arXiv:2301.06206v1 [econ.TH] 15 Jan 2023

通过二次转移实现集体决策效率*

Jon X. Eguia† Nicole Immorlica Steven P. Lalley
Katrina Ligett Glen Weyl DimitriosXefteris

2023年1月18日

摘要

考虑以下集体选择问题：一群预算受限的代理人必须从多个备选项中选择一个。是否存在一种预算平衡机制，能够：i）不依赖群体的具体特征；ii）不要求支付无法负担的转移支付；并且 iii）在代理人的偏好为拟线性且信息为私人信息时实现功利主义？我们研究以下程序：每位代理人都可以表达对每个备选项的支持或反对的任意强度，并向其他代理人支付与所表达强度的平方相等的财富；结果则由所表达强度之和决定。我们证明，随着群体规模不断扩大，在这一二次转移机制的每个均衡中，每位代理人的转移支付都趋于零，且有效结果被选中的概率趋于一。

关键词：效率、转移支付、策略性投票、多个备选方案。JEL分类：D72、D71、D61。

*感谢 Alessandro Lizzeri、Tilman B¨orgers、Arunava Sen，以及普林斯顿大学、密歇根大学研讨会和密歇根州立大学举办的2021年中西部理论会议的与会者提出宝贵建议。本研究的早期版本（其内容已纳入本文）曾以《多备选方案下的二次投票》为题流传。

†作者电子邮箱及所属机构：eguia@msu.edu，密歇根州立大学（JXE）；nicimm@gmail.com，微软（NI）；lalley@galton.uchicago.edu，芝加哥大学（SPL）；ka- trina@cs.huji.ac.il，希伯来大学（KL）；glenweyl@microsoft.com，微软（GW）；以及 xef- teris.dimitrios@ucy.ac.cy，塞浦路斯大学（DX）。

1 引言

设想一个由众多代理人组成的群体，该群体希望选定自己的集体选择程序，也就是每当群体需要从若干备选项中选出一个时所采用的机制。假设该群体希望这一程序有效——能够针对未来可能遇到的任何集体选择问题，选出与之相关的功利主义结果——并且每个代理人都拥有私人价值，且关于自身偏好的信息是私人的。此外，假设该群体希望通过一种满足预算平衡的机制来做出选择；该机制不要求代理人支付大笔款项（因此预算约束紧张的代理人也能参与）；而且在每次决策前无需进行微调（例如，无需考虑群体成员对当前议题的具体态度和信念）。

经典民主理论主张，集体决策应通过投票作出，并赋予每位公民相同数量的选票（Dahl 1989）。这类程序不会引发预算平衡或预算约束方面的问题，但要针对任何给定议题确定最优投票规则——即使是在二元情境下——也必须了解群体相关的态度和信念（例如 Ledyard and Palfrey 2002，Gr¨uner 和 Tr¨oger 2019）。此外，涉及多个备选项的投票博弈通常存在多个均衡，且结果各不相同，因此无法保证能够实施功利主义备选项（例如 Palfrey 1989，Myerson 2002，Bouton 2013，Martinelli and Palfrey 2020）。因此，要在有多个候选人的情境中实现功利主义，我们必须考虑带有转移支付的机制。

Vickrey（1961）、Clarke（1971）和 Groves（1973）的 VCG机制能够以占优策略实现功利主义，但不具备预算平衡。可以通过对 $n-1$ 个代理人运行 VCG机制，并让第 n个代理人成为所有转移支付的剩余索取者，来实现预算平衡；该机制渐近最优，即随着群体规模扩大，其做出最优选择的概率趋近于 1（Green 和 Laffont，1977）。但该机制要求代理人能够支付大额转移支付或罚款，因此当代理人的个体预算约束严格时，便无法运行

。[1]

d'Aspremont 和 Gerard-Varet（1979年）以及 Arrow（1979年）提出的预期外部性 AGV 机制是预算平衡的，并通过向每位代理人收取其报告给其他代理人造成的预期外部性，在贝叶斯纳什均衡中实现功利主义。随着群体规模增大，这种预期外部性趋于零，因此从渐近意义上说，AGV机制不需要大额转移支付。然而，要对任何给定的报告收取适当费用，AGV机制需要知道代理人预期该报告确切会造成多大的外部性。[2] 因此，如果群体采用这种方法处理一系列集体选择问题，那么在每次决策之前，都需要由一位仁慈且知情的规划者（即有权调整群体决策规则、致力于实现功利主义最优解并了解选民信念的人）重新调整程序。如果没有这样的规划者，群体可能不得不采用一种无需频繁重新配置的集体选择机制。[3]

[1]众所周知，在完全信息环境中，借助预算平衡机制实施功利主义是可行的：当实施概念为 Maskin（1999）中的纳什均衡，或 Perez-Castrillo 和 Wettstein（2002）提出的多重竞价机制中的纳什均衡；或未被支配的纳什均衡（Sj¨ostr¨om，1994）；或子博弈完美纳什均衡（Moore 和 Repullo，1988）时，均可实现。[2]机制知晓代理人的共同信念这一要求较高的信息环境被称为收益类型空间。最宽松的环境是普遍类型空间，即所有由收益环境产生的类型空间的并集（B¨orgers，2015）。尽管 Bergemann 和 Morris（2005）主张分析后者，他们也建议研究类似于我们的环境："*[*在*]*许多类型空间中间 *[.....]* 还有许多同样值得研究的类型空间。例如，我们可以考察所有收益类型空间（这样，代理人对收益类型上的某个先验具有共同知识，但机制设计者并不知道该先验）。"我们的理论遵循这一建议，研究这样一类代理人所作的集体选择：他们对收益类型上的某个先验具有共同知识，而所使用的机制并不知道这一先验。

[3]请注意，如果一个大型集体实体能够找到一位具备这些特质的规划者，那么就无需采用投票、VCG、AGV 或任何其他偏好聚合程序：规划者只需通过命令即可实现功利主义最优解（Ledyard and Palfrey 2002）。

本文研究一种二次转移机制（QTM）和具有拟线性偏好的人口，并证明 QTM 在贝叶斯-纳什均衡中渐近实现功利主义。在 QTM 下，代理人可以表达对每个备选项的支持或反对程度，表达强度所产生的成本为其平方。随后，将表达对各个备选项支持或反对的这些二次成本加总，以得出代理人的总成本。机制从每位代理人处收取的这笔总成本，将以转移支付的形式重新分配给所有其他代理人。接着，QTM 根据每个备选项的净支持度总和来选择结果。

我们证明，对于足够大的人口，QTM 以任意接近于 1 的概率选出功利主义最优结果，且个人支付趋近于零。也就是说，由于 QTM 始终满足预算平衡，且不使用任何关于代理人偏好或信念的信息，因此 QTM 渐近地满足了我们提出的所有要求。

除了研究 QTM 的理论动机之外，还有一个额外且可能更为迫切的理由。带有转移支付的机制日益受到媒体关注，因此也进入了公共辩论。[4] 事实上，已有多个组织开始试验一些集体选择程序，在这些程序中，投票权会在议题和投票者之间重新分配，即使存在多个备选方案也是如此；其动机是提升效率。[5] 然而，我们对这类机制在一般的非二元情境下会产生何种效果知之甚少。与标准投票规则相比，它们是否有望带来更高的社会福利?

[4]参见《经济学人》2021年12月18日刊载的“可能带来更公平投票方式的数学方法”；《金融时报》2020年2月1日刊载的“数字工具有助于巩固民主”；以及《彭博商业周刊》2019年5月1日刊载的“一种让狂热付出代价的新投票方式”。[5]例如，科罗拉多州众议院的民主党多数党团曾采用一种以发言权积分进行二次转移支付的机制，在多个提案之间分配4000万美元。参见《科罗拉多太阳报》2019年5月28日刊载的“申请拨款1.2亿美元，账上只有4000万美元。一种鲜为人知的理论如何帮助确定科罗拉多州预算的优先事项”。

如果是，那么需要满足哪些条件，又要付出什么代价？可以说，理论研究应预见新型集体选择程序进入公共讨论，并适时开展研究，以便向利益相关者充分说明其潜在利弊。我们的研究提供了相关见解：我们首次展示了如何设计一种带有二次转移支付的机制，使其在多个备选方案的情境下能够产生唯一且有效率的均衡结果；我们还指出了使用该机制时的局限与注意事项。

QTM 从文献中提出的所有带转移支付的机制中汲取灵感（例如 VCG 和 AGV），尤其借鉴了那些在“影响力凭证”（例如 Hylland 和 Zeckhouser 1980年）或“发言权积分”（例如 Casella 和 Sanchez 2020年）或私人消费（例如 Posner 和 Weyl 2015年、Goeree and Zhang 2017年、Lalley and Weyl 2018年、2019年）中采用二次支付的机制。[6] 不过，据我们所知，QTM 是首个无论可用备选项数量多少都能实现功利主义结果，并且能够抵御少数投票者偏离至任何可负担策略的采用二次转移支付的机制。在有多个候选人的情境中，负向投票是实现效率的关键：正如我们在陈述主要结果之后所论证的，如果不允许投票者表达对任何备选项的反对，那么也可能出现低效率均衡。此外，QTM 所采用的结果函数为每个备选项分配的获胜概率会随其净支持度严格递增。因此，随着人口规模扩大，均衡中的选票获取数量可以任意大，从而每个个体选民对结果的影响实际上趋近于零，即便其偏离至任何可负担的行动也是如此。这有效解决了以往对采用其他结果函数的二元情境均衡分析中遇到的选票获取总数有限的问题

[6]关于二元情境下其他相关研究，读者可参阅 Casella 和 Mace（2021年）、Eguia 和 Xefteris（2021年）及其文献综述。认为某实体投出的选票数应为其规模平方根的观点，至少可追溯至 Penrose（1946年）。群体规模趋于无穷时，d’Aspremont 和 Gerard-Varet（1979年）的机制也会产生二次成本（Goeree and Zhang，2017年）。

（例如 Lalley and Weyl 2019年）。[7]

我们在准线性偏好这一限制性但标准的假设下分析 QTM；该假设排除了财富效应。因此，我们的结果更适用于大型风险中性主体群体（例如美国商会的30万家企业、股东等），而非财富不均的风险厌恶型个人群体。因此，我们不主张民主国家使用二次机制作为汇总公民对意识形态选择的（风险厌恶型）偏好的主要手段。除了这一限制外，QTM 还与其他现有机制有着一些共同的局限：在小群体中，或在主体偏好相关的情况下，效率未必能够实现；此外，该机制也无法避免主体联盟的合谋。因此，我们的形式化结果最好被视为基础研究

在二元选择问题中，或在只有两名候选人的选举中，以有成本投票的多数规则选出获胜者已知能够带来较高的社会福利（Borgers 2004）；在某些条件下，它甚至能够渐近地实现功利主义结果（Ledyard 1984，Krishna 和 Morgan 2011，2015）。在非二元情境中，投票者可能会如实表达偏好，因为设计操纵在计算上不可行（Conitzer 等，2007；Faliszewski 和 Procaccia，2010；Brandt 等，2016；Meir，2018）；最佳响应动态也可能产生依据某些计分规则近乎最优的结果（Branzei 等，2013）。然而，通过真诚策略，或通过最佳响应动态学习而获得的这些结果，也可能无法实现功利主义效率。

[8]经典的 VCG 和 AGV 机制、多重竞价机制，以及上文提到的较新型二次机制，与大多数相关文献一样，也都将讨论限定在准线性条件下。我们将在第4节讨论放宽这一假设的影响。

[9]可储存选票（Casella 2005）是这些应用的一种可能备选项。值得注意的是，一项基于加利福尼亚州四项公投倡议的调查实验发现，将可储存选票与把储存的选票通过二次转换转为用于特定决策的选票相结合，能够提高社会福利（Casella 和 S´anchez 2022）。

[10]Weyl（2017）、Lalley and Weyl（2019）以及 Goeree、Louis 和 Zhang（2020）讨论并分析了在二元选择中，采用二次转移支付的机制无法保证效率的条件。

即位于　具有启发意义，但与所有应用研究情境并无直接关联　　t.

