf{C}_\mathbf{T}$，但要证明富集、严格性和分配律，必须逐一验证。对于每个 $f\colon X \to T(M \times Y)$，令 $f^\circ\colon M \times X \to T(M \times Y)$ 如下

$$M \times X \xrightarrow{\tau\,(\mathsf{id} \times f)} T(M \times (M \times Y)) \cong T((M \times M) \times Y) \xrightarrow{T(\bullet \times \mathsf{id})} T(M \times Y).$$

假设（1）推出以下恒等式：

$$\perp^\circ = \perp \quad (2) \qquad (f \vee g)^\circ = f^\circ \vee g^\circ \quad (3) \qquad (f\langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle)^\circ = f \quad (4)$$
$$(f^\circ \cdot g)^\circ = f^\circ \cdot g^\circ \quad (5) \qquad f^\circ \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle = f \quad (6)$$

变换后的单子的Kleisli复合将 $f\colon\ X \to T(M \times Y)$ 和$g\colon\ Y \to T(M \times Z)$ 映射为 $g^\circ \cdot f$的Kleisli复合，$\mathbf{T}$。左严格性和右分配律显然成立，而右严格性和左分配律也可由（2）、（3）推出：$\bot^\circ \cdot f = \bot \cdot f = \bot$，$(f \vee g)^\circ \cdot h = (f^\circ \vee g^\circ) \cdot h = f^\circ \cdot h \vee g^\circ \cdot h$。变换后的单子的Kleene星定义为 $(f^\circ)^* \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle$ 对每个 $f\colon\ X \to T(M \times X)$ 其中 $\epsilon\colon\ 1 \to M$ 是幺半群单位元。

$$\begin{aligned}(f^\circ)^* \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle &= (\eta \vee f^\circ \cdot (f^\circ)^*) \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= (\eta \vee f^\circ \cdot (f^\circ)^*) \cdot \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \vee f^\circ \cdot (f^\circ)^* \cdot \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \vee f^\circ \cdot (f^\circ)^* \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^\circ)^* \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle &= (\eta \vee (f^\circ)^* \cdot f^\circ) \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= (\eta \vee (f^\circ)^* \cdot f^\circ) \cdot \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \vee (f^\circ)^* \cdot f^\circ \cdot \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \\ &= \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \vee (f^\circ)^* \cdot f && /\!\!/\ (6) \\ &= \eta \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle \vee ((f^\circ)^* \langle \epsilon, \mathsf{id} \rangle)^\circ \cdot f. && /\!\!/\ (4)\end{aligned}$$

若 $f^\circ \cdot g \leqslant g$，则由（4）可得，$((f^\circ)^* \langle \epsilon,\ \mathsf{id} \rangle)^\circ \cdot g = (f^\circ)^* \cdot g \leqslant g$。类似地，若 $f^\circ \cdot g \leqslant f$，则由（5）可得 $f^\circ \cdot g^\circ = (f^\circ \cdot g)^\circ \leqslant f^\circ$，因此 $f^\circ \cdot (g^\circ)^* \langle e,\ \mathsf{id} \rangle \leqslant f^\circ \langle e,\ \mathsf{id} \rangle = f$。由此，所有迭代公理均得到满足。□

例 7。请注意，幂集单子 $\mathcal{P}$ 是一个 Kleene 单子，其中 f^* 是通过计算 $\eta \vee (\text{--}) \cdot f$的最小不动点得到的。

1. 根据命题 6.1，$(\mathcal{P}(\text{--} \times S))^S$ 是一个 Kleene 单子。2. 通过将命题 6.2 应用于自由幺半群 $A^\star$（其元素是字母表 A 上的有限字符串），我们得到 $\mathcal{P}(A^\star \times \text{--})$。

容易看出，对于每个 Kleene 单子$\mathbf{T}$，$\mathrm{Hom}(1, T1)$ 都是 Kleene 代数。将上述条款应用于此，我们相应地得到 Kleene 代数 [29]的标准关系和语言理论模型。

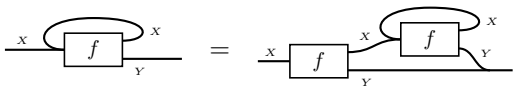
5 Elgot 单子

Elgot 单子为基于单子的迭代提供了一种一般方法。我们继续假设$\mathbf{C}$ 支持有限余积。特别地，这会产生一个 if-then-else运算符，将 $b \in \mathbf{C}(X, X+X)$ 和 f，$g \in \mathbf{C}(X, Y)$映射为 if b then p else $q = [q, p] \cdot b \in \mathbf{C}(X, Y)$。注意，对于 $\mathbf{C}$上的任意单子$\mathbf{T}$，$\mathbf{C}_\mathbf{T}$继承有限余积。

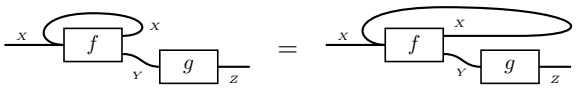
定义 8（Elgot 单子）。具有二元余积的范畴中的*Elgot* 单子，是一个配备*Elgot* 迭代算子的单子$\mathbf{T}$

$$(\text{–})^\dagger\colon \mathbf{C}(X, T(Y + X)) \to \mathbf{C}(X, TY),$$

不动点



自然性



余对角



一致性

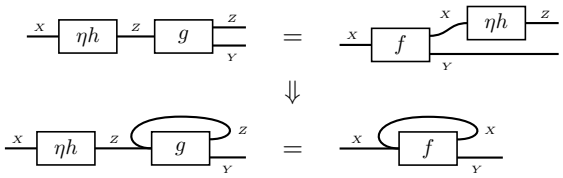


图 2. Elgot 单子的公理。

满足以下原则：

Fixpoint : $[\eta, f^\dagger] \cdot f = f^\dagger$ $\qquad (f\colon X \to T(Y+X))$

Naturality : $g \cdot f^\dagger = ([\eta\,\mathsf{inl} \cdot g, \eta\,\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger$ $\qquad (g\colon Y \to TZ, f\colon X \to T(Y+X))$

余对角: $f^{\dagger\dagger} = ([\eta,\ \ \eta\,\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger$ $\qquad (f\colon X \to T((Y+X)+X))$

Uniformity : $\dfrac{g \cdot \eta h = \eta(\mathsf{id} + h) \cdot f}{g^\dagger \cdot \eta h = f^\dagger}$ $\qquad (h\colon X \to Z, g\colon Z \to T(Y+Z),\ f\colon X \to T(Y+X))$

通过图示来描绘这些定律会更容易理解（图 2）；更准确地说，是用字符串图（参见 [22,18]，其中以幺半范畴的术语进行了严谨处理）。迭代 f 被描绘为一个反馈回路。由此不难看出，**不动点**表达了迭代的基本不动点性质，而**自然性**和**余对角**本质上只是对导线的重新排列。**一致性**定律是一种归纳形式：其前提表明，ηh 可以穿过 g，同时将 g 替换为 f；而结论本质上就是将这一变换在迭代下闭合所得的结果。**一致性**因此是唯一提及纯态射的定律。直观地说，态射 f 和 g 可以看作分别作用于 X 和 Y这些状态空间上的程序，而 $h\colon\ X \to Y$ 则是这些状态空间之间的映射。

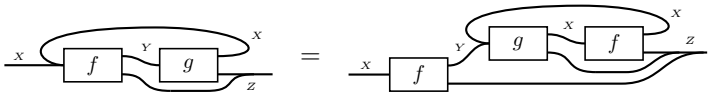
一**致性**由此确保迭代的行为不依赖于状态空间的形状。要确立这种观点，关键在于 h 是纯的，也就是说不会触发任何副作用。

注 9（发散）。每个 Elgot 单子都附带一个可定义的（非生产性）发散常量 $\delta = (\eta \mathsf{inr})^\dagger$。图示中，$\delta\colon X \to T\emptyset$将描绘为 ，与初始态射 $!\colon \emptyset \to TX$ 描绘为 的方式对称。 

例 10（Elgot 单子）。例1的第 1–9 条都定义了 Elgot 单子。引入 Elgot 迭代的一种标准方式，是在带基点完全偏序上丰富 Kleisli 范畴，并根据 Kleene 不动点定理，将 $(f\colon X \to T(Y+X))^\dagger$定义为映射 $[\eta, \text{--}] \cdot f\colon \mathsf{C}(X,TY) \to \mathsf{C}(X,TY)$ 的最小不动点。此情形涵盖第 1–7 条。在所有这些情形中，我们通过从集合范畴逐点扩展其典范的完全偏序结构，在 $\mathsf{Set}(X,TY)$ 上继承完全偏序结构。特别是，在第 4 条中，我们需要选择发散元素 $\delta \in E$。如果 $x = y$ 或 $x = \delta$，这一选择会在 $X + E$上诱导出平坦域结构。按照注 9 的含义，所诱导的发散常量便与 δ 一致，因此异常单子上不同的 Elgot 单子结构至少与异常一样多。

