arXiv:2301.06205v1 [math.SG] 15 Jan 2023

# 关于 Legendrian 同伦振荡能量的几点说明

DYLAN CANT

Abstract. 我们构造了一类非紧致接触流形，其中包含紧致的勒让德子流形，它们可以通过任意小的振荡能量从其 Reeb 流中移开。我们借此证明，[RZ20]所考察的 Shelukhin-Chekanov-Hofer 伪度量在所构造的勒让德子流形的同痕类上是退化的。我们还探讨了与 Legendrian 同伦振荡能量相关的其他方面。

## 1. Introduction

接触流形 $(Y,\ \xi)$ 中的一个 ***Legendrian*** 子流形是一个与接触分布 $\xi$相切的子流形 $\Lambda^n \subset Y^{2n+1}$。Legendrian 同痕是 Legendrian 子流形构成的一参数族。给定 $(Y,\ \xi)$ 的一个接触形式 $\alpha$，我们将为 Legendrian 同伦定义定量度量，其构造仿照 [She14]为接触同胚引入的度量。多位作者研究过类似的定量度量，例如 [RZ20、Ush21、Hed21、Oh21、DRS20a、DRS20b、DRS21、DRS22b、Aka01、Her07]。我们所考察的度量可视为拉格朗日子流形正合同痕的 Hofer 能量的 Legendrian 版本，[Hof90]，参见 [Pol93、Che98、Che00]。

设 $\Lambda_t, t \in [0,1]$ 是紧 Legendrian 子流形的一个同伦。取一族光滑嵌入 $i_t\colon \Lambda \to Y$，使得 $i_t$ 参数化 $\Lambda_t$。记 $i_t'$ 为 $i_t$ 关于时间的导数，并由下式定义接触哈密顿量 $h_i,\ _t\colon \Lambda \to \mathbb{R}$：

$$h_{i,t}(x) = \alpha_{i_t(x)}(i_t'(x)). \tag{1}$$

我们将该同伦的长度和振荡能量定义为以下积分：

$$\begin{aligned} \operatorname{length}_\alpha(\Lambda_t) &= \int_0^1 \max_{x\in\Lambda} |h_{i,t}(x)|\,\mathrm{d}t, \\ \operatorname{energy}_\alpha^{\mathrm{osc}}(\Lambda_t) &= \int_0^1 \max_{x\in\Lambda} h_{i,t}(x) - \min_{x\in\Lambda} h_{i,t}(x)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2}$$

同痕 $j_t = i_t \circ \sigma_t$ 的任意重参数化都满足 $h_{j,t} = h_{i,t} \circ \sigma_t$，因此这些量与参数化方式的选择无关。当参数化方式明确时，我们记作 $h_t$。

日期：2023年1月18日。

对连接 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$ 的同痕取下确界，便得到一个（伪）距离函数，

$$\mathrm{dist}_\alpha(\Lambda_0,\Lambda_1) := \inf\left\{\mathrm{length}_\alpha(\Lambda_t) : \Lambda_t \text{ isotopy from } \Lambda_0 \text{ to } \Lambda_1\right\}.$$

标准的同痕延拓结果表明，对于任意 Legendrian 同痕 $i_t$，都存在一个环境同痕 $\varphi_t$ 和一个重参数化 $\sigma_t$，使得 $i_t = \varphi_t \circ i_0 \circ \sigma_t$。事实上，如果通过寻找 $H_t$ 来延拓函数 $h_t$，使得 $h_t = H_t \circ i_t$，那么由 $H_t$ 生成的接触同胚就是所需的延拓[1] $\varphi_t$。利用管状邻域构造，可以安排为：

$$\max_{y\in Y} H_t = \max_{x\in\Lambda} h_t \quad \text{and} \quad \min_{y\in Y} H_t = \min_{x\in\Lambda} h_t.$$

这给出了与 [She14], 中定义的范数 $|\varphi|_\alpha$ 和 $|\varphi|_\alpha^{\mathrm{osc}}$ 的比较

$$\mathrm{dist}_\alpha(\Lambda_0,\Lambda_1) = \inf\left\{|\varphi|_\alpha : \varphi(\Lambda_0)=\Lambda_1\right\}.$$

距离函数 $\mathrm{dist}_\alpha$ 在[RZ20]中称为***Shelukhin-Chekanov-Hofer*** 伪度量。我们将其视为定义在一个 Legendrian 子流形的同痕类上的伪度量。利用 [RZ20], 中确立的二分性，论文 [DRS21] 证明，在已建立 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数技术[2]的接触流形类别中，该伪度量在所有紧 Legendrian 子流形的同痕类上均非退化。此前，[Ush21]证明了该度量对超紧 Legendrian 子流形非退化；[Hed21] 则证明了对于可排序的Legendrian 同痕类，该度量也非退化。本文的结果之一是构造了一个伪度量退化的 Legendrian 同痕类（定理 2）。这一退化性表明，[RZ20，猜想 1.11]（即该度量总是非退化）并非普遍成立；该结论需要限定在适当的驯 contact 流形类别中（其接触形式也需具有适当的驯性）。

若接触同胚满足 $\phi^*\alpha = \alpha$，则称其为严格的。在本文中，若 Legendrian 同伦 $\Lambda_t$ 由严格接触同胚的同伦 $\phi_t$所诱导，则称其为严格的。

**1.1.** ***LDR*** **接触流形。**振荡能量与寻找 Legendrian 同伦 $\Lambda_t$ 的问题有关，使得 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$之间不存在 Reeb 弦（下文称之为对 Legendrian 子流形进行分离）。对于某一类接触流形，分离一个 Legendrian 子流形所需的振荡能量存在一个下界。我们可以用以下定义将其形式化：

**定义 1。**若接触流形 $(Y,\alpha)$ 对所有同伦 $\Lambda_t$ 均满足以下条件，则称其具有***Legendrian*** 分离刚性（LDR）：

(3) $\mathrm{energy}_\alpha^{\mathrm{osc}}(\Lambda_t) < C(\alpha,\Lambda_0) \implies$ 在 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$之间存在一条 Reeb 弦，

其中 $C(\alpha,\Lambda_0)$ 是依赖于 $\alpha$ 和 $\Lambda_0$ 的某个正常数。换言之，在 LDR 接触流形中，同痕需要达到一定的最小振荡能量，才能

[1]可以安排使得 $\sigma_t = \mathrm{id}$，参见 [Tra97, §2.3].[2]与 [DRS22b], 中一样，这包括所有闭接触流形 $Y$ 以及 $Y$ 中任意紧致余维零带边界子流形。

使给定的 Legendrian 子流形彼此不相交。需要注意的是，LDR 概念取决于形式的选择，更多讨论见 §1.2.1。
类似地，$(Y, \alpha)$ 若对所有严格接触各向同性变形都满足 (3)，则称其为 严格 ***LDR*** 。

若接触流形 $Y$ 可辛嵌入到驯性辛流形 $X$中，则称其为准可填充。若可取 $X$ 使得 $\pi_2(X, SY) = 0$，如 [Moh01] 中所示，则称 $Y$ 为球面准可填充。我们的第一个结果如下：

**定理 1**。 对于任意选取的接触形式 $\alpha$，准可填充接触流形 $Y$ 都是严格 ***LDR***。若 $Y$ 是球面准可填充的，且接触形式具有完备 ***Reeb*** 流，则可令 $C(\Lambda, \alpha)$ 为 $\Lambda$的一条 ***Reeb*** 弦的最小正作用量。

这类结果保证存在振荡能量受限的弦，可视为 Chekanov 关于拉格朗日交点持久性的结果 [Che98] 在接触几何中的对应版本。关于此类结果，参见 [DRS20a, 定理 1。2], [DRS20b, 定理 1。1], [Oh21, 定理 1。13], [DRS21] 。

Reeb 弦的持续性在更早的文献中已有讨论： [EHS95], [Ono96],证明，对于某些数据（$Y$， $\alpha$， $\Lambda_0$）以及任意同痕 $\Lambda_t$， $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$之间存在 Reeb 弦。作者并未使用 Reeb 弦这一说法，而是将其表述为 $\Lambda_t$ 与包含 $\Lambda_0$的 预 ***Lagrange*** $L$ 的交点。事实上， $L$ 由 Legendrian 子流形分叶，而 $\Lambda_0$ 是其中一片特定的叶。在所讨论的情形中，可以选取一种接触形式，使其 Reeb 流保持 $L$ 不变，并诱导一个自由的 $S^1$作用，从而 $\Lambda_0$ 成为该作用的一个截面。作者证明， $\Lambda_0$ 与 $L$ 之间的交点在 $\Lambda_0$的任意接触同痕下都持续存在。证明基于两种 Floer 同调理论，它们对 $SY$中$S\Lambda_0$ 与 $L$ 之间的交点进行计数。在类似的情形下，论文 [Aka01], [Her07] 证明了包含振荡能量的持续性结果。

注意到， [Che96] 关于 1-喷射空间中零截面的 Legendrian 同伦的结果，可以解释为 Reeb 弦的持续性。

**1.1.1. 关于严格 *LDR* 与一般 *LDR* 以及短弦。**同伦 $\Lambda_t$ 的严格性是我们证明定理 1 的几何论证中的一项技术要求。我们要求 $\Lambda_t$ 的 Reeb 弦长度存在一个下界，且该下界只取决于 $\Lambda_0$。对于一般同伦，不存在这样的下界，因为可能会产生长度任意短的弦。在辛化中考察全纯曲线时，短弦的出现也会带来问题。

例如，考虑 $SY$ 中具有移动边界条件的全纯条带计数（即，拉格朗日子流形 $\{S\Lambda_t$ 上的边界值按指定方式变化，例如 $u(s, 0) \in S\Lambda_0$、 $u(s, 1) \in S\Lambda_{f(s)}$，其中 $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$）。为了获得这类模空间的紧性，需要处理沿任意中间勒让德子流形 $\Lambda_t$ 的弦发生的气泡（按 [BEH+03] 的意义）。因此，同痕过程中出现的最短弦与这类模空间的研究有关

空间。 [Oh21] 的工作根据同痕的振荡能量，为这类全纯曲线的 d$\alpha$-能量建立了先验估计。

另一方面，可以考虑在 $SY$ 中连接 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$ 的拉格朗日配边 $L$ 。论文 [ST17、EHK16] 说明了如何利用同伦 $\Lambda_t$ 构造这样的配边。 $\Lambda_t$ 最短 Reeb 弦的长度决定了所构造配边的“长度”。[3] 配边的长度随后会出现在边界位于 $L$上的全纯曲线的先验估计中。这是 [DRS20a] 采用的方法。

1.2. 非 *LDR* 接触流形。存在一些接触流形并非严格 LDR（因此也不是 LDR）。其构造方式很常见：给定两个接触流形 $Y_0$， $Y_1$ ，并为 $Y_0$ 选定一个形式 $\alpha_0$ ，我们将乘积 $Q = Y_0 \times SY_1$ 连同接触形式 $A = \alpha_0 - \lambda_1$定义为（广义）接触化（通常也会考虑 $Y_0 = \mathbb{R}$ 或 $S^1$）。

**定理 2**。 对于某些特殊的 $Y_1$ 以及任意的 $Y_0$，接触化$(Q, A)$ 包含紧 *Legendrian* 子流形 $\Lambda$ ，它们可通过振荡能量任意小的严格接触同痕彼此分离。此外，对于接触形式 $A$ ，*Shelukhin-Chekanov-Hofer* 伪度量在与 $\Lambda$ 同痕的 *Legendrian* 子流形空间上是退化的。

