arXiv:2301.06220v1 [math.GN] 16 Jan 2023

豪斯多夫空间和正则空间基数的新界

NATHAN CARLSON

摘要。利用基数函数 $\psi_c(X)$ 的较弱版本，我们推导出一系列关于豪斯多夫空间和正则空间基数的新界，这些界完全不涉及 $\psi_c(X)$ 及其变体。例如，我们证明，若 X 是正则的，则 $|X| \leq 2^{c(X)^{\pi\chi(X)}}$ 且 $|X| \leq 2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$；由 Tkachenko 引入的基数函数 $ot(X)$ 具有如下性质：$ot(X) \leq \min\{t(X)\ c(X)\}$。由后者可知，胞腔度至多为 $\mathfrak{c}$ 且具有可数 π-特征的正则空间，其基数至多为 $2^{\mathfrak{c}}$。对于豪斯多夫空间 X，我们证明 $|X| \leq 2^{d(X)^{\pi\chi(X)}}$、$|X| \leq d(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}$，以及 $|X| \leq 2^{\pi w(X)^{dot(X)}}$，其中 $dot(X) \leq \min\{ot(X)\ \pi\chi(X)\}$。这些界均不涉及 $\psi_c(X)$ 或 $\psi(X)$。通过引入具有性质 $w\psi_c(X)$ $d\psi_c(X) \leq \psi_c(X)$ 的基数函数 $w\psi_c(X)$ 和 $d\psi_c(X)$（其中 X 是豪斯多夫空间），我们证明，若 X 是正则的，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}$；若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$。这改进了 ˇSapirovskiˇı 和 Sun 的结果。我们还证明，若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq 2^{d(X)w\psi_c(X)}$；即使在以 $\psi_c(X)$ 替换 $w\psi_c(X)$ 的情形下，这一结果似乎也是新的。紧致例子表明，在紧豪斯多夫空间 X 的基数界 $2^{\psi(X)}$ 中，不能用 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$ 替换 $\psi(X)$。同样，在豪斯多夫空间 X 的 Arhangel′skiˇı- ˇSapirovskiˇı 基数界 $2^{L(X)t(X)\psi(X)}$ 中，不能用 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$ 替换 $\psi(X)$。最后，我们就此对齐性空间作了若干观察。

1. 引言。

许多关于拓扑空间基数的界 X 都涉及伪特征基数函数 $\psi(X)$，或其变体——闭伪特征$\psi_c(X)$。（见定义 2.1。）例如，Arhangel′skiˇı-ˇSapirovskiˇı关于豪斯多夫空间基数的界$2^{L(X)t(X)\psi(X)}$，以及ˇSapirovskiˇı关于正则空间基数的界$\pi\chi(X)^{c(X)\psi(X)}$。Sun [23]将后一结果推广到豪斯多夫空间类，并证明若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)\psi_c(X)}$。另一个例子是 Bella-Cammaroto 关于豪斯多夫空间基数的界 [1] $d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$；作者在 [6] 中通过用弱紧致度$wt(X)$（定义 2.6）替代紧致度 $t(X)$，改进了该结果。其他例子还包括 Gotchev、Tkachenko 和 Tkachuk 在 X 中给出的豪斯多夫空间基数界 $\pi w(X)^{ot(X)\psi_c(X)}$和 $\pi\chi(X)^{aL_c(X)ot(X)\psi_c(X)}$，以及

2020年数学主题分类。54A25, 54D10, 54D30, 54D45。关键词和短语。
基数界，基数不变量。

任意具有紧 π-基的豪斯多夫空间的基数界 $\pi\chi(X)^{wL(X)ot(X)\psi_c(X)}$和 $2^{wL(X)wt(X)\psi_c(X)}$；也就是说，存在一个 π-基，其元素都具有紧闭包。Bella、作者和 Gotchev 在 [4]中给出了这些界。

本文为豪斯多夫空间 X 引入两个弱于闭伪特征的基数函数： $w\psi_c(X)$ 和 $d\psi_c(X)$（定义 2.2 和 2.3），它们满足性质 $w\psi_c(X)d\psi_c(X) \leq \psi_c(X)$。我们改进了 ˇSapirovskiˇı 和 Sun 的结果，证明若 X 为正则空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}$；若 X 为豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$。为此，我们证明了 $|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)}$，其中 $RO(X)$ 是 X的正则开子集族；此外，利用 Sun 闭包论证的一个改进版本，我们证明对于任意豪斯多夫空间 X，均有 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$。利用关于 $w\psi_c(X)$ 的上界，可以推出：若 X 为正则空间，则 $|X| \leq 2^{c(X)^{\pi\chi(X)}}$ 和$|X| \leq 2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$。后一结果表明，若一个正则空间的胞腔度至多为 $\mathfrak{c}$（即连续统基数），且具有可数的 π-特征，则其基数至多为 $2^{\mathfrak{c}}$。由于这些结果的证明依赖复杂的闭包论证，按照 Hodel [15], 第 4 节的说法，它们属于“困难”结果。请注意，最后提到的两个上界均不涉及伪特征的概念。

利用单射映射论证，我们可以在其他基数界中用 $w\psi_c(X)$ 替换 $\psi_c(X)$。我们证明，若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq d(X)^{wt(X)w\psi_c(X)}$、$|X| \leq \pi w(X)^{ot(X)w\psi_c(X)}$，以及 $|X| \leq 2^{d(X)w\psi_c(X)}$。即使将 $w\psi_c(X)$ 替换为 $\psi_c(X)$，后一结果在文献中似乎仍属新结果，不过已知若 X 是正则空间，则 $|X| \leq 2^{d(X)\psi(X)}$。利用 $w\psi_c(X)$ 的上界可得，若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq 2^{d(X)^{\pi\chi(X)}}$、$|X| \leq d(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}$，且 $|X| \leq 2^{\pi w(X)^{dot(X)}}$，其中 $dot(X) \leq \min\{ot(X)\ \pi\chi(X)\}$。这些有趣的基数界同样不涉及伪特征或其变体。

我们在例 3.11 中证明，对于每个无限基数 κ，都存在一个紧豪斯多夫空间 X，它具有可数紧致度和可数的 π-特征，使得$d\psi_c(X)w\psi_c(X) = \omega$， $\psi(X) \geq \kappa^+$，且 $|X| = 2^{2^\kappa}$。这表明，在紧豪斯多夫空间基数的著名上界 $2^{\psi(X)}$ 中， $\psi(X)$ 不能替换为 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$。此外，由于这些例子具有可数紧致度，我们看到，在 Arhangel′skiˇı- ˇSapirovskiˇı 关于豪斯多夫空间基数的上界 $2^{L(X)t(X)\psi(X)}$ 中， $\psi(X)$ 不能替换为 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$。此外，这表明，若将 $\psi_c(X)$ 替换为 $w\psi_c(X)$，则豪斯多夫空间基数的上界 $\pi\chi(X)^{aL_c(X)ot(X)\psi_c(X)}$ [13] 不成立。