子句 8 和9 遵循另一种模式。对于每个 Elgot 单子 $\mathbf{T}$ 和每个自函子 H，若所有终余代数 $T_H X = \nu\gamma.T(X + H\gamma)$ 都存在，那么 T_H可扩展为一个 Elgot 单子 [13], ，称为 T 的余代数广义续延变换。在两种情况下，分别令 T 为 Maybe 单子，并分别取 和 $HX = X^I$ 和 $HX = O \times X$，即可得到子句 8 和 9。

注 11（二自然性）。迭代的一条经典定律未被纳入定义 8中，即二**自然性**定律，其图示如下：



这条定律曾用于迭代理论的一种等价公理化方式 [4]（称为“复合恒等式”），因此最初被沿用到 Elgot 单子的定义中 [2,16]。然而， ´Esik 和 Goncharov [8] 后来发现，在存在二**自然性**的情况下，**一致性**可以推导出该定律。

注 11 提出了这样一个问题：Elgot 单子的现有公理化是否可能还蕴含其他可推导的定律。对此，我们给出了否定的回答。

命题 12. 定义 *8* 中的公理化是最小的。

证明。 对于每条公理，我们都构造了一个分离示例，该示例不满足这条公理，但满足其余三条。每个示例都是**集合范畴**上的一个单子。

- **不动点**：对于任意单子 $\mathbf{T}$，若其配备了一个自然变换 $p\colon 1 \to TX$，我们便可以定义 $f^\dagger = [\eta, p!] \cdot f$。给定 $f\colon X \to T(Y+X)$ 时，很容易

看出 **自然性**, **余对角** 和 **一致性** 均成立，但 **不动点** 未必成立，例如当 $\mathbf{T}$ 是基于自然数加法幺半群的非确定性写入单子（例1.5）时 $\mathbb{N}$。

- **自然性**：令 $\mathbf{T} = \mathcal{P}$并令 $f^\dagger(x) = Y$对每个 $f\colon X \to T(Y+X)$以及每个 $x \in X$成立。注意，每个 $f\colon X \to T(Y+Z)$ 都等价于一对$(f_1\colon X \to TY,\ f_2\colon X \to TZ)$和 $[g, h]\cdot f = g\cdot f_1 \cup h\cdot f_2$，对任意 $g\colon Y \to TV$，$h\colon Z \to TV$均成立。这有助于看出，除了 **自然性** 之外，所有公理都成立，例如 $([\eta,\ f^\dagger]\cdot f)(x) = f_1(x) \cup Y = Y = f^\dagger(x)$。**自然性** 不成立，因为$g\cdot\delta = g\cdot(\eta\mathsf{inr})^\dagger \neq ([\eta\mathsf{inl}\cdot g,\ \eta\mathsf{inr}]\cdot\eta\mathsf{inr})^\dagger = \delta$，因为 $\delta\colon X \to TY$的像是 $\{Y\}$，而 $g\cdot\delta$的像（即 g的像）未必是 $\{Y\}$。

- **余对角**：考虑自由幺半群 $2^\star$ 上的非确定性写入单子的异常单子变换 $TX = \mathcal{P}(2^\star \times X \cup 2^\omega)$。这是一个典范的 Elgot 单子，我们将相应的迭代算子记作 $(\text{--})^\ddagger$。每个 $f\colon X \to T(Y+X)$，利用同构 $T(Y+X) \cong \mathcal{P}(2^\star \times Y \cup 2^\omega) \times \mathcal{P}(2^\star \times X)$，都会诱导一个映射 $f\colon X \to \mathcal{P}(2^\star \times X)$。令 $f^\dagger\colon X \to TY$ 如下：$f^\dagger(x)$ 是 $f^\ddagger(x)$ 与集合

$$\{w \in 2^\omega \mid \exists u \in 2^\star.\, uw = w_1 w_2 \ldots, (w_1, x_1) \in \hat{f}(x), (w_2, x_2) \in \hat{f}(x_1), \ldots\}.$$

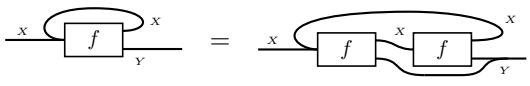
由 $(\text{--})^\ddagger$ 满足相应性质这一事实，基本上可推出 $(\text{--})^\dagger$ 满足**不动点**、**自然性** 和**一致性**。为证明 $(\text{--})^\dagger$ 不满足**余对角**，考虑 $g\colon 1 \to \mathcal{P}((2^\star+2^\star)\cup 2^\omega)$，其中 $g(\star) = \{\mathsf{inl}\ 0,\ \mathsf{inr}\ 1\}$。令 f 为 g 与显然的同构 $\mathcal{P}((2^\star+2^\star)\cup 2^\omega) \cong T((0+1)+1)$ 的复合。现在 $([\eta,\ \eta\mathsf{inr}]\cdot f)^\dagger(\star) = 2^\omega \neq \{0^\omega,\ 1^\omega\} = f^{\dagger\dagger}(\star)$。

- **一致性**：考虑 $TX = X + \{0,1\}$ 上的异常单子。它可以通过两种方式成为 Elgot 单子：将 0 或 1 视为发散元素。给定 $f\colon X \to T(Y+X)$，若 X 是单元素集，则按照第一种选择将 $f^\dagger$ 计算为最小不动点；否则按照第二种选择计算。除 **一致性** 外，其余公理显然都满足。为了说明 **一致性** 不成立，令 $|X| > 2$, $|Z| = 1$, $g = \eta\mathsf{inr}$, $f = \eta\mathsf{inr}$, $h = !$。因此，**一致性** 的前提成立，但结论不成立，因为 $f^\dagger$ 恒为 1，而 $g^\dagger$ 恒为 0。□

尽管我们无法提升任何 Elgot 单子律，**自然性** 却可以受到显著限制。

命题 13。 在 *Elgot* 单子的定义中，**自然性** 可以等价地替换为其中 g 具有 $\eta\mathsf{inr}\colon Y \to T(Y'+Y)$ 形式的特例。

证明。我们利用这样一个事实：二**自然性**和以下称为**平方律**的定律，均可由**不动点**、**余对角**和**一致性** [14, 引理 31] 推导得出：



令 $g\colon\ Y \to TZ,\quad f\colon\ X \to T(Y+X)$ 并接下来证明 $g \cdot f^\dagger = (\![[\eta\mathsf{inl}\cdot g,\ \ \eta\mathsf{inr}]\cdot f)\!]^\dagger$。
令 $w = [\eta\mathsf{inl}\cdot g,\ \ \eta\mathsf{inr}\cdot f]\colon\ Y+X \to T(Z+(Y+X))$，并注意到**不动点**蕴含

$$w^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inl} = g \tag{7}$$

结论可由以下恒等式推出

$$w^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inr} = g \cdot f^\dagger \tag{8}$$
$$w^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inr} = ([\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f)^\dagger \tag{9}$$

下面证明（8），使用一个允许的**自然性**实例：

$$\begin{aligned}
w^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inr} &= ([\eta, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}\cdot g, T(\mathsf{inr}\,\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\,f])^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inr} \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}\cdot g, T(\mathsf{inr}\,\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\,f])^{\dagger\dagger} \cdot \eta\,\mathsf{inr} && /\!/\ \textbf{Codiagonal} \\
&= [\eta, w^\dagger]\cdot([\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}\cdot g, T(\mathsf{inr}\,\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\,f])^\dagger \cdot \eta\,\mathsf{inr} && /\!/\ \textbf{Fixpoint} \\
&= [\eta, w^\dagger]\cdot(T(\mathsf{inr}\,\mathsf{inl}+\mathsf{id})\,f)^\dagger\cdot && /\!/\ \textbf{Uniformity} \\
&= [\eta, w^\dagger]\cdot\eta\,\mathsf{inr}\,\mathsf{inl}\cdot f^\dagger && /\!/\ \textbf{Naturality} \\
&= w^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inl}\cdot f^\dagger \\
&= g\cdot f^\dagger. && /\!/\ (7)
\end{aligned}$$

最后，下面证明（9）：

$$\begin{aligned}
w^\dagger\cdot\mathsf{inr} &= [\eta, w^\dagger]\cdot w\cdot\mathsf{inr} && /\!/\ \textbf{Fixpoint} \\
&= [\eta, w^\dagger]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f]\cdot\mathsf{inr} \\
&= w^\dagger\cdot f \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, w]\cdot w)^\dagger\cdot f && /\!/\ \textbf{Squaring} \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f]]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f])^\dagger\cdot f \\
&= [\eta, ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f] \\
&\qquad \cdot[\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f])^\dagger]\cdot\eta\,\mathsf{inr}\cdot f \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f]]\cdot\eta\,\mathsf{inr}\cdot f)^\dagger && /\!/\ \textbf{Dinaturality} \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f]\cdot f)^\dagger \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, [\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f)^\dagger \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}\cdot g, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f)^\dagger. && /\!/\ \textbf{Squaring}
\end{aligned}$$