[RZ20] 中证明的二分性立即推出：

**推论**。 对于定理 *2* 中的 $Q$、 $A$、 $\Lambda$，*Shelukhin-Chekanov-Hofer* 伪度量在与 $\Lambda$ 同痕的 *Legendrian* 子流形空间上恒为零。

我们对定理 2 的证明基于 Sikorav 的例子，正如 [Che00, §4] 中所述。事实上，我们所谓的“特殊”接触流形，是指其辛化 $SY_1$ 含有一个紧嵌入正合拉格朗日子流形的那些 $Y_1$ 。 [Che00] 的结果表明，这类辛化无法嵌入任何驯性辛流形（因此我们称它们为特殊）。Sikorav 的论证使用了一种特殊接触 $\mathbb{R}^5$ ，其辛化因 [Mul90] 而含有一个紧拉格朗日球面。

利用 $h$ 中确立的拉格朗日帽 [-原理，EM13]，Murphy 在 [Mur13] 中说明，存在许多紧致 $Y_1$，其维数 dim($Y_1$) $\geq 5$，其辛化中含有紧致恰当拉格朗日子流形；其条件是 $Y_1$ 中存在某种塑料舞台 。论文 [BEM15, CMP19] 将塑料舞台的存在与 $Y_1$ 的过扭性 联系起来。这引出了以下问题：

**问题 1.** 是否存在一种三维紧致接触流形，其辛化中含有紧致恰当拉格朗日子流形？注：任何这样的拉格朗日子流形都可被移位，因此必然是一个二维环面。

**问题 2.** 是否存在这样的紧接触流形，其辛化包含紧致恰当拉格朗日子流形？

[3]回忆一下，利用接触形式 $\alpha$ 提供垂直坐标 $s_\alpha : SY \to \mathbb{R}$，拉格朗日子流形 $L$ 的长度 是最小区间 $I$ 的长度，使得在 $s_\alpha \notin I$ 所在区域内， $L$ 是柱状的（与李维尔向量场相切）。

1.2.1. *LDR* 性质对接触形式的依赖性。证明定理 2 的论证表明，$\mathbb{R}^7 \simeq \mathbb{R} \times S\mathbb{R}^5$ 含有 Legendrian 球面，且可以用任意小的振荡能量将它们彼此分离；其中，$\mathbb{R}^5$ 具有 [Mul90] 中构造的奇异接触结构。接着，[BEM15，推论 1.4] 表明，这种奇异接触结构 $\mathbb{R}^7$ 可以嵌入任意 7 维过扭曲流形，尤其可以嵌入一个闭接触流形。[DRS20b，DRS21]的工作表明，闭接触流形具有 LDR 性质。

1.3. 具有生成函数的勒让德子流形的分离刚性。接下来的结果表明，1-喷射空间中的某些勒让德子流形具有分离刚性。相关的勒让德子流形类别，是指那些具有无穷远处线性的生成函数的子流形，如 [CP05、JT06、ST10、FR11、ST13、BST15] 所示。若函数 $F\colon B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 满足 $F(x,\eta) = f(x,\eta) + \ell(\eta)$，其中 $\ell \neq 0$ 是线性函数，$f$ 是紧支撑函数，则称该函数为无穷远处线性的。若纤维导数 $\partial_\eta F\colon B\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 以 0 为正则值，则称 $F$ 为生成函数。此时，$\partial_\eta F = 0$ 定义了一个光滑的逐纤维奇异集 $\Sigma$，而映射 $\Sigma \to J^1(B)$（返回临界值和水平导数）定义了一个浸入式勒让德子流形。若一个勒让德子流形可由这样的映射 $\Sigma \to J^1(B)$ 参数化，则称其具有生成函数。正如 [FR11, §3], 中的详细说明，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的 Legendrian 结，存在无穷远处线性的生成函数，等价于前投影存在分次正规分裂。论文 [BST15] 给出了许多具有无穷远处线性的生成函数的勒让德子流形实例。本节的主要结果如下：

**定理 3.** 假设 $\Lambda_0 \subset J^1(B)$ 是一个嵌入的 ***Legendrian*** 子流形，并且存在一个无穷远处为线性的生成函数。那么，任何将 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_t$ 分离的同伦，其振荡能量至少为 $\Lambda_0$ 的 ***Reeb*** 弦的最小正作用量。

论证的关键是构造一个条形码[4]，使条形的端点是连接 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_t$ 的 Reeb 弦的作用量。条形的长度关于 $t$ 是 Lipshitz 连续的，且 Lipshitz 常数取决于该同伦的振荡能量。如果 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$ 之间没有弦，那么时刻 $t = 1$ 的条形码为空。由此，我们将得出：将 $\Lambda_0$ 分离所需的最小振荡能量，至少为时刻 $t = 0$条形码中最长条的长度。最后，只需证明在 $t = 0$ 处存在长度至少为 $\Lambda_0$ 的弦的最小正作用量的条形。

我们的论证受到论文 [DRS20b]和 [DRS21] 的启发。这些论文通过考察 Chekanov-Eliashberg微分分次代数在分岔下如何变化，在某些情形中确立了 LDR 性质。通过分析可能发生的分岔，他们证明可以定义一个连续变化的条形码，并进行类似于上述论证的推导。严格来说，他们并未构造通常意义上的条形码，而是构造了更一般的条形码，其中包含一个作用量窗口，其端点依赖于 $t$；参见 [DRS20b, §2.1]。他们的持久性结果适用于

[4]在拓扑数据分析的意义下；更多详情请参见 [Ghr08]，关于其在辛几何中的应用，请参见 [PS16, UZ16, KS21, She22a, She22b] 及其中的参考文献。

比我们更一般的情形，因为得益于 [EES07]的工作，1-喷射空间中的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数理论已十分成熟。希望我们的生成函数方法本身也能引起独立的兴趣。

1.4. 勒让德子流形的正则同伦的振荡能量。长度和振荡能量的概念可以推广到浸入族，即勒让德子流形的正则同伦，如 [Lau09] 所示。给定一个 Legendrian 浸入族$i_t$： $\Lambda \to (Y,\ \alpha)$，我们完全按照 (2) 定义接触哈密顿量 $h_t(x) = \alpha_{i_t\ (x)}\ (i_t'(x))$、长度和振荡能量。与嵌入相比，区别在于正则同伦通常无法延拓为环境接触各向同性。

我们关于 Legendrian 浸入的首个结果，是构造一个 Legendrian 子流形，使其能够通过振荡能量任意小的正则同伦与自身分离。引入以下局部模型： $B(a) \subset \mathbb{C}$ 是面积为 $a$ 的圆盘，而 $Q(a)$ 是接触化：

$$Q(a) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B(a) \text{ with contact form } \alpha = \mathrm{d}t - \lambda,$$

其中 $\lambda = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$ 是标准 Liouville 形式。

**定理 4**。 设$(Y,\xi)$ 是一个接触三维流形，其中包含某个 $\epsilon > 0$ 对应的 $Q(1+\epsilon)$ 的嵌入副本。设 $\alpha$ 是一个接触形式，它在某个 $0 < \epsilon' < \epsilon$ 对应的 $Q(1+\epsilon')$ 上与$\mathrm{d}t - \lambda$ 形式一致。那么 $(Y,\alpha)$ 包含一个嵌入的 ***Legendrian*** 子流形 $\Lambda_0$，使得存在振荡能量任意小的正则同伦 $\Lambda_t$ ，且 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$ 之间没有 ***Reeb*** 弦。

注意， [EKP06，推论 1.25] 指出，每个接触三维流形都包含一个 $Q(a)$ 的嵌入副本，对每个 $a > 0$ 均成立。因此，我们的定理适用于所有接触三维流形。

1.4.1. 关于 *Legendrian* 不可挤压性。 定理 4 中使用的 Legendrian 子流形是环 $\partial B(1)$ 的一个提升（注意， $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \partial B(1)$ 由 Legendrian 提升构成叶状分解，且 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在提升集合上自由作用）。§2.4 中使用的论证表明，如果允许浸入，就可以将该 Legendrian 子流形挤压到 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B(1)$ 内。下面的结果表明，通过嵌入无法将该 Legendrian 子流形挤压到 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B(1)$ 内，从而加强了 [EKP06] 的一个不可挤压结果（在三维情形下）。

**命题 5**。 设 $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ 是 $\partial B\ (1)\ \subset \mathbb{C}$ 的 ***Legendrian*** 提升，则 $\Lambda_1$ 不同痕于包含在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B\ (1)$ 中的 ***Legendrian*** 子流形。

最初，这被表述为一个猜想，但其证明由 [DRS22c], 利用 [DRS22a] 的结果传达给我。证明见 §2.5。

1.5. 诱导芬斯勒度量的二分性。 设 $(Y^{2n+1},\alpha)$ 为一个接触流形， $\Lambda^n$ 为一个紧致光滑流形， $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\Lambda)$ 为 Legendrian 子流形浸入 $i : \Lambda \to Y$ 按微分同胚重参数化取商后构成的空间。正则同伦的长度概念为 $\mathcal{I}$ 赋予了一个芬斯勒伪度量。更确切地说，给定两个浸入的等价类 $[j_0]$、 $[j_1]$，它们之间的伪距离为

它们是：

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{J},\alpha}([j_0],[j_1]) = \inf\{\mathrm{length}_\alpha(i_t) : i_0 = j_0 \circ \sigma \text{ and } i_1 = j_1 \circ \sigma'\}$$

其中 $\sigma$，$\sigma'$ 是 $\Lambda$ 的微分同胚。需要注意的是，如果 $\sigma_t$ 是微分同胚的同伦，那么长度$_\alpha(i \circ \sigma_t) = 0$，因此，若要使度量有望成为非退化度量，我们至少需要对与恒等映射同痕的微分同胚取商。然而，为了证明下一个结果，我们需要对所有微分同胚取商。

令 $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}$为嵌入的子集，令 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots$为按嵌入的同痕类进行的分解。我们有如下二分性：

**定理 6.** 对于每个同伦类 $\mathcal{E}_k$，$\mathrm{dist}_{\mathcal{J},\ \alpha}$ 在 $\mathcal{E}_k$ 上的限制要么恒等于零，要么是非退化的。

事实上，注意，对于任意环境紧支撑接触同胚 $\phi$，满足$\phi^*\alpha = e^g\alpha$,

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{J},\alpha}(\phi(\Lambda_0),\phi(\Lambda_1)) \le e^{\max g}\mathrm{dist}_{\mathcal{J},\alpha}(\Lambda_0,\Lambda_1), \tag{4}$$

于是定理 6 可由下述结论推出：

**引理 7.** 设 $\mathcal{E}_k$ 是 $(Y,\xi)$ 中紧 ***Legendrian*** 子流形的一个同痕类，并假设 $\delta$ : $\mathcal{E}_k \times \mathcal{E}_k \to [0,\infty)$ 是一个伪度量，使得对每个紧支撑接触同胚 $\phi$，都存在 $C(\phi)$，满足 $\delta(\phi(\Lambda_0)\ \phi(\Lambda_1)) \le C(\phi)\delta(\Lambda_0,\Lambda_1)$。那么， $\delta = 0$ 或 $\delta$ 是非退化的。

引理 7 的证明完全采用了 [Che00 定理 2] 中的论证。另见[RZ20]。这种二分性引出了以下问题：

**问题 3.** $\alpha\mathrm{dist}_{\mathcal{J}}$ 在任意同痕类 $\mathcal{E}_k$ 上都是非退化的吗？

1.6. 振荡范数与平移点。Shelukhin 将振荡范数 $|\varphi|_\alpha^{\mathrm{osc}}$ 与接触同胚 $\varphi$ 存在平移点联系起来。通过截断论证，将 $Y$ 上的接触同胚与 $SY$, [ 上紧支撑的 Ha milton 微分同胚联系起来，She14 定理 B] 利用 [AF10] 的早期结果得出：