在 §5 中，我们对齐性豪斯多夫空间以及不变量 $d\psi_c(X)$ 和 $w\psi_c(X)$ 作了若干观察。首先，我们观察到，对于齐性豪斯多夫空间， $d\psi_c(X) = \psi_c(X)$。其次，我们观察到，若 X 是正则且齐性的，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)q\psi(X)}$；其中 $q\psi(X)$ 由 Is-mail 在 [16] 中引入，并具有性质 $q\psi(X) \leq \min\{\psi_c(X)\ \pi\chi(X)\}$。（我们进一步证明 $q\psi(X) \leq w\psi_c(X)$。）我们给出了若干 σ-紧齐性空间X，使得 $|X| > 2^{w\psi_c(X)}$，由此表明 $\psi(X)$ 不能替换为

$w\psi_c(X)$，用于 $2^{\psi(X)}$ 中对 σ-紧空间基数的界。尽管如此，我们提出以下问题：紧齐性豪斯多夫空间的基数是否有上界 $2^{w\psi_c(X)}$？最后，我们指出了齐性豪斯多夫空间基数的两个新上界。

本文不对拓扑空间上的任何分离公理作全局假设。本文未给出的定义，参见 [12] 和 [17]。

2. 定义与初步不等式。

本节将定义本文中使用的若干基数函数，并证明用于确立它们之间关系的基本基数不等式。我们还将定义本文中使用的其他概念。

定义 2.1. 给定空间 T_1 X 中的点 x，若开集族 $\mathcal{V}$ 满足 $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}$，则称其为 x 处的伪基。若 X 还满足豪斯多夫条件，则当 $\{x\} = \bigcap \mathcal{V} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \overline{V}$ 成立时，称 $\mathcal{V}$ 为 x 处的闭伪基。定义 x 在 X 中的伪特征，记作 $\psi(x, X)$，为满足 x 具有基数为 κ 的伪基的最小无限基数 κ。x 在 X 中的闭伪特征，记作 $\psi_c(x, X)$，定义为满足 x 具有基数为 κ 的闭伪基的最小无限基数 κ。空间 X 的伪特征和闭伪特征分别定义为 $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$ 和 $\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(x, X) : x \in X\}$。

显然，对于任意豪斯多夫空间 X，$\psi(X) \le \psi_c(X) \le \chi(X)$。此外，若 X 是正则的，则可见 $\psi(X) = \psi_c(X)$。

对于豪斯多夫空间 X，我们定义两个新的基数函数 $w\psi_c(X)$ 和 $d\psi_c(X)$，它们都以上界 $\psi_c(X)$ 为界。

定义 2.2. 设 X 是豪斯多夫空间，且设 $x \in X$。若开集族 $\mathcal{V}$ 满足 $\{x\} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \overline{V}$，则称其为 x 处的弱闭伪基。（注意，对于任意 $V \in \mathcal{V}$，$x \in V$ 不一定成立。）定义 $w\psi_c(x, X)$ 为满足以下条件的最小无限基数 κ：x 有一个基数为 κ 的弱闭伪基。弱闭伪特征 $w\psi_c(X)$ 定义为 $w\psi_c(X) = \sup\{w\psi_c(x, X) : x \in X\}$。

定义 2.3. 设 X 是一个豪斯多夫空间。X 的稠密闭伪特征 $d\psi_c(X)$ 定义为满足以下条件的最小无限基数 κ：X 有一个稠密集 D，使得对于每个 $d \in D$，$\psi_c(d, X) \le \kappa$。

注意，任何具有孤立点稠密集的空间 X 都满足 $d\psi_c(X) = \omega$。更一般地，任何具有稠密集 D 的豪斯多夫空间，若其中每个 $d \in D$ 都有可数邻域基，则满足 $d\psi_c(X) = \omega$。

Ismail 在 [16] 中提出了豪斯多夫空间闭伪特征的一种进一步弱化，记作 $q\psi(X)$。Ismail 证明，若 X 是豪斯多夫空间，则 $q\psi(X) \le \psi_c(X)$，且 $q\psi(X) \le \pi\chi(X)$。我们还将在命题 2.9(6) 中证明，若 X 是豪斯多夫空间，则 $q\psi(X) \le w\psi_c(X)$。

定义 2.4（[16]）。对于空间 X 中的点 x，若由 $\mathcal{B}$ 个 X 的非空开子集组成的族满足：对每个满足 $y \ne x$ 的 $y \in X$，都存在一个

其子族 $\mathcal{C}$，满足 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{C}}$ 和 $y \notin \overline{\bigcup \mathcal{C}}$，则称其为 X 中 x 的 q-伪基。我们将 X 中 x 的 q-伪特征定义为 $q\psi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ 是 } X\}$ 中 x 的 q-伪基；并将 X 的 q-伪特征定义为 $q\psi(X) = \sup\{q\psi(x, X) : x \in X\}$。

基数函数 $ot(X)$ 由 Tkachenko 在 [24] 中定义，并被 Gotchev、Tkachenko 和 Tkachuk 在 [13] 中使用，也被 Bella、作者和 Gotchev 在 [4] 中使用。相关函数 $dot(X)$ 在 [13] 中定义。应当从某种意义上将此函数视为“小”的，因为对于任意空间 X， $dot(X) \leq \min\{ot(X), \pi\chi(X)\}$ （命题 2.9(1)(2)）。

定义 2.5（[24]）。设 X 为一个空间。X 的 o-紧致度记为 $ot(X)$，它是满足以下条件的最小无限基数 κ：只要 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$，对于 $x \in X$ 和一个开族 $\mathcal{U}$，就存在 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$，使得 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ 且 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。$X$ 的稠密 o-紧致度记为 $dot(X)$，它是满足以下条件的最小无限基数 κ：只要 $x \in X = \overline{\bigcup \mathcal{U}}$，对于一个开族 $\mathcal{U}$，就存在 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$，使得 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ 且$x \in \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。

弱紧致度 $wt(X)$ 由作者在 [6] 中定义，并由 Bella 和作者在 [2], 中进一步探讨，Bella、作者和 Gotchev 又在 [4]中进行了研究。[4] 中证明了 $ot(X) \leq wt(X)$。[6] 中证明，若 X 是豪斯多夫空间，则$|X| \leq 2^{L(X)wt(X)\psi(X)}$，这改进了 Arhangel′ski˘ı 和 ˘Sapirovski˘ı 的著名结果；而 [2] 中证明，若 X 是任意紧致、齐性的豪斯多夫空间，则 $|X| \leq 2^{wt(X)\pi\chi(X)}$，这改进了 de la Vega [26] 的结果，即此类空间满足 $|X| \leq 2^{t(X)}$。（注意，对于紧致空间 X，有 $\pi\chi(X) \leq t(X)$。）我们将在 §5中进一步讨论齐性。

定义 2.6（[6]）。空间 X 的弱紧致度 $wt(X)$ 定义为满足以下条件的最小无限基数 κ：存在 X 的覆盖 $\mathcal{C}$，使得 $|\mathcal{C}| \leq 2^{\kappa}$，并且对每个 $C \in \mathcal{C}$，都有 $t(C) \leq \kappa$ 且 $X = cl_{2^{\kappa}} C$。