2 模型假设与主要结果

一组 n 代理人需要在有限个 $m \geq 2$ 备选项中进行集体选择。每位代理人 i 都有一个类型（或价值） $u^i = (u^i_j)_{j=1,\ 2,\ \cdots,\ m} \in [0,1]^m$，该类型刻画了她对（备选项、财富）组合的偏好。我们始终假设，这些 n代理人的类型是从共同的概率分布 F 中$[0,1]^m$独立抽取的，且该分布为所有 n 代理人所知。[11] 为强调代理人的价值现在被视为随机向量，我们将用大写字母 U^i表示这些随机向量，并用小写字母 u^i 表示这些随机向量的具体取值。

根据 QTM，代理人会为每个 m 备选项购买一定数量的选票，既可以是正数，也可以是负数（即赞成或反对）。代理人若要为备选项 j购买 a_j 张赞成票（或反对票），必须向其他投票者支付 ca_j^2 美元。每张选票的单位成本 $c > 0$ 是模型中的一个自由参数。代理人在决定购买多少选票时可以使用辅助随机化：因此，每位代理人 i针对每个备选项 $j \in \{1, ..., m\}$ 投出的选票 A^i_j 都是一个随机变量，并定义为一个函数

$$A^i_j := \alpha^i_j(U^i, Z_i) \tag{1}$$

其中，每个 α^i_j： $[0,1]^m \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 都是代理人类型和辅助随机变量 Z_i的博雷尔可测函数； Z_1、 Z_2、 $\cdots$、 Z_n 相互独立，且在单位区间 $[0,1]$上均匀分布。（例如，参见 Aumann（1964年），了解如何利用均匀分布的随机变量来实现随机化策略。）如果函数 α^i_j 不显式依赖于参数 Z_i，则称代理人采用纯策略。

对于每个代理人 i，令 $A^i := (A^i_1, ..., A^i_m)$ 表示代理人 i 的（随机）投票向量，令

[11]这是研究具有私人价值和私人信息的选举时的一项标准假设（例如，参见 Palfrey 1989；Ledyard 和 Palfrey 2002；Myerson 2002；Bouton 2013；或 Gr¨uner 和 Tr¨oger 2019年）。

$A := (A^1, ..., A^2)$ 表示投票概况，并令 $A^{-i} := (A^1, ..., A^{i-1}, A^{i+1}, ..., A^n)$ 表示除 i 之外所有代理人的投票组合。

代理人的收益——给定其类型后——由（随机）投票总数决定

$$V_j := \sum_{i=1}^{n} A_j^i \tag{2}$$

并且还取决于另一种随机机制：给定投票总数 V_j，以概率选择备选项 k

$$Q_k := \frac{e^{V_k}}{\sum_j e^{V_j}}. \tag{3}$$

概率分布 $(Q_j)^{j\in[m]}$ 本身是一个随机变量，因为投票总数取决于代理人的类型 U^i 和随机变量 Z_i。代理人都是期望效用最大化者。类型实现值为 u^i 的代理人 i，其效用为

$$W^i := \sum_k Q_k u_k^i - c\sum_k (A_k^i)^2 + \frac{c}{n-1}\sum_{i'\neq i}\sum_k (A_k^{i'})^2. \tag{4}$$

由于类型分量 U_j^i 的取值 u_j^i 介于 0 和 1 之间（概率为 1），任何代理人 i 无论是支持还是反对任何备选项 j，购买超过 $1/\sqrt{c}$ 张选票都不是最优的。因此，我们只考虑随机投票向量 A^i 的定义域包含于 $\mathcal{A}$ 的决策规则：对每个代理人 i，均有 $= [-c^{-1/2}, c^{-1/2}]^m$。

此外，我们对抽样分布 F 作出两项假设。

假设1。概率分布 F 的支持包含于单位立方体 $[0,1]^m$，其坐标均值

$$\mu_j := \int u_j \, dF(u),$$

其中，u_j 表示向量 u的第 j个坐标，且对于任意两个不同的坐标 i 和 j，均满足 $\mu_i \neq \mu_j$。

每个帕累托最优结果都必须选择备选项 $\text{argmax}_{j\in 1,\ldots,m} \sum_{i=1}^n U_j^i$，使价值总和最大。假设1意味着，如果 n 足够

大，那么这一功利主义最优解就是备选项 $\text{argmax}_{j\in 1,\ldots,m}\,\mu_j$ ，且其发生概率可任意接近 1。[12]

为方便记号且不失一般性，我们重新标记备选项，使其顺序与各自均值的顺序一致。也就是说，我们考虑

$$\mu_1 > \cdots > \mu_m.$$

请注意，知道哪个备选项（最有可能）是功利主义备选项，并不能解决社会的集体选择问题。正如在纳什实施环境中一样——功利主义最优解是共同知识，但实施功利主义往往十分困难（Maskin 1999年）——功利主义最优解无法直接通过契约实现：将选择功利主义备选项的任务委托给任何代理人，都无法避免该代理人转而选择自己最偏好的备选项；相反，如果社会希望实现功利主义的集体选择，就需要借助具有适当激励的机制来实施这一选择规则。

事实上，近期的重要研究发现，在这一特定信息环境下寻求最优机制是有价值的。例如，Gr¨uner 和 Tr¨oger（2019年）研究了存在参与成本且参与为自愿的情形，Ledyard 和 Palfrey（2000年）研究了强制投票情形；另有研究考察了完全信息环境，例如 Perez-Castrillo 和 Wettstein（2002年）提出的多重竞价机制。

[12]假设1排除了各备选项期望值相同的分布。不过请注意，在这种对称环境中，社会福利方面的顾虑会渐趋消失，至少在人均层面如此。各备选项的平均实现效用都趋于其共同期望，因此在这种情况下，无论选择哪个备选项，公民获得的平均效用最终都相同。

对于两个备选项的情形——这是文献中最受关注的情形——我们可以证明，即使投票者对类型生成过程持有错误的共同信念，QTM 仍能实现功利主义结果（即类型实际上是按照 $\hat{}F$ 生成的，但投票者认为它们是按照 F 生成的）。我们将在第4节详细阐述这一结果及其向多个备选方案的扩展。

假设 2 是关于类型分布的一项温和的技术假设；例如，对于在所有备选项的无差异邻域内处处具有正密度的任何分布，该假设都成立。

假设 2。对于每个坐标 $j = 1$，2，$\cdots$，m，都存在一个正数$t_j \in (0, 1]$，使得分布 F 赋予向量的每个邻域正概率

$$t_j e_j = (0, 0, \cdots, 0, t_j, 0, \cdots, 0, 0).$$

我们的主要结果描述了规模足够大的群体中所有对称贝叶斯-纳什均衡（可能采用混合（随机化）策略）的一种渐近性质。为确保这一结果具有意义，我们首先证明至少存在一个这样的均衡。

命题1。对于每个样本量 n 以及每个每票成本参数的取值 $c > 0$，都存在一个对称贝叶斯-纳什均衡（可能采用混合策略）。

这一存在性证明——以及所有其他中间结果的证明——见附录。我们的主要结果表明，在规模足够大的集体中，QTM 以趋近于一的概率选择功利主义最优备选项。

定理1。假设抽样分布 F 满足假设 1–2。那么存在一个实数序列 $\beta_n \downarrow 0$，使得对于任意样本量 $n \geq 1$以及任意对称贝叶斯-纳什均衡，

$$P\{Q_1 \leq 1 - \beta_n\} \leq \beta_n. \tag{5}$$

下一节将解释这一结果的证明。这里我们先给出如下直观解释。

对于每个类型为 u^i、投票向量为 $a^i \in \mathcal{A}$ 的代理人 i，对于每个备选项 k，以及给定的随机投票组合 A^{-i}，定义备选项k 对代理人 i 的“相对估值”为 ω_k^i，即代理人 i 在备选项 u_k^i 被选中时获得的价值与

在备选项 k 未被选中时获得的价值 i 之差，其中给定投票向量a^i 和投票概况 A^{-i}。此外，令 piv_k^i 表示选票a_k^i的边际关键性，定义为在给定 A^{-i}时，选择 k 的概率相对于 a_k^i的导数。代理人 i 针对每个备选项 k，通过令边际成本 $2ca_k^i$ 等于 $\omega_k^i \cdot piv_k^i$的期望值，来最优地选择选票 a_k^i。如果 piv_k^i 在各代理人、各备选项以及各投票组合之间均为常数，那么显然，最优选票将与预期相对估值成正比，因此总体预期相对估值最高的备选项也将获得最多的总选票。然而，边际关键性 piv_k^i 会随备选项和投票向量而变化，从而引入两种扭曲。

第一种扭曲是，代理人的边际关键性会随其自身的投票向量变化（也就是说，piv_k^i 随 a^i变化），因此，类型不同（获取的选票数量也不同）的代理人面临不同的激励。这种扭曲会随着群体规模增大而渐近消失：在规模足够大的集体中，所有参与者获取的选票总数的期望值趋于无穷大，而对于其他参与者行动几乎所有可能的实现值，每个代理人的边际关键性都任意接近于零。因此，所有代理人和所有类型的个体均衡选票也都趋于零。随着所有个体选票趋于零，基于代理人之间投票向量异质性的扭曲也随之消失：对于所有代理人、类型和备选项，最优购票量都趋于与 $\omega_k^i \cdot piv_k$的期望值成正比，其比例系数为关键性参数 piv_k；该参数因备选项而异，但对所有代理人都相同。关键性参数piv_k 反映了投票支持不同备选项的相对关键性。尽管所有关键性都趋于零， piv_k 标示了它们针对各备选项的趋近速度。

第二种扭曲是，关键性最高的备选项会吸引更多选票。在多数制下，这会导致所谓的杜韦尔热（1951）动态：投给预期获胜者或预期亚军的选票最具关键性。投票者认为，投给其他备选项的选票都被浪费了，因此会根据自己在这两个备选项之间的序数偏好，将选票投给领先者或主要挑战者，

由此形成。这种推理可以支撑任意一对备选项之间自我强化的竞逐，因此会出现多个均衡，而其中没有一个能保证选出功利主义最优解。[13] 在 QTM 下，投票者可以按线性边际成本，投出任意数量的选票来支持或反对任何备选项；这打破了杜韦尔热陷阱，并渐近地促成功利主义最优解当选。[14]

考虑一个说明性例子，其中有三个备选项 $\{1, 2, 3\}$，其期望估值为 $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$。在多数制下，存在三个杜韦尔热均衡，每个均衡都让一对不同的备选项展开势均力敌的竞争。相比之下，在 QTM 下，如果群体足够大，使得平均估值趋近期望值，那么均衡中备选项 3 的总体相对估值必定为负（因为在不选择备选项 3 的条件下，期望值的平均值至少为 μ_2）；而备选项 1 的相对估值之和必定为正（因为在不选择备选项 1 的条件下，期望值的平均值至多为 μ_2）。因此，均衡总票数对备选项 1 为正，对备选项 3 为负，所以备选项 1 获胜的概率高于备选项 3。随着人口规模增大，选票总数会趋于无穷，因此备选项 1 获胜的概率将变得任意大于备选项 3 获胜的概率。于是，备选项 2 的总体相对估值也为负（因为在以下条件下的期望值平均值

[13]出于完全相同的原因，将为二元决策情境提出的二次投票机制（Goeree and Zhang 2017, Lalley and Weyl 2019）应用于多个备选方案之间的选择时，也会出现多个杜韦尔热均衡。如果购买的选票可以分配给各个备选项，却不能投给任何备选项的反对方，那么每位投票者都有激励把所有选票都投给两位领先者中的一位。[14]采用固定计分规则的负向投票同样可以排除不理想的杜韦尔热均衡（Myerson 2002, 第4节），但会维持区分度不足的均衡；在这些均衡中，多个备选项都有相当大的概率被选中（Myerson 2002, 第5节）。QTM 下不会出现这类区分度不足的均衡，因为投票者可以自由选择对任一备选项投赞成票或反对票的确切数量。

不选择备选项 2 会任意接近 μ_1，因而大于μ_2）。由此可知，在每个均衡中，功利主义最优解（备选项 1）被选中的概率最高。[15] 这个例子中的直觉可以推广到含有任意数量备选项的选择问题，正如我们将在下一节中所展示的那样。

3 定理1的证明

本节概述证明的结构，陈述所有关键的中间结果，并对其提供部分直观解释；每个中间步骤的完整证明见附录。

在详细说明术语和符号后，我们的证明分为六个步骤：步骤 1，推导代理人优化问题的一阶条件；步骤 2 和步骤 3，证明边际关键性趋于零（步骤 2），并证明随着边际关键性趋于零，它们在不同类型之间的相对值会收敛（步骤 3）；步骤 4，推导均衡行为的近似界限；步骤 5，利用这些界限证明关键性缓慢趋于零；最后，步骤 6，利用这些中间结果得出结论：在规模足够大的群体中，备选项 1（渐近地几乎总是功利主义最优解）几乎总是会被选中。我们分别针对 $m = 2$ 和 $m = 3$ 备选项的特殊情形推导最后这一步，然后再针对包含 $m \geq 3$ 备选项的更一般情形进行推导。

术语与记号。
由于我们只考虑对称规则，因此将使用“贝叶斯-纳什均衡”或“BN 均衡”这一简称，指混合策略中的对称贝叶斯-纳什均衡。在我们的设定中，对称策略的关键特征