$\varphi$ 至少有一个平移点；若所有平移点都是非退化的，则$|\varphi|_\alpha^{\mathrm{osc}} < 2$（ $\alpha$ 的谱隙） $\Longrightarrow$ 至少为 dim $H_*(Y,\mathbb{Z}/2)$。 (5)

这里的谱隙是 $(Y,\alpha)$ 的 Reeb 轨道的最小正作用量。由于 [AF10], 中使用的 Rabinowitz Floer 同调，Shelukhin 的论证假设$Y$ 存在恰当填充。他的结果自然引出了以下猜想：

**猜想 4 (** [She14]中的猜想 31)。若 $\varphi$ 是任意紧致接触流形 $Y$上的接触同胚，则蕴含关系 (5) 成立。

预印本 [Oh21] 提出了一种通过对问题进行***Legendri- an***化来解决 Shelukhin 猜想的方法。

Oh 论证的关键在于将接触同胚的平移点与某个 Legendrian 子流形的 Reeb 弦联系起来。我们简要说明这一构造。回想一下，任意接触同胚都可提升为 $SY$ 上的等变辛同胚，因此在 $SY \times SY$ 内定义一个 $\mathbb{R}$-不变的拉格朗日子流形，其恰当辛形式为 $\mathrm{d}\lambda_0 - \mathrm{d}\lambda_1$。众所周知，在恰当辛流形中，$\mathbb{R}$-不变的拉格朗日子流形经 Liouville 流取商后会投影为 Legendrian 子流形。在此情形下，商空间 $Q(Y) = (SY \times SY)/\mathbb{R}$ 是一个良定义的接触流形（因为 Liouville 流是自由且适当的），因此接触同胚 $\varphi$ 的等变提升的拉格朗日图会投影为 Legendrian 子流形 $\Lambda(\varphi) \subset Q(Y)$。这种将接触同胚与 Legendrian 子流形联系起来的做法，先前已在 [Lyˇc77, §5], [Che96], [Bhu01], [San09], [San12], [CS15] [Liu20] 中探讨过。

不难看出，在 $Y$ 上选取接触形式 $\alpha_0$，即可建立 $Q(Y)$ 与上文 §1.2 所述接触化 $(Y \times SY,\ \alpha_0 - \lambda_1)$ 之间的接触同胚。此外，直接验证可知，对于这一接触形式，$\varphi$ 的平移点与 $\Lambda(\mathrm{id})$ 和 $\Lambda(\varphi)$ 之间的 Reeb 弦自然一一对应。

这或许意味着，如果能够证明 $Q(Y)$ 是 LDR，那么 Shelukhin 猜想便可得证。然而，我们的定理 2 表明，对于某些奇异的 $Y$，这些接触化并非 LDR。

致谢。感谢 Egor Shelukhin、Octav Cornea、Jakob Hedicke 和 Filip Broci´c 在撰写本文期间进行的有益讨论。本研究工作在蒙特利尔大学完成，并得到 CIRGET 研究组的资助。

## 2. 证明

定理 1、2、3、4 和 6 分别在 §2.1、§2.2、§2.3、§2.4 和 §2.6 中证明。命题 5 在 §2.5 中证明。

**2.1. 关于拟可填充接触流形上的严格 *LDR* 性质。** 回顾由 [Moh01] 给出的 Legendrian $\Lambda \subset (Y,\ \alpha)$ 的如下拉格朗日化。固定一个小的$\delta > 0$，并且对于 $k > 1$，考虑这个“矩形”

$$\Phi : (s,t,x) \in [0, \log(k)] \times [0,T] \times \Lambda \mapsto e^s \rho_t(x) \in SY,$$

其中，$\rho_t$ 是时间为 $t$ 的 Reeb 流，乘以 $e^s$ 表示在 $SY$ 中时间为 $s$ 的 Liouville 流。将 $\Lambda$ 视为位于 $SY$ 中与接触形式 $\alpha$ 的选取相对应的 $Y$ 副本内。因此 $\Phi^*\lambda = e^s \mathrm{d}t$。

$\Phi$ 在矩形边界上的限制称为 [EP17] 中的拉格朗日四边形。我们考虑这些四边形的平滑版本，如 [Moh01] 中所述。

令 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 为将 $\Phi$ 限制在形如 $\Gamma \times \Lambda$ 的子集上得到的拉格朗日子流形，其中 $\Gamma \subset [0, \log(k)] \times [0,T]$ 是一个嵌入环，因此 $\int_\Gamma e^s \mathrm{d}t = e^{-\delta}(k-1)T$（$[0,\log(k)] \times [0,T]$ 关于辛形式 $e^s \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$ 的面积为 $(k-1)T$）。注意，若 $T$ 小于 $\Lambda$ 的所有 Reeb 弦的作用量，则 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 是嵌入的。当然，如果

Reeb 流不完备，那么无论 $\Lambda$ 的 Reeb 弦的作用量如何，我们都可能不得不把 $T$ 取得非常小。

关键观察如下：

**引理 8.** 若 $\phi : Y \to Y$ 是一个严格接触同胚，并且使 $\Lambda$ 与自身不相交，即 $\Lambda$ 与 $\phi(\Lambda)$ 之间不存在弦，那么 $\phi$ 到 $\phi' : SY \to SY$ 的任意提升都会使 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 与自身不相交。

证明。若 $\phi'(L_{k,\delta}(\Lambda)) \cap L_{k,\delta}(\Lambda)$ 非空，则可以找到 $(s,t,x)$ 和 $(s',t',x')$，使得 $\phi'(e^s\rho_t(x)) = e^{s'}\rho_{t'}(x')$。由于 $\phi'$ 是 $\phi$ 的提升，我们得到 $\phi(\rho_t(x)) = \rho_{t'}(x')$。$\phi$ 的严格性意味着 $\phi\rho_t = \rho_t\phi$，因此 $\phi(x) = \rho_{t'-t}(x')$。但这与假设 $\phi$ 使 $\Lambda$ 与自身不相交相矛盾。证明完毕。□

一般而言，$Y$ 上的接触同胚有唯一的提升，可得到 $SY$ 上的等变辛同胚；接触同伦的提升是哈密顿同伦。[She14] 的一项结果是一个实用的截断定理：

**命题 9.** 给定一个紧支撑接触同伦 $\phi_t$，其振荡能量为 $E$，且对于每个 $t$ 都有 $H_t^{-1}(0) \neq \emptyset$，则存在一个紧支撑哈密顿同伦 $\psi_t : SY \to SY$，使得：

*(i)* $\psi_1(L_{k,\delta}(\Lambda)) = \phi_1'(L_{k,\delta}(\Lambda))$，其中 $\phi_1'$ 是 $\phi_1$ 的等变提升。

*(ii)* $\psi_t$ 的（*Hofer*）振荡能量不超过 $e^\delta kE$。

**证明。** 这由 [She14，命题 41 和引理 42] 推出。 □

接下来，回顾 Chekanov 关于驯性辛流形中紧拉格朗日子流形位移能量下界的结果：

**命题 10** ([Che98])。设 $L \subset X$ 是驯性辛流形 $X$ 中的紧拉格朗日子流形，且 $\sigma(X, L)$ 是边界位于 $L$ 上的圆盘的正辛面积下确界。那么，任何使 $L$ 位移的紧支撑哈密顿同伦，其 *Hofer* 振荡能量至少为 $\sigma(X, L)$。

定理 1 的证明如下。首先假设 $Y$ 是球面准可填充的，且具有完备 Reeb 流。为导出矛盾，假设 $\phi_t$ 是紧支撑接触各向同性，[5] 使得 $\phi_1$ 是严格的，并且与 $\Lambda$ 不相交，其振荡能量 $E$ 小于 $\Lambda$ 的最短 Reeb 弦的作用量。于是，我们可以在 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 的定义中选取 $T > E$。

边界位于 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 上的圆盘的最小正辛面积在 $SY$ 中为 $e^{-\delta}(k-1)T$（此论证也见于 [Moh01]）。球面准可填充假设意味着存在一个嵌入 $SY \to X$，将其嵌入满足 $\pi_2(X, SY) = 0$ 的驯性辛流形中。因此，$\sigma(X, L_{k,\delta}(\Lambda)) = e^\delta(k-1)T$。另一方面，命题 9 和引理 8 保证存在一个哈密顿同伦 $\psi_t$，使得 $\psi_1$ 将 $L_{k,\delta}(\Lambda)$ 移开，且 $\psi_t$ 的振荡能量至多为 $e^\delta kE$。由于 $E < T$，当 $k$ 足够大且 $\delta$ 足够小时，我们有 $e^\delta kE < e^{-\delta}(k-1)T$，这与 Chekanov 的结果矛盾。此矛盾完成了定理 1 的证明。

[5] 如果 $Y$ 是紧的，我们可以将 $\phi_t$ 改为 $\rho_{st} \circ \phi_t$，其中 $\rho$ 是 Reeb 流，且 $s \in \mathbb{R}$，从而使每个 $t$ 都满足 $H_t^{-1}(0) \neq \emptyset$。

若不假设 $Y$ 具有完备 Reeb 流，或球面填充，则按照上述方法进行，并对任意一个拉格朗日子流形$L_{k,\ \delta}(\Lambda)$取一个较小的$T$。如果 $e^{\delta}kE < \sigma(X,\ L_{k,\ \delta}(\Lambda))$，就会产生矛盾。因此我们可以取：

$$C(\Lambda,\alpha) = \frac{\sigma(X, L_{k,\delta}(\Lambda))}{e^{\delta}k}.$$

这个常数可能不是最优的，但它只取决于 $\Lambda = \Lambda_0$ （以及一些辅助选择），而不取决于任何分离同伦 $\Lambda_t$，正如所需。

2.1.1. 关于论证的说明。请注意，只要求 $\phi_1$ 是严格的，而不要求整个同伦 $\phi_t$ 都是严格的。此外，我们只要求：

$$s \in [0,T] \implies \phi_1(\rho_s(\Lambda)) = \rho_{s'}(\phi_1(\Lambda)) \tag{6}$$

对于某个 $s'$（$s$）。

给定任意同伦 $\Lambda_t$，存在一个延拓 $\phi_t$ ，使得对于$s \in [0,\epsilon]$，$\phi_1$（$\rho_s$（$\Lambda$）） $=$ $\rho_s$（$\phi_1$（$\Lambda$）），其中 $\epsilon$ 取决于的最短弦，$t \in [0,1]$。通过将$\phi_t$ 与一个把$\rho_{[0,T]}$（$\Lambda$）“压缩”到$\rho_{[0,\epsilon]}$（$\Lambda$）中的同伦预先连接，可以实现（6）。然而，这些压缩同伦似乎至少需要$T-\epsilon$的振荡能量。这似乎恰好处于临界边缘，作者未能据此证明球面准可填充接触流形是（非严格）LDR。

2.2. 定理 *2* 的证明。这一构造包含若干步骤，分为几个小节。设 $Y_0^{2n+1}$,$Y_1^{2m+1}$为接触流形，其中为 $Y_0$选定了一个形式 $\alpha_0$，并将$Q = Y_0 \times SY_1$ 视为配备形式 $A = \alpha_0 - \lambda_1$的接触流形。为后文之用，注意 $(Q, A)$ 的 Reeb 向量场就是 $(Y_0, \alpha_0)$ 的 Reeb 向量场；换言之，它与投影 $Q \to SY_1$ 的纤维相切。