定义 2.7. 空间 X 是齐性的，若对任意两点 x 和 y 属于 X，都存在一个同胚 $h : X \to X$，使得 $h(x) = y$。

正则开集族在本文中发挥着重要作用，尤其是考虑到下文的命题 3.8。

定义 2.8. 设 X 是一个空间。若子集 X 可表示为 $\overline{U}$，其中 U 是开集，则称其为正则闭集。令 $RC(X)$表示 X的正则闭集族。若子集 X 可表示为 $int\overline{U}$，其中 U 是开集，则称其为正则开集。令 $RO(X)$表示正则开集族。

不难看出，正则闭集的补集是正则开集，因此正则开集的补集是正则闭集。因此，对任意空间 X，都有 $|RO(X)| = |RC(X)|$。

下面的命题 2.9 刻画了上述基数函数之间的基本关系。为完整起见，我们给出完整证明。(1) 中的 $ot(X) \leq wt(X)$ 最初见于 [4]。(2) 见于 [13], (3) 见于 [24], (4)、(5) 和 (6) 是本文的新结果，(7) 见于 [16]。对于 (8)， $|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$ 归功于 Efimov [11], ， 而 $|RO(X)| \leq 2^{d(X)}$ 则归功于

de Groot [14]。关于 (5)，我们指出，在 $w\psi_c(X) = \psi_c(X) = \psi(X)$ 成立之前，空间 X 必须是完全正规且在分离公理层级中处于较高位置。

命题 2.9. 设 X 是一个空间。那么，

(1) $dot(X) \leq ot(X) \leq wt(X) \leq t(X)$，(2) $dot(X) \leq \pi\chi(X)$，(3) $ot(X) \leq c(X)$，(4) $d\psi_c(X) w\psi_c(X)$，若 X 是豪斯多夫空间，(5) $w\psi_c(X) = \psi(X)$，若 X 是完全正规且 T_1，(6) $q\psi(X) \leq w\psi_c(X)$，若 X 是豪斯多夫空间，(7) $q\psi(X) \leq \pi\chi(X)$，若 X 是豪斯多夫空间，以及 (8) $|RO(X)| \leq \min\{\pi w(X)^{c(X)}, 2^{d(X)}\}$。

证明。对于 (1)， $dot(X) \leq ot(X)$ 和 $wt(X) \leq t(X)$ 显然成立。为证明 $ot(X) \leq wt(X)$，设 $\kappa = wt(X)$，并设 $\mathcal{C}$是一个覆盖，见证 $wt(X) = \kappa$。令$x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$，其中 $\mathcal{U}$ 是一个开集族。存在 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C$。由于 C 在 X中稠密，我们有$\overline{\bigcup \mathcal{U}} = \overline{\bigcup \mathcal{U} \cap C}$。因此 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U} \cap C} \cap C = cl_C(\bigcup \mathcal{U} \cap C)$。由于 $t(C) \leq \kappa$，存在 $A \subseteq \bigcup \mathcal{U} \cap C$使得 $|A| \leq \kappa$并且$x \in cl_C(A) \subseteq \overline{A}$。于是，存在 $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\kappa}$使得$x \in \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。因此 ot$(X) \leq \kappa$。

对于 (2)，令 $\kappa = \pi\chi(X)$，并令 $x \in X = \overline{\bigcup \mathcal{U}}$ 为一个开族 $\mathcal{U}$。令 $\mathcal{B}$ 为局部 π-基 x，使得 $|\mathcal{B}| \leq \kappa$。由于 $\bigcup \mathcal{U}$ 在 X 中稠密，对于每个 $B \in \mathcal{B}$，都存在 $U_B \in \mathcal{U}$ 使得 $B \cap U_B \neq \varnothing$。令 $\mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{B}\}$，并注意到 $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$。若 W 是一个包含 x 的开集，则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq W$。因此 $\varnothing \neq B \cap U_B \subseteq W \cap U_B \subseteq W \cap \bigcup \mathcal{V}$。这说明 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{V}}$，且 $dot(X) \leq \kappa$。

对于 (3)，令 $\kappa = c(X)$，并假设对于一个开族 $\mathcal{U}$，有 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$。由于 $c(X) = \kappa$，利用极大两两不交开族可得存在 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 使得$x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}} = \overline{\bigcup \mathcal{V}}$ 且 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$。这表明 $ot(X) \leq \kappa$。

（4）由以下事实可知：每个闭伪基都是弱闭伪基；并且，如果 $\psi_c(X) = \kappa$，那么 X 有一个稠密子集 D，使得对于每个 $d \in D$，都有 $\psi_c(d, X) \leq \kappa$，即 $D = X$。

对于（5），首先回顾一下，在完全正规空间中，每个闭集都是一个 G_δ-集。由于对于任意正则空间，$w\psi_c(X) \leq \psi_c(X) = \psi(X)$，因此只需证明 $\psi(X) \leq w\psi_c(X)$。令 $\kappa = w\psi_c(X)$，并令 $x \in X$。存在一个开集族 $\mathcal{V}$，使得 $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$ 且 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$。由于 X 是完全正规空间，对于每个 $\mathcal{V} \in V$，都存在一个可数开集族 $\mathcal{U}_V$，使得$\overline{V} = \bigcap \mathcal{U}_V$。于是 $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{V} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \bigcap \mathcal{U}_V$。若 $\mathcal{U} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_V$，则 $\{x\} = \bigcap \mathcal{U}$ 且$|\mathcal{U}| \leq \kappa \cdot \omega = \kappa$。这说明 $\psi(X) \leq \kappa$。

对于 (6)，令 $\kappa = w\psi_c(X)$。固定 $x \in X$，并令 $\mathcal{V}$ 为x 处的弱闭伪基，使得 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$。我们证明 $\mathcal{V}$ 是 x处的 q-伪基。若 $y \neq x$，则存在 $V \in \mathcal{V}$ 使得 $y \in X \backslash \overline{V}$。由于 $x \in \overline{V}$且 $y \in X \backslash \overline{V}$，因此 $\{V\}$ 在 q-伪基的定义中充当族“$\mathcal{C}$”。这表明 $\mathcal{V}$ 是 x处的 q-伪基，并且 $q\psi(X) \leq w\psi_c(X)$。

对于 (7)，令 $\kappa = \pi\chi(X)$，并固定 $x \in X$。令 $\mathcal{B}$ 为 x 处的局部 π-基，使得 $|\mathcal{B}| \leq \kappa$。我们证明 $\mathcal{B}$ 也是 x处的 q-伪基。令 $y \neq x$。由于 x 是豪斯多夫的，存在一个包含 x 的开集 U，使得 $y \in X\backslash\overline{U}$。令 $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U\}$。于是 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{C}}$ 且 $y \in X\backslash\overline{U} \subseteq X\backslash\overline{\bigcup \mathcal{C}}$。这表明 $\mathcal{B}$ 是 x 处的 q-伪基，并且 $q\psi(X) \leq \kappa$。