[15]正如我们将在下文证明的那样，随着人口规模的扩大，该概率趋近于 1，因为当集体实体足够庞大时，功利主义备选项的总票数会变得任意大。

是随机向量

$$(U^1, A^1), (U^2, A^2), \cdots, (U^n, A^n)$$

相互独立且同分布；我们将反复使用这一事实。对于任意代理人 i 和备选项 j，我们记

$$V_j^{-i} := \sum_{i' \,:\, i' \neq i} A_j^{i'} \tag{6}$$

代理人 $i' \neq i$ 的选票之和。我们还采用以下标准数学记号：对于任意实数 x,

$$x_+ := \max(x, 0),$$
$$x_- := \max(-x, 0),$$

对于每个正整数 k,

$$[k] := \{1, 2, \cdots, k\}.$$

选择概率 Q_j 取决于代理人的选票；因此，由于每个代理人 i 都知道自己的类型 $U^i = (U_j^i)_{j\in[m]}$ 和投票向量 $A^i = (A_j^i)_{j\in[m]}$，在最大化期望效用时，代理人 i 必须对给定 U^i 和 A^i 的条件期望进行计算。为便于处理涉及此类条件期望和概率的论证，我们使用记号 E_i 表示给定 U^i 和 A^i 时的条件期望；因此，对于任意随机变量 Y，我们将 E_iY 简写为 $E(Y \mid \mathcal{F}_i)$，其中 $\mathcal{F}_i$ 是由 U^i 和 A^i 生成的 $\sigma-$ 代数。根据测度论中的一个标准结果，给定 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_i$ 的任何条件期望都是 (U^i, A^i) 的博雷尔可测函数。在必要时，我们将使用记号

$$E(Y \mid U^i = u^i, A^i = a^i)$$

以指示 .....这些条件期望对特定价值 u^i, a^i 的依赖 -

值。

对于每个 个代理人 i、每个备选项 k 以及每个可能的投票向量 $a \in \mathcal{A}$，定义 e

$$Q_k^i(a) := \frac{e^{a_k} e^{V_k^{-i}}}{\sum_j e^{a_j} e^{V_j^{-i}}}; \tag{7}$$

这将是代理人 i 的投票为 $A^i = a$ 时备选项 k 的选择概率，因此对于每个 $i \in [n]$, $Q_k = Q_k^i(A^i)$。

步骤 1：一阶条件。
由于随机向量 $(A^i)_{i\in[n]}$ 独立同分布，对于任意 $k \in [m]$ 和任意 $a \in \mathcal{A}$，随机变量 $Q_k^i(a)$ 与 $Q_k^1(a)$ 具有相同的分布；因此，

$$E_i Q_k = E_i Q_k^i(A^i) = q_k(A^i) \qquad \text{where} \quad q_k(a) := EQ_k^1(a), \ \text{and} \tag{8}$$

$$E_i Q_j Q_k = E_i Q_j^i(A^i) Q_k^i(A^i) = r_{j,k}(A^i) \qquad \text{where} \quad r_{j,k}(a) := EQ_j^1(a) Q_k^1(a). \tag{9}$$

初等微积分表明

$$\frac{\partial q_k(a)}{\partial a_j} = -r_{j,k}(a) \quad \text{for} \quad j \neq k, \ \text{and} \quad \frac{\partial q_j(a)}{\partial a_j} = q_j(a) - r_{j,j}(a). \tag{10}$$

（由于被积函数的导数对 $a^i \in [-1/\sqrt{c}, 1/\sqrt{c}]^m$ 一致有界，因此可以在期望下求导；例如参见 Royden (1988)，第 4.4 节，习题 19。）

在贝叶斯-纳什均衡中，代理人 i 的策略集中于最佳响应向量 $a^i \in \mathcal{A}$，也就是说，集中于给定其类型和行动 $(U^i, A^i) = (u^i, a^i)$ 时使条件期望效用 $E_i W^i$ 最大化的向量。该条件期望效用为

$$E(W^i \mid (U^i, A^i) = (u^i, a^i)) = \sum_k EQ_k^i(a^i) u_k^i - c \sum_k (a_k^i)^2 + \frac{c}{n-1} \sum_{i' \neq i} \sum_k E(A_k^{i'})^2.$$

将这些期望效用对变量 a_j^i 的偏导数设为零，即可得到一阶条件。利用方程（10），我们得出

that

$$2ca_j^i = \sum_k (u_j^i - u_k^i) r_{j,k}(a^i) \tag{11}$$

是最佳响应的必要条件。注意，这个求和中的项 $k = j$ 会消失；因此，$\sum_k$可以替换为$\sum_{k:\ k\neq j}$。由于在 BN 均衡中，代理人 i的行动 A^i 以概率 1 是最佳响应，因此根据（11）和（8），我们可以推断，以概率 1，

$$\boxed{2cA_j^i = \sum_k (U_j^i - U_k^i) E_i(Q_j Q_k).} \tag{12}$$

步骤 2. 边际关键性趋于零。
刻画贝叶斯-纳什均衡的核心数学难点在于，类型实现值不同的代理人具有不同的条件期望 $E_i(Q_jQ_k)$。我们将这些称为边际关键性。在本小节中，我们将证明，随着样本量 $n \to \infty$，边际关键性会变得任意小。首先，引理 2 给出了关键性的条件期望与无条件期望之比的界。

引理 2. 在任何 BN 均衡中，对每一对不同的备选项 j, k，以概率 1，

$$e^{-16/\sqrt{c}} \leq \frac{E_i(Q_j Q_k)}{E(Q_j Q_k)} \leq e^{16/\sqrt{c}}. \tag{13}$$

等价地，对于任意投票向量 $a \in \mathcal{A}$ 以及任意一对备选项 j, k，

$$e^{-16/\sqrt{c}} \leq \frac{r_{j,k}(a)}{E(Q_j Q_k)} \leq e^{16/\sqrt{c}}. \tag{14}$$

无条件期望 $E(Q_jQ_k)$ 由投票总数的随机向量 $(V_1, V_2, ..., V_n)$ 决定。每个投票总数 V_j 都是一个随机变量，由 n 个相互独立的个体行动 $(A_j^1, A_j^2, ...A_j^n)$ 相加构成。由于我们考虑的是对称均衡，因此在事前（即尚未以个体类型为条件时），个体行动 A_j^i 是随机变量，并且在 $i \in 1, ..., n$ 之间同分布。

根据中心极限定理，每个投票总数 V_j 的分布都会收敛于正态分布。

对于每个总体规模 $n \in \mathbb{N}$，我们使用 Berry-Esseen 定理（见附录）来界定中心极限定理中的误差大小。根据 Berry-Esseen 定理的直接推论，对于每个 n，我们可以得到独立同分布随机变量之和（例如我们的无条件选票总数）取值落在给定区间 $J \in \mathbb{R}$ 内的概率界（引理 8，亦见附录）。这些界会随着独立同分布随机变量的方差而收紧；在引理 9（同样见附录）中，我们证明了该方差的一个下界，并由此得到选票总数之和落在给定区间内的概率上界。接下来，我们就可以给出本小节的关键结果。

命题 2. 存在一个实数序列 $\varepsilon_n \to 0$，使得对于任意样本量 $n \geq 1$、任意贝叶斯-纳什均衡，以及任意一对不同的备选项 j、k，

$$E(Q_j Q_k) \leq \varepsilon_n. \tag{15}$$

我们已经证明，当总体规模足够大时，无条件边际关键性会趋于零。由于条件关键性与无条件边际关键性成比例地有界（引理 2），因此条件关键性也会趋于零。边际关键性趋于零时，采取非零行动的边际收益也会趋于零，因此根据一阶条件（公式 11），所有个体行动都会趋于零。接下来还需证明，这些个体行动会按照每位代理人 i 对每项行动 j 的价值成比例地趋于零；该价值由代理人 i 的类型的实现值 u_j^i 给出。

步骤 3. 边际关键性之比趋于 1。
我们在上文指出，具有不同类型实现值的代理人，其边际关键性也不同。本小节将证明这些边际关键性会趋于一致。首先，我们从命题 2 推导出两个结果：一个唯一备选项渐近地获得几乎全部被选中的概率（推论 3），并且

由于最佳响应是唯一的，均衡是纯策略均衡（命题 3）。

推论 3。存在一个实数序列 $\varepsilon_n \downarrow 0$，使得对于任意样本量 n 及每个 BN 均衡，

$$P\left\{\max_j Q_j \leq 1-\varepsilon_n\right\} \leq \varepsilon_n.$$

我们将以趋近于 1 的概率被选中的备选项称为“最可能的获胜选项”。最终，我们希望证明，以趋近于 1 的概率，这个最可能的获胜选项就是功利主义最优解。只需证明最可能的获胜选项是备选项 1。因此，在本证明接下来的部分中，我们将证明最可能的获胜选项确实是备选项 1。现在，我们先证明该均衡是纯策略均衡。

命题 3。对于任意 $c>0$，存在 $n_c \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq n_c$，在任何对称贝叶斯纳什均衡中，对于任意类型 $u \in [0,1]^m$，都只有一个最佳响应 $\alpha(u) \in \mathcal{A}$。

现在我们来到证明中的关键步骤：证明不同类型（以及不同代理人）之间边际关键性的比率趋近于 1。如果不同类型的边际关键性相等（或者代理人在行为上误以为它们相等），我们就可以采用一种类似于 Lalley 和 Weyl（2019）或 Goeree 和 Zhang（2017）的启发式推理：当边际关键性恒定且相等时，提高 a_j^i 的边际收益关于 a_j^i 为常数，但关于 u_j^i 呈线性，而边际成本关于 a_j^i 呈线性，因此令边际收益等于边际成本，可得关于 u_j^i 呈线性的最优行动。

然而，边际关键性并非在各种行动中保持不变：如果在其他条件相同的情况下，对于一对代理人 h 和 i, $a_j^h > a_j^i$，那么代理人 i对 V_j 的期望严格高于代理人 j，因此，他们对选择 j 的概率 Q_j 的期望，以及对 j 的额外边际支持是否具有关键性的预期也各不相同。由此可见，只要采取的行动不同，类型不同的代理人面临的激励也不同。一个重要的直觉是，随着边际关键性和

行动渐近地趋于消失（命题 2），边际激励的差异也随之消失，因此，随着不同类型之间的边际行动趋于一致，不同类型之间的边际关键性也会趋于一致。

我们在命题4中将这一关键收敛结果形式化。

命题4. 存在一个实数序列 $\delta_n \downarrow 0$，使得对于任意样本量 n、任意 BN 均衡以及每一对 j、k 不同的备选项，

$$(1+\delta_n)^{-1} \leq \frac{E_i(Q_jQ_k)}{E(Q_jQ_k)} \leq (1+\delta_n) \tag{16}$$

几乎必然地，对于所有代理人 $i = 1$，2，$\cdots$，n。

步骤 4. 近似均衡行动。
命题4意味着，至少对于较大的样本量 n，不同代理人的边际关键性必须极为接近。因此，根据一阶条件 (12)，选票 A_j^i 几乎是价值 U^i的线性函数：具体而言，

$$2cA_j^i \approx \sum_{k\,:\,k\neq j} (U_j^i - U_k^i)E(Q_jQ_k).$$

T以下引理量化了这一近似中的误差大小。

引理 4. 设 δ_n 为命题4给出的实数序列。那么，对于每个代理人 i 和每个备选项 $j \in [m]$，

$$2cA_j^i \leq (1+\delta_n) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U_j^i - U_k^i)E(Q_jQ_k) + 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} E(Q_jQ_k), \tag{17}$$

$$2cA_j^i \geq (1+\delta_n)^{-1} \sum_{k\,:\,k\neq j} (U_j^i - U_k^i)E(Q_jQ_k) - 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} E(Q_jQ_k). \tag{18}$$

根据引理 4 给出的近似个体行动，我们得到推论 10（见附录）：每个备选项 j的近似总体支持度为 V_j。推论 10 中总体支持度的上下界可以表示为

一种更简洁的形式。为此，定义

$$\Delta := \min_{1\le j\le m-1}(\mu_j - \mu_{j+1}) > 0,$$

并且回想一下，根据假设1，均值 μ_j 严格有序。因此， $\Delta > 0$。由此，我们得到以下界。

推论 5。设 $\delta_n \downarrow 0$ 为命题4给出的常数。那么，对于任意$\varepsilon \le \Delta/4$、任意样本量 n 以及任意 BN 均衡，投票总数 V_j 满足以下不等式

$$\begin{aligned} 2cV_j/n \le (1-3\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \qquad (19)\\ +(1+5\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=j+1}^{m}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \quad and \\ 2cV_j/n \ge (1+5\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_j-\mu_k-2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \qquad (20)\\ +(1-3\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=j+1}^{m}(\mu_j-\mu_k-2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \end{aligned}$$