2.2.1. 将 $SY_1$ 中的恰当拉格朗日子流形提升为 $Q$中的 *Legendrian* 子流形。设 $j : L \to SY_1$ 是一个恰当拉格朗日嵌入，即对于某个光滑函数$f$：$L \to \mathbb{R}$，有 $j^*\lambda_1 = \mathrm{d}f$。下面的几何构造依赖于在 $Y_0$中辅助选取的一个 Legendrian 子流形，它将 $SY_1$ 中的恰当拉格朗日子流形提升为 $Q$中的 Legendrian 子流形。

**引理11.** 设 $L, j, f$ 如上。取一个 *Legendrian* 子流形嵌入 $i : \Lambda_0 \to Y_0$，并令 $\rho_t : Y_0 \to Y_0$ 为时间 $t$ $\alpha_0$的 ***Reeb*** 流。则：

$$J : (x,y) \in \Lambda_0 \times L \mapsto (\rho_{f(y)}(i(x)), j(y)) \in Y_0 \times SY_1 = Q \tag{7}$$

定义了一个到 $(Q, A)$中的 *Legendrian* 子流形嵌入。

**证明**。 留给读者。 □

2.2.2. 将 $SY_1$ 上的哈密顿同伦提升为 $Q$上的接触同痕。令 $X_t$ 为 $SY_1$上的紧支撑时变哈密顿向量场，并按公式 $X_t \lrcorner \mathrm{d}\lambda_1 = -\mathrm{d}H_t$定义哈密顿量。令 $\varphi_t$ 为该非自治系统的时 $t$ 流。

**引理 12**。令 $K_t\colon Q \to \mathbb{R}$ 为 $-H_t$的提升，即 $K_t = -H_t \circ \mathrm{pr}_1$。那么，在 $Q$ 上满足 $N_t \lrcorner A = K_t$ 的唯一接触向量场 $N_t$ 生成一个提升 $\varphi_t$的 $A$-严格接触同痕。

**证明**。回想一下，$N_t$ 是接触的，当且仅当：

$$\mathrm{d}(N_t \lrcorner A) + N_t \lrcorner \mathrm{d}A = \beta_t A, \tag{8}$$

且当 $\beta_t = 0$ 对所有 $t$ 都成立时，$N_t$ 通过严格的 接触同胚诱导一个流。由于 $N_t \lrcorner A$ 是从 $SY_1$ 拉回的，而 $A$ 的 Reeb 向量场与 $Q \to SY_1$ 的纤维相切，我们得到 $\beta_t = 0$。

我们断言：

$$N_t = (X_t \lrcorner \lambda_1 - H_t)R + X_t, \tag{9}$$

其中 $R$ 是 $Y_0$ 的 Reeb 流（且 $Q$）。事实上，这满足 $N_t \lrcorner A = -H_t$，并且 (8) 由 $X_t \,\mathrm{d}\lambda_t + \mathrm{d}H_t = 0$ 立即得出。 $\lrcorner$

由于 $R$ 与 $Q \to SY_1$ 的纤维相切，$N_t$ 的流是 $X_t$ 的流的提升。证明至此完成。□

2.2.3. 提升拉格朗日同伦。为了后续使用，我们需要回答以下问题：如果 $\Lambda$ 是 $L$ 的 Legendrian 提升，如 §2.2.1 中所构造，$\varphi_t$ 是一个哈密顿同伦，而 $\Phi_t$ 是上述提升的接触同伦，那么 $\Phi_1(\Lambda)$ 与 $\varphi_1(L)$ 之间有什么关系？答案如下：

**引理 13**。设 $\varphi_t$ 是由 $H_t$ 定义的 $SY_1$ 的哈密顿同伦，$\Phi_t$ 是接触哈密顿量为 $-H_t \circ \mathrm{pr}_1$ 的提升接触同伦。假设 $J$ 是恰当拉格朗日 $j : L \to SY_1$ 的 ***Legendrian*** 提升，其中使用原函数 $f : L \to \mathbb{R}$ 和辅助 ***Legendrian*** $i\colon \Lambda_0 \to Y_0$，如 (7) 中所定义。那么 $\Phi_t \circ J$ 是 $\varphi_t \circ j$ 的一个形如 (7) 的提升，使用相同的辅助 ***Legendrian*** $i$ 和新的原函数

$$f_t(y) = f(y) + \int_0^t (X_\tau \lrcorner \lambda_1 - H_\tau) \circ \varphi_\tau(j(y))\,\mathrm{d}\tau,$$

其中 $X_t$ 是 $\varphi_t$的无穷小生成元。

**证明**。利用嘉当魔术公式可得：

$$\varphi_t^* \lambda_1 = \lambda_1 + \mathrm{d}\int_0^t (X_\tau \lrcorner \lambda_1 - H_\tau) \circ \varphi_\tau \,\mathrm{d}\tau,$$

因此，$f_t$ 是 $\varphi_t \circ j$的一个有效原函数。此外，如果我们构造

$$J_t(x, y) = (\rho_{f_t(y)}(i(x)), \varphi_t \circ j(y)),$$

那么对 $t$ 求导可得：

$$\frac{\partial}{\partial t} J_t = ((X_t \lrcorner \lambda_1 - H_t)R + X_t) \circ J_t = N_t \circ J_t,$$

这里我们用到了 (9)。由于 $N_t$生成 $\Phi_t$，我们得出 $J_t = \Phi_t \circ J$，如所需。 □

2.2.4. 奇异辛化中的紧致恰当拉格朗日子流形。设 $Y_1$ 按如下意义是奇异的： $SY_1$ 包含一个紧致恰当拉格朗日子流形 $L$，并记 $\lambda_1|_L = \mathrm{d}f$。根据 [Mur13]，存在这样的紧致 $Y_1$，满足 $\dim(Y_1) \geq 5$。更多详情见 §1.2。

令 $e^s L$ 为 $SY_1$ 中平移后的拉格朗日子流形（即利用 Liouville 流将 $L$ 流动时间 $s$）。令 $F_s(x) = e^s x$，其中 $x \in L$，并注意到 $F_s^* \lambda_1 = e^s F_0^* \lambda_1 = e^s \mathrm{d}f$。因此，$F_s$ 是一个恰当同伦，故根据各向同性延拓定理，$F_s$ 可延拓为 $SY_1$ 的哈密顿同伦。

**引理 14** (Sikorav 提出，参见 [Che00])**.** 假设 $s$ 足够大，使得 $e^s L$ 与 $L$ 不相交。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在紧支撑哈密顿量$H_t$，满足

$$oscillation\ energy = \int_0^1 (\max H_t - \min H_t)\mathrm{d}t < \epsilon,$$

$H_t$ 所诱导的1时刻流将 $L$ 映至 $e^s L$。

特别地，在这个奇异的辛化中，拉格朗日子流形空间上的切卡诺夫-霍费尔距离是退化的。

**证明**。这个论证相当非构造性。将 $K = L \cup e^s L$ 视为恰当拉格朗日子流形，并注意到 $r \mapsto e^r K$ 是一个恰当同伦。因此，我们可以找到一个哈密顿微分同胚，同时将 $L$ 映至 $e^r L$，并将 $e^s L$ 映至 $e^{s+r} L$。由此，根据 Hofer 范数的共轭不变性，如果我们能以振荡能量 $E$ 将 $L$ 变至 $e^s L$，那么也能以振荡能量 $E$ 将 $e^r L$ 变至 $e^{s+r} L$。

关键观察是，如果我们能以$E$的振荡能量从 $e^r L$ 到达 $e^{s+r} L$，那么我们就能以 $e^{-r} E$的振荡能量从 $L$ 到达 $e^s L$，且振荡能量为 $e^{-r} E$。事实上，给定一个将 $e^r L$ 映至 $e^{r+s} L$、振荡能量为 $E$的哈密顿同伦 $\varphi_t$，我们只需用扩张映射 $\psi$ 进行共轭：$x \mapsto e^r x$，即 $\psi^{-1} \circ \varphi_t \circ \psi$ 将 $L$ 映至 $e^s L$，振荡能量为 $e^{-r} E$。结合上一段的观察并令 $r \to \infty$，即可得到所需结果。□

2.2.5. 以任意小的能量分离勒让德子流形。固定 $\epsilon > 0$，并取 $Y_1$ 为一个 exotic 对象，使得 $SY_1$中存在一个紧致恰当拉格朗日子流形 $L$。利用 §2.2.1，构造 $L$的 Legendrian 提升 $\Lambda \subset Q$。根据 §2.2.4，存在一个 $SY_1$ 的紧支撑哈密顿同伦，其振荡能量至多为 $\epsilon$，并将 $L$移开。利用 §2.2.2 的结果，这可提升为 $Q$的接触各向同性。此外，由于接触哈密顿量是 $SY_1$中哈密顿量的[6] 提升，该提升的振荡能量至多为 $\epsilon$。提升后的同伦将 $\Lambda$ 与其自身分离。至此，定理 2 第一部分的证明完成。

2.2.6. 伪度量的退化性。为了证明该伪度量是退化的，我们将找到两个不同的 Legendrian 子流形 $\Lambda_1, \Lambda_2$，以及连接 $\Lambda_1, \Lambda_2$、长度 $A$ 任意短的同痕。我们继续在 $(Q, A)$ 中进行讨论，其中 $Q = Y_0 \times SY_1$ 对于 exotic $Y_1$，并且

[6]如果 $Y_0$ 是非紧致的，那么我们需要进行截断，但这不会改变振荡能量。

假设 $j\colon\ L \to SY_1$ 是一个以 $f$ 为原函数的恰当拉格朗日子流形。再次选取 $s>0$，使得 $L, e^sL$ 不相交。

直观地说，$\Lambda_1$ 将是 $L$的 Legendrian 提升，$\Lambda_2$ 将是 $e^sL$的提升，而这些同伦将是把 $L$ 变为 $e^rL$的哈密顿同伦的提升。这里有一个细微的技术问题：如果 $\varphi_t^k$ 是一列将 $L$ 变为 $e^sL$ 的哈密顿同伦，且其振荡能量趋于零，而 $\Phi_t^k$ 是相应提升得到的接触同痕，那么 $\Phi_1^k(\Lambda_1)$可能是 $e^sL$的不同的提升，因此我们没有可用来证明伪度量退化性的固定的 $\Lambda_2$。为解决这个问题，我们分析由 Sikorav 的论证所生成的同伦过程中 $\varphi_t^k \circ j$ 的原函数如何变化。

首先，我们证明以下这个略显临时的结果；下一节将说明，利用 Sikorav 的论证可以满足其假设。

**引理 15.** 设 $j\colon\ L \to SY_1$ 是一个恰当拉格朗日子流形，如上所述。假设 $\varphi_t^k$，$k=1,2,\ldots$ 是一列哈密顿同伦，使得 $\varphi_1^k(j(y)) = e^s j(y)$（即，$\varphi_1^k$ 在 $L$的像上保持不变，并且与通过 $e^s$ 微分同胚进行的缩放相一致）。令 $H_t^k$ 和 $X_t^k$ 分别为 $\varphi_t^k$ 对应的（紧支撑）哈密顿量和向量场。假设：

$$\sup_k \sup_{y\in L} \left| \int_0^1 (X_t^k \lrcorner \lambda_1 - H_t^k) \circ \varphi_t^k(y)\,\mathrm{d}t \right| < \infty$$

并且振荡能量 $\int_0^1$ 最大 $H_t^k$ −最小 $H_t^k \mathrm{d}t$ 当 $k\to\infty$时趋于零。那么，存在固定的 *Legendrian* 提升 $\Lambda_1, \Lambda_2$，它们属于 $Q$，分别对应于 $L, e^sL$，且可通过长度任意小的同痕将它们连接起来。