对于 (8)，我们首先证明 $|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$。为此，我们通过证明 $|RC(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$ 来实现。令 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个 π-基，使得 $\mathcal{B} = \pi w(X)$。对于每个 $R = \overline{U} \in RC(X)$，存在一个集族 $\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{B}$，使得 $\bigcup \mathcal{C}_R \subseteq U$、 $R = \overline{U} = \overline{\bigcup \mathcal{C}_R}$ 且 $|\mathcal{C}_R| \leq c(X)$。定义映射 $\phi : RC(X) \to [\mathcal{B}]^{\leq c(X)}$，其定义为 $\phi(R) = \mathcal{C}_R$。若 R、$Q \in RC(X)$ 且 $R \neq Q$，则 $\mathcal{C}_R \neq \mathcal{C}_Q$；否则 $R = \overline{\bigcup \mathcal{C}_R} = \overline{\bigcup \mathcal{C}_Q} = Q$。这表明 ϕ 是单射，因此 $|RO(X)| = |RC(X)| \leq |\mathcal{B}|^{c(X)} = \pi w(X)^{c(X)}$。

为证明 $|RO(X)| \leq 2^{d(X)}$，找出一个稠密子集 D，使得 $|D| = d(X)$。我们证明 $RO(X) \subseteq \{int\overline{A} : A \in \mathcal{P}(D)\}$。若 U 是一个正则开集，则 $U = int\overline{U}$。由于 D 稠密，我们有 $\overline{U} = \overline{U \cap D}$，因此 $U = int\overline{U} = int(\overline{U \cap D})$。但是 $A = U \cap D$ 是 D 的子集。这表明 $RO(X) \subseteq \{int\overline{A} : A \in \mathcal{P}(D)\}$，从而 $|RO(X)| \leq |\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} = 2^{d(X)}$。□

本文中若干适用于正则空间的结果，实际上在空间具有一种称为拟正则性的较弱正则性时也成立。我们在下文定义这一概念。

定义 2.10. 空间 X 若每个非空开集都包含一个非空正则闭集，则称为拟正则空间。

显然，任何正则空间都是拟正则的。任何具有孤立点稠密集的空间都是拟正则的。因此，空间 $\kappa\omega$——例 3.12 中给出的自然数集的 Katˇetov 扩张——是一个非正则的拟正则豪斯多夫空间。

3. 改进 ˇSAPIROVSKIˇI 和 Sun 的基数界。

ˇSapirovskiˇı [22] 证明，对于任意正则空间 X，都有 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。Charlesworth [10] 给出了另一种证明。作者在 [5] 中指出，当空间是拟正则空间（定义 2.10）时，这个稠密度界仍然成立，而且空间不一定是豪斯多夫空间。为完整起见，我们在此给出该证明。这是对 [17]中证明 2.37 的一个修改版本。读者应将此证明与定理 3.2 中给出的任意豪斯多夫空间稠密度界的证明进行比较。

定理 3.1（[22] 对于正则空间， [5] 对于拟正则空间）。如果 X 是拟正则的，那么 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。

证明。对于 $x \in X$，令 $\mathcal{B}_x$ 为 x 处的一个局部 π-基，使得 $|\mathcal{B}_x| \leq \pi\chi(X)$。对于 $A \subseteq X$，定义 $\mathcal{B}_A$，使得 $\mathcal{B}_A = \bigcup\{\mathcal{B}_x : x \in A\}$。现在定义映射 $G : [X]^{\leq c(X)} \to [X]^{\leq \pi\chi(X)^{c(X)}}$。对于 $A \in [X]^{\leq c(X)}$，定义 $\mathcal{C}_A = \{\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_A]^{\leq c(X)} : X\backslash\overline{\bigcup \mathcal{U}} \neq \varnothing\}$。于是 $|\mathcal{C}_A| \leq |\mathcal{B}_A|^{c(X)} \leq (|A| \cdot \pi\chi(X))^{c(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)}$。现在，对每个 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_A$，选取 $p(\mathcal{U}) \in X\backslash\overline{\bigcup \mathcal{U}}$，并定义 $G(A) = \{p(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{C}_A\} \in [X]^{\leq \pi\chi(X)^{c(X)}}$。我们

现在应用 [17, 2.24(a)]，得到一个集合 $A \in [X]^{\leq \pi\chi(X)^{c(X)}}$，使得对于所有 $B \in [A]^{\leq c(X)}$，$G(B) \subseteq A$。我们称 A关于 G是闭的。

我们断言 A 在 X中稠密。反设不然，则存在一个非空开集 W，使得 $W \subseteq X\backslash A$。由于 X 是拟正则的，因此存在一个非空开集 U，使得$\overline{U} \subseteq W \subseteq X\backslash A$。

现在，令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{B}_A$ 中与$\overline{U}$不相交的成员组成的极大两两不交族。假设存在 $p \in A\backslash\overline{\bigcup \mathcal{U}}$。那么 $p \notin \overline{U}$，因此 $p \in X\backslash((\bigcup \mathcal{U})\cup\overline{U})$。存在 $V \in \mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{B}_A$，使得 $V \subseteq X\backslash((\overline{\bigcup \mathcal{U}}) \cup \overline{U})$。这与 $\mathcal{U}$的极大性矛盾。因此 $A \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{U}}$。但 $|\mathcal{U}| \leq c(X)$，所以我们可以找到一个集合 $H \in [A]^{\leq c(X)}$，使得 $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_H]^{\leq c(X)}$。由于 $(\bigcup \mathcal{U}) \cap U = \varnothing$，我们有$X\backslash\overline{\bigcup \mathcal{U}} \neq \varnothing$，从而 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_H$。因此，我们有 $p(\mathcal{U}) \in G(H) \subseteq A$，因为 A关于 G是闭的。但 $p(\mathcal{U}) \in X\backslash\overline{\bigcup \mathcal{U}} \subseteq X\backslash A$，这就产生了矛盾。这表明 A 在 X中稠密。因此，$d(X) \leq |A| \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。

□

我们修改 Sun [23] 的证明，以建立任意豪斯多夫空间稠密度的一个界。此界使用不变量 $d\psi_c(X)$（见定义 2.3）。

定理 3.2. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$。

证明. 设 $\lambda = \pi\chi(X)$ 且 $\kappa = c(X)d\psi_c(X)$。对所有 $x \in X$，令 $\mathcal{B}_x$ 为 x 的一个局部 π-基，使得 $|\mathcal{B}_x| \leq \lambda$。令 D 为 X 的一个稠密子集，使得对每个 $d \in D$，都有 $\psi_c(d, X) \leq \kappa$。

通过超限归纳，我们构造一个 $\{A_\alpha$ 的非递减链：X 的子集 $\alpha < \kappa^+\}$，以及一个开集族序列 $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$，使得对所有 $\alpha < \kappa^+$，以下性质成立：

(1) $|A_\alpha| \leq \lambda^\kappa$,
(2) $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \lambda^\kappa$, and
(3) if $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\gamma : \gamma < \kappa\} \in \left[[\mathcal{B}_\alpha]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}$ and $X\backslash\bigcup_{\gamma<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\gamma} \neq \varnothing$, then $A_\alpha\backslash\bigcup_{\gamma<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\gamma} \neq \varnothing$.