除概率至多为 $2m\exp\{-2n\varepsilon^2\}$ 的事件外。

步骤5。所有均衡的渐近性质。
注意，对于备选项 $j=1$，表达式 20 中的下界严格为正；而对于 $j=m$，表达式 19 中的上界为负。

推论 6。对于任意 $\varepsilon < \Delta/4$，对于所有充分大的样本量 n，在任意 BN 均衡中，

$$P\{V_m < 0 < V_1\} \ge 1 - 2me^{-2\varepsilon^2 n}. \qquad (21)$$

注：令 $\varepsilon = \Delta/8$ ，我们得到如下界限

$$P\{V_m < 0 < V_1\} \ge 1 - 2me^{-\Delta^2 n/32}. \qquad (22)$$

由此可知，备选项 1 渐近地获得了比备选项m更多的支持。我们还可以在此阶段证明，尽管关键性趋于零，但其趋于零的速度较慢，具体如下。

推论7. 存在常数 $\theta_n \to \infty$ ，使得对于每个样本量 n 和任意 BN 均衡，

$$n \max_j \max_{k:k\neq j} E(Q_j Q_k) \geq \theta_n. \tag{23}$$

我们反复运用推论 5 中关于支持的界、备选项 1 的支持严格大于 m 的结论（推论 6），以及推论7中的慢收敛结果，完成证明的最后几个步骤。在这些步骤中，我们证明了：在规模足够大的集体实体中，备选项 1 被选中的概率可以任意接近 1；首先考虑有 $m = 2$ 个备选项这一较为容易的情形，然后是有 $m = 3$ 个备选项这一更简单的情形，最后是有 $m > 3$ 个备选项这一更为复杂的情形。

在本节余下部分，令

- $\delta_n \downarrow 0$ 为推论 5 中的常数，
- $\varepsilon_n \downarrow 0$ 为推论 3 中的常数，
- $\theta_n \uparrow \infty$ 为推论7中的常数，并令
- $\Delta = \min_{j\leq m-1}(\mu_j - \mu_{j+1})$。

应用推论5和推论6时，我们总是取 $\varepsilon = \Delta/8$；对于这一选择，这两个推论中的例外事件的概率均不超过 $2me^{-\Delta^2 n/32}$，且对于任意一对 $j < k$ 备选项，

$$\begin{aligned}(\mu_j - \mu_k + 2\varepsilon) &\leq 1 + \Delta/4 \quad \text{and} \\ (\mu_j - \mu_k - 2\varepsilon) &\geq 3\Delta/4.\end{aligned}$$

步骤 6a. 当备选项数量为 $m = 2$ 时定理1的证明。
由于选择概率 Q_k 与投票总数e^{V_k}的指数函数成正比，推论 6 表明， $Q_1 > Q_2$ 除非发生概率不超过 4 exp $\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件。根据推论 3， max(Q_1, Q_2) 以概率

至少为 $1-\varepsilon_n$；因此，

$$P\left\{Q_1 \leq 1-\varepsilon_n\right\} \leq 4e^{-\Delta^2 n/32} + \varepsilon_n \longrightarrow 0.$$

因此，关系（5）在 $\beta_n = \varepsilon_n + 4e^{-\Delta^2 n/32}$ 下成立。这就证明了备选项数为 $m=2$ 时的定理 1。 □

步骤 6b. 备选项数为 $m=3$ 时定理1的证明。
推论 3 表明，以至少 $1-\varepsilon_n$ 的概率，$\max_j Q_j \geq 1-\varepsilon_n$；推论 6 表明 $Q_1 > Q_3$，因此 $Q_3 \neq \max_j Q_j$，其概率至少为 $1-6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$。因此，如果关系（5）不成立，那么就存在某个 $\varrho > 0$，使得对于无穷多个 n，在某个 BN 均衡中，

$$P\left\{Q_2 \geq 1-\varepsilon_n\right\} \geq \varrho. \tag{24}$$

我们要证明这不可能成立。

第一步是证明，对于较大的 n，$E(Q_2Q_3)$ 必须远小于$E(Q_2Q_1)$。根据推论7，对于任意样本量 n 和每个 BN 均衡，

$$n\max(E(Q_1Q_2), E(Q_1Q_3), E(Q_2Q_3)) \geq \theta_n.$$

由推论 6 可知 $V_1 > 0 > V_3$，因此 $Q_1 > Q_3$，除非发生概率为 $P(B) \leq 6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件 B；因此，

$$\begin{aligned} E(Q_2Q_3) &= E(Q_2Q_3\mathbf{1}_{B^c}) + E(Q_2Q_3\mathbf{1}_B) \\ &\leq E(Q_1Q_3\mathbf{1}_B) + P(B) \\ &\leq E(Q_1Q_3) + 6\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}. \end{aligned}$$

这意味着，对于足够大的 n，$nE(Q_1Q_2)$ 或 $nE(Q_1Q_3)$ 必须大于 $\theta_n/2$，因此 $nE(Q_1(1-Q_1)) \geq \theta_n/2$。由下界（20）可知，对于

所有足够大的 n,

$$\begin{aligned} 2cV_1 &\geq n(1-3\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{j=2,3}(\mu_1-\mu_j-2\varepsilon)E(Q_1Q_j) \\ &\geq n(1-3\Delta^{-1}\delta_n)(\Delta/2)E(Q_1(1-Q_1)) \\ &\geq \Delta\theta_n/8 \end{aligned}$$

除非发生概率为 $\leq 6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件 B'。（这里我们利用了这样一个事实：当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n\to 0$。）现在，除非发生事件 $B=\{V_1\leq 0\}\cup\{V_3\geq 0\}$ $V_3<0$，其概率至多为 $6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$；因此，除非发生事件 $B''\coloneqq B\cup B'$，其概率至多为 $12\exp\{-\Delta^2 n/32\}$,

$$\frac{Q_1}{Q_3}=\frac{e^{V_1}}{e^{V_3}}>\exp\{\Delta\theta_n/(16c)\}.$$

因此,

$$\begin{aligned} E(Q_2Q_3\mathbf{1}_{B''})\leq P(B'')\leq 12\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\} \quad \text{and} \\ E(Q_2Q_3\mathbf{1}_{(B''^c)}\leq E(Q_2Q_1\mathbf{1}_{(B''^c)}\times\exp\{-\Delta\theta_n/(16c)\}, \end{aligned}$$

由此可得

$$E(Q_2Q_3)\leq E(Q_2Q_1)\times\exp\{-\Delta\theta_n/(16c)\}+12\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}. \tag{25}$$

接下来，我们结合不等式 (25) 和上界 (19)，证明投票总数 V_2 必定有常数 $\beta_n\to 0$ 作为上界；除非发生概率为 $\leq 6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件，至少在n充分大的情况下如此。根据推论 6，由于 $P\{V_1\leq 0\}\leq 6\exp\{-\Delta^2 n/32\}$，便可得出比值 Q_2/Q_1 有上界 e^{β_n}；但这一结论仅在某个事件不发生时成立，该事件的概率为 $\leq 12\exp\{-\Delta^2 n/32\}$，这与假设 (24) 矛盾。

The 详情如下：根据（19）和（25），除非发生概率为 n o

大于 6 exp $\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件,

$$\begin{aligned} 2cV_2 \leq & -n(1-3\Delta^{-1}\delta_n)(\mu_1-\mu_2-\Delta/4)E(Q_1Q_2) \\ & +n(1+5\Delta^{-1}\delta_n)(\mu_2-\mu_3+\Delta/4)E(Q_1Q_2)e^{-\Delta\theta_n/(16c)} \\ & +n(1+5\Delta^{-1}\delta_n)(\mu_2-\mu_3+\Delta/4)(12\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}). \end{aligned}$$

由于 $\theta_n \to \infty$ 和 $\delta_n \downarrow 0$，对于所有足够大的 n，前两项之和为负。因此，对于足够大的 n，我们有

$$V_2 \leq n \times 2 \times (1+\Delta/4) \times 12\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}/(2c) \longrightarrow 0$$

除一个概率为 $\leq 6e^{-\Delta^2 n/32}$的事件外。根据推论 6， $V_1 > 0$ 除一个概率为 ≤ 6 exp $\{-\Delta^2 n/32\}$的事件外均成立，因此对于所有足够大的 n，我们有 $V_2 - V_1 \leq V_2 \leq 1$，从而 $Q_2/Q_1 \leq e^1$，除一个概率为 $\leq 12e^{-\Delta^2 n/32}$的事件外。因此，当 n 足够大时，(24) 不可能成立。这就证明了 $m = 3$情形下的定理1。

□

步骤6c. $m \geq 3$ 个备选项时定理1的证明。
在 $m = 3$ 的情形下，通过比较期望 $E(Q_1Q_2)$ 和 $E(Q_2Q_3)$，我们能够直接证明，除概率呈指数级小的一个事件外， V_1 有一个较大的常数下界（$\Delta\theta_n/16c$）。当 $m \geq 4$时，这一论证不再成立。不过，可以证明期望 $nE(Q_1Q_j)$ 不可能全部保持有界，证明如下。

命题 5。存在一个序列 $\xi_n \uparrow \infty$ ，使得对于每个样本量 n，在每个 BN 均衡中，

$$\max_{j\geq 2} nE(Q_1Q_j) \geq \xi_n \tag{26}$$

命题 5 强化了推论7。推论7指出，支持某个备选项的边际关键性缓慢趋于零；命题 5 则意味着，特别是支持备选项 1 的边际关键性缓慢趋于零。其证明较为繁琐，我们将其放在附录中。在确定备选项 1 的边际关键性缓慢趋于零之后，我们关于三个或更多备选项的定理1证明中倒数第二步是

证明对其他备选项的支持渐近有界。

命题 6. 对所有充分大的 n，在任何 BN 均衡中，

$$P\left\{\max_{j\geq 2} V_j > 1\right\} \leq 2m^2 \exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}. \tag{27}$$

由于在人口规模较大时，被选中的概率几乎全部集中在一个备选项上（推论 3），因此直观上，这个几乎必然会被选中的备选项，就是不受这些较低上界限制的备选项，即备选项一。这是证明的最后一步。

定理1对 $m \geq 3$ 个备选项的证明完成。根据推论 6，除概率为 $\leq 2m\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件外，$V_1 > 0$；根据命题 6，只要 n 充分大，除概率为 $\leq 2m^2\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件外，$\max_{j\geq 2} V_j \leq 1$。因此，对所有充分大的 n，

$$P\left\{\max_{j\geq 2} \frac{Q_j}{Q_1} \geq e^1\right\} \leq 2m(m+1)\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}.$$

但根据推论 3，

$$P\left\{\max_{1\leq j\leq m} Q_j \leq 1-\varepsilon_n\right\} \leq \varepsilon_n;$$

因此，对于所有足够大的 n，使得 $(1-\varepsilon_n)/\varepsilon_n > e^1$，

$$\begin{aligned} P\{Q_1 \leq 1-\varepsilon_n\} &\leq P\left\{\max_{1\leq j\leq m} Q_j \leq 1-\varepsilon_n\right\} + P\left\{\max_{j\geq 2} Q_j \geq 1-\varepsilon_n\right\} \\ &\leq \varepsilon_n + P\left\{\max_{j\geq 2}(Q_j/Q_1) > e^1\right\} \\ &\leq \varepsilon_n + 2m(m+1)\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}. \end{aligned}$$

□

4 讨论

我们已经证明，在集体多项选择问题中，随着人口规模增大，二次转移机制（QTM）以趋近于 1 的概率选出使功利主义福利最大化的选项。在 QTM 下，代理人面对一份二次成本菜单，表达对每个备选项的支持或反对都需要付出相应成本。在这些成本给定的情况下，在其他条件不变时，代理人对某个备选项的支持程度会随该备选项对其价值的增加而提高。个体表达支持或反对的程度会随着人口规模增大而减小，但减小得较为缓慢，因此，对每个备选项的总体支持或反对程度会趋于无穷大。因此，渐近而言，任何个体偏离到任何可负担行动都完全不起作用；也就是说，即使某个代理人（或有限个代理人）任意偏离均衡行动，QTM 仍会选出功利主义最优选项。

我们通过一个数值示例说明，即使群体规模相对较小，也可能收敛到理想结果。

示例1。考虑一个由 $n = 300$ 名代理人组成的群体，他们需要在备选项1、2、3之间进行集体选择。每名代理人的类型（对三个备选项的价值向量）以概率 $p > \frac{1}{2}$为（3，2，0），以概率 $1-p$为（0，2，3）。如果两种类型的代理人各有101至199名，备选项2就是唯一的功利主义选择；当群体预期几乎平分（即 $p \to \frac{1}{2}$）时，这种情况发生的概率为1（精确到小数点后八位）。在这种情况下，在QTM机制下，均衡中选择备选项2的概率大于96%。相比之下，在采用多数制且全员投票的投票中，如果每名代理人都诚实地投票支持自己偏好的备选项，那么在均衡中选择备选项2的概率为0。