**证明。** 假设 $\Lambda_1$ 由式（7）中的 $J$ 描述。回顾引理 13 的结论：如果 $\Phi_t^k$是 $\varphi_t^k$的提升，那么 $\Phi_1^k \circ J$ 也由式（7）给出，其中使用 $\varphi_1^k \circ j$ 和原函数：

$$f_k(y) = f(y) + \int_0^1 (X_t^k \lrcorner \lambda_1 - H_t^k) \circ \varphi_t^k(y)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\varphi_1^k \circ j = \varphi_1^1 \circ j$，根据假设，$f_k(y) - f_1(y) = C_k$ 是一个常数。参见 (7)，可知 $\Phi_1^k \circ J$ 与 $\Phi_1^1 \circ J$ 相差一个时间为 $C_k$ 的 Reeb 流。

根据假设，$C_k$ 在 $k$中有界。特别地，存在一个收敛子列，其极限为 $C$。令 $\Lambda_2$ 为 $\Phi_1^1 \circ J$ 的时间 $C$ Reeb 流。前面的观察表明，$\Phi_1^k \circ J$ 与从 $\Lambda_2$ 出发、时间为 $\epsilon_k$ 的 Reeb 流相差，其中 $\epsilon_k \to 0$；因此，可以通过一个 $A$-长度为 $\epsilon_k$ 的同伦将 $\Phi_1^k \circ J$ 与 $\Lambda_2$ 连接起来（取时间为 $\epsilon_k$ 的 Reeb 流的截断）。

结果现在显而易见：由于同伦 $\Phi_t^k \circ J$ 在 $k\to\infty$趋于某值时具有任意小的振荡能量，它的 $A$-长度也趋于零（注意，振荡能量限制了 $A$-长度，因为接触哈密顿量取值为 0）。将其与时间为 $\epsilon_k$ 的 Reeb 流的截断串接起来，即可将 $\Phi_1^k \circ J$ 连接到固定的 Legendrian 子流形 $\Lambda_2$。由此可在 $k\to\infty$ 时以任意小的 $A$-长度将 $\Lambda_1$ 连接到 $\Lambda_2$。□

2.2.7. 使原函数达到界。 在本节中，我们将更仔细地分析 Sikorav 的论证，并证明可以满足引理 15 的假设。

令 $j'\colon\ L \sqcup L \to SY_1$ 为 $j$ 与 $e^s j$ 的余积（因此其像为 $L \cup e^s L$），如 §2.2.4 所示。对于 $r \in [0,1]$，考虑拉格朗日同伦 $j'_r(y) = e^r j'(y)$；该同伦在时刻 1 将 $L \cup e^s L$ 滑动至 $e^1 L \cup e^{s+1} L$。

拉格朗日同伦延拓定理蕴含存在一个环境哈密顿同伦 $g_r$，使得对于 $y \in L \cup e^s L$，$g_r(y) = j'_r(y)$。
令 $\psi_r\colon\ SY_1 \to SY_1$ 为全局扩张映射 $\psi_r(z) = e^r z$，使得 $\kappa_r = g_r^{-1} \circ \psi_r$ 满足：

(i) $\kappa_1^* \omega = e^1 \omega$，(ii) 对于 $y \in L \cup e^s L$，$\kappa_r(y) = y$。

通过映射 $[0,1] \to [0,1]$ 对 $r = r(t)$ 重新参数化，其中对于靠近 0 和 1 的 $t$，$r'(t) = 0$；重写 $\kappa_t = \kappa_{r(t)}$，并通过 $\kappa_{t+1} = \kappa_t \kappa_1$ 将 $\kappa$ 光滑延拓到所有 $t > 0$。
Now 令 $\varphi_t$ 为任意一个在时间 1 将 $L$ 变为 $e^s L$ 的哈密顿同伦，并定义

$$\varphi_t^k = \kappa_k^{-1} \circ \varphi_t \circ \kappa_k.$$

我们断言，$\varphi_t^k$ 满足引理 15 的假设。
若 $X_t$ 是 $\varphi_t$的生成向量场，则 $\varphi_t^k$ 的生成元为

$$X_t^k = \mathrm{d}\kappa_k^{-1} \circ X_t \circ \kappa_k,$$

将其代入 $\omega$，得到：

$$X_t^k \lrcorner\, \omega = e^{-k} X_t^k \lrcorner\, \kappa_k^* \omega = e^{-k} \kappa_k^* (X_t \lrcorner\, \omega) = \mathrm{d}(e^{-k} H_t \circ \kappa_k),$$

其中，$H_t$ 是 $\varphi_t$的哈密顿量。特别地，$\varphi_t^k$ 是哈密顿的，并且，由于 $k \to \infty$，$\varphi_t^k$ 的振荡能量趋于零。

只需证明关于 $\int_0^1 (X_t^k \lrcorner\, \lambda_1 - H_t^k) \circ \varphi_t^k(y)\, \mathrm{d}t$的界。为此，引入记号 $\gamma_y^k(t) = \varphi_t^k(y)$，并将 $\gamma_y^k$视为一条起于 $L$、终于 $e^s L$的路径。注意，随着 $k$ 变化，$\gamma_y^k$ 相对于其端点也会变化，即 $\gamma_y^k(0) = y$ 且$\gamma_y^k(1) = e^s y$。注意到$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \gamma_y^k(t) = X_t^k \circ \varphi_t^k(y),$，得出结论：

$$\int_0^1 (X_t^k \lrcorner\, \lambda_1 - H_t^k) \circ \varphi_t^k(y)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\gamma_y^k)^* \lambda_1 - H_t^k \circ \gamma_y^k(t)\, \mathrm{d}t =: a_k(y).$$

这个量是路径的哈密顿扰动辛作用量。我们断言：

$$\frac{\partial a_k}{\partial k}(y) = \int_0^1 \frac{\partial H_t^k}{\partial k} \circ \gamma_y^k(t).$$

事实上，$a_k$ 导数中的其他项都为零，因为对于路径相对于其端点的变分而言，$\gamma_y^k$ 是作用量的临界点。参照公式$H_t^k = e^{-k} H_t \circ \kappa_k$ 和 $\varphi_t^k = \kappa_k^{-1} \circ \varphi_t \circ \kappa_k$，可得：

$$\frac{\partial a_k}{\partial k}(y) = \int_0^1 (-e^{-k} H_t + e^{-k} \mathrm{d}H_t \cdot \frac{\partial \kappa_k}{\partial k} \circ \kappa_k^{-1}) \circ \varphi_t(y)\, \mathrm{d}t.$$

显然：

$$\int_0^\infty \sup_{y\in L}\left|\frac{\partial a_k}{\partial k}(y)\right| \mathrm{d}k < \infty \implies \sup_{k>0}\sup_{y\in L}|a_k(y)| < \infty, \tag{10}$$

右侧正是我们要证明的内容。由于有 $e^{-k}$ 因子，(10) 式的左侧可由以下结论推出：

$$\sup_{k>0}\sup_{y\in L}\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\partial \kappa_k}{\partial k}\circ\kappa_k^{-1}\right|\circ\varphi_t(y) < \infty, \tag{11}$$

因为其余各项均可在与 $y, k$ 无关的情况下有界。不过，利用周期性 $\kappa_{k+1} = \kappa_k\kappa_1$，只需对 $k \in [0,1]$ 证明 (11) 中的量有界。由于 $\varphi_t(L)$、$t \in [0,1]$ 的并集包含于 $SY_1$ 的某个紧子集中，我们便得到 (11) 对 $k \in [0,1]$ 成立。因此，我们可以应用引理 15 完成定理 2 的证明。

2.3. 定理 *3* 的证明。设 $\Lambda_0 \subset J^1(B)$ 是一个 Legendrian 子流形，并且存在一个无穷远处为线性的生成函数 $F\colon B\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$。由于线性函数没有临界点，$\Lambda_0$ 是紧的。先作如下约化：只需证明 $B$ 为紧集时的定理 3。对于任意同痕 $\Lambda_t$，存在一个边界为 $B_0 \subset B$ 的紧子域，使得 $\Lambda_t \subset J^1(B_0^{\mathrm{int}})$ 和 $F(x,\eta) = \ell(\eta)$ 在 $x \notin B_0$ 时为线性。将 $B_0$ 加倍为一个闭流形，即完成约化。

2.3.1. 无穷远处线性的生成函数回顾。 本节回顾生成函数理论中的必要结果。

**引理 16**。 设 $B$ 为一个紧流形，并假设 $\Lambda_0 \subset J^1(B)$ 具有无穷远处线性的生成函数。对于任意 *Legendrian* 同痕 $\Lambda_t$，存在无穷远处线性的生成函数的光滑族 $F_t$ $F_t\colon B\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，使得 $F_t$ 生成 $\Lambda_t$。此外，我们可以安排使 $F_t$ 在某个紧集的补集上与 $F_0$ 一致。

**证明**。 这是 [JT06，定理 3.1] 和 [ST13，引理 3.8]的结合。先取 $\Lambda_0$ 的无穷远处线性的函数 $F(x,\ \eta_1)$，然后定义稳定化：

$$\bar{F}_0(x,\eta_1,\eta_2) = F(x,\eta_1) + Q(\eta_2)$$

其中 $Q$ 是一个二次型（依赖于同伦 $\Lambda_t$）。对于适当选取的 $Q$、$\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，存在一个光滑延拓 $F_t(x,\ \eta_1,\ \eta_2)$，使得 (i) $F_t$ 生成 $\Lambda_t$，且 (ii) $F_t^{\bar{\ }}$ 在某个紧集的补集上与 $F_0$ 一致。该延拓通过 Chekanov 公式构造，参见 [Che96, Tra97]。令 $\mathbb{R}^N$ 为可能的配对 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 所成的空间。应用 [ST13, 引理 3.8], ，可得存在一个保纤维微分同胚 $\varphi\colon B\times\mathbb{R}^N \to B\times\mathbb{R}^N$，使得 $\bar{F}_0\circ\varphi$ 在无穷远处是线性的（而非“无穷远处二次线性”）。令 $F_t := F_t\circ\varphi$ 即可完成证明，因为每个 $F_t$在无穷远处也都是线性的（且保纤维微分同胚不会改变所生成的 Legendrian 子流形）。□

一族生成函数的时间导数由接触哈密顿量控制；相关结果见 [DRS20b, 引理 3.1]：

**引理 17.** 设 $F_t(x,\eta)$ 是一族生成函数，它们诱导出一个 *Legendrian* 同伦 $\Lambda_t$。若 $h_t$ 是该同伦的接触哈密顿量，$\Sigma_t$ 是 $F_t$的纤维临界集，且 $F_t'(x,\eta)$ 是时间导数，那么

$$F_t'(x,\eta) \in [\min h_t, \max h_t]$$

对所有 $(x,\eta) \in \Sigma_t$均成立。

**证明。** 设 $\varphi_{t,x}$ 是一族纤维空间的微分同胚。只需对 $F_t(x,\varphi_{t,x}(\eta))$ 证明该结果。时刻 $t_0$ 处接触哈密顿量的值，就是曲线 $\gamma(t) \in \Lambda_t$ 所对应的 $\alpha_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$ 的值（见 (1)）。取纤维临界集 $\Sigma_{t_0}$中的一点 $(x,\eta)$，并将 $(x(t)\ \eta(t))$ 延拓为 $t \in [t_0, t_0+\epsilon)$ 的一条路径。适当选取 $\varphi_{t,x}$，可假设 $\eta(t) = \eta$ 与 $t$无关。