取 $p \in X$。令 $A_0 = \{p\}$和 $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_p$。令 $0 < \alpha < \kappa^+$，并假设$\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ 已构造。定义 $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$。则 $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \lambda \cdot \lambda^\kappa \cdot \kappa = \lambda^\kappa$。对每个满足 $X\backslash\bigcup_{\gamma<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\gamma} \neq \varnothing$的 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\gamma : \gamma < \kappa\} \in \left[[\mathcal{B}_\alpha]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}$，取 $x_\mathcal{U} \in X\backslash\bigcup_{\gamma<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\gamma}$。定义

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \cup \left\{ x_\mathcal{U} : \mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\gamma : \gamma < \kappa\} \in \left[[\mathcal{B}_\alpha]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa} \text{ such that } X\backslash\bigcup_{\gamma<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\gamma} \neq \varnothing \right\}.$$

由于 $\left|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right| \leq \lambda^\kappa \cdot \kappa = \lambda^\kappa$ 和 $\left|\left[[\mathcal{B}_\alpha]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}\right| \leq ((\lambda^\kappa)^\kappa)^\kappa = \lambda^\kappa$，我们可知$|A_\alpha| \leq \lambda^\kappa$。顺便一提，由于我们构造了 A_α，可知 (3) 得以满足。

令 $A = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$。那么 $|A| \leq \kappa^+\lambda^\kappa = \lambda^\kappa$。我们证明 A 在 X 中稠密。反设存在一个非空开集 U，使得$U \cap A = \varnothing$。由于 D 在 X 中稠密，存在 $d \in U \cap D \subseteq D\backslash A$。由于 $d \in D$,

存在一个闭伪基 $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \text{在 } d \text{ 处的 } \alpha < \kappa\}$，使得 $|\mathcal{V}| = \kappa$。于是 $\{d\} = \bigcap \mathcal{V} = \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{V_{\alpha\circ}}$。

对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $W_\alpha = X\backslash\overline{V_{\alpha\circ}}$。那么 $\overline{W_\alpha} = cl(X\backslash\overline{V_\alpha}) = X\backslash int(\overline{V_\alpha}) \subseteq X\backslash V_\alpha \subseteq X\backslash\{d\}$，因此 $d \notin \overline{W_{\alpha\circ}}$。此外，$A \subseteq X\backslash\{d\} = \bigcup_{\alpha<\kappa} W_{\alpha\circ}$。对于每个 $\alpha < \kappa$，定义 $\mathcal{S}_\alpha = \{B \in \mathcal{B}_x : x \in W_\alpha \cap A, B \subseteq W_\alpha\}$。注意 $\bigcup \mathcal{S}_\alpha \subseteq W_{\alpha\circ}$。

我们证明，对于所有 $\alpha < \kappa$，$A \cap W_\alpha \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{S}_\alpha}$。令 $x \in A \cap W_\alpha$，并令 T 为包含 x 的一个开集。存在 $B \in \mathcal{B}_x$ 使得 $B \subseteq W_\alpha \cap T$。于是 $B \in \mathcal{S}_\alpha$ 且 $\varnothing \neq B \subseteq T \cap \bigcup \mathcal{S}_{\alpha\circ}$。这表明，对于所有 $\alpha < \kappa$，$A \cap W_\alpha \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{S}_\alpha}$。

由于 $c(X) \leq \kappa$，对于每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\alpha$，使得 $\overline{\bigcup \mathcal{U}_\alpha} = \overline{\bigcup \mathcal{S}_\alpha}$且 $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \kappa$。现在，对于每个 $\alpha < \kappa$，注意到$\overline{\bigcup \mathcal{U}_\alpha} \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq X\backslash\{d\}$。因此，$d \in X\backslash\bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_{\alpha\circ}}$。由于$\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha\right| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa < \kappa^+$，存在 $\delta < \kappa^+$，使得 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \left[[\mathcal{B}_\delta]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}$。

由上面的 (3)，我们有 $x_{\mathcal{U}} \in A_{\delta+1}\backslash\bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\alpha} \subseteq A\backslash\bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_{\alpha\circ}}$。这与 $A \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{S}_\alpha} = \bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{\bigcup \mathcal{U}_\alpha}$ 这一事实矛盾。因此，A 在 X 中稠密，并且 $d(X) \leq |A| \leq \lambda^\kappa = \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$。□

应当比较定理 3.1 和 3.2 的证明，因为它们都给出了空间稠密度的界。这些证明都是精妙但彼此不同的逐步封闭论证。我们提出如下问题：

问题 3.3. 定理 3.1 和 3.2 是否有一个共同的证明?

由 3.1 和 3.2 可知，有一类空间满足 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。下一条推论给出了这一结果。

推论 3.4. 设 X 为一个空间。若 X 是拟正则的，或是豪斯多夫空间且具有一个由可数闭伪特征点组成的稠密集，则 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。

例 3.5. 在 [8] 中，作者与 Ridderbos 在公理 $\mathfrak{c}^+ = 2^\mathfrak{c}$ 下构造了一个复杂的例子：一个具有 π-特征 $\mathfrak{c}$ 且满足 $d(Z) = \mathfrak{c}^+ = 2^\mathfrak{c}$的可数链条件乌雷松空间 Z。因此，我们有 $d(Z) = 2^\mathfrak{c} > \mathfrak{c} = \pi\chi(Z)^{c(Z)}$。换言之，基数不等式 $d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$ 并非对所有乌雷松空间都成立，尽管它对所有拟正则空间都成立（定理 3.1）。尽管如此，由于 Z 是豪斯多夫空间，根据定理 3.2，我们有 $\mathfrak{c}^+ = d(Z) \leq \pi\chi(Z)^{c(Z)d\psi_c(X)} = \mathfrak{c}^{d\psi_c(Z)}$。这意味着 $d\psi_c(Z)$ 很大，至少是不可数的。

以下结论由 Efimov [11] 针对正则空间证明。事实上，我们证明它对任意拟正则空间都成立（不一定是豪斯多夫空间）。

推论 3.6（Efimov [11] 在正则情形下）。若 X 是拟正则的，则 $|RO(X)| \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。

证明。应用定理 3.1 以及 $\pi w(X) = d(X)\pi\chi(X)$ 这一事实，我们得到$\pi w(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。由命题 2.9(8)，我们有

$$|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)} \leq \left(\pi\chi(X)^{c(X)}\right)^{c(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)}.$$

□

类似地，我们推导出 Hausdorff 空间的 $RO(X)$ 基数上界。

推论 3.7. 若 X 是豪斯多夫的，则 $|RO(X)| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$。

证明. 应用定理 3.2 以及对任意空间都有 $\pi w(X) = d(X)\pi\chi(X)$ 这一事实，可知 $\pi w(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$。由命题 2.9(8)，我们得到

$$|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)} \leq \left(\pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}\right)^{c(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}.$$