现在，我们着手探究我们的结果在不同信息环境下的稳健性。

首先，在本文的早期版本中，我们考虑了一个完全信息环境，其中代理人对备选项的价值矩阵 u是共同

知识，在代理人之间为共同知识（但机制仍然不知道），且解概念为纳什均衡。在这种环境下，我们的结果依然稳健：随着人口规模增大，QTM 选出功利主义最优解的概率趋近于 1。[16]

其次，我们转而关注这样一个假设：投票者知道类型生成过程。在关于私人价值情境下不同决策程序（包括标准投票规则（例如 Palfrey 1989、Ledyard and Palfrey 2002、Myerson 2002、Bouton 2013）、允许在议题或投票者之间转移选票的制度（例如 Casella 2005、Casella et al. 2012），以及参与需要付出成本的选举（例如 B¨orgers 2004、Herrera et al. 2014、Krishna and Morgan 2015、Gr¨uner and Tr¨oger 2019））的福利后果的文献中，这一假设十分常见。因此，我们的论文在这方面也不例外。不过，这一假设并非无关紧要（参见 Wilson 1987），我们希望了解它对研究结果造成的局限。

假设代理人不仅不知道备选项上的价值矩阵 u，还不了解这些价值所来自的分布 F；相反，他们只对该分布持有先验信念，而且不同代理人的信念可能有所不同。在最一般的环境中，如果关于偏好分布的信念与实际偏好相关，我们的结果便不再成立：如果偏好某个集体次优备选方案的代理人（错误地）认为自己的关键性高于实际情况，他们就会采取力度更大的行动来支持自己偏好的备选项；如果这样的人足够多，且他们的信念偏差足够大，就可能推翻有效选择。[17]

[16]支持这一主张的严谨形式化论证可向作者索取。Palfrey 和 Rosenthal（1985年）认为，完全信息环境更适合用于委员会集体选择的建模，而不完全信息则更适合分析大型群体中的决策。[17]类型相关时也会出现类似挑战：正如集体选择问题中常见的情况，针对独立抽取类型得出的最优性结果，在类型相关时并不稳健（参见 Bognar、B¨orgers 和 Moritz Meyer-ter-Vehn 2015年；或 Drexl and Kleiner 2018）。

另一方面，如果偏好与对偏好分布的信念不相关，那么我们的最优性结果在某些推广下仍然稳健。例如，假设价值在各备选项上的真实分布来自 F，而且确有一部分代理人相信该分布 F 是共同知识，但群体中任意一部分代理人却认为，分布实际上是 G，且这一点是共同知识。无论持有错误信念的代理人有多少，如果只有两个备选项（$m = 2$），或者无论备选项有多少，只要根据分布 F 和 G，期望上最优的备选项相同，那么有效备选项就会以渐近概率 1 被选出。如果 $m = 2$，那么无论代理人对偏好分布持有什么信念，他们的行动都会收敛于一个线性函数，该函数取决于他们对备选项 1 的净价值减去备选项 2 的价值。因此，对真实分布进行积分后，无论是信念正确的子群体，还是信念错误的子群体，对最优备选项的净支持度为正，对次优备选项的净支持度为负。此外，对于任意 m，如果备选项 1 在分布 F 和 G 下的期望价值都是最优的，那么持有错误信念的子群体会预期选出备选项 1；若他们成为关键代理人，他们会认为自己的关键性在于选择备选项 1 还是其他选项；总体而言，他们偏好备选项 1。

在某些存在多个备选项的环境中，即使代理人（错误地）认为某个次优备选项实际上是最优备选项，集体实体也可能做出最优选择。假设根据真实分布 F，期望值向量为 $(\alpha, \beta, \mu_3, ..., \mu_m)$，但群体中有一定比例的人相信，分布实际上为 G 是共同知识，其期望值向量为 $(\beta, \alpha, \mu_3, ..., \mu_m)$，其中 $\alpha > \beta$ 且 $\beta - \mu_j > \alpha - \beta$，对任何 $j \in \{3, 4, ..., m\}$. 都成立。无论持有错误信念的子群体规模多大，也无论均衡序列如何，只要备选项 1 和 2 获得的支持分别位居第一和第二，真正的最优备选项 1 就会以趋近于 1 的概率被选中。其直觉是，持有错误信念的代理人预期备选项 2 会获胜，但他们认为，如果自己的行动起到关键作用，那么最有可能是在备选项 1 和 2 之间起到关键作用；并且在这一事件发生的条件下，按照真实分布进行汇总后，他们总体上更偏好备选项 1，因此他们总体上会投票支持 F

为 1.[18]净投票

我们的最优性结果依赖于机制设计与实施的理论文献中常见的若干进一步简化假设，包括：代理人的理性、代理人在不存在合谋时进行个体优化，以及拟线性偏好（但不限于此）。我们特别讨论准线性。

我们假设每个代理人的类型或价值 u^i 是一个向量，用以刻画代理人 i对（财富，备选项）组合及这些组合的彩票的序数偏好；因此，对于任意两组（财富，备选项）组合（w，j）和（w'，k），代理人 i 偏好（w，j）而非（w'，k），当且仅当

$$w + u^i_j \geq w'^i_k \tag{28}$$

并且，对于分别生成随机（财富，所选备选项）向量（W_p，C_p）和（W_q，C_q）的一对彩票 p、q，如果 $W_p + U^i_{C_p}$的期望值大于 $W_q + U^i_{C_q}$的期望值，代理人 i 就偏好彩票 p 而非彩票 q。财富上的线性意味着我们假设代理人是风险中性的。在这一风险中性限制下，价值 u^i_j 可以解释为代理人 i选择备选项 j 的“支付意愿”；这种支付意愿不随代理人 i的财富变化。由于不同代理人的支付意愿可以相互比较，在这个纯粹序数的环境中，我们可以将功利主义理解为一种规范性原则，即选择总支付意愿最大的备选项。

然而，在大多数相关应用中，代理人都是风险厌恶的，而且随着财富增加，他们为选中某个备选项而愿意支付的金额也会增加。考虑这样一个环境，其中代理人风险厌恶、追求期望效用最大化，且偏好具有可分性。

[18]事实上，回到示例1，并假设真实分布赋予两种类型的概率几乎相等（即 $p \to \frac{1}{2}$），而所有代理人都错误地认为 p 远大于 $_{1\,2}$。如果代理人相信 $p > \frac{2}{3}$，那么他们也会认为备选项3是有效的。然而，我们通过数值计算发现，即使存在这样的错误信念，真正的最优备选项2仍然是最可能的获胜选项（例如，当 $n = 300$ 时，真正的最优备选项的获胜概率仍高于57%；即使在 $p \to \frac{1}{2}$，但代理人错误地认为 p 接近1的极端情况下也是如此）。

对财富和所选备选项的偏好，以及对（财富，所选备选项）组合的彩票的偏好，满足以下条件：存在一个定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的凹实值函数 g，使得当且仅当 $g(W_p) + U^i_{C_p}$ 的期望值大于 $g(W_q) + U^i_{C_q}$.[19] 的期望值时，i 才偏好能生成随机（财富，所选备选项）向量 (W_p, C_p) 的彩票 p，而非能生成随机向量 (W_q, C_q) 的彩票 q。

我们的主要结果（定理1）适用于这种风险厌恶型代理人环境，但必须作如下重新解释。扩充我们的基准环境，将财富 w^i 作为原始变量赋予每位代理人 i，此外还包括其价值向量 u^i；并假设 w 单位的财富为代理人带来 $g(w)$单位的效用，其中 g 严格递增、凹且可微。由于个体行动收敛至零（这是命题 2的直接推论），在所有均衡中，且无论其价值向量的实现值如何，代理人 i的最终财富都会收敛至 w^i。若代理人 i 使用 g的局部线性近似来估计财富接近 w^i 时的效用，该近似由 $g(w) \approx g(w^i) + g'(w^i)(w - w^i)$给出，那么，当且仅当以下条件成立时，代理人 i 更偏好（财富，备选项）对 (w, j)，而非 (w', j')：

$$g'(w^i)(w - w^i) + u^i_j \geq g'(w^i)(w' - w^i) + u^i_{j'},$$

或者，等价地，

$$w + u^i_j / g'(w^i) \geq w' + u^i_{j'} / g'(w^i), \tag{29}$$

偏好可由不等式（29）表示的一群代理人，符合我们的原始框架，其价值类型为 $\tilde{u}^i := u^i / g'(w^i)$。这些价值$\tilde{u}^i$ 仍表示支付意愿，但现在原始价值 u^i 会受到财富的影响，因此财富更多 w^i、财富边际效用更低 $g'(w^i)$的代理人，对备选项 j的支付意愿更高 $\tilde{u}^i_j$。

[19] Kazumura、Mishra 和 Serizawa（2020年）研究了这一环境中的占优策略激励相容性，并综述了关于非准线性机制设计的新兴文献。Eguia 和 Xefteris（2021年）分析了代理人对财富的效用为凹函数时，二元情境下的买票机制。另请参见 Casella 和 Mace（2021年）。

因此，定理1适用，并证实：如果人口规模足够大，QTM 以任意接近于 1 的概率选择总边际支付意愿最大的备选项。QTM 选出的备选项是唯一的帕累托最优选择：对于任何其他选择，都存在一组财富转移，使得执行这些转移并选择 QTM 选出的备选项后，每位代理人的境况都会变好。

另一方面，风险厌恶情形下这一结果的规范性吸引力有所减弱。首先，由于 QTM 汇总的是（边际）支付意愿，而风险厌恶型代理人的支付意愿取决于财富，因此，在存在风险厌恶的环境中，QTM机制违反了 Walzer（1983年）提出的经济权力与政治权力领域分离的规范原则。根据这一原则，一个领域中的权力分配不应影响另一个领域中的权力分配。具体而言，由于支付意愿会随财富增加而上升，富裕代理人的偏好在偏好汇总中会被过度加权，这引发了对公平的担忧。与此相关的是，准线性条件下实现的功利主义最优解（即使个人估值总和最大化的备选项），在风险厌恶情形下并无保证：使总边际支付意愿最大化的备选项，并不总是与使价值总和最大化的备选项一致。

基于这些原因，我们将定理1视为一项积极成果，它有助于增进我们对带有转移支付的集体选择机制的理解，而不应将其视为在实际应用中设计选举制度或立法程序时提出规范性建议的依据。

参考文献

[1] Aumman, Robert. “无限扩展式博弈中的混合策略与行为策略。”《博弈论进展》，普林斯顿大学出版社（1964年）：627–650。

[2] Arrow, Kenneth J.《不完全信息下的产权学说与需求揭示》

《经济学与人类福利》（1979年）：23–39。[3]Bergemann, Dirk, and Stephen Morris.《稳健机制设计》。《计量经济学》73.6（2005年）：1771–1813。[4] Bognar, Katalin, Tilman B¨orgers, and Moritz Meyer-ter-Vehn。《有成本投票时的最优投票程序》。《经济理论杂志》159（2015年）：1056–1073。[5] B¨orgers, Tilman.《有成本投票》。《美国经济评论》94.1（2004年）：57–66。[6] B¨orgers, Tilman.《机制设计理论导论》。牛津大学出版社，美国，（2015年）。[7] Bouton, Laurent.《两轮选举中的策略性投票理论》。《美国经济评论》103.4（2013年）：1248–88。[8] Brandt, Felix, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, J´erˆome Lang, and Ariel D. Pro-caccia, 编。2016年。《计算社会选择手册》。剑桥大学出版社。[9] Brˆanzei, Simina, Ioannis Caragiannis, Jamie Morgenstern, and Ariel D. Procac-cia。2013年。《自利投票有多糟糕？》第二十七届AAAI人工智能会议。[10]Casella, Alessandra.《可储存选票》。《博弈与经济行为》51.2（2005年）：391–419。[11] Casella, Alessandra, Aniol Llorente-Saguer, and Thomas R. Palfrey.《选票市场中的竞争均衡》。《政治经济学杂志》120. 4（2012年）：593–658。[12] Casella Alessandra, and Antonin Mace.《选票交易能改善社会福利吗？》。《经济学年度评论》13（2021年）：57–86。