□

6 while 单子

我们将用计算机科学中更为传统的 while 循环术语，进一步提出一种对 Elgot 单子的全新替代性刻画。

定义 14（决策）。给定范畴 $\mathbf{C}$ 上的一个单子 T ，我们称任意一族$(\mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X) \subseteq \mathbf{C}(X, T(X+X)))_{X\in|\mathbf{C}|}$为一族决策，如果每个$\mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X)$都包含 $\eta\mathsf{inl}$、 $\eta\mathsf{inr}$，且在条件表达式下封闭。

我们将决策上的逻辑运算编码如下：

$$\mathsf{ff} = \eta\,\mathsf{inl}, \qquad b \mathbin{\&\&} c = \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ c\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff}, \qquad \sim b = \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \mathsf{ff}\ \mathsf{else}\ \mathsf{tt},$$
$$\mathsf{tt} = \eta\,\mathsf{inr}, \qquad b \mathbin{||} c = \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ c.$$

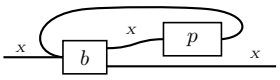
根据定义，决策可以从最小的族 $\mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X) = \{\mathsf{ff}, \mathsf{tt}\}$，到最大的族 $\mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X) = \mathbf{C}(X, T(X+X))$。

备注 15. 我们的决策概念极其简单且一般。另一种选择是形如 $b\colon X \to T2$ 的态射，由此我们可以得到 $X \xrightarrow{\langle \mathsf{id}, b\rangle} X \times T2 \xrightarrow{\tau} T(X\times 2) \cong T(X+X)$，如果 T 具有强度，且 τ是强度。由此得到的决策 d 将满足许多我们通常不作假设的性质，例如，如果 d 那么 $\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff} = \eta$。形如 $X \to T2$ 和 $X \to T(X+X)$ 的态射在语义中都与决策抽象相关——Jacobs 从范畴逻辑的角度对此作了详细阐述 [20]，他分别将其称为 谓词 和 仪器 （指涉物理实验，尤其是量子实验）。

Elgot 单子本质上是带效应的 while 语言的语义构件。事实上，我们可以引入一个语义 while 算子，并通过 Elgot 迭代表达它。给定 $b \in \mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X)$ 和 $p \in \mathbf{C}(X, TX)$，令

$$\mathsf{while}\ b\ p = (\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ p; \mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff})^{\dagger}, \tag{10}$$

或者用图表表示，while $b\ p$ 可表示为



反过来，如何通过 while 定义 Elgot 迭代，以及整个 Elgot 单子类如何基于 while 重新构造，则远没有那么显而易见。我们将相应的单子类称为*while* 单子。

定义 16（While 单子）。一个*while* 单子是一个单子T，配备一个算子

$$\mathsf{while}\colon \mathbf{C}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{T}}(X) \times \mathbf{C}(X, TX) \to \mathbf{C}(X, TX),$$

使得以下公理成立

W-Fix 当 $b\ p =$ 如果 b 则 p; (当 $b\ p$) 否则 η

W-或while $(b \mathbin{||} c)\ p =$ (while $b\ p$); while c (p; while $b\ p$)

W-And $\eta h; b = \eta u;$ ff 当 $(b \mathbin{\&\&} (c \mathbin{||} \eta u;\ \mathsf{ff}))\ p =$ 当 b (如果 c 则 p 否则 ηh)**W-Uni** $\eta h;\ b =$ 如果 c 则 $\eta h'$ 否则 ηu; $\eta h'\ p = q\ \eta h$; tt 否则 ; ff ; ; ; 当 当 ; ηh $b\ p = (c\ q)\ \eta u$

while 单子的定律大致对应于 **不动点、余对角、自然性** 和**一致性**。这种对应关系对于 **W-And** 而言有些隐晦，在 $u = \mathsf{id}$ 下实例化后，形式看起来更简洁：

$$\frac{\eta h; b = \mathsf{ff}}{\mathsf{while}\,(b\ \&\&\ c)\ p = \mathsf{while}\ b\ (\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h)}$$

然而，这个实例通常似乎并不足够。我们还是来更详细地考察一下。while 循环 $\mathsf{while}\,(b\ \&\&\ c)\ p$ 会在 b和 c 都满足时重复执行 p；而 $\mathsf{while}\ b\ (\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h)$ 会在 b 满足时重复执行 $(\mathsf{if}\ c\mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h)$，但后一个程序仍会在运行 p之前检查 c，并且只有在 c 失败时才触发 ηh。因此，规则结论中的等式是由前提保证的：前提确保一旦触发 ηh，循环便会在下一次迭代开始时退出。

注意，利用以下等式

$$\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b = p; \mathsf{while}\ b\ p \tag{11}$$

$$\mathsf{while}\ b\ p = \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{else}\ \eta \tag{12}$$

我们可以根据 $(\mathsf{while}\ b\ p)$ 定义 $(\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)$，反过来也可以根据前者得到后者。不出所料，while 单子也可以等价地用 do-while 来定义。

引理 17。在**T** 上赋予 *while* 单子结构，等价于为**T**配备一个算子，它将每个 $b \in \mathbf{C}_{\mathsf{T}}^{\mathsf{d}}(X)$ 和每个 $p \in \mathbf{C}(X, TX)$ 映射为$(\mathsf{do}\ p\,\mathsf{while}\ b) \in \mathbf{C}(X, TX)$，并满足以下原则：

DW-Fix 执行 p，当 $b = p$ 时重复；如果 b，则执行 $(p$ 当 $b)$ 时重复，否则 η**DW-AndDW-Uni**

DW-Or $\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ (b\ \|\ c) = \mathsf{do}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{while}\ c$

$$\frac{\eta h; b = \eta u; \mathsf{ff}}{\begin{array}{l}\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ \ \mathsf{do}\ p\ \ \mathsf{while}\ (b\ \&\&\ (c\ \|\ \eta u; \mathsf{ff}))\ \mathsf{else}\ \eta u \\ \qquad = \mathsf{do}\ (\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h)\ \mathsf{while}\ b\end{array}}$$

$$\frac{\eta h; p = q; \eta h' \qquad \eta h'; b = \mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ \eta h; \mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta u; \mathsf{ff}}{\eta h; \mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b = (\mathsf{do}\ q\ \mathsf{while}\ c); \eta u}$$

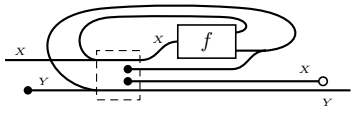
相关的等价关系由以下方程见证：(11) 和 (12)。

最后，在表达能力假设下，我们可以证明 while 单子与 Elgot 单子等价。该假设指出，决策集合 $\mathbf{C}_{\mathsf{T}}^{\mathsf{d}}$ 足够非平凡。显然，这一假设是必要的，因为正如上文所述，最小的决策族是包含 $\mathbf{C}_{\mathsf{T}}^{\mathsf{d}}(X) = \{\mathsf{ff}, \mathsf{tt}\}$ 的族，而它不足以表达有意义的 while 循环。

定理 18。假设对所有 X，$Y \in |\mathbf{C}|$，$\eta(\mathsf{inl} + \mathsf{inr}) \in \mathbf{C}_{\mathsf{T}}^{\mathsf{d}}(X+Y)$。那么 **T** 是 *Elgot* 单子，当且仅当它是相对于 $\mathbf{C}_{\mathsf{T}}^{\mathsf{d}}$的 *while* 单子。该等价由以下相互转换见证：(10) 和

$$f^{\dagger} = \eta\,\mathsf{inr}; (\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl} + \mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl}, f]); [\eta, \delta]. \tag{13}$$

用图示表示， $f^\dagger$ 表示为



对于 $f\colon\ X \to T(Y+X)$。

证明。 注意， (13) 等价于

$$f^\dagger = \eta\,\mathsf{inr};\big(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\big);[\eta,\delta]. \tag{14}$$

首先，我们证明所示的两个变换互为逆变换。

(i) $(\text{--})^\dagger \to$while $\to (\text{--})^\dagger$: 我们需要证明

$$\eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{if}\ (\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \mathsf{then}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f];\eta\,\mathsf{inr}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl})^\dagger;[\eta,\delta] = f^\dagger.$$

确实，

$$\begin{aligned}
&\eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{if}\ (\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \mathsf{then}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f];\eta\,\mathsf{inr}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl})^\dagger;[\eta,\delta]\\
&\quad= [\eta,\delta]\cdot([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot[\eta\,\mathsf{inl}, f]]\,(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}))^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inr}\\
&\quad= [\eta,\delta]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f]^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inr} && /\!/\ \textbf{Naturality}\\
&\quad= ([\eta\,\mathsf{inl}\cdot[\eta,\delta], \eta\,\mathsf{inr}]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f])^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inr}\\
&\quad= ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f])^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inr}\\
&\quad= ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot f]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}])^\dagger\cdot\eta\,\mathsf{inr}\\
&\quad= [\eta, ([\eta\,\mathsf{inl}, [\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}]]\cdot\eta\,\mathsf{inr}\cdot f)^\dagger]\cdot[\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot\eta\,\mathsf{inr} && /\!/\ \textbf{Dinaturality}\\
&\quad= f^\dagger.
\end{aligned}$$