□

在下文的命题中，我们将证明豪斯多夫空间 X 的基数与 $|RO(X)|$ 有关。这个简单的结果是下一节若干基数界的核心。文献中似乎未曾提及这一结果，即使在用通常的 $\psi_c(X)$ 替代 $w\psi_c(X)$ 的情况下也是如此。

命题 3.8. 如果 X 是豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)}$。

证明。设 $\kappa = w\psi_c(X)$。对于每个 $x \in X$，令 $\mathcal{V}_x$ 为一个开集族，使得 $\{x\} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \overline{V}$ 且 $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$。定义 $\phi\colon X \to [RC(X)]^{\leq\kappa}$，令 $\phi(x) = \{\overline{V}\colon V \in \mathcal{V}_x\}$。那么 ϕ 是单射：假设 $x \neq y \in X$。那么 $\bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \overline{V} = \{x\} \neq \{y\} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_y} \overline{V}$，因此 $\{\overline{V}\colon V \in \mathcal{V}_x\} \neq \{\overline{V}\colon V \in \mathcal{V}_y\}$。这表明 $\phi(x) \neq \phi(y)$，并且 ϕ 是单射。因此，$|X| \leq |RC(X)|^\kappa = |RO(X)|^\kappa = |RO(X)|^{w\psi_c(X)}$。
□

˘1974年，Sapirovskiĭ [22] 证明，任意正则豪斯多夫空间 X 的基数至多为 $\pi\chi(X)^{c(X)\psi(X)}$。在下一个定理中，我们通过证明这类空间的基数有界于 $\pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}$，改进了这一结果。对于正则空间而言，这是一个实质性的改进，因为在这种情况下 $w\psi_c(X) \leq \psi_c(X) = \psi(X)$。这似乎是已知的对 ˘Sapirovskiĭ 这一结果的首次改进。事实上，我们的不等式适用于任意拟正则豪斯多夫空间。

定理 3.9. 若 X 是拟正则且豪斯多夫的，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}$。

证明。由推论 3.6 和命题 3.8 可得

$$|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)} \leq \left(\pi\chi(X)^{c(X)}\right)^{w\psi_c(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}.$$

□

˘ 在 1988 [23] Sun 将 Sapirovskiĭ 对正则空间的结果推广到了任意豪斯多夫空间，证明这类空间 X 的基数有界于 $\pi\chi(X)^{c(X)\psi_c(X)}$。这改进了 Hajnal-Juh´asz 定理；该定理指出这类空间的基数有界于$2^{c(X)\chi(X)}$。下面我们给出对 Sun 的界的实质性改进，其中 $\psi_c(X)$ 被 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$ 取代。回顾一下，根据命题 2.9(4)，对于任意豪斯多夫空间，$d\psi_c(X)w\psi_c(X) \leq \psi_c(X)$。定理 3.10 似乎是对 Sun 的界的首次改进。

定理 3.10. 如果 X 是豪斯多夫的，那么 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$.

证明。根据命题 3.8 和推论 3.7，我们有

$$|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)} \leq \left(\pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}\right)^{w\psi_c(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}.$$

□

根据定理 3.10，任何满足以下条件的可数链条件豪斯多夫空间 X： π-特征至多为 $\mathfrak{c}$，存在一个稠密集 D，使得对所有 $d \in D$，$\psi_c(d, X) \leq \omega$，且每一点都有一个可数弱闭伪基，都具有 $|X| \leq \mathfrak{c}$。

下面这个简单但颇具说明性的例子表明，对每个无限基数 κ，都存在一个紧豪斯多夫空间 X，它具有可数紧致度和可数 π-特征，并且满足 $d\psi_c(X)w\psi_c(X) = \omega$、$\psi(X) = \psi_c(X) \geq \kappa^+$，以及 $|X| = 2^{2^\kappa}$。

例 3.11. 设 D 是任意一个无限离散空间，并设 $X = D \cup \{p\}$ 是 D 的一点紧化，其中 p 是无穷远点。我们旨在证明 $d\psi_c(X)w\psi_c(X) = \omega$。首先注意，$d\psi_c(X) = \omega$，因为 X 有一个孤立点稠密集。接着注意，p 属于 D 的任意无限子集的闭包，因为 p 的邻域包含 D 中除有限多个元素外的所有元素。因此，X 的紧致度可数；根据 ˇSapirovskiĭ 的结果，对于任意紧豪斯多夫空间 Z，$\pi\chi(Z) \leq t(Z)$，我们可知 X 具有可数 π-特征。

设 A 是 D 的任意可数无限子集。对每个 $x \in A$，令 $A_x = A\backslash\{x\}$。那么，对每个 $x \in A$，A_x 都是无限的，因而对每个 $x \in A$，都有 $p \in \overline{A_x}$。还需注意，每个 A_x 都是开集，因为它由孤立点组成。现在，对于任意 $y \in D\backslash A$，它都不属于任何 $x \in A$ 中的 $\overline{A_x}$，因为 y 是孤立点。此外，对每个 $x \in A$，都有 $x \notin \overline{A_x}$。这表明 $\{p\} = \bigcap_{x\in A} \overline{A_x}$；又由于 A 是可数的，我们可得 $\{A_x : x \in A\}$ 是 p 处的可数弱闭伪基。由于对每个 $x \in X\backslash\{p\}$，x 都是孤立点，我们得到 $w\psi_c(X) = \omega$。

现在令 D 为基数是 2^{2^κ} 的离散空间，其中 κ 是无限基数。那么空间 X 的基数为 2^{2^κ}，且由于 X 是紧的，我们有 $|X| \leq 2^{\psi(X)}$。因此，$2^{2^\kappa} \leq 2^{\psi(X)}$ 且 $\psi(X) \geq \kappa^+$；否则，若 $\psi(X) \leq \kappa$，则 $2^{2^\kappa} \leq 2^\kappa$，这就产生矛盾。因此，由上述结果可知，对每个无限基数 κ，都存在一个紧空间 X，它具有可数紧致度和可数 π-特征，使得 $d\psi_c(X)w\psi_c(X) = \omega$，且 $\psi(X) = \psi_c(X) \geq \kappa^+$。由于 $|X| = 2^{2^\kappa}$，我们有 $_2{}^{d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$ 不是所有紧豪斯多夫空间基数的上界。此外，由于空间 X 具有可数紧致度，这意味着 $2^{L(X)t(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$ 不是所有豪斯多夫空间基数的上界，也就是说，在豪斯多夫空间的 Arhangel′skiĭ- ˇSapirovskiĭ 上界 $2^{L(X)t(X)\psi(X)}$ 中，不能用 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$ 替换 $\psi(X)$。此外，文献 [13] 证明，豪斯多夫空间的基数总是有上界 $\pi\chi(X)^{aL_c(X)o t(X)\psi_c(X)}$，其中 $aL_c(X)$ 是关于闭集的几乎 Lindel¨ 度，满足 $aL_c(X) \leq L(X)$。我们的紧空间 X 也是一个反例，说明在这个上界中不能用 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$ 替换 $\psi_c(X)$。