令 $j_t\colon B \times \mathbb{R}^N \to J^1(B)$ 为返回值和水平导数的映射（将 $j_t$ 限制在 $\Sigma_t$ 上即可参数化 $\Lambda_t$）。容易证明:

$$j_t^*\alpha = \sum_i \frac{\partial F_t}{\partial \eta_i} \mathrm{d}\eta_i \text{ and } \alpha_{j_t(x,\eta)}(j_t'(x,\eta)) = F_t'(x,\eta).$$

T要计算接触哈密顿量，取路径 $\gamma(t) = j_t(x(t)\ \eta)$。 n:

$$\alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = F_t'(x(t),\eta) + (j_t^*\alpha)(\frac{\partial x(t)}{\partial t}) = F_t'(x(t),\eta) + 0.$$

在 $t = t_0$处求值可得，$F_{t_0}'(x,\eta) \in [\min h_{t_0}, \max h_{t_0}]$，正如所需。 □

T下一个结果涉及两个生成函数的逐纤维差 s:

**引理 18。** 令 $F_1(x,\eta_1)$ 和 $F_2(x,\eta_2)$ 为两个生成函数，并令 $\Lambda_1$ 和$\Lambda_2$ 为其生成的（浸入的）*Legendrian* 子流形。则逐纤维差函数的临界点:

$$\Delta(x,\eta_1,\eta_2) = F_1(x,\eta_1) - F_2(x,\eta_2)$$

与从 $\Lambda_1$ 到 $\Lambda_2$ 的 ***Reeb*** 弦一一对应，相应的临界值就是该弦的作用量（包括作用量为零和负值的弦）。

**证明。** 这是一个直接的计算。回想一下，Reeb 弦是拉格朗日投影的交点，而作用量是 $z$ 值之差。关于 $F_1 = F_2$ 时的情形，参见 [ST13，命题 3.1] □

下一个结果表明，从 $\Lambda_0$ 到 $\Lambda_t$ 的 Reeb 弦由一族无穷远处线性函数确定:

**引理 19。** 设 $\Lambda_0 \subset J^1(B)$ 是一个允许无穷远处线性生成函数的 *Legendrian* 子流形，并假设 $\Lambda_t$ 是一个始于 $\Lambda_0$ 的同伦。存在一族无穷远处线性函数 $K_t\colon B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，使得:

*(i)* $K_t$ 的临界点与 $\Lambda_0$ 和 $\Lambda_t$之间的 ***Reeb*** 弦一一对应，其中临界值对应于弦的作用量，

*(ii)* $K_0$ 上值小于$0$ 的临界点集合是一个与 $\Lambda_0$微分同胚的 *Morse-Bott* 子流形，并且，

*(iii)* 若 $h_t$ 是该同伦的接触哈密顿量，则对所有临界点$(x,\eta)$，时间导数 $K_t'(x,\eta)$ 均位于区间 $[\min h_t, \max h_t]$ 内。

**证明**。 设 $F_t$ 是引理 16 所给出的 $\Lambda_t$ 的一族无穷远处线性的生成函数。纤维差函数：

$$\Delta_t(x,\eta_1,\eta_2) = F_t(x,\eta_1) - F_0(x,\eta_2),$$

当 $\eta_1$ 位于某个紧集之外时，它与 $\Delta_0$ 相等，并且由引理 18 可知它满足 (i)。众所周知，Reeb 弦与自身之间存在作用量间隙，也就是说，作用量充分小的弦都是常值弦，因此值为 0 的临界点集与 $\Lambda_0$微分同胚。该临界流形是莫尔斯-博特的，因为 $\partial_\eta F_0(x,\ \eta) = 0$ 横截地给出，更多细节见 [ST10, 引理 3.3]性质 (iii) 由引理 17 得出。

遗憾的是， $\Delta_t$ 并非在无穷远处线性的。事实上，若 $F_t$ 定义在 $B\times\mathbb{R}^M$上，则$\Delta_t$ 可能在 $B\times(C\times\mathbb{R}^M\cup\mathbb{R}^M\times C)$上不是线性的，其中 $C\subset\mathbb{R}^M$ 是一个紧集。令 $K_t := \Delta_t\circ\varphi_t$，其中 $\varphi_t$ 是 $B\times\mathbb{R}^N$ 的保纤维微分同胚（且$N=2M$）。通过适当地选取 $\varphi_t$，我们可以使 $K_t$ 在无穷远处线性。性质 (i)、(ii) 和 (iii) 不受这种修改的影响。这里采用一种 Moser 型变形论证。第一步是证明存在一个逐纤维的 $\psi_t$，使得在紧集之外$\Delta_t\circ\psi_t = \Delta_0$；当且仅当 $\psi_t$的生成元 $X_t$ 满足以下条件时，这一点成立：

$$X_t \lrcorner \mathrm{d}\Delta_t + \Delta_t' = 0 \text{ outside a compact set.}$$

这可以关于 $X_t$求解。更确切地说，我们可以选取 $X_t = -\Delta_t' V$，其中 $V$ 是一个沿 $\eta_2$ 方向的常向量场，并且当$\eta_2$ 位于某个紧集之外时满足$V\,\mathrm{d}\Delta_t \doteq 1$（请注意，当 $\eta_1$ 位于某个紧集之外时，$\Delta_t' = 0$）。第二步是证明存在一个逐纤维的 $\kappa$，使得 $\Delta_0\circ\kappa$ 在无穷远处线性。通过类似的方法，找到满足下式的 $\kappa_s$ 即可构造出它：

$$[(1-s)\Delta_0(x,\eta_1,\eta_2) + s(\ell(\eta_1)-\ell(\eta_2))]\circ\kappa_s = \Delta_0 \text{ outside a compact set.}$$

那么，$\varphi_t = \psi_t\circ\kappa_1^{-1}$确保 $\Delta_t\circ\varphi_t$ 在无穷远处是线性的。 □

**2.3.2. 与函数族相关的奇异勒让德图。**对于任意函数族 $K_t: B\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$，我们按如下方式关联一个位于$J^1([0,1])$中的奇异勒让德图：令 $S_t$为 $K_t$的临界点集合，并令 $S$为 $S_t$在 $t\in[0,1]$上的并集。存在典范映射 $S\to J^1([0,1])$，其 $z$、$q$、$p$坐标由下式给出：

$$z(t,x,\eta) = K_t(x,\eta) \qquad q(t,x,\eta) = t \qquad p(t,x,\eta) = K_t'(t,x,\eta).$$

事实上，这个映射可扩展到整个空间 $[0,1]\times B\times\mathbb{R}^N$，且该延拓在 $S$ 上满足 $\mathrm{d}z - p\mathrm{d}q = 0$。因此，若 $S$ 被横截地切割，典范映射就参数化了一个浸入式勒让德子流形。当然，这只是生成函数框架的一个特例。我们将典范映射的像称为奇异勒让德子流形

图与族 $K_t$ 相关，记作 $\mathcal{D}$。奇异勒让德图的前投影是族 $K_t$ 的塞尔夫图，参见 [Cer70, §5]。

**引理 20.** 设 $K\colon [0,1]\times B\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是一族无穷远处线性函数。那么，对于奇异勒让德图周围的任意开集 $U$，存在一个 $C^1$-邻域，其元素的奇异勒让德图都位于 $U$ 中。

**证明。** 这是显而易见的，留给读者完成。请注意，由于无穷远处线性假设，奇异勒让德图是紧的。□

证明的其余部分可概括如下。引理 19 给出一族无穷远处线性函数 $K_t$，其临界点与从 $\Lambda_0$ 到 $\Lambda_t$的 Reeb 弦一一对应。奇异勒让德图 $\mathcal{D}$ 满足如下约束：

$$\mathcal{D}\cap\{q=t\}\subset\{p\in[\min h_t,\max h_t]\}\,.$$

换言之，奇异勒让德图的 $p$ 坐标有界。在接下来的章节中，我们将证明，如果 $\int_0^1 \max h_t-\min\ h_t\mathrm{d}t$ 小于 $K_0$的条形码中出现的最长条，那么 $\mathcal{D}\cap\{q=1\}$ 非空，因此 $\Lambda_0$ 与 $\Lambda_1$之间至少存在一条 Reeb 弦。

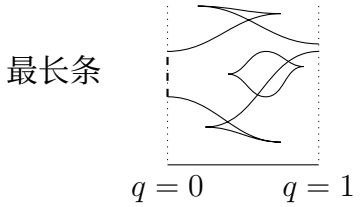


FIGURE 1. 与函数族 $K_t$相关联的奇异勒让德图 $\mathcal{D}$的前投影。$p$ 坐标是前投影的斜率。

2.3.3. 无穷远处线性函数的条形码。固定一个定义在 $B\times\mathbb{R}^N$ 上的无穷远处线性函数族 $K_t$，并假设对于某个 $\ell\neq 0$，如引理 19 所示，在某个紧集之外有 $K_t(x,\eta)=\ell(\eta)$。选取足够大的 $R$，使得当 $K_t<-R$ 和 $K_t>R$ 时，$K_t(x,\eta)=\ell(\eta)$。对于每个 $t$，关联如下持久模：

$$V_t(s)=H_*(K_t<s,K_t<-R;\mathbb{Z}/2).$$

对于 $s_1\leq s_2$，持久映射 $V_t(s_1)\to V_t(s_2)$ 由包含映射诱导。显然，对于 $s>R$，$V_t(s)=0$，因为 $\ell<-R$ 到 $\ell<R$ 的包含是一个变形收缩。

条形码 $B_t$ 是唯一的区间多重集 $I_1^t,\dots,I_d^t$，使得

$$V_t(s)=P(I_1)\oplus\cdots\oplus P(I_d),$$

其中 $P(I)$ 是支撑在区间 $I$ 上的平凡持久模（当 $s\in I$ 时等于 $\mathbb{Z}/2$，否则为 0）。众所周知，$B_t$ 中条形的端点是 $K_t$ 的临界值；若 $K_t$ 是莫尔斯函数，则每个临界值都会作为某个条形的端点出现。粗略地说，我们可以将 $B_t$ 看作一种配对

奇异勒让德图 $\mathcal{D}$ 前投影中的股线；[CP05，第 12] 节采用的正是这一视角。

一个基本事实是，条形码 $B_t$ 关于 $t$连续变化。这可以通过瓶颈距离来精确表述，见 [CSEH05]。就我们的目的而言，只需以下结论。令 $L(t)$为 $B_t$中最长条的长度（如果没有条形码，则令 $L(t) = 0$）。那么对任意 $t_0 \in (0,1)$：

$$\liminf_{t\to t_0-} L(t) = \liminf_{t\to t_0+} L(t). \tag{12}$$

虽然条形码可以对任意族 $K_t$定义，但我们倾向于对 $K_t$ 稍作¯扰动，使其成为 $K_t$，从而满足以下性质：存在有限集 $0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$，使得对于 $t \neq t_j$， $K_t$ 是一个强 ***Morse*** 函数。这里的“强”是指每个临界值只在一个临界点处取到。

如 [Bar94、CP05、FR11、PT20], 所述，一族强 Morse 函数的临界值会光滑地变化 $c_1(t) < \cdots < c_M(t)$；并且，如果 $x_1(t)\ldots, x_M(t)$是相应的临界点，则存在一个上三角基变换

$$y_j = \sum_{i\le j} a_{ij}x_i \text{ so that } dy_j = y_{\pi(j)} \text{ or } dy_{\pi(j)} = y_j,$$

对应于唯一的无不动点对合 $\pi$：$\{1,\ldots,M\} \to \{1,\ldots,M\}$，其中 $d$是 Morse 微分（系数取自 $\mathbb{Z}/2$）。这种分解称为***Barannikov*** 分解，不难证明 $\{c_j(t)c_{\pi(j)}(t)\}$ 构成 $K_t$的条形码中一个条形的端点。