(ii) while $\to (\text{--})^\dagger \to$ while: 我们需要证明

$$\eta\,\mathsf{inr};\big(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \ [\eta\,\mathsf{inl}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ p;\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff}]\big);[\eta,\delta] = \mathsf{while}\ b\ p. \tag{15}$$

请注意，

$$\begin{aligned}
&[\eta\,\mathsf{inl}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ p;\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff}]\\
&\quad= [[\mathsf{ff},\mathsf{ff}],[\mathsf{ff}, p;\mathsf{tt}]]\,[\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\\
&\quad= \ \mathsf{if}\ [\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\ \mathsf{then}\ [\mathsf{ff}, p;\mathsf{tt}]\ \mathsf{else}\,[\mathsf{ff},\mathsf{ff}],
\end{aligned}$$

[ff, ff]; η(内层 + 右入) = η[内层, 内层]; ff,

and

$$\begin{aligned}
&\eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \&\&\ ([\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\ \|\ \eta[\mathsf{inl},\mathsf{inl}];\mathsf{ff})\\
&\quad= [\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}, \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}]\ \&\&\ [\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}, \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]
\end{aligned}$$

$$= [\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff},\ \text{若}\ b\ \text{则}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \text{否则}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]$$

因此，使用 **W-And**，

$$\begin{aligned}&\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ p;\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff}]\\ &\quad= \mathsf{while}\,[\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff},\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\ [\mathsf{ff},p;\mathsf{tt}].\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}&\eta\,\mathsf{inr};[\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff},\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\\ &\quad= \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff},\end{aligned}$$

$$\eta\,\mathsf{inr};[\,\mathsf{ff},p;\mathsf{tt}] = p;\eta\,\mathsf{inr}\,.$$

因此，利用 **W-Uni**，

$$\begin{aligned}&\eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{while}\,[\eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff},\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{inr};\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}]\ [\mathsf{ff},p;\mathsf{tt}]);[\eta,\delta]\\ &\quad= (\mathsf{while}\ b\ p);\eta\,\mathsf{inl};[\eta,\delta]\\ &\quad= \mathsf{while}\ b\ p,\end{aligned}$$

证明（15）至此完成。

(iii) 下面检查，在编码（13）下，Elgot 单子的定律可由 while-单子的定律推出。

不动点：假设 $f\colon X \to T(Y+X)$ 且令 $p = \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\mathsf{inl}\ f]$。注意到

$$\eta\,\mathsf{inl};p = \eta\,\mathsf{inl}, \tag{16}$$

这可通过将 **W-Uni** 应用于恒等式 $\eta\,\mathsf{inl};\eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}) = \text{若 ff 则 } \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{tt}\ \text{否则}\ \eta\,\mathsf{inl};\mathsf{ff}$ 和 $\eta\,\mathsf{inl};[\eta\,\mathsf{inl}\ f] = \eta\,\mathsf{inl}$，并注意到 $\mathsf{while}\ \mathsf{ff}\ (\eta\mathsf{inl}) = \eta$ 得出。于是

$$\begin{aligned}f^\dagger &= \eta\,\mathsf{inr};p;[\eta,\delta]\\ &= \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{if}\ (\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \mathsf{then}\ [\eta\,\mathsf{inl},f];p\ \mathsf{else}\ \eta);[\eta,\delta] && /\!/\ \textbf{W-Fix}\\ &= [\eta,\delta]\cdot[\eta,p\cdot[\eta\,\mathsf{inl},f]](\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\cdot\eta\,\mathsf{inr}\\ &= [\eta,\delta]\cdot p\cdot f\\ &= [\eta,\delta]\cdot[p\cdot\eta\,\mathsf{inl},p\cdot\eta\,\mathsf{inr}]\cdot f\\ &= [\eta,\delta]\cdot[\eta\,\mathsf{inl},p\cdot\eta\,\mathsf{inr}]\cdot f && /\!/\ (16)\\ &= [\eta,[\eta,\delta]\cdot p\cdot\eta\,\mathsf{inr}]\cdot f\\ &= f;[\eta,\eta\,\mathsf{inr};p;[\eta,\delta]]\\ &= [\eta,f^\dagger]\cdot f.\end{aligned}$$

自然性：根据命题13，只需证明

$$\eta h\cdot f^\dagger = (\eta(h+\mathsf{id})\cdot f)^\dagger$$

对于所有 $f\colon\ X \to T(Y+X)$ 和 $h\colon\ Y \to TZ$。注意

$$\eta(h+\mathsf{id});\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}) = \text{若 } \eta(\mathsf{inl}\ +\mathsf{inr})\ \text{则 } \eta(h+\mathsf{id});\mathsf{tt}\ \text{否则 } \eta(h+\mathsf{id});\ \mathsf{ff},\eta(h+\mathsf{id});\ [\eta\mathsf{inl}\ \eta(h+\mathsf{id})\cdot f] = [\eta\mathsf{inl}\ f];\ \eta(h+\mathsf{id}),$$

因此，根据**W-Uni**,

$$\begin{aligned}&\eta(h+\mathsf{id});\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},\eta(h+\mathsf{id})\cdot f]\\ &\quad= (\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},f]);\eta(h+\mathsf{id}).\end{aligned}$$

因此，接下来

$$\begin{aligned}\eta h\cdot f^\dagger &= \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},f]);[\eta,\delta];\eta h\\ &= \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},f]);\eta(h+\mathsf{id});[\eta,\delta]\\ &= \eta\,\mathsf{inr};\eta(h+\mathsf{id});(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ [\eta\,\mathsf{inl},\eta(h+\mathsf{id})\cdot f]);[\eta,\delta]\\ &= (\eta(h+\mathsf{id})\cdot f)^\dagger,\end{aligned}$$

这样就完成了。

余对角：令 $f\colon\ X \to T((Y+X)+X)$。我们将使用变换（14）。令 $Z=(Y+X)+X$，固定以下态射：

$$\begin{aligned}p &= [[\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl},f],f]\colon Z\to TZ,\\ b &= \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\colon Z\to T(Z+Z),\\ c &= [\eta(\mathsf{inl}\,\mathsf{inl}+\mathsf{inl}\,\mathsf{inr}),\eta\,\mathsf{inr}\,\mathsf{inr}]\colon Z\to T(Z+Z),\\ d &= [\eta,\eta\,\mathsf{inr}]\colon Z\to T(Y+X),\end{aligned}$$

注意到 $b \parallel c = c$ 并且

$$\begin{aligned}&d;[\eta\,\mathsf{inl},f;d] = p;d,\\ &d;\eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}) = \mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ d;\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ d;\mathsf{ff},\end{aligned}\tag{17}$$

由**DW-Uni** 可得

$$d;\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl},f;d]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}) = (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ c);d.\tag{18}$$

很容易由**DW-Uni** 看出

$$f^\dagger = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl},f]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}));d.\tag{19}$$

接下来，注意到 $p=[\eta(\mathsf{inl}\ +\mathsf{id}),\ \eta\,\mathsf{inr}];\ [\eta\,\mathsf{inl}\ f]$，因此

$$\begin{aligned}(\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b);d &= [\eta(\mathsf{inl}+\mathsf{id}),\eta\,\mathsf{inr}];(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl},f]\ \mathsf{while}\ b);d && /\!/\ \textbf{DW-Uni}\\ &= [[\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl},\eta\,\mathsf{inr}],\eta\,\mathsf{inr}];(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl},f]\ \mathsf{while}\ b);d\\ &= [[\eta\,\mathsf{inl},f^\dagger],f^\dagger] && /\!/\ (19)\\ &= d;[\eta\,\mathsf{inl},f^\dagger],\end{aligned}$$

这与 (17) 一起由**DW-Uni** 推出

$$d;(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f^\dagger]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})) = (\mathsf{do}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{while}\ c);d \tag{20}$$

最后，我们可以继续证明**余对角**：

$$\begin{aligned}
&([\eta, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot f)^\dagger \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f\cdot d]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}));[\eta,\delta] \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};d;(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, d\cdot f]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}));[\eta,\delta] \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ c);d;[\eta,\delta] && /\!/\ (18) \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ (b\ \|\ c));d;[\eta,\delta] \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{while}\ c);d;[\eta,\delta] && /\!/\ \textbf{DW-Or} \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};d;(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f^\dagger]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}));[\eta,\delta] && /\!/\ (20) \\
&\quad = \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{do}\ [\eta\,\mathsf{inl}, f^\dagger]\ \mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}));[\eta,\delta] \\
&\quad = f^{\dagger\dagger}.
\end{aligned}$$

一致性：假设 $g\cdot\eta h = \eta(\mathsf{id}\ + h)\cdot f$。由此可得

$$\begin{aligned}
\eta(\mathsf{id}+h);[\eta\,\mathsf{inl}, g] &= [\eta\,\mathsf{inl}, g\cdot\eta h] \\
&= [\eta\,\mathsf{inl}, [\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot\eta h]\cdot\ f] \\
&= [\eta\,\mathsf{inl}, f];\eta(\mathsf{id}+h),
\end{aligned}$$