关于定理 3.10，还有一个进一步的观察。将该定理应用于空间 X，可得 $2^{2^\kappa} = |X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)} = \omega^{c(X)\cdot\omega} = 2^{c(X)}$，这意味着 X 的胞腔度必定很大。显然，它确实很大，因为 X 包含2^{2^κ} 孤立点。因此，在 Sun 的界 $\pi\chi(X)^{c(X)\psi_{c(X)}}$ 中，对于基数

豪斯多夫空间，闭伪特征取值过大。事实上，这个基数函数可以替换为 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$，正如我们在这个例子中看到的，它可以是可数的。这必然会迫使胞腔度很大。

例 3.12。考虑 $X = \kappa\omega$，自然数的 Katˇetov 扩张。注意， X 有一个由孤立点组成的可数稠密集，因此 X 满足可数链条件，具有可数的 π特征，并且 $d\psi_c(X) = \omega$。另请注意， $|X| = 2^{\mathfrak{c}}$, $\psi_c(X) = \mathfrak{c}$，且 X 是豪斯多夫空间。根据定理 3.10， $2^{\mathfrak{c}} = |X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)} = 2^{w\psi_c(X)}$，因此 $w\psi_c(X)$ 必定不可数。由于 X 有一个由孤立点组成的稠密集，它是拟正则的，这意味着我们也可以利用定理 3.9 得出相同的结论。

在 [4]，中，Bella（本文作者）和 Gotchev 研究了具有紧 π基的豪斯多夫空间，即元素具有紧闭包的 π基。此类空间既推广了局部紧空间，也推广了具有孤立点稠密集的空间类。文献 [4] 证明了这类空间总是拟正则的 Baire空间。因此，根据定理 3.9，我们得到以下推论。

推论3.13. 如果 X 是具有紧 π-基的豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)}$。

文献 [4]证明了，如果 X 是具有紧 π-基的豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{wL(X)wt(X)\psi_c(X)}$且 $|X| \leq \pi\chi(X)^{wL(X)ot(X)\psi_c(X)}$，其中 $wL(X)$是 X的弱 Lindel¨度。我们可以问，在这两个界中，能否将 $\psi_c(X)$替换为 $d\psi_c(X)w\psi_c(X)$。例 3.11 给出了否定的答案。3.11中的例子 X 是一个紧空间（因此它具有紧 π-基），其中这些界所涉及的所有相关基数函数都可数，但我们可以令 $|X|$ 任意大。因此， $2^{wL(X)wt(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$和 $\pi\chi(X)^{wL(X)ot(X)d\psi_c(X)w\psi_c(X)}$都不是所有具有紧 π-基的豪斯多夫空间的基数上界。

4. 利用 $w\psi_c(X)$ 的上界得到新的基数不等式。

现在，我们为豪斯多夫空间的 $w\psi_c(X)$ 推导出若干上界。这些上界见命题 4.1、4.3、4.4和4.5。这些基数不等式可用于为豪斯多夫空间和拟正则豪斯多夫空间的基数导出新的上界，而这些上界不涉及空间的伪特征及其变体。

命题 4.1. 若 X 是一个豪斯多夫空间，则 $w\psi_c(X) \leq \pi\chi(X)^{ot(X)}$。

证明。令 $x \in X$，并设 $\mathcal{B}$ 是 x 处的一个局部 π-基，使得 $|\mathcal{B}| \leq \pi\chi(X)$。由于 X 是豪斯多夫的，对于所有 $y \neq x$，存在包含 x 的开集 U_y，使得 $y \in X\backslash\overline{U_y}$。于是 $x \in cl(\bigcup\{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_y\}) \subseteq \overline{U_y} \subseteq X\backslash\{y\}$。存在 $\mathcal{U}_y \subseteq \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_y\}$，使得 $|\mathcal{U}_y| \leq ot(X)$ 且 $x \in \overline{\bigcup\mathcal{U}_y} \subseteq \overline{U_y} \subseteq X\backslash\{y\}$。这说明 $\{x\} = \bigcap_{y\neq x}\overline{\bigcup\mathcal{U}_y}$，并且 $\mathcal{V} = \{\bigcup\mathcal{U}_y : y \neq x\}$ 是 x 处的弱闭伪基。现在，$\mathcal{V} \subseteq \{\bigcup\mathcal{C} : \mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{\leq ot(X)}\}$，这意味着 $|\mathcal{V}| \leq \left|[\mathcal{B}]^{\leq ot(X)}\right| \leq |\mathcal{B}|^{ot(X)} \leq \pi\chi(X)^{ot(X)}$。□

下一个命题表明，在特定情形下， $dot(X)$“表现得像” $ot(X)$。我们将利用此命题为命题 4.3 中给出的 $w\psi_c(X)$ 建立另一个界。

命题 4.2。设 X 是一个空间，设 $dot(X) \leq \kappa$，并设 $x \in V$，其中 V 是开集。若 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$，其中 $\mathcal{U}$ 是一个开集族，且满足 $\overline{\bigcup \mathcal{U}} = \overline{V}$，则存在 $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ 使得 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。

证明。设 $W = X \backslash \overline{V} = X \backslash \overline{\bigcup \mathcal{U}}$。则 $X = W \cup \overline{\bigcup \mathcal{U}} \subseteq \overline{W} \cup \overline{\bigcup \mathcal{U}} = cl(W \cup \bigcup \mathcal{U})$。于是 $x \in cl(W \cup \bigcup \mathcal{U})$，并且由于 $dot(X) \leq \kappa$，存在 $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ 使得 $x \in cl(W \cup \bigcup \mathcal{V})$。由于 $x \in V$，我们有 $x \in cl(V \cap (W \cup \bigcup \mathcal{V}))$。但是 $V \cap W = \varnothing$，因此 $x \in cl(V \cap \bigcup \mathcal{V}) \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。□

命题 4.3. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $w\psi_c(X) \leq \pi w(X)^{dot(X)}$。

证明。我们采用与命题 4.1 中类似的论证，并使用命题 4.2。设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 π-基，使得 $|\mathcal{B}| = \pi w(X)$，并固定 $x \in X$。由于 X 是豪斯多夫空间，对所有 $y \neq x$，都存在一个包含 x 的开集 U_y，使得 $y \in X \backslash \overline{U_y}$。于是 $x \in cl\left(\bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_y\}\right) = \overline{U}_y \subseteq X \backslash \{y\}$。注意到 $cl\left(\bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_y\}\right) = \overline{U}_y$，因为 X有一个 π-基。由于 $x \in U_y$，由命题 4.2 可知，存在 $\mathcal{U}_y \subseteq \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_y\}$，使得 $|\mathcal{U}_y| \leq dot(X)$ 且 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}_y} \subseteq \overline{U_y} \subseteq X \backslash \{y\}$。这表明 $\{x\} = \bigcap_{y \neq x} \overline{\bigcup \mathcal{U}_y}$，并且 $\mathcal{V} = \{\bigcup \mathcal{U}_y : y \neq x\}$ 是 x处的弱闭伪基。现在，$\mathcal{V} \subseteq \{\bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{\leq dot(X)}\}$，这意味着 $|\mathcal{V}| \leq \left|[\mathcal{B}]^{\leq dot(X)}\right| \leq |\mathcal{B}|^{dot(X)} \leq \pi w(X)^{dot(X)}$。□