回顾引理 19， $K_0$ 有一个值为 0 的紧致 Morse-Bott 临界流形，而其他所有临界值的绝对值均不小于 $\Lambda_0$的 Reeb 弦的最小正作用量。将这个最小正作用量记为 $A$，并取 $\epsilon$ 远小于 $A$。

¯小扰动 $K_0$ 会产生一组接近零（相差不超过 $\epsilon$）的临界值，其余临界值则会 $\epsilon$接近绝对值至少为 $A$ 的数。我们将前一类临界值称为“类型 1”，其余称为“类型 2”。在 $K_0$的 Barannikov¯分解中，必定存在一对由一个类型 1 临界值和一个类型 2 临界值组成的配对；否则余边界 $\{-2\epsilon \le K \le 2\epsilon\}$ 的 Morse 同调将为零，这与众所周知的事实相矛盾：该同调同构于临界值为 0 的 Morse-Bott 子流形的同调（可能相差一个分次平移）。

¯因此， $K_0$ 的条形码中有一条长度为 $A - 2\epsilon$ 的条形码，例如由 $c_i(0) < c_j(0)$ 达到。对于 $t < t_1$，区间 $[c_i(t)\ c_j(t)]$ 属于 $K_t$的条形码。

¯ ¯应用引理 20，我们假设 $K_t$ 的奇异勒让德图 $D$ 满足 $D \cap \{q = t\} \subset \{p \in (\min h_t - \epsilon, \max h_t + \epsilon)\}$。显然，$(z,q,p) = (c_i(t)\ t, c_i'(t))$ 属于¯ $K_t$ 的奇异勒让德图， $j$ 的情况也类似，因此：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_j(t) - c_i(t)) > -(\max h_t - \min h_t) - 2\epsilon.$$

特别地，若 $L(t)$ 表示最长条的长度，

$$\liminf_{t\to t_1-} L(t) > A - 2\epsilon - 2\epsilon t_1 - \int_0^{t_1} \max h_t - \min h_t \,\mathrm{d}t.$$

应用（12），我们得出，当 $t \to t_1+$ 时，存在一条长度相近的杆（例如相差不超过 $2^{-1}\epsilon$）。对每个奇异时刻重复此论证 $t_p$ （将 $2^{-1}\epsilon$ 替换为$2^{-p}\epsilon$），可以证明：

$$L(1) > A - 5\epsilon - \int_0^{1} \max h_t - \min h_t \,\mathrm{d}t.$$

由于 $\epsilon$ 是任意的，我们得出如果 $\Lambda_t$ 的振荡能量小于 $A$，那么 $L(1) > 0$，因此存在一条从 $\Lambda_0$ 到 $\Lambda_1$的 ***Reeb*** 弦。定理 3 的证明至此完成。

2.4. 定理 *4* 的证明。 注意，任何围成面积 1 的环 $j\colon\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to B(1+\epsilon)$ 都可以提升为 $Q(1+\epsilon)$ 中的 Legendrian 子流形。事实上，如果 $j$ 的面积为 1，那么存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，使得 $f^*\mathrm{d}t = j^*\lambda$，而（$f$，$j$）就是所需的 Legendrian 提升。

令 $\Lambda_0$ 为与嵌入环 $j$ 对应的 Legendrian 提升，其中该环在 $B(1+\epsilon)$ 内的面积为 1 （例如，可以取 $\partial B(1)$ 的一个提升）。思路是按照图 2 和图 3，让 $j$ 在围成有向面积 1 的浸入环空间中变形。基本上，先进行图 2 中的局部变形，在图 3 中添加一个面积为 $A_3$ 的环。对于过程的第二部分，将面积为 $A_3$ 的环扩张，同时收缩面积为 $A_1$ 的部分，使总面积保持为 1。整个过程使新的环略微位于原环内侧，且振荡能量可以任意小；更多细节参见 §2.4.1。由此完成定理 4 的证明。

2.4.1. 振荡能量的拉格朗日子流形解释。与上面的论证一样，令 $(f_t,\ j_t)$：$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ 为浸入 Legendrian 子流形构成的变形，即对所有 $t$，$j_t^*\lambda = f_t^*\mathrm{d}\theta$。假设 $f_t$ 的度始终为 1。由于 $j_t$ 所围成的面积保持不变，$j_t$ 是拉格朗日子流形的恰当变形，也就是说，存在 $\mathbb{R}$ 值的 $F_t$，使得 $\omega_{j_t(x)}(j_t'(x),\ \mathrm{d}j_{t,\ x}(-)) = \mathrm{d}F_{t,\ x}(-)$。

Lagrangian 振荡能量定义为 $\int_0^1 \max_x F_t(x) - \min_x F_t(x)\mathrm{d}t$。运用微分形式的微积分可以直接证明，Lagrangian 振荡能量与 $(f_t,\ j_t)$ 的 Legendrian 振荡能量相同。

对于拉格朗日曲线（不一定是环）的任意恰当变形，若我们将 $j_t$ 按 $\varphi \circ j_t$ 进行改变，其中 $\varphi\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个压缩映射 $\varphi^*\omega = c\omega$, $c < 1$，则很容易证明，拉格朗日振荡能量会变为原来的 $c$倍。这一观察表明，我们可以将图 2 中的局部变形所需的能量降至任意小（即先在通常尺度下进行这一过程，再与一个很小的 $c$的 $\varphi$复合）。细节留给读者。

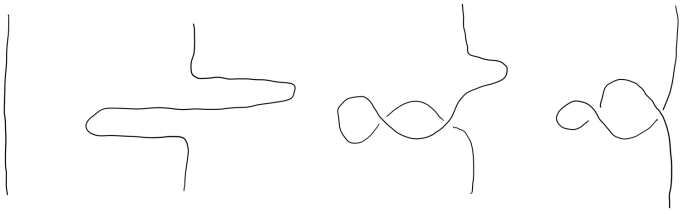

FIGURE 2. 平面中曲线的一种保面积形变的特定局部模型。请注意，从第三阶段到第四阶段时，最右侧的交叉点改变了符号。

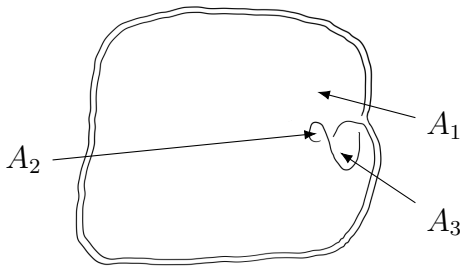


FIGURE 3. 通过浸入环对面积为 1 的环进行同痕。若 $A_1 + 2A_3 - A_2$ 等于原环的面积，则此过程保面积。通过放大 $A_3$ 并缩小 $A_1$ ，我们可以使该环完全位于原环所围成的区域内。

2.5. 命题 *5* 的证明。本节的灵感来自 [DRS22a, DRS22c]。

请注意， $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B(1)$ 配备形式 $\mathrm{d}t - \lambda$ 时，与标准的 $S^3$减去一个霍普夫圆接触同胚[7] 。事实上， $S^3$ 是 $S^2$ 的预量子化，其面积形式的总面积为 1，因此，辛同胚 $B(1) \to S^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$ 可延拓为预量子化丛总空间之间的严格接触同胚。

双重覆盖 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \partial B(1/2)$的 Legendrian 提升 $\Lambda_2$ 是 $S^3$ 中的标准平凡结（$\mathtt{tb}(\Lambda_2) = -1$）。只要选取嵌入 $B(1) \to S^2$ ，使得 $\partial B(1/2)$ 被映到赤道上，即可实现这一点；这是因为 $S^3$ 中的标准平凡结投影到 $S^2$ 中赤道的一个双重覆盖。

假设 $\Lambda_1$ 与位于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B(1) \subset S^3$ 中的结 $\Lambda$ 勒让德同痕。差值 $\mathtt{tb}(\Lambda) - \mathtt{tb}(\Lambda_2)$ 可按 [DRS22a, §3] 中的方法计算：若 $\Sigma$ 是 $\Lambda - \Lambda_2$ 的 Seifert 曲面，则 Reeb 推离$\rho_t(\Lambda + \Lambda_2)$ 与 $\Sigma$ 的同调交数（当 $t \to 0+$ 时）等于 $\mathtt{tb}(\Lambda) - \mathtt{tb}(\Lambda_2)$。事实上，我们只要求 $\Sigma$ 是一个边界为 $\Lambda - \Lambda_2$ 的协边类。

[7]注意到 微分同胚 $(t, z) \mapsto (t, \bar{z})$ 是两个形式 $\mathrm{d}t \pm \lambda$ 之间的接触同胚

这种方法的优点在于， $\Lambda - \Lambda_2$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ 中是零配边（而不只是 $S^3$ 中）。由 [DRS22a，引理 3.1] 可得：

(13) $\mathtt{tb}(\Lambda) - \mathtt{tb}(\Lambda_2) = \rho_t(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ 与 $\Sigma$ 的交数, $\partial\Sigma = \Lambda_1 - \Lambda_2$。

我们断言，这个差等于 $+1$。于是 $\mathtt{tb}(\Lambda_2) = -1$ 推出 $\mathtt{tb}(\Lambda) = 0$，这与 Bennequin 不等式 [Ben83] 矛盾；该不等式指出，对于 $S^3$ 中所有 Legendrian 纽结， $\mathtt{tb}(\Lambda) < 0$。

为计算 (13) 的右端，令 $r_1 = 1/\sqrt{\pi}$, $r_2 = 1/(\sqrt{2\pi})$，并考虑映射：

$$f(s,t) = (t, (1-s)r_2 e^{4\pi i t} + s r_1 e^{2\pi i t}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}.$$

容易验证 $f$ 是一个嵌入，因此定义了一个 Seifert 曲面，其 $\partial f = \Lambda_1 - \Lambda_2$。此外，径向推离 $\Lambda_i^\epsilon = e^\epsilon \Lambda_i$ 诱导出与 Reeb 推离相同的框架，因此 $\Lambda_1^\epsilon + \Lambda_2^\epsilon$ 与 $f$ 的交数给出了 (13)。

显然，对于所有 $s, t$， $f(s,t) \notin \Lambda_1^\epsilon$。另一方面：

$$f(s,t) \in \Lambda_2^\epsilon \iff t = 0 \text{ and } (1-s)r_2 + s r_1 = e^\epsilon r_2.$$

稍加思考便可看出， $T\Lambda_2^\epsilon, \partial_s f, \partial_t f$ 构成一个正向定向的标架（采用接触定向），因此 (13) 式右端等于 $+1$。如上所述，这与 Bennequin 不等式矛盾，从而完成证明。

2.6. 定理 *6* 的证明。 如 §1.5 所述，证明归结为确立引理 7。建议读者参阅 [Che00，第 609], 页，因为我们的论证基本上是对其证明的直接照搬。论证如下：假设 $\delta$ 是 $\mathcal{E}_k$ 上的一个伪度量，并且对于 $\Lambda_0 \neq \Lambda_\infty$， $\delta(\Lambda_0, \Lambda_\infty) = 0$。目标是证明 $\delta$ 恒等于零。

在 $\Lambda_0$ 周围选取一个 1-射流管状邻域。 $\Lambda_0$ 的这个邻域由一族立方体 $Q(\epsilon)$ 覆盖，这些立方体由 $|q| < \epsilon$、 $|p| < \epsilon$、 $|z| < \epsilon^2$ 定义，使用局部典范坐标 $q$、 $p$、 $z$。