并注意到

$$\begin{aligned}
&\eta(\mathsf{id}+h);\eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}) \\
&\qquad = \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr}\,h) \\
&\qquad = \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr});\eta((\mathsf{id}+h)+(\mathsf{id}+h)) \\
&\qquad = \ \mathsf{if}\ (\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \mathsf{then}\ \eta(h+\mathsf{id});\mathsf{tt}\ \mathsf{else}\ \eta(h+\mathsf{id});\mathsf{ff}\,.
\end{aligned}$$

因此，利用 **W-Uni**，

$$\begin{aligned}
\eta h;g^\dagger &= \eta h;\eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \ [\eta\,\mathsf{inl}, g]);[\eta,\delta] \\
&= \eta\,\mathsf{inr}\,h;(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \ [\eta\,\mathsf{inl}, g]);[\eta,\delta] \\
&= \eta\,\mathsf{inr};\eta(\mathsf{id}+h);(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \ [\eta\,\mathsf{inl}, g]);[\eta,\delta] \\
&= \eta\,\mathsf{inr};(\mathsf{while}\ \eta(\mathsf{inl}+\mathsf{inr})\ \ [\eta\,\mathsf{inl}, f]);[\eta,\delta] \\
&= f^\dagger.
\end{aligned}$$

(iv) 最后，我们验证 while 单子的定律可由 Elgot 单子的定律推出。为此，我们验证引理 17中列出的性质；该引理与之等价。首先，注意由（11）和（10），

$$\begin{aligned}
\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b &= p;\mathsf{while}\ b\ p && /\!/\ (11) \\
&= p;(\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ p;\mathsf{ff}\ \mathsf{else}\ \mathsf{ff})^\dagger && /\!/\ (10)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot p]\cdot b)^\dagger \cdot p \\
&= [\eta, ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}\cdot p]\cdot b)^\dagger]\cdot \eta\,\mathsf{inr}\cdot p \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, b]\cdot \eta\,\mathsf{inr}\cdot p)^\dagger && /\!/\ \textbf{Dinaturality} \\
&= (b\cdot p)^\dagger.
\end{aligned}
$$

我们将在全文中使用 do p while b 的编码展开。

DW-Fix:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b &= (b\cdot p)^\dagger \\
&= [\eta, (b\cdot p)^\dagger]\cdot b\cdot p && /\!/\ \textbf{Fixpoint} \\
&= [\eta, \mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b]\cdot b\cdot p \\
&= p; \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{else}\ \eta.
\end{aligned}
$$

DW-Or:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ (b\ \|\ c) \\
&= ((b\ \|\ c)\cdot p)^\dagger \\
&= ([c, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot b\cdot p)^\dagger \\
&= ([\eta, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot [\eta\,\mathsf{inl}\cdot c, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot b\cdot p)^\dagger \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}\cdot c, \eta\,\mathsf{inr}]\cdot b\cdot p)^{\dagger\dagger} && /\!/\ \textbf{余对角} \\
&= (c\cdot (b\cdot p)^\dagger)^\dagger && /\!/\ \textbf{自然性} \\
&= \mathsf{do}\ (\mathsf{do}\ p\ \mathsf{while}\ b)\ \mathsf{while}\ c.
\end{aligned}
$$

DW-And: 假设 $\eta h; b = \eta u; \mathsf{ff}$,

如果 c 则执行 p，当 $(b\ \&\&\ (c\ \|\ \eta u; \mathsf{ff}))$，否则 ηu

$$
\begin{aligned}
&= [\eta u, ((b\ \&\&\ (c\ \|\ \eta u; \mathsf{ff}))\cdot p)^\dagger]\cdot c \\
&= [\eta u, ([\eta\,\mathsf{inl}, T(u+\mathsf{id})\cdot c]\cdot b\cdot p)^\dagger]\cdot c \\
&= [\eta, ([\eta\,\mathsf{inl}, T(u+\mathsf{id})\cdot c]\cdot b\cdot p)^\dagger]\cdot T(u+\mathsf{id})\cdot c \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}, b\cdot p]\cdot T(u+\mathsf{id})\cdot c)^\dagger && /\!/\ \textbf{二自然性} \\
&= ([\eta\ \mathsf{inl}\ u, b\cdot p]\cdot c)^\dagger \\
&= ([b\cdot \eta h, b\cdot p]\cdot c)^\dagger && /\!/\ \text{假设} \\
&= (b\cdot [\eta h, p]\cdot c)^\dagger \\
&= (b\cdot (\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h))^\dagger \\
&= \mathsf{do}\ (\mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ p\ \mathsf{else}\ \eta h)\ \mathsf{while}\ b.
\end{aligned}
$$

DW-Uni: 假设 ηh； $p = q$； $\eta h'$ 且 $\eta h'$； $b =$ 若 c，则 ηh；tt 否则 ηu；ff,

ηh；执行 p，直到 b

$$
\begin{aligned}
&= (b \cdot p)^\dagger \cdot \eta h \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl}\,u, \eta\,\mathsf{inr}] \cdot c \cdot q)^\dagger && /\!/ \textbf{ Uniformity} \\
&= \eta\,\mathsf{inl}\,u \cdot (c \cdot q)^\dagger && /\!/ \textbf{ Naturality} \\
&= (\mathsf{do}\ q\ \mathsf{while}\ c); \eta u.
\end{aligned}
$$

证明至此结束。 □

7 Kleene单子作为 Elgot 单子

如果 while 单子 $\mathbf{T}$ 的 Kleisli 范畴的同态集具有半格结构，并且每个 $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}^{\mathsf{d}}(X)$ 在该结构下都是闭合的，我们便可如下定义 Kleene 迭代：

$$p^* = \mathsf{while}\,(\mathsf{ff} \vee \mathsf{tt})\ p.$$

也就是说，在每次迭代时，我们都以非确定的方式决定是结束还是继续。

给定一个判定 $b \in \mathbf{C}_{\mathbf{T}}^{\mathsf{d}}(X)$，令 $b? = (\mathsf{if}\ b\,\mathsf{then}\ \eta\,\mathsf{else}\ \delta) \in \mathbf{C}(X, TX)$。通过 Kleene 迭代表达 while 循环的标准方式如下：

$$\mathsf{while}\ b\ p = (b?; p)^*; (\sim b)?$$

如果复合转换 while $\to$ (--)* $\to$ while 可证明是恒等映射，那么这基本上意味着 Kleene 迭代与带非确定性的 while 等价。一般来说，情况并非如此，除非我们假设更多用于关联 while 与非确定性的性质。我们将建立这类定律的最小集合这一问题留待未来研究。此处，我们只针对所导出的 Kleene 迭代满足 Kleene 单子定律的情况证明其等价性。首先，我们指出一种替代**一致性**的方案：将对纯态射的引用替换为对一个更大类的引用，该类由满足 $\delta \cdot h = \delta$ 的那些 h 组成。我们需要这一准备步骤来关联 Elgot 迭代与 Kleene 迭代，因为后者并不依赖于预先假设的纯态射类，而前者依赖于此。

定义 19（强一致性）。给定一个 Elgot 单子 $\mathbf{T}$，强一致性定律如下：

一致性*：
$$\frac{\delta \cdot h = \delta \qquad g \cdot h = [\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr} \cdot h] \cdot f}{g^\dagger \cdot h = f^\dagger}$$

其中 $h\colon\ X \to TZ$，$g\colon\ Z \to T(Y+Z)$，且 $f\colon\ X \to T(Y+X)$。

显然，**一致性**是 **一致性*** 的一个实例。

例 20. 下面可以构造一个不满足**一致性*** 的 Elgot 单子示例。令**S** 为 **集合范畴** 上的 maybe 单子的读者单子变换：$SX = (X+1)^2$。它是一个 Elgot 单子，因为 maybe 单子是 Elgot 单子，而 Elgot 性质在读者单子变换器下保持不变。令$TX = X \times (X+1) + 1$，并注意到 T在.....下是 S的一个收缩

$$\rho\colon (X+1) \times (X+1) \cong X \times (X+1) + (X+1) \xrightarrow{\mathsf{id}+!} X \times (X+1) + 1.$$

容易验证 ρ 是关于 Elgot 单子结构的一个同余，因此它在 $\mathbf{T}$ [17, 定理 20]。

现在，令 $T_E = T(\text{-- } + E)$，其中 E 非空。$\mathbf{T}$ 的 Elgot 单子结构在 $\mathbf{T}_E$ 上诱导出一个 Elgot 单子结构。然而，$\mathbf{T}_E$ 不满足**一致性***。事实上，令 h: $X \to (X+E)\times((X+E)+1)+1$ 和 $f\colon X \to ((1+X)+E)\times((1+X)+E)+1)+1$ 如下:

$$h(x) = \mathsf{inl}(\mathsf{inl}\, x, \mathsf{inl}\,\mathsf{inr}\, e) \qquad\qquad f(x) = \mathsf{inl}(\mathsf{inr}\, e, \mathsf{inl}\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inr}\, x)$$