[13] Casella, Alessandra, 和 Luis S´anchez。“可储存选票与二次投票：一项关于加利福尼亚州四项提案的实验。”《政治学杂志》84.1（2022）：607–612。[14] Clarke, Edward H. “公共物品的多部分定价。”《公共选择》11.1（1971）：17–33。[15] Conitzer, Vincent, Tuomas Sandholm, 和 J´erˆome Lang。“候选人较少的选举在何时难以操纵？”《美国计算机学会会刊》54.3（2007）：14。[16] Dahl, Robert Alan.《民主及其批评者》。耶鲁大学出版社（1989）。[17] d’Aspremont, Claude, 和 Louis-Andre Gerard-Varet。“激励与不完-全信息。”《公共经济学杂志》11.1（1979）：25–45。[18] Drexl, Moritz, 和 Andreas Kleiner。“为何投票？一项福利分析。”《美国经济期刊：微观经济学》10.3（2018）：253–271。[19] Duverger, Maurice。《政党：其在现代国家中的组织与活动》。伦敦：Metbuen（1951）。[20] Eguia, Jon X., 和 Dimitrios Xefteris。“通过买票机制实施。”《美国经济评论》111.9（2021）：2811-28。[21] Faliszewski, Piotr, 和 Ariel D. Procaccia。“人工智能对操纵的战争：我们赢了吗？”《人工智能杂志》31.4（2010）：53–64。[22] Feller, William。《概率论及其应用导论》。第II卷，第二版（1971）。约翰·威立父子公司，纽约—伦敦—悉尼。[23] Glicksberg, Irving L..“Kakutani不动点定理的进一步推广及其在纳什均衡点中的应用。”《美国数学会会刊》3.1（1952），170–174。[24] Goeree, Jacob K., 和 Jingjing Zhang。“一人一标。”《博弈与经济行为》101（2017）：151–171。

[25] Goeree, Jacob K., Philippos Louis, 和 Jingjing Zhang。“通过替代投票机制改进简单多数投票。”《牛津经济与金融研究百科全书》（2020）。[26] Green, Jerry, 和 Jean-Jacques Laffont。“公共物品偏好的揭示。”《公共经济学杂志》8.1（1977）：79–93。[27] Groves, Theodore。“团队中的激励。”《计量经济学》41.4（1973）：617–631。[28] Gr¨uner, Hans Peter, 和 Thomas Tr¨oger。“线性投票规则。”《计量经济学》87.6（2019）：2037–2077。[29] Harsanyi, John C.“由“贝叶斯”参与者进行的不完全信息博弈，第一部分：基本模型。”《管理科学》14.3（1967）：159–182。[30] Harsanyi, John C.“由“贝叶斯”参与者进行的不完全信息博弈，第二部分：贝叶斯均衡点。”《管理科学》14.5（1968）：320–334。[31] Herrera, Helios, Massimo Morelli, 和 Thomas Palfrey。“投票率与权力分享。”《经济学杂志》124.574（2014）：F131–F162。[32] Hoeffding, Wassily。“有界随机变量之和的概率不等式。”《美国统计学会杂志》58（1963）：13–30。[33] Hylland, Aanund, 和 Richard Zeckhauser。“在必须引出偏好的情况下选择公共物品的机制。”肯尼迪政府学院讨论论文，1980年12月。[34] Korolev, V. Yu, 和 Irina G. Shevtsova。“关于Berry–Esseen不等式中绝对常数的上界。”《概率论及其应用》54（2010）：638–658。[35] Kazumura, Tomoya, Debasis Mishra, 和 Shigehiro Serizawa。“无准线性的机制设计。”《理论经济学》15.2（2020）：511–544。

[36] Krishna, Vijay, 和 John Morgan。《克服选举中的意识形态偏见》。《政治经济学杂志》119.2（2011）：183–211。[37] Krishna, Vijay, 和 John Morgan。《多数规则与功利主义福利》。《美国经济学杂志：微观经济学》7.4（2015）：339–75。[38] Lalley, Steven P., 和 E. Glen Weyl。《二次投票：机制设计如何使民主激进化》。《美国经济学会论文集》108（2018）：33–37。[39] Lalley, Steven, 和 E. Glen Weyl。《二次投票的纳什均衡》。SSRN 2488763（2019）可查。[40] Ledyard, John O.《大型双候选人选举的纯理论》。《公共选择》44.1（1984）：7–41。[41] Ledyard, John O., 和 Thomas R. Palfrey。《通过简单投票方案近似有效的公共品机制》。《公共经济学杂志》83.2（2002）：153–171。[42] Martinelli, C´esar, 和 Thomas R. Palfrey。《集体决策博弈中的沟通与信息：实验结果综述》。载于《实验博弈论手册》。爱德华·埃尔加出版社，2020年。[43] Meir, Reshef。《策略性投票》。《人工智能与机器学习综合讲座》13.1（2018）：1–167。[44] Mertens, Jean-Francois, 和 Shmuel Zamir。《不完全信息博弈的贝叶斯分析公式化》。《国际博弈论杂志》14.1（1985）：1–29。[45] Milgrom, Paul R., 和 Robert J. Weber。《不完全信息博弈的分布策略》。《运筹学数学》10.4（1985）：619–632。[46] Myerson, Roger B.《泊松投票博弈中计分规则的比较》。《经济理论杂志》103.1（2002）：219–251。

[47] Palfrey, Thomas R.《杜韦尔热定律的数学证明》（1989）。载于：Ordeshook, P.（编），《政治中的策略选择模型》。安娜堡：密歇根大学出版社，69–91。[48] Palfrey, Thomas R., 和 Howard Rosenthal。《选民参与与策略不确定性》。《美国政治科学评论》79.1（1985）：62–78。[49] Penrose, Lionel S.《多数投票的基本统计学》。《皇家统计学会杂志》109.1（1946）：53–57。[50] Posner, Eric A., 和 E. Glen Weyl。《投票平方：民主政治中的二次投票》。《范德堡法律评论》68（2015）：441。[51] Reny, Philip J.《不连续博弈中纯策略与混合策略纳什均衡的存在性》。《计量经济学》67.5（1999）：1029–1056。[52] Royden, Halsey L.《实分析》，第三版（1988）。麦克米伦出版公司，纽约。[53] Vickrey, William。《反投机、拍卖与竞争性密封投标》。《金融学杂志》16.1（1961）：8–37。[54] Walzer, Michael。《正义诸领域：多元主义与平等的辩护》。基础图书公司，1983年。[55] Weyl, E. Glen。《二次投票的稳健性》。《公共选择》172.1–2（2017）：75–107。[56] Wilson, Robert B.《交易过程的博弈论分析》。《经济理论进展》，计量经济学会第五届世界大会（1987）：33–70。

附录

供在线发表。

命题1的证明。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，考虑我们博弈的事前版本，其中每位参与者都按照 Milgrom 和 Weber（1985年）的定义选择一个分布策略。令 $\mathcal{B}$ 表示 $[0,1]^m \times \mathcal{A}$ 上的 Borel σ-代数。参与者 i 的分布策略是 $\mathcal{B}$ 上的一个概率测度，其在 $[0,1]^m$ 上的边际分布为 $F.$。将此博弈记为 $\Gamma_{MW(n)}$.

接下来，考虑标准形博弈 $\Gamma^2(n)$，其中每个代理人的纯策略集是博弈 $\Gamma_{MW(n)}$ 中所有分布策略构成的集合，且每种此类策略的收益等于相应分布策略的期望收益。正如 Milgrom 和 Weber（1985年）定理1证明（第626页）中所指出的，在赋予弱收敛拓扑后，博弈 $\Gamma_{MW(n)}$ 中的分布策略集是紧的，因此博弈 $\Gamma^2(n)$ 中的纯策略集也是紧的。博弈 $\Gamma^2(n)$ 是对称的，因此满足 Reny（1999年）意义下较弱的拟对称性条件。正如 Milgrom 和 Weber 定理1的证明（第626页）所示，博弈 $\Gamma_{MW(n)}$ 中的收益函数，因而博弈 $\Gamma^2(n)$ 中的收益函数，也是线性的，因此是弱拟凹的，并且也满足 Reny（1999年）意义下较弱的对角拟凹性条件。由于博弈 $\Gamma^2(n)$ 中的收益函数也是连续的，因此它满足上半连续性以及 Reny 的对角收益安全性条件。由此可知，博弈 $\Gamma^2(n)$ 存在一个对称纯纳什均衡（Reny，1999年，推论4.3）。在博弈 $\Gamma^2(n)$ 的这一对称纯策略均衡中选出的分布策略组合，是博弈 $\Gamma_{MW(n)}$ 的分布策略对称均衡。与该分布策略对称均衡相对应的行为策略组合，是我们博弈的一个对称 BN 均衡。

□

引理 2 的证明。根据公式 (8)，对于任意一对备选项 j、k 以及任意 $i \in [n]$,

$$E_i(Q_jQ_j) = r_{j,k}(A^i) \quad \text{where} \quad r_{j,k}(a) = E(Q_j^1(a)Q_k^1(a)).$$

由于随机向量 A^i 独立同分布， $E_i(Q_jQ_k)$ 的分布与 $E_1(Q_jQ_k)$ 的分布相同；因此，只需证明 $i=1$ 下的 (13)。根据假设，向量 A^i 取值于行动空间 $\mathcal{A}$ ：$= [-c^{-1/2}, c^{-1/2}]^m$，因此其各分量的绝对值均不超过 $1/\sqrt{c}$ 。于是，根据随机变量 $Q_j(a)$ 的定义 (7)，对于任意两个可能的投票向量 a、$a^* \in \mathcal{A}$,

$$e^{-16/\sqrt{c}} \leq \frac{Q_j^1(a)Q_k^1(a)}{Q_j^1(a^*)Q_k^1(a^*)} = \frac{r_{j,k}(a)}{r_{j,k}(a^*)} \leq e^{16/\sqrt{c}}.$$

由于 $E(Q_jQ_k) = Er_{j,\ k}(A^1)$，不等式 (14) 得证。 □

Berry-Esseen 定理。存在常数 $C_{BE} \leq 3$，使得若 Y_1、Y_2、$\cdots$ 是满足以下条件的独立同分布随机变量

$$EY_1 = 0, \quad EY_1^2 = \sigma^2 > 0, \quad and\, E|Y_1|^3 = \gamma < \infty, \tag{30}$$

那么对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和所有整数 $n \geq 1$,

$$\left| P\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq C_{BE} \frac{\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}, \tag{31}$$

其中 Φ 表示标准正态累积分布函数。

证明见 Feller (1971) 第 XVI.5 节。现在已知 $C_{BE} \leq .5$：参见 Korolev & Shevtsova (2010)。下面是一个直接推论。

引理 8。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，若 Y_1、Y_2、$\cdots$、Y_n 是方差为 $EY_1^2 = \sigma^2 > 0$、绝对三阶矩为 $E|Y_1|^3 < \infty$ 的独立同分布随机变量，那么对于每个长度为正且有限的区间 $J \subset \mathbb{R}$ $|J|$,

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} Y_i \in J \right\} \leq \frac{|J|}{\sigma\sqrt{2\pi n}} + \frac{\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}. \tag{32}$$

其中 $\gamma := E|Y_1 - EY_1|^3$。

证明。首先，如果 Y_1 具有有限的三阶矩，那么根据詹森不等式，它具有有限的一阶矩和二阶矩，因此均值 $\mu := EY_1$ 是定义良好且有限的。现在，如果 $J = [J_{low}, J_{high}]$ 且 $J^n = [J_{low} - nEY_1, J_{high} + nEY_1]$，我们注意到

$$P\left\{\sum_{i=1}^n Y_i \in J\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i) \in J^n\right\}$$

因为平移后的区间 J^n 与 J 长度相同。此外，鉴于随机变量 $(Y_i - EY_i)$ 与随机变量 Y_i 具有相同的方差和三阶中心矩，任意均值的随机变量的结果可由均值为零的随机变量的结果推出。因此，在证明的其余部分，我们考虑 $EY_1 = 0$。记 $J = (x, y]$ 并设 $\sigma^2 = \text{var}(Y_1)$。根据 Berry-Esseen 定理，并结合上界 $C_{BE} \leq .5$，我们有

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^n Y_i \in J\right\} &\leq \Phi(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}) + 2C_{BE}\gamma/(\sigma^3\sqrt{n}) \\ &\leq \frac{|J|}{\sqrt{2\pi n}\sigma} + \gamma/(\sigma^3\sqrt{n}) \end{aligned}$$

t最后一个不等式成立，是因为标准正态密度的上界为 $1/\sqrt{2\pi}$。 □

在只有数量 $1/\sigma$ 和 γ/σ 的上界可用时，界（32）的用途有限。为了得到这类上界，我们将采用以下基本抽样原理。

引理 9. 设 X 是一个具有有限二阶矩的随机变量，且存在某个实数 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &P\{X \leq -\varepsilon\} \geq p > 0 \quad \textit{and} \\ &P\{X \geq +\varepsilon\} \geq q > 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Then

$$var(X) \geq \varepsilon^2 \min(p, q). \tag{34}$$

证明。若 由于 X 具有有限的二阶矩，其均值 μ 和方差 $\text{var}(X)$ 均 h

定义良好且有限。显然，如果 $\mu \geq 0$，那么 $|\mu - (-\varepsilon)| \geq \varepsilon$；而如果 $\mu \leq 0$，那么 $|\mu - \varepsilon| \geq \varepsilon$。因此，