如有必要，缩小 $\epsilon$，使得 $\Lambda_\infty$ 与这些立方体 $Q(\epsilon)$ 中的一个不相交。若 $\Lambda_1$ 是函数 $z = f(q)$ 的 1-喷射， $p = \mathrm{d}f(q)$，其中 $f$ 很小且支撑在 $|q| < \epsilon$ 中，那么我们可以找到一个环境接触同胚 $\phi$ 使得 $\phi(\Lambda_0) = \Lambda_1$ 并且 $\phi(\Lambda_\infty) = \Lambda_\infty$。所需的接触同胚是如下获得的 Legendrian 同痕的延拓：取 $tf$ 的 1-喷射，其中 $t$ 从 $[0,1]$, 变化；我们可以令其支撑在 $Q(\epsilon)$ 中。

利用 $\delta(\Lambda_1, \Lambda_\infty) \leq C(\phi)\delta(\Lambda_0, \Lambda_\infty) = 0$，由三角不等式可得 $\delta(\Lambda_0, \Lambda_1) = 0$。固定这个特殊立方体 $Q(\epsilon)$。通过应用典范变换（将底空间上的微分同胚提升为 1-喷射空间上的接触同胚），我们可以用有限个 $Q(\epsilon)$ 的接触同胚像覆盖 $\Lambda_0$ 的一个邻域。若 $\Lambda_1$ 是一个 $C^1$小函数的 1-喷射，且其支集包含在这些立方体中的任意一个内，那么我们便得到 $\delta(\Lambda_0, \Lambda_1) = 0$。

令 $\Lambda_f$be 表示 $f$ 的 1-喷射。给定两个 $C^1$ 小函数 $f_1$， $f_2$，存在一个接触同胚 $\phi$，将 $\Lambda_0$， $\Lambda_{f_1}$ 映射到 $\Lambda_{f_2}$， $\Lambda_{f_2+f_1}$。因此，若 $f_1$， $f_2$ 的支集

位于上述立方体内，则有：

$$\delta(\Lambda_0, \Lambda_{f_1+f_2}) \le \delta(\Lambda_0, \Lambda_{f_2}) + \delta(\Lambda_{f_2}, \Lambda_{f_1+f_2}) \le \delta(\Lambda_0, \Lambda_{f_2}) + C(\phi)\delta(\Lambda_0, \Lambda_{f_1}) = 0.$$

反复应用这一论证，我们得出， $C^1$ 的任意 1阶喷流小函数与 $\Lambda_0$之间的 $\delta$距离为零。由于 $\mathcal{E}_k$ 在（ $C^1$ 拓扑下）道路连通，我们得出 $\delta = 0$ 在 $\{\Lambda_0\} \times \mathcal{E}_k$上成立，这就推出了所需结果。

## References

[AF10] Peter Albers 和 Urs Frauenfeulder。叶向交点与拉比诺维茨-弗洛尔同调。《拓扑与分析杂志》，2(1):77–98，2010。7[Aka01] Manabu Akaho。霍费尔辛普列克能量与接触几何中的 Lagrange 交点。《京都大学数学杂志》，41(3):593–609，2001。1, 3[Bar94] Serguei Barannikov。标架莫尔斯复形及其不变量。《苏联数学进展》，21:93–116，1994。19[BEH+03] F. Bourgeois、Y. Eliashberg、H. Hofer、K. Wysocki 和 E. Zehnder。辛场论中的紧致性结果。《几何与拓扑》，7:799–888，2003。3[BEM15] Matthew Strom Borman、Yakov Eliashberg 和 Emmy Murphy。所有维数中过扭接触结构的存在性与分类。《数学学报》，215:281–361，2015。4, 5[Ben83] Daniel Bennequin。缠结与 Pfaff 方程。《Astérisque》，107-108:87–161，1983。22[Bhu01] Mohan Bhupal。通过生成函数对 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 的接触同胚群定义偏序。《土耳其数学杂志》，25:125–136，2001。8[BST15] Fr´ed´eric Bourgeois、Joshua Sabloff 和 Lisa Traynor。通过生成族构造拉格朗日配边：构造与地理。《代数与几何拓扑》，15(4):2439–2477，2015。5[Cer70] Jean Cerf。实可微函数空间的自然分层与伪同痕定理。《IHES 数学出版物》，39:7–170，1970。18[Che96] Yu. V. Chekanov。准函数的临界点与勒让德流形的生成族。《泛函分析及其应用》，30(2):118–128，1996。3, 8, 15[Che98] Yu. V. Chekanov。拉格朗日交点、辛能量与全纯曲线的面积。《杜克数学杂志》，95(1)，1998。1, 3, 9[Che00] Yu. V. Chekanov。拉格朗日嵌入空间上的不变芬斯勒度量。《数学杂志》，234:605–619，2000。1, 4, 7, 12, 22[CMP19] Roger Casals、Emmy Murphy 和 Francisco Presas。过扭性的几何判据。《美国数学会杂志》，32:563–604，2019。4[CP05] Yu. V. Chekanov 和 P. E. Pushkar'。前沿与 Legendrian 链环的组合学及阿诺德四猜想。《俄罗斯数学调查》，60(1):95–149，2005。5, 19[CS15] Vincent Colin 和 Sheila Sandon。接触同痕与 Legendrian 同痕的判别式和振荡长度。《欧洲数学学会杂志》，17:1657–1685，2015。8[CSEH05] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久图的稳定性。SCG'05，第263–271页，2005。19[DRS20a] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。勒让德子流形的能量-容量不等式。《拓扑与分析杂志》，12(3):547–623，2020。1, 3, 4[DRS20b] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。Chekanov-Eliashberg 代数的持久性。《精选数学》，26(69):32，2020。1, 3, 5, 16[DRS21] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。相对拉比诺维茨-弗洛尔复形的持久性。arXiv，2021。1, 2, 3, 5

[DRS22a] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。勒让德子流形的 $C^0$-极限与接触不可挤压性。arXiv:2201.04579，2022。6, 21, 22[DRS22b] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。勒让德子流形的 $C^0$-极限与正向环。arXiv:2212.09190，2022。1, 2[DRS22c] Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan。私人通信，2022。6, 21[EES07] Tobias Ekholm、John Etnyre 和 Michael Sullivan。在$P \times \mathbb{R}$中的 Legendrian 接触同调。《美国数学会汇刊》，359(7):3301–3335，2007。6[EHK16] Tobias Ekholm、Ko Honda 和 K´alm´an。Legendrian 结与恰当拉格朗日余边界。《欧洲数学学会杂志》，18:2627–2689，2016。4[EHS95] Yakov Eliashberg、Helmut Hofer 和 Dietmar Salamon。接触几何中的拉格朗日交点。《几何与泛函分析》，5(2):244–269，1995。3[EKP06] Yakov Eliashberg、Sang Seon Kim 和 Leonid Polterovich。接触变换与区域的几何：可排序性与挤压。《几何与拓扑》，10(3):1635–1747，2006。6[EM13] Yakov Eliashberg 和 Emmy Murphy。拉格朗日帽。《几何与泛函分析》，23:1483–1514，2013。4[EP17] Michael Entov 和 Leonid Polterovich。拉格朗日四边形与哈密顿动力系统中的不稳定性。《非线性》，30:13–34，2017。8[FR11] Dmitry Fuchs 和 Dan Rutherford。标准接触空间中的生成族与 Legendrian 接触同调。《拓扑学杂志》，4:190–226，2011。5, 19[Ghr08] Robert Ghrist。条形码：数据的持久拓扑。《美国数学会通报》，45:61–75，2008。5[Hed21] Jakob Hedicke。接触几何中的洛伦兹距离函数。arXiv，2021。1, 2[Her07] Hai-Long Her。Legendrian 变形下的辛能量与拉格朗日交点。《太平洋数学杂志》，231(2)，2007。1, 3[Hof90] Helmut Hofer。关于辛映射的拓扑性质。《爱丁堡皇家学会会刊》，115(A):25–38，1990。1[JT06] Jill Jordan 和 Lisa Traynor。非结 Legendrian 链环的生成族不变量。《代数与几何拓扑》，6:895–933，2006。5, 15[KS21] Asaf Kislev 和 Egor Shelukhin。谱范数与条形码的界。《几何与拓扑》，25:3257–3350，2021。5[Lau09] Fran¸cois Laudenbach。正向 Legendrian 正则同伦。载于《辛场论中的新视角与挑战》，第299–306页。CRM 会议录与讲义，2009。6[Liu20] Guogang Liu。松弛 Legendrian 嵌入的正向环及其应用。《辛几何杂志》，18(3):867–887，2020。8[Lyˇc77] V. V. Lyˇcagin。关于接触微分同胚群的充分轨道。《苏联数学文集》，33(2):223–242，1977。8[Moh01] Klaus Mohnke。全纯圆盘与弦猜想。《数学年刊》，154:219–222，2001。3, 8, 9[Mul90] M. P. Muller。在 $\mathbb{R}^6$上的完备辛结构中嵌入的一个拉格朗日球面。载于《辛几何与力学》，第235–241页。施普林格，1990。4, 5[Mur13] Emmy Murphy。接触流形辛化中的闭恰当拉格朗日子流形。arXiv，2013。4, 12[Oh21] Yong-Geun Oh。接触瞬子的几何与分析以及 Legendrian 链环的纠缠 I，2021。1, 3, 4, 7[Ono96] Kaoru Ono。Legendrian 变形下的拉格朗日交点。《杜克数学杂志》，85(1):209–225，1996。3

[Pol93] Leonid Polterovich. 拉格朗日子流形的辛位移能量。《遍历理论与动力系统》，13:357–367，1993。1[PS16] Leonid Polterovich and Egor Shelukhin. 自治哈密顿流、Hofer几何与持久模。《选择数学·新系列》，22:227–296，2016。5[PT20] Petya Pushkar and Misha Tyomkin. 增强布鲁哈分解与莫尔斯理论。arXiv:2012.05307，2020。《国际数学研究通报》，已接收。19[RZ20] Daniel Rosen and Jun Zhang. 接触拓扑中的 Chekanov 二分性。《数学研究快报》，27(4):1165–1193，2020。1，2，4，7[San09] Sheila Sandon. 通过生成函数研究 $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$ 中的接触同调、容量与不可挤压性。arXiv:0901.3112v3，2009。8[San12] Sheila Sandon. 关于 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 和 $\mathbb{R}^{2n}\times$S¹的接触同胚的迭代平移点。《国际数学杂志》，23(2)，2012。8[She14] Egor Shelukhin. 接触同胚的 Hofer范数。《辛几何杂志》，15，11 2014。1，2，7，9[She22a] Egor Shelukhin. 辛上同调与 Viterbo猜想。《几何与泛函分析》，2022。5[She22b] Egor Shelukhin. 佐尔对称空间的 Viterbo猜想。《数学发明》，230:321–373，2022。5[ST10] Joshua M. Sabloff and Lisa Traynor. 拉格朗日配边存在及挤压的障碍。《拓扑分析》，2(2):203–232，2010。5，17[ST13] Joshua M. Sabloff and Lisa Traynor. 通过生成族研究勒让德子流形之间的拉格朗日配边的障碍。《代数与几何拓扑》，13:2733–2797，2013。5，15，16[ST17] Joshua Sabloff and Lisa Traynor. 勒让德子流形之间拉格朗日配边的最小长度。《选择数学·新系列》，23:1419–1448，2017。4[Tra97] Lisa Traynor. 勒让德圆形螺旋链环。《剑桥哲学会数学学报》，122:301–314，1997。2，15[Ush21] Michael Usher. 局部刚性、接触同胚与共形因子。《数学研究快报》，28(6):1875–1939，2021。1，2[UZ16] Michael Usher and Jun Zhang. 持久同调与 Floer-Novikov理论。《几何与拓扑》，20(6):3333–3430，2016。5