其中 $e \in E$。那么 $h\cdot\delta = \delta$, $f^\dagger(x) = \mathsf{inl}(\mathsf{inr}\ e,\ \mathsf{inr}\ \star)$，且 $f\cdot h = [\eta\mathsf{inl}\ \eta\mathsf{inr}\cdot h]\cdot f$，但 $(f^\dagger\cdot h)(x) = \mathsf{inl}(\mathsf{inr}\ e,\ \mathsf{inl}\,\mathsf{inr}\ e) \neq \mathsf{inl}(\mathsf{inr}\ e,\ \mathsf{inr}\ \star) = f^\dagger(x)$。

注 21。 例 20 表明，要提出一种普遍且稳健的 Elgot 迭代理念并不容易；这种理念应局限于单个范畴，而不诉诸另一个由“行为良好”（例如纯）态射组成的范畴。尽管 Elgot 单子类在各种单子变换器下封闭，但此例表明，具有强一致性的 Elgot 单子甚至在异常单子变换器下也不封闭。

现在我们可以建立 Kleene 单子与 Elgot 单子之间的联系。

定理 22。 单子$\mathbf{T}$ 是 *Kleene* 单子，当且仅当

1. $\mathbf{T}$是 *Elgot* 单子；*2.* $\mathbf{T}$ 的 *Kleisli* 范畴赋有并半格（不含最小元）与保并态射的富化结构；*3.* $\mathbf{T}$ 满足 $(\eta\,\mathsf{inl}\vee\eta\,\mathsf{inr})^\dagger = \eta$；*4.* $\mathbf{T}$ 满足**一致性***。

为证明该定理，我们需要相互编码 Kleene 迭代与 Elgot 迭代。这些编码可追溯至 C˘az˘anescu 和 S.tef˘anescu [5]。我们还需要一些预备步骤。以下是 Kleene 代数的一条标准性质，它可以直接推广到 Kleene 单子。

Lemma 23. $(f\vee g)^* = f^*\cdot(g\cdot f^*)^*$.

接下来，请看以下内容。

引理 24。 对于任意单子 $\mathbf{T}$，若其 *Kleisli* 范畴赋有并半格与保并态射的富化结构，则 $[f_1, g_1]\vee[f_2, g_2] = [f_1\vee f_2, g_1\vee g_2]$其中 $f_1, f_2\colon X \to TZ$, $g_1, g_2\colon Y \to TZ$。

证明。 目标可由以下方程推出

$$([f_1, g_1]\vee[f_2, g_2])\ \mathsf{inl} = [f_1\vee f_2, g_1\vee g_2]\ \mathsf{inl},$$
$$([f_1, g_1]\vee[f_2, g_2])\ \mathsf{inr} = [f_1\vee f_2, g_1\vee g_2]\ \mathsf{inr},$$

其中，我们证明第一个等式。事实上，

$$([f_1, g_1]\vee[f_2, g_2])\ \mathsf{inl} = ([f_1, g_1]\vee[f_2, g_2])\cdot\eta\,\mathsf{inl}$$

$$
\begin{aligned}
&= [f_1, g_1] \cdot \eta\,\mathsf{inl} \vee [f_2, g_2] \cdot \eta\,\mathsf{inl} \\
&= f_1 \vee f_2 \\
&= [f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2]\ \mathsf{inl}
\end{aligned}
$$

第二个等式的证明类似。 □

证明（定理 *22*）。我们稍作修改，将子句 2. 替换为更强的

2′。**T** 的 Kleisli 范畴是以有界并半格和严格保并态射为富集结构的，且 $\delta = (\eta\mathsf{inr})^\dagger \colon X \to TY$ 是$\mathbf{C}(X, TY)$的最小元素。

我们来证明 1.–4. 蕴含 2′。

- *Kleisli*复合的右严格性：$f \cdot \delta = \delta$。利用自然性，$f \cdot \delta = f \cdot (\eta\mathsf{inr})^\dagger = ([\eta\mathsf{inl} \cdot f, \eta\mathsf{inr}] \cdot \eta\mathsf{inr})^\dagger = (\eta\mathsf{inr})^\dagger = \delta$。
- *Kleisli*复合的左严格性：$\delta \cdot f = \delta$。由于 $\eta\mathsf{inr} \cdot f = [\eta\mathsf{inl}\ \eta\mathsf{inr} \cdot f] \cdot \eta\mathsf{inr}$，根据强一致性，$\delta \cdot f = (\eta\mathsf{inr})^\dagger \cdot f = (\eta\mathsf{inr})^\dagger = \delta$。
- δ 是最小元素，等价地，$f \vee \delta = f$ 对于所有类型适当的 f。只需考虑特殊情形 $f = \eta$，因为对于一般的 f，有 $f \vee \delta = f \cdot (\eta \vee \delta) = f \cdot \eta = f$。

注意，$(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr}) \cdot (\eta \vee \delta) = [\eta\mathsf{inl}\ \eta\mathsf{inr} \cdot (\eta \vee \delta)] \cdot (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr})$，由3. 和 4. 可推出 $\eta \vee \delta = (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr})^\dagger \cdot (\eta \vee \delta) = (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr})^\dagger = \eta$。

现在，给定 Elgot 单子的 $(\text{--})^\dagger$，其 Kleisli 范畴由并半格赋丰，令

$$(f \colon X \to TX)^* = \big(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot f \colon X \to T(X + X)\big)^\dagger.$$

反过来，给定 Kleene 单子的 $(\text{--})^*$，令

$$(f \colon X \to T(Y + X))^\dagger = ([\eta, \delta] \cdot f) \cdot \big([\delta, \eta] \cdot f \colon X \to TX\big)^*.$$

我们还需验证这些变换互为逆变换，并且定义算子的预期性质都成立。

(i) $(\text{--})^\dagger \to (\text{--})^* \to (\text{--})^\dagger$：给定 $f \colon X \to T(Y + X)$，我们需要证明

$$([\eta, \delta] \cdot f) \cdot (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot [\delta, \eta] \cdot f)^\dagger = f^\dagger.$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&([\eta, \delta] \cdot f) \cdot (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot [\delta, \eta] \cdot f)^\dagger \\
&\quad = \big([\eta\mathsf{inl} \cdot [\eta, \delta] \cdot f, \eta\mathsf{inr}]^\sharp\,(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot [\delta, \eta] \cdot f)\big)^\dagger && \text{// 自然性} \\
&\quad = ([\eta\mathsf{inl}, \delta] \cdot f \vee [\delta, \eta\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger \\
&\quad = ([\eta\mathsf{inl} \vee \delta, \delta \vee \eta\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger && \text{//引理 24}
\end{aligned}
$$

$$= ([\eta\,\mathsf{inl}, \eta\,\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger$$
$$= f^\dagger.$$

(ii) (--)* → (--)† → (--)*: 给定 $f\colon X \to TX$，我们需要证明

$$([\eta, \delta] \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f)) \cdot ([\delta, \eta] \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f))^* = f^*.$$

事实上，$[\eta,\ \delta] \cdot (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot f) = \eta \vee \delta = \eta$，并且 $[\delta,\ \eta] \cdot (\eta\mathsf{inl} \vee \eta\ \mathsf{inr} \cdot f) = \delta \vee \eta \cdot f = f$，因此右侧化简为 $\eta \cdot f^* = f^*$。

接下来，我们说明如何从 Elgot 单子得到 Kleene 单子，反之亦然。

(iii) 从 *Elgot* 到 *Kleene*：我们验证命题4中的条件。由于假设了半格富化，只需检查性质1.–4。

1. 我们有

$$\begin{aligned}
\eta \vee f^* \cdot f &= [\eta, f^*] \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f) \\
&= [\eta, (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f)^\dagger] \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f) \\
&= (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f)^\dagger && /\!/\ \textbf{Fixpoint} \\
&= f^*.
\end{aligned}$$

2. $\eta^* = (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr})^\dagger = \eta$，根据定理的全局假设。
3. 我们证明一个更强的性质 $(f \vee \eta)^* = f^*$：

$$\begin{aligned}
(f \vee \eta)^* &= (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f \vee \eta\,\mathsf{inr})^\dagger \\
&= (T[\mathsf{id}, \mathsf{inr}]\,(\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inr} \cdot f \vee \eta\,\mathsf{inr}))^\dagger \\
&= (\eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inl}\,\mathsf{inr} \cdot f \vee \eta\,\mathsf{inr})^{\dagger\dagger} && /\!/\ \textbf{Codiagonal} \\
&= ([\eta\,\mathsf{inl} \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f), \eta\,\mathsf{inr}] \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr}))^{\dagger\dagger} \\
&= ((\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f) \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr})^\dagger)^\dagger && /\!/\ \textbf{自然性} \\
&= (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot f)^\dagger && /\!/\ \text{assumption} \\
&= f^*.
\end{aligned}$$