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \geq \min(p, q).$$

估计式 (34) 现在可由方差的定义 $X := E(X - \mu)^2$ 得出。

□

命题 2 的证明。反证法。假设结论不成立；那么，对于某个 $\varepsilon > 0$ 以及某对备选项 a, b，存在无限大的样本量 n，使得对于某个 BN 均衡，$E(Q_a Q_b) > e^{16/\sqrt{c}}\varepsilon$。因此，根据引理 2，在任何这样的均衡中，每个代理人 i 的边际关键性都为 $E_i(Q_a Q_b) > \varepsilon$。根据假设 2，存在点 $t_a e_a$ 和 $t_b e_b$，使得 F 对 $t_a e_a$ 和 $t_b e_b$ 的每个邻域都赋予正概率。取足够小的 $\varrho > 0$，使得

$$(t_* - 2\varrho)\varepsilon - \varrho \geq \varepsilon t_*/2 \quad \text{where } t_* := \min(t_a, t_b), \tag{35}$$

并选择 $t_a e_a$ 和 $t_b e_b$ 的邻域 G_a, G_b，使得对于每个点 $x \in G_k$，其中 $k = a$ 或 $k = b$，

$$x_k \geq t_k - \varrho \quad \text{and} \quad x_j < \varrho \quad \forall\, j \in [m] \setminus \{k\}. \tag{36}$$

（这里 $[m] = \{1, 2, \cdots, m\}$ 是备选项的集合。）用 $\pi_a > 0$ 和 $\pi_b > 0$ 分别表示抽样分布 F 分配给集合 G_a 和 G_b 的概率。根据均衡的一阶条件（公式 (12)），在代理人 i 的价值为 $U^i \in G_a$ 这一事件发生时，我们有

$$\begin{aligned} 2cA_a^i &= \sum_{k\,:\,k \neq a} (U_a^i - U_k^i) E_i(Q_a Q_k) \\ &\geq (t_a - 2\varrho) \sum_{k\,:\,k \neq a} E_i(Q_a Q_k) \\ &\geq (t_a - 2\varrho) E_i(Q_a Q_b) \geq (t_a - 2\varrho)\varepsilon, \end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned} 2cA_b^i &= \sum_{k\,:\,k\neq b} (U_b^i - U_k^i) E_i(Q_b Q_k) \\ &\leq (2\varrho - t_a)\varepsilon + \varrho \sum_{k\,:\,k\neq b} E_i(Q_a Q_k) \leq -(t_a - 2\varrho)\varepsilon + \varrho, \end{aligned}$$

最后一个不等式是因为 $Q_b \leq 1$ 和 $\sum_{k\in[m]} Q_k = 1$。同样的论证表明，在代理人 i 的价值为 $U^i \in G_b$ 这一事件发生时，我们有

$$2cA_b^i \geq (t_b - 2\varrho)\varepsilon \quad \text{and } 2cA_a^i \leq -(t_b - 2\varrho)\varepsilon + \varrho.$$

因此，由 (35) 可得，

$$\begin{aligned} 2c(A_a^i - A_b^i) &\geq \varepsilon t_* \quad \text{if } U^i \in G_a, \\ 2c(A_a^i - A_b^i) &\leq -\varepsilon t_* \quad \text{if } U^i \in G_b. \end{aligned}$$

引理 9 现在意味着

$$\operatorname{var}(A_a^i - A_b^i) \geq (\varepsilon t_*/2c)^2 \min(\pi_a, \pi_b) := \sigma_*^2. \tag{37}$$

此外，由于任何代理人对任何备选项的赞成票或反对票都不会超过 $1/\sqrt{c}$ 票，绝对三阶中心矩满足

$$E|A_a^i - A_b^i - E(A_a^i - A_b^i)|^3 \leq 8c^{-3/2}. \tag{38}$$

根据我们的基本假设，随机变量 $(A_a^i - A_b^i)_{i\in[n]}$ 相互独立且同分布。因此，它们的和 $V_a - V_b$ 满足引理 8 的结论；结合区间 $J = [-n^{1/3}, n^{1/3}]$ 的界 (37) 和 (38)，可得

$$P\left\{|V_a - V_b| \leq n^{1/3}\right\} \leq \frac{2n^{1/3}}{\sigma_*\sqrt{2\pi n}} + \frac{8c^{-3/2}}{\sigma_*^3\sqrt{n}} \leq Cn^{-1/6}$$

其中 $C = (2/\sigma_*\sqrt{2\pi}) + (8c^{-3/2}/\sigma_*)$。由于在事件 $\left\{|V_a - V_b| \geq n^{1/3}\right\}$ 上，两个比值 Q_a/Q_b 或 Q_b/Q_a 中必有一个至少为 $\exp\left\{n^{1/3}\right\}$，因此可得

$$E(Q_a Q_b) \leq \exp\left\{-n^{1/3}\right\} + Cn^{-1/6}.$$

这与我们的假设相矛盾： $E(Q_a Q_b) > e^{16}\varepsilon$ 对无限大的样本量 n均成立，因此命题的证明得以完成。 □

推论 3 的证明。反设不然；那么对于某个 $\varepsilon > 0$，存在无限大的 n，使得其上存在 BN 均衡，且满足

$$P\left\{\max_j Q_j \leq 1 - \varepsilon\right\} \geq \varepsilon.$$

但是，如果 $\max_j Q_j \leq 1-\varepsilon$，那么对于某一对备选项 j、k，我们将有 $Q_j Q_k \geq (1-\varepsilon)\varepsilon/m$，因此

$$E(Q_j Q_k) \geq \varepsilon^2(1-\varepsilon)/m$$

对无限多个样本量 n 均成立，这与命题 2 矛盾。 □

命题 3 的证明。回顾方程 (11)，代理人 i 的类型为 u^i 时，最佳响应 a 的必要条件是

$$2ca_j = \sum_k (u_j^i - u_k^i) r_{j,k}(a) \tag{39}$$

其中 $r_{j,\,k}(a) = EQ_j^i(a)Q_k^i(a)$。在任何对称 BN 均衡中，对于抽样分布 F 的支持集中的任意 u^i，都至少存在一个解。我们将论证，如果 n 足够大，那么解至多只有一个。反设存在两个不同的解 a、$a^* \in \mathcal{A}$，并设 j 是使 $|a_j - a_j^*|$ 在所有备选项中达到最大值的备选项。于是，根据微积分中值定理，从 a

到 a^* 的线段上存在
一点，使得

$$2c(a_j - a_j^*) = \sum_k (u_j^i - u_k^i)\nabla r_{j,k}(a^{**}) \cdot (a - a^*),$$

其中，∇ 表示梯度算子，$\cdot$ 表示向量的内积。（注：行动空间 $\mathcal{A}$ 是凸集，因此 $a^{**} \in \mathcal{A}$。）根据备选项 j的选择，可得

$$2c\|a - a^*\|/m \le 2c|a_j - a_j^*| \le \sum_k \|\nabla r_{j,k}(a^{**})\|\|a - a^*\| \quad \Longrightarrow$$
$$\sum_k \|\nabla r_{j,k}(a^{**})\| \ge 2c/m, \tag{40}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示向量范数。现在，可以根据定义 (8) 计算 $r_{j,\,k}(a^{**})$ 的偏导数：它们为

$$\frac{\partial r_{j,k}}{\partial a_\ell^{**}} = -2E(Q_j^1(a^{**})Q_k^1(a^{**})Q_\ell^1(a^{**})) \quad \text{for } \ell \ne j,k;$$
$$\frac{\partial r_{j,k}}{\partial a_k^{**}} = E(Q_j^1(a^{**})Q_k^1(a^{**})) - 2E(Q_j^1(a^{**})Q_k^1(a^{**})^2).$$

由于对于每个 j'，$0 < Q_{j'}^1(\cdot) < 1$，因此对于任意三元组 j、k、ℓ，

$$\left|\frac{\partial r_{j,k}}{\partial a_\ell^{**}}\right| \le 3\max_{j',k'} r_{j',k'}(a^{**}) \le 3e^{16/\sqrt{c}} \max_{j',k'} E(Q_{j'}Q_{k'}),$$

后者由引理 2 得出。但命题 2 意味着 $\max_{j',\,k'} E(Q_{j'}Q_{k'}) \le \varepsilon_n \downarrow 0$，因此当 n 足够大时，不等式 (40) 不可能成立。 □

命题4的证明。根据命题 2，平均边际关键性满足$E(Q_jQ_k) \le \varepsilon_n$。因此，根据一阶条件 (12) 和假设1，选票 A^i 满足

$$|A_j^i| \le m\varepsilon_n/(2c) := \varepsilon_n'.$$

按照引理 2 证明中的相同论证可得，对于任意 $a, a^* \in \mathcal{A}$,

$$e^{-16\varepsilon'_n} \leq \frac{E((Q_jQ_k) \mid A^i = a)}{E((Q_jQ_k) \mid A^i = a^*)} \leq e^{16\varepsilon'_n}.$$

因此，不等式 (16) 成立，且 $1 + \delta_n = \exp\{8\varepsilon'_n\}$。 □

引理 4 的证明。结合一阶条件 (12)，利用边际关键性的上界和下界 (16)，我们得到

$$\begin{aligned}
2cA^i_j &\leq (1+\delta_n) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k)_+ E(Q_jQ_k) - (1+\delta_n)^{-1} \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k)_- E(Q_jQ_k) \\
&= (1+\delta_n) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k) E(Q_jQ_k) + ((1+\delta_n) - (1+\delta_n^{-1})) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k)_- E(Q_jQ_k) \\
&\leq (1+\delta_n) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k) E(Q_jQ_k) + 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k)_- E(Q_jQ_k) \\
&\leq (1+\delta_n) \sum_{k\,:\,k\neq j} (U^i_j - U^i_k) E(Q_jQ_k) + 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} E(Q_jQ_k).
\end{aligned}$$

这里，下标 $\pm$ 分别表示正部和负部，定义见第 2 节末尾；我们还用到了以下初等不等式

$$(1+\delta) - (1+\delta)^{-1} \leq 2\delta.$$

这证明了上界 (17)。下界 (18) 可用类似方法证明。

□

我们使用 Hoeffding 不等式（1963 年）来证明下文的推论 10。

Hoeffding 不等式。设 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 是满足 $0 \leq X_i \leq 1$ 的独立随机变量，令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 为它们的和。那么，对于任意实数 $t > 0$,

$$P\{|S_n - ES_n| \geq t\} \leq 2e^{-2t^2/n} \quad \Longrightarrow \tag{41}$$

$$P\{|S_n - ES_n| \geq nt\} \leq 2e^{-2nt^2}. \tag{42}$$

推论 10。设 $\delta_n \downarrow 0$ 为命题4给出的常数。那么，对于任意$\varepsilon > 0$、任意样本量 n 以及任意 BN 均衡，总票数 V_j 满足以下不等式

$$2cV_j/n \le (1+\delta_n)\sum_{k\,:\,k\neq j}(\mu_j - \mu_k + 2\varepsilon)E(Q_jQ_k) + 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} E(Q_jQ_k) \quad and \tag{43}$$

$$2cV_j/n \ge (1+\delta_n)^{-1}\sum_{k\,:\,k\neq j}(\mu_j - \mu_k - 2\varepsilon)E(Q_jQ_k) - 2\delta_n \sum_{k\,:\,k\neq j} E(Q_jQ_k) \tag{44}$$

除非发生概率至多为 $2m\exp\{-2n\varepsilon^2\}$ 的事件。

推论 10 的证明。由不等式 (17)-(18) 和 Hoeffding 不等式可立即得出这一结论；后者保证，对于每个备选项 $j \in [m]$,

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} U_j^i - n\mu_j\right| \ge n\varepsilon\right\} \le 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

□

推论 5 的证明。由于 $\varepsilon \le \Delta/4$，且均值 μ_j 严格递减，我们有

$$\begin{aligned}
&\mu_j - \mu_k - 2\varepsilon \ge \Delta/2 \quad \text{for all } \ j<k \quad \text{and}\\
&\mu_j - \mu_k + 2\varepsilon \le -\Delta/2 \quad \text{for all } \ j>k,
\end{aligned}$$

或等价地

$$\begin{aligned}
&1 \le +2\Delta^{-1}(\mu_j - \mu_k - 2\varepsilon) \quad \text{for all } \ j<k \quad \text{and}\\
&1 \le -2\Delta^{-1}(\mu_j - \mu_k + 2\varepsilon) \quad \text{for all } \ j>k.
\end{aligned}$$

两边同乘 $2\delta_n E(Q_jQ_k)$ 可得

$$2\delta_n E(Q_jQ_k) \le +4\delta_n\Delta^{-1}(\mu_j-\mu_k-2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \quad \text{for all } j<k \quad \text{and}$$
$$2\delta_n E(Q_jQ_k) \le -4\delta_n\Delta^{-1}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k) \quad \text{for all } j>k.$$