4. 假设 $f \cdot h = g \cdot f$。那么 $(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot g) \cdot f = \eta\mathsf{inl} \cdot f \vee \eta\mathsf{inr}\ f \cdot h = [\eta\mathsf{inl}\ \eta\ \mathsf{inr} \cdot f] \cdot (\eta\mathsf{inl} \cdot f \vee \eta\mathsf{inr} \cdot h)$，由强一致性可推出 $(\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr} \cdot g)^\dagger \cdot f = (\eta\,\mathsf{inl} \cdot f \vee \eta\ \mathsf{inr} \cdot h)^\dagger$。

$$\begin{aligned}
f \cdot h^* &= f \cdot (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot h)^\dagger \\
&= (\eta\,\mathsf{inl} \cdot f \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot h)^\dagger && /\!/\ \textbf{Naturality} \\
&= (\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr} \cdot g)^\dagger \cdot f && /\!/\ \textbf{Uniformity}^\bigstar \\
&= g^* \cdot f
\end{aligned}$$

(iv) 从克莱尼到 *Elgot*：我们需要验证 Elgot 单子的公理，其中**一致性** 替换为**一致性***。

不动点：给定 $f\colon X \to T(Y+X)$,

$$\begin{aligned}
[\eta, f^\dagger] \cdot f &= ([\eta \vee \delta, \delta \vee f^\dagger] \cdot f) \\
&= [\eta, \delta] \cdot f \vee [\delta, f^\dagger] \cdot f && /\!/ \text{ Lemma 24} \\
&= [\eta, \delta] \cdot f \vee f^\dagger \cdot [\delta, \eta] \cdot f \\
&= ([\eta, \delta] \cdot f) \cdot (\eta \vee ([\delta, \eta] \cdot f)^* \cdot [\delta, \eta] \cdot f) \\
&= ([\eta, \delta] \cdot f) \cdot ([\delta, \eta] \cdot f)^* \\
&= f^\dagger.
\end{aligned}$$

自然性：给定 $g\colon Y \to TZ$, $f\colon X \to T(Y+X)$,

$$\begin{aligned}
g \cdot f^\dagger &= g \cdot ([\eta, \delta] \cdot f) \cdot ([\delta, \eta] \cdot f)^* \\
&= [g, \delta] \cdot f \cdot ([\delta, \eta] \cdot f)^* \\
&= [\eta, \delta] \cdot [\eta \,\mathsf{inl} \cdot g, \eta \,\mathsf{inr}] \cdot f \cdot ([\delta, \eta] \cdot [\eta \,\mathsf{inl} \cdot g, \eta \,\mathsf{inr}] \cdot f)^* \\
&= ([\eta \,\mathsf{inl} \cdot g, \eta \,\mathsf{inr}] \cdot f)^\dagger.
\end{aligned}$$

余对角：设 $f\colon X \to T((Y+X)+X)$ 并证明 $(T[\mathsf{id}, \mathsf{inr}]\, f)^\dagger = f^{\dagger\dagger}$. 令 $g = [[\delta, \eta], \delta] \cdot f\colon X \to TX$, $h = [\delta, \eta] \cdot f\colon X \to TX$. 则

$$\begin{aligned}
(T[\mathsf{id}, \mathsf{inr}]\, f)^\dagger &= ([\eta, \delta] \cdot T[\mathsf{id}, \mathsf{inr}]\, f) \cdot ([\delta, \eta] \cdot T[\mathsf{id}, \mathsf{inr}]\, f)^* \\
&= [[\eta, \delta], \delta] \cdot f \cdot ([[\delta, \eta], \eta] \cdot f)^* \\
&= [[\eta, \delta], \delta] \cdot f \cdot ([\delta, \eta] \cdot f \vee [[\delta, \eta], \delta] \cdot f)^* \\
&= [[\eta, \delta], \delta] \cdot f \cdot (h \vee g)^* \\
&= [[\eta, \delta], \delta] \cdot f \cdot h^* \cdot (g \cdot h^*)^* && /\!/ \text{ Lemma 23} \\
&= [\eta, \delta] \cdot [\eta, \delta] \cdot f \cdot h^* \cdot ([\delta, \eta] \cdot [\eta, \delta] \cdot f \cdot h^*)^* \\
&= ([\eta, \delta] \cdot f^\dagger) \cdot ([\delta, \eta] \cdot f^\dagger)^* \\
&= f^{\dagger\dagger}.
\end{aligned}$$

一致性*：假设 $f \cdot h = [\eta \,\mathsf{inl}\ \eta \,\mathsf{inr} \cdot h] \cdot g$。这蕴含 $([\delta, \eta] \cdot f) \cdot h = ([\delta, \eta] \cdot [\eta \,\mathsf{inl}\ \eta \,\mathsf{inr} \cdot h])\, g = [\delta, h] \cdot g = h \cdot [\delta, \eta] \cdot g$。根据引理 4,

$$([\delta, \eta] \cdot f)^* \cdot h = h \cdot ([\delta, \eta] \cdot g)^*.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
f^\dagger \cdot h &= ([\eta, \delta] \cdot f) \cdot ([\delta, \eta] \cdot f)^* \cdot h \\
&= [\eta, \delta] \cdot f \cdot h \cdot ([\delta, \eta] \cdot g)^* \\
&= [\eta, \delta] \cdot [\eta \,\mathsf{inl}, \eta \,\mathsf{inr} \cdot h] \cdot g \cdot ([\delta, \eta] \cdot g)^* \\
&= ([\eta, \delta] \cdot g) \cdot ([\delta, \eta] \cdot g)^* \\
&= g^\dagger.
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

在假设 1.–3. 成立的情况下，**一致性** 与**一致性*** 之间的区别变得非常微妙。

例 25（滤子单子）。存在一个 Elgot 单子$\mathbf{T}$，其 Kleisli 范畴以有界半格为富集范畴，$(\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr})^\dagger = \eta$，但$\mathbf{T}$ 不满足强一致性。我们通过改编 Kozen 用于区分左手和右手 Kleene 代数的例子来证明这一点 [25, 命题 7]。

回顾一下，滤子单子 [6] 将每个 X 映射到 X上所有滤子的集合；等价地，映射到那些保持 $\top$ 和 $\wedge$的映射 $h\colon (X \to 2) \to 2$，其中 $h(\top) = \top$，$h(f \wedge g) = h(f) \wedge h(g)$，且 $\top$ 和 $\wedge$ 在 $X \to 2$ 上按点计算。对我们而言，使用等价的表述会更方便：该表述通过反转 2 上的序得到（因此，所得单子$\mathbf{T}$ 实际上可以称为理想单子）。于是，每个 TX都是满足以下条件的那些 $h\colon \mathcal{P}X \to 2$的集合：

$$f(\emptyset) = \bot, \qquad\qquad f(s \cup t) = f(s) \vee f(t).$$

1. 注意，Kleisli 范畴 $\mathbf{Set}_\mathbf{T}$ 与一个范畴 $\mathbf{C}$对偶同构，其中每个 $\mathbf{C}(X, Y)$ 由保持有限并的函数 $\mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$组成（特别地，这些函数是单调的）。该范畴具有有限积：$\mathcal{P}\emptyset$ 是终端对象，而 $\mathcal{P}X \times \mathcal{P}Y = \mathcal{P}(X + Y)$则按定义给出。

2. 在此对偶同构下，每个态射 $f\colon X \to T(Y + X)$ corre-ˆ sponds 对应于 $\mathbf{C}$ 中的一个态射 $f\colon \mathcal{P}Y \times \mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$，其中我们使用 *Knaster-Tarski* 定理计算不动点$\mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$，并将其传回 $\mathbf{C}$中，得到$f^\dagger\colon X \to TY$。

3. $f^\dagger$的构造同时蕴含 $(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr})^\dagger \leqslant \eta$和 $(\eta\mathsf{inl} \vee \eta\mathsf{inr})^\dagger \geqslant \eta$，因此有 $(\eta\,\mathsf{inl} \vee \eta\,\mathsf{inr})^\dagger = \eta$。

4. 鉴于$\mathbf{Set}_\mathbf{T}$ 与$\mathbf{C}$的对偶同构，半格中的富集是显然的。

5. **不动点** 律依构造成立。其余 Elgot 单子定律可由超限归纳得出。

6. 如果$\mathbf{T}$ 是一个克莱尼单子，那么任意$\mathbf{C}(X, X)$ 都会是一个 Kleene 代数，但 Kozen 证明了事实并非如此，因此$\mathbf{T}$ 不是克莱尼单子。

7. 根据定理 22，$\mathbf{T}$ 不满足一**致性***。

8 结论

在建模和语义方面，许多问题都可以用泛代数和余代数来表述和处理。然而，某些现象，例如递归、部分性和外延性，则需要额外的结构；这些结构通常借鉴自完备偏序理论，通过丰富范畴和函子，并设计合适的结构（如递归，更具体地说是迭代）来实现。不过，在许多情境中，迭代已足够，而且可以将其视为一个独立的组成部分，只需关注其性质，而无需关心背后的具体构造。从这个角度看，Elgot 单子是语义学中的基础构件。

我们正式比较了 Elgot 单子与 Kleene 单子；后者是 Kleene 代数的一种温和推广。与本质上属于范畴论概念的 Elgot 单子不同，Kleene 代数是一个简单的概念，以传统代数术语表述。这种简洁性的代价是需要接受一整套紧密关联的定律，尽管众所周知，这些定律与许多迭代模型相冲突。我们提出了一种新颖的*while* 单子概念；在范畴论语境中，它们与 Elgot 单子实质上等价。不过，从理念上说，while 单子是定义在（布尔）决策、程序以及某些行为良好的程序（它们体现于所谓的一致性原理）上的三排序代数。这与通过测试 [29]扩展带测试的 ***Kleene*** 代数有些相似。所得的带测试的 ***Kleene*** 代数是双排序的，其中测试是程序的子排序，并构成一个布尔代数。与测试不同，我们的决策并不构成程序的子排序，但支持布尔代数运算，只是不满足所有布尔代数定律。随后，我们将 Elgot 单子（以及 while 单子）与 Kleene 单子联系起来，并由此意外地得到了一种基于一致性原理某个版本的 Kleene 代数新公理化（命题4）。我们认为，当前工作是弥合 Elgot 迭代与 Kleene 迭代之间差距的一步，这不仅体现在技术层面，也体现在具体应用场景中。我们计划基于 while 单子的当前公理化，进一步探索迭代的代数公理化。

参考文献

1. Kamal Aboul-Hosn 和 Dexter Kozen。高阶程序的关系语义。载于 Tarmo Uustalu 编，*Mathematics of Program Construction 8th International Conference MPC 2006*，卷 4014 of *LNCS*，第 29 – 48 页。Springer，2006年。2. Jiˇrı́ Ad´amek、Stefan Milius 和 Jiˇrı́ Velebil。迭代单子的等式性质。*Inf. Comput.*，208(12):1306–1348，2010年。3. Steve Awodey。*Category Theory*。牛津大学出版社，第二版，2010年。4. Stephen Bloom 和 Zolt´an Esik。*Iteration theories: The equational logic of iterative processes*。Springer，1993。5. Virgil Emil Cˇazˇanescu 和 Gheorghe S¸tefˇanescu。反馈、迭代与重复。载于 Gheorghe Paun 编，*Mathematical Aspects of Natural and Formal Languages*，卷 43 of *World scientific series in computer science*，第 43 – 61 页。世界科学出版社，1994年。6. Alan Day。滤子单子、连续格与闭包系统。*Canadian Journal of Mathematics*，27(1)：50–59，1975。

7. Calvin Elgot。单子计算与迭代代数理论。载于 H.E. Rose 和 J.C. Shepherdson 编，*Logic Colloquium 1973*，卷 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*，第 175 – 230 页。爱思唯尔，1975。8. Zolt´an Esik 和 Sergey Goncharov。关于 Conway 理论与迭代理论的一些说明。*CoRR*，abs/1603.00838，2016年。9. Wan J. Fokkink 和 Hans Zantema。带迭代的基本过程代数：其等式公理的完备性。*Comput. J.*，37(4):259–268，1994年。

10. Leandro Gomes、Alexandre Madeira 和 Lu´ıs S. Barbosa。加权计算的 Kleene 代数。载于 Simone Cavalheiro 和 Jos´e Fiadeiro 编，*Formal Methods: Foundations and Applications* 卷 10623，页 271–286。Springer，2017年。11. Sergey Goncharov。*Kleene monads*。博士论文，不来梅大学，2010年。12. Sergey Goncharov。基础理论中的一致 Elgot 迭代。载于 *48th International Colloquium on Automata、 Languages、 and Programming、 ICALP 2021*，第 198 卷， *LIPIcs*，第 131:1–131:16 页。莱布尼茨信息中心，2021年。13. Sergey Goncharov、Julian Jakob 和 Renato Neves。混合迭代的语义。载于 Sven Schewe 和 Lijun Zhang 编，*29th International Conference on Concurrency Theory CONCUR 2018* 卷 118 *LIPIcs*，第 22:1–22:17 页。莱布尼茨信息中心，2018 年。14. Sergey Goncharov 和 Lutz Schr¨oder。守卫迹范畴。载于 Christel Baier 和 Ugo Dal Lago 编， *Proc. 21th International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures、 FoSSaCS 2018*，第 10803 卷，*LNCS*，第 313–330 页。Springer，2018年。15. Sergey Goncharov、Lutz Schr¨oder 和 Till Mossakowski。Kleene 单子：在通用效应框架中处理迭代。载于 *Algebra and Coalgebra in Computer Science CALCO 2009* 卷 5728 *LNCS*，第 18–33 页。Springer，2009 年。16. Sergey Goncharov、Lutz Schr¨oder、Christoph Rauch 和 Julian Jakob。余归纳重启上的非守卫递归。 *Logical Methods in Computer Science*，14(3)，2018年。17. Sergey Goncharov、Lutz Schr¨oder、Christoph Rauch 和 Maciej Pir´og。统一守卫与非守卫迭代。载于 Javier Esparza 和 Andrzej Murawski 编，*Foundations of Software Science and Computation Structures FoSSaCS 2017* 卷 10203 *LNCS*，第 517–533 页。Springer，2017 年。18. Masahito Hasegawa。迹幺半范畴上的一致性原理。载于 *Category Theory and Computer Science、 CTCS 2002*，第 69 卷， *ENTCS*，第 137–155 页，2003年。19. C. A. R. Tony Hoare、Bernhard M¨oller、Georg Struth 和 Ian Wehrman。并发 Kleene 代数。载于 Mario Bravetti 和 Gianluigi Zavattaro 编，*20th International Conference CONCUR 2009* 卷 5710 *LNCS*，第 399–414 页。Springer，2009 年。20. Bart Jacobs。仿射单子与无副作用性。载于 Ichiro Hasuo 编，*Coalgebraic Methods in Computer Science* 卷 9608，第 53–72 页。Springer，2016 年。21. Bart Jacobs 和 Erik Poll。Java 语义中的余代数与单子。*Theoret. Comput. Sci.*，291:329–349，2003年。22. Andr´e Joyal、Ross Street 和 Dominic Verity。迹幺半范畴。*Math-ematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 卷 119 第 3 期，第 447–468 页，1996年。23. S. C. Kleene。神经网络与有限自动机中的事件表示。载于 Claude Shannon 和 John McCarthy 编， *Automata Studies*，第 3–41 页。普林斯顿大学出版社，1956年。24. Anders Kock。强函子与幺半单子。 *Archiv der Mathematik*，卷 23 第 1 期 113( ): –120，1972年。25. Dexter Kozen。关于 Kleene 代数与闭半环。载于 *Proceedings on Math-ematical Foundations of Computer Science、 MFCS 1990*，第 452 卷，*LNCS*，第 26–47 页。Springer，1990年。26. Dexter Kozen。Kleene 代数与正则事件代数的完备性定理。 *Inf. Comput.*，110(2):366–390，1994年。27. Dexter Kozen。Kleene 代数中推理复杂度问题。 *Inf. Comput.*，卷 179 第 152 期 162，2002：–。

28. Dexter Kozen 和 Konstantinos Mamouras。带乘积的 Kleene 代数与迭代理论。载于 Simona Ronchi Della Rocca 编，

Proc. Computer Science ,，第 卷，页 *Logic 2013 CSL 2013* 23 *LIPIcs* 415 431 码 – 。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2013年。29. Dexter Kozen 和 Frederick Smith。带测试的 Kleene 代数：完备性与可判定性。载于 *Proc. 10th Int. Workshop Computer Science Logic, CSL 1996*， *LNCS*第1258卷，页码244–259，乌得勒支，荷兰，1996年9月。Springer-Verlag。30. Joachim Lambek。完备范畴的不动点定理。 *Math. Z.*，103：151–161，1968年。31. Paul Blain Levy 和 Sergey Goncharov。余归纳恢复单子：守卫迭代与守卫 Elgot。载于

Proc. 8rd international conference on Algebra and ,，LIPIcs。 *coalgebra in computer science CALCO 2019* Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019年。32. Annabelle McIver、Tahiry M. Rabehaja 和 Georg Struth。论概率 Kleene 代数、自动机与模拟。载于 Harrie de Swart 编，*Algebraic Methods in Computer Science* 6663 *LNCS* 264 279 ，

Relational and 第 卷，页码 – 。Springer，2011年。33. Eugenio Moggi。指称语义的模块化方法。载于 *Category Theory and Computer Science CTCS 1991* 530 *LNCS* 138 139 ,，第 卷，页

码 – 。Springer，1991年。34. Bernhard M¨oller。Kleene 惰性化。 *Science of Computer Programming*，65 2 195( )：–214，2007年。专题特刊，收录程序构造会议的精选论文，MPC 2004。35. Andr

´ *J. Automated Rea-* e Platzer。混 *soning* 41 2 143 189, 2008 合系统的微分动态逻辑。，( )：–。36. Gordon D. Plotkin。一个幂域构造。 *SIAM Journal on Computing*，5 3 452 487，1976年( )：–。37. Marshall Stone。重心演算的公设。 *Ann. Mat. Pura Appl.*，( )：–。

(4) 29 1 25 30, 1949 38. Daniele Varacca 和 Glynn Winskel。将概率分配到非确定性上。 *Math. Struct. Comput. Sci.*，16(1)：87–113，2006年。