将这些上界代入右侧第二个求和中由 k 索引的项 $2\delta_n E(Q_jQ_k)$ 后可知，(43) 的右侧被以下表达式所界定：

$$\begin{aligned}
&(1+\delta_n-4\delta_n\Delta^{-1})\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k)\\
&+(1+\delta_n+4\delta_n\Delta^{-1})\sum_{k=j+1}^{m}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k)\\
\le&(1-3\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k)\\
&+(1+5\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=j+1}^{m}(\mu_j-\mu_k+2\varepsilon)E(Q_jQ_k).
\end{aligned}$$

（这里我们用到了 $0<\Delta\le 1$ 这一事实，由此可推出 $1\le\Delta^{-1}$。）因此，上界 (19) 可由 (43) 得出。类似的计算表明，(20) 中的下界不超过 (44) 中的下界。因此，推论 5 可由推论 10 得出。

□

推论 6 的证明。关于 ε 的假设确保对于每个 $j\le m-1$，$\mu_j-\mu_{j+1}-2\varepsilon>\Delta/2>0$。由于 $\delta_n\downarrow 0$，可知对于所有充分大的 n，不等式 (44) 中索引为 $j=1$ 的右侧将为正；类似地，(43) 中 $j=m$ 对应的右侧将为负。因此，对于这样的 n，在不等式 (43)–(44) 成立这一事件发生时，投票总数 V_1 和 V_m 将满足 $V_m<0<V_1$。 □

推论7的证明。假设不存在满足（23）的序列 $\theta_n\to\infty$。那么对于某个 $\theta<\infty$，存在一个整数序列 $(n_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$，满足

$n_\lambda \uparrow \infty$ 以及这些样本量下的 BN 均衡，使得

$$n_\lambda \max_{k \neq j} E(Q_j Q_k) \leq \theta \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{N}.$$

根据推论 5，可以得出，沿着序列 n_λ，绝对投票总数 $|V_j|$ 以高概率一致有界，即对于某个与 λ无关的 $\kappa < \infty$，

$$|V_j| \leq \kappa \quad \text{for all } j \in [m] \text{and all} \lambda \in \mathbb{N},$$

除去概率至多为 $2m\exp\{-2\varepsilon^2 n_l\}$的事件。然而，由于结果概率 Q_j 与指数化的投票总数 e^{V_j}成正比，这意味着对于每一对 $k \neq j$,

$$\frac{Q_k}{Q_j} \leq e^{2\kappa}$$

除去概率趋于零的事件。这与推论 3 矛盾。 □

命题5的证明依赖于以下引理。

引理 11。对于任意常数 $\kappa < \infty$，如果对于某个样本量 n，在某个 BN 均衡中存在一个备选项 $j \in [m]$，使得

$$\max_{k\,:\,k>j} nE(Q_j Q_k) \leq \kappa, \tag{45}$$

then

$$P\{V_j \geq b\kappa\} \leq 2m \exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\} \quad \textit{where} \tag{46}$$
$$b := (m-1) \sup_{n' \geq 1} (1 + 5\Delta^{-1}\delta_{n'})(1 + \Delta/4)/(2c).$$

证明。这是利用$\varepsilon = \Delta/8$推论 5 的上界（19）即可轻松得出的结果。结合假设（45），可知（仅取上界（19）中的正

项 $k > j$ ）有

$$\begin{aligned} 2cV_j &\le n(1+5\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{k=j+1}^{m}(\mu_j-\mu_k+\Delta/4)E(Q_jQ_k) \\ &\le (1+5\Delta^{-1}\delta_n)(m-1)(1+\Delta/4)\kappa \\ &\le \kappa(m-1)(1+\Delta/4)\sup_{n'\in\mathbb{N}}(1+5\Delta^{-1}\delta_{n'}) \end{aligned}$$

除了概率至多为 $2m\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件之外。（注意，由于$\delta_n \downarrow 0$，上确界是有限的。） □

命题5的证明。反设存在某个常数 $\kappa < \infty$ 和某个样本量序列 $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ ，使得存在 BN 均衡满足

$$\max_{j\ge 2} n_\ell E(Q_1Q_j) \le \kappa. \tag{47}$$

我们将证明这一假设会导致矛盾。假设式 (47) 成立，我们将对 k 作归纳法，证明对于每个 $0 \le k \le m-2$，都存在一个非负常数 $\kappa_k < \infty$，该常数取决于 κ ，但不取决于样本量 n_ℓ 或 BN 均衡，使得对于每个 ℓ,

$$P\left\{\max_{m-k\le j\le m} V_j \ge \kappa_k\right\} \le 2m(k+1)\exp\left\{-\Delta^2 n_\ell/32\right\}. \tag{48}$$

情形 $k = 0$ 可直接由推论 6 得出，其中 $\kappa_0 = 0$ 和 $\varepsilon = \Delta/8$。于是，假设对于某个 $k \le m-2$，式（48）成立；我们将证明存在一个不依赖于 n 或特定 BN 均衡的 $\kappa_{k+1} < \infty$，使得当以 $k+1$替换 k 时，式（48）仍成立。对于任意 $\kappa_* < \infty$，当 $V_1 \ge 0$且 $V_j \le \kappa_*$时，比值 Q_j/Q_1 有界于 e^{κ_*}。因此，对于任意 j'，当 $B = \{V_1 < 0\}$ 且 $B_* = \{V_j > \kappa\}$时，

$$\begin{aligned} E(Q_jQ_{j'}) &= E(Q_jQ_{j'}\mathbf{1}_{B^c}\mathbf{1}_{B_*^c}) + E(Q_jQ_{j'}\mathbf{1}_{B\cup B_*}) \\ &\le E(Q_jQ_{j'}\mathbf{1}_{B^c}\mathbf{1}_{B_*^c}) + P(B) + P(B_*) \\ &\le e^{\kappa_*}E(Q_1Q_{j'}) + P\{V_1<0\} + P\{V_j>\kappa_*\}. \end{aligned} \tag{49}$$

由归纳假设（48）和推论6可知，对于每个 $j \geq m-k$,

$$\begin{aligned} n_\ell E(Q_{m-k-1}Q_j) &\leq n_\ell e^{\kappa_k} E(Q_1 Q_{m-k-1}) + 2n_\ell m(k+2)\exp\left\{-\Delta^2 n_\ell/32\right\} \\ &\leq \kappa e^{\kappa_k} + 2m(k+2)\sup_{n\in\mathbb{N}}(n\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}) \\ &:= C_k. \end{aligned}$$

注意，常数 C_k 不依赖于 n_ℓ ，也不依赖于具体的 BN 均衡。由引理 11 可得

$$P\left\{V_{m-k-1} \geq bC_k\right\} \leq 2m\exp\left\{-\Delta^2 n_\ell/32\right\}.$$

令 $\kappa_{k+1} =$ 为 max(κ_k, bC_k)；则由 (48) 可得,

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{m-k-1\leq j\leq m} V_j \geq \kappa_{k+1}\right\} &\leq P\left\{\max_{m-k\leq j\leq m} V_j \geq \kappa_k\right\} + P\left\{V_{m-k-1} \geq bC_k\right\} \\ &\leq 2m(k+1)\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\} + 2m\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}. \end{aligned}$$

这就完成了归纳法，从而证明 (48) 对所有 $k \leq m-2$ 均成立。结合推论 6，不等式 (48) 与 $k = m-2$ 一起意味着

$$P\left\{V_1 < 0\right\} + P\left\{\max_{j\geq 2} V_j \geq \kappa_{m-2}\right\} \leq 2m^2\exp\left\{-\Delta^2 n_\ell/32\right\}. \tag{50}$$

因此，由 (49) 可知，对于任意备选项 $j \geq 2$ 和 $k \neq j$,

$$n_\ell E(Q_j Q_k) \leq n_\ell e^{\kappa_{m-2}} E(Q_1 Q_k) + 2m^2 n_\ell \exp\left\{-\Delta^2 n_\ell/32\right\}.$$

因此，假设 (47) 意味着对于任意 ℓ

$$n_\ell \max_{j\geq 1}\max_{k\neq j} E(Q_j Q_k) \leq e^{\kappa_{m-2}}\kappa + 2m^2\sup_{n\in\mathbb{N}}(n\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}).$$

这与推论7矛盾。因此，假设（47）不能成立。 □

命题 6 的证明。我们再次采用归纳法，并利用命题 5 的结果，证明对于每个 $0 \le k \le m-2$,

$$P\left\{\max_{m-k\le j\le m} V_j > 1\right\} \le 2m(k+1)\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\} \tag{51}$$

只要 n 足够大即可。根据推论 6，当 $\varepsilon = \Delta/8$ 时， $k=0$ 成立。因此，假设 (51) 对某个 $k \le m-3$ 成立。我们将证明它对 $k+1$ 也成立。首先注意，不失一般性，我们可以（为方便起见）假设所有样本量 n 都足够大，使得 $(1-3\Delta^{-1}\delta_n) \ge 1/2$，且 $(1+5\Delta^{-1}\delta_n) \le 2$。现在，由于 V_1 的下界（20）中的所有项都为正，推论 5 意味着

$$\begin{aligned} 2cV_1 &\ge n(1-3\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{j\ge 2}(\mu_1-\mu_j-\Delta/8)E(Q_1Q_j) \\ &\ge n(1-3\Delta^{-1}\delta_n)(\Delta/2)\max_{j\ge 2}E(Q_1Q_j) \\ &\ge (\Delta/4)\xi_n, \end{aligned}$$

其中 ξ_n 是命题 5 中的常数，但在概率为 $P(B) \le 2m\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件 B 上除外。接下来，记 B_k 为满足 $\max_{m-k\le j\le m} V_j > 1$ 的事件。根据归纳假设， $P(B)+P(B_k) \le 2m(k+2)\exp\{-\Delta^2 n/32\}$。在其补事件 $B^c \cap B_k^c$ 上，我们有

$$V_1 - V_j \ge \frac{\Delta\xi_n}{8c} - 1 := \kappa_n \quad \Longrightarrow \quad Q_j \le e^{-\kappa_n} Q_1 \tag{52}$$

对于所有 $j \ge m-k$。因此,

$$\begin{aligned} E(Q_{m-k-1}Q_j) &= E(Q_{m-k-1}Q_j\mathbf{1}_{B^c\cap B_k^c}) + E(Q_{m-k-1}Q_j\mathbf{1}_{B\cup B_k}) \\ &\le e^{-\kappa_n}E(Q_1Q_{m-k-1}) + 2m(k+2)e^{-\Delta^2 n/32} \end{aligned} \tag{53}$$

对于所有 $j \ge m-k$。现在，推论 5 的上界 (19)（其中 $\varepsilon = \Delta/8$）意味着 s

that

$$2cV_{m-k-1} \le n(1-3\Delta^{-1}\delta_{n_\ell})(\mu_{m-k-1}-\mu_1+\Delta/4)E(Q_1Q_{m-k-1}) + n(1+5\Delta^{-1}\delta_n)\sum_{j=m-k}^{m}(\mu_{m-k-1}-\mu_j+\Delta/4)E(Q_jQ_{m-k-1}). \quad (54)$$

（注意：如果 $k=m-2$，归纳法就会在此处失效，因为在这种情况下 $m-k-1=1$，因此上界 (19) 不会包含第一项。）将 (54) 中的因子 $E(Q_jQ_{m-k-1})$ 替换为上界 (53)，并利用不等式 $\mu_j-\mu_1+\Delta/4\le -3\Delta/4$ 和 $\mu_{m-k-1}-\mu_j+\Delta/4\le 5\Delta/4$，我们得到

$$\begin{aligned}2cV_{m-k-1} \le & -n(1/2)(3\Delta/4)E(Q_1Q_{m-k-1}) \\ & + n(2(k+1))(5\Delta/4)e^{-\kappa_n}E(Q_1Q_{m-k-1}) \\ & + n(2(k+1))(5\Delta/4)(2m(k+2)e^{-\Delta^2 n/32}),\end{aligned} \quad (55)$$

除非发生概率为 F_k（P）$\le 2m\exp\{-\Delta^2 n/32\}$ 的事件。由于 $\kappa_n\to\infty$，不等式（55）右侧前两项之和对所有充分大的 n 都为负，且第三项最终小于 $2c$。因此，对所有充分大的 n，我们有

$$V_{m-k-1}<1$$

除非发生事件 F_k，因此由（51），

$$P\left\{\max_{m-k-1\le j\le m}V_j>1\right\}\le P(F_k)+P(B_k)\le 2m(k+2)\exp\left\{-\Delta^2 n/32\right\}.$$

归纳法至此完成，从而证明了该命题。 □