命题 4.4. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $w\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$。

证明。令 D 为一个满足 $|D| = d(X)$ 的稠密集，并固定 $x \in X$。由于对所有 $y \neq x$，X 都是豪斯多夫空间，因此存在一个包含 x 的开集 U_y，使得 $y \in X \backslash \overline{U_y}$。于是，$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} \overline{U_y} = \bigcap_{y \neq x} \overline{U_y \cap D}$，因为 D 是稠密的。于是 $\mathcal{D} = \{U_y \cap D : y \neq x\} \subseteq \mathcal{P}(D)$，因此 $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} = 2^{d(X)}$。

对所有 $A \in \mathcal{D}$，存在 $y_A \neq x$ 使得 $A = U_{y_A} \cap D$。另请注意，对所有 $A \in \mathcal{D}$，$x \in \overline{A}$。于是，$\{x\} = \bigcap_{A \in \mathcal{D}} \overline{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{D}} \overline{U_{y_A} \cap D} = \bigcap_{A \in \mathcal{D}} \overline{U_{y_A}}$。这表明 $\mathcal{V} = \{U_{y_A} : A \in \mathcal{D}\}$ 是 X处的弱闭伪基。此外，$|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{D}| \leq 2^{d(X)}$。这表明对于任意 $x \in X$，$w\psi_c(x, X) \leq 2^{d(X)}$，并且 $w\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$。□

命题 4.5. 若 X 是一个豪斯多夫空间，则 $w\psi_c(X) \leq 2^{q\psi(X)}$。

证明。设 $\kappa = q\psi(X)$，并固定 $x \in X$。令 $\mathcal{B}$ 是 x 处的一个 q-伪基，使得$|\mathcal{B}| \leq \kappa$。对于所有 $y \neq x$，存在 $\mathcal{C}_y \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$，使得 $x \in \overline{\bigcup \mathcal{C}_y}$且 $y \notin \overline{\bigcup \mathcal{C}_y}$。于是 $\{x\} = \bigcap_{y \neq x} \overline{\bigcup \mathcal{C}_y}$且 $\mathcal{C} = \{\bigcup \mathcal{C}_y : y \neq x\}$是 x的弱闭伪基。现在，$\mathcal{C} \subseteq \{\bigcup \mathcal{D} : \mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})\}$，因此 $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} = 2^{\kappa}$。这说明对所有 $x \in X$，$w\psi_c(x, X) \leq 2^{\kappa}$，从而 $w\psi_c(X) \leq 2^{\kappa}$。□

下面的推论 4.6 和 4.7 依赖于定理 3.9 和 3.10，而后两者又依赖于定理 3.1 和 3.2 证明中的闭包论证。由于推论 4.6 和 4.7 的证明最终依赖于这些复杂的技巧，它们

是 Hodel [15], 第 4 节意义上的“困难”界。推论 4.6 中的界不涉及伪特征的概念。

推论 4.6. 设 X 是拟正则豪斯多夫空间。则,

(1) $|X| \leq 2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$,

(2) $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)^{q\psi(X)}}$,

以及 (3) $|X| \leq 2^{c(X)^{\pi\chi(X)}}$。

证明。对于 (1)，由定理 3.9 和命题 4.1，我们有

$$|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)} \leq \pi\chi(X)^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}} = 2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}.$$

对于 (2)，由定理 3.9 和命题 4.5，我们有

$$|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)w\psi_c(X)} \leq \pi\chi(X)^{c(X)\cdot 2^{q\psi(X)}} = \pi\chi(X)^{c(X)^{q\psi(X)}}.$$

(3) 由 (2) 以及以下事实可得：若 X 是豪斯多夫空间，则 $q\psi(X) \leq \pi\chi(X)$（命题 2.9(7)）。□

由推论 4.6(3)可知，细胞度至多为 $\mathfrak{c}$ 且具有可数 π-特征的拟正则豪斯多夫空间，其基数至多为 $2^{\mathfrak{c}}$。

推论 4.7. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq 2^{c(X)d\psi_c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$。

证明. 应用定理 3.10 和命题 4.1。 □

将推论 4.7 与针对拟正则豪斯多夫空间的推论 4.6(1)进行比较。两者的区别在于推论 4.7 中增加了函数 $d\psi_c(X)$。回想一下，当空间 X 有一个稠密子空间 D，且该子空间中每一点在 D 都有可数邻域基时，$d\psi_c(X)$ 是可数的。

鉴于推论 4.6(1) 和推论 4.7，我们提出以下问题。

问题 4.8。如果 X 是豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$ 是吗?

本节其余部分中的界并不依赖任何复杂的闭包论证，而是采用涉及一一映射的较为直接的论证。从 Hodel [15], 第 4 节的意义上说，这些界并不“困难”。下面的定理 4.9 似乎是文献中的新结果，即便将 $w\psi_c(X)$ 替换为 $\psi_c(X)$ 也是如此。

定理 4.9。如果 X 是豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{d(X)w\psi_c(X)}$。

证明。由命题 2.9(8) 和 3.8 可得

$$|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)} \leq \left(2^{d(X)}\right)^{w\psi_c(X)} = 2^{d(X)w\psi_c(X)}.$$

□

由此可知，任意正则豪斯多夫空间 X 的基数至多为$2^{d(X)w\psi_c(X)} \leq 2^{d(X)\psi_c(X)} = 2^{d(X)\psi(X)}$，这是一个众所周知的结果。（例如，参见 [12] 中的问题 3.1F(d)以及 [15]中的定理 4.2。）例 3.12 中给出的例子，其中 $X = \kappa\omega$，是一个具有可数伪特征的可分豪斯多夫空间。因此，$|X| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = 2^{d(X)\psi(X)}$，这表明 $2^{d(X)\psi(X)}$ 并非所有豪斯多夫空间基数的上界。这与定理 4.9 相反，该定理指出

$2^{d(X)w\psi_c(X)}$（并且 $2^{d(X)\psi_c(X)}$）实际上是所有豪斯多夫空间基数的上界。

前述定理直接推出一个众所周知的推论。

推论 4.10. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$。

证明. 根据定理 4.9 和命题 4.4，我们有

$$|X| \leq 2^{d(X)w\psi_c(X)} \leq 2^{d(X)\cdot 2^{d(X)}} = 2^{2^{d(X)}}.$$

□

现在我们得到了豪斯多夫空间的两个新的基数界，它们不涉及伪特征的任何变体。

推论 4.11. 设 X 是一个豪斯多夫空间。那么，

(1) $|X| \leq 2^{\pi w(X)^{dot(X)}}$，
以及 (2) $|X| \leq 2^{d(X)^{\pi\chi(X)}}$。

证明。对于 (1)，由定理 4.9 和命题 2.9(8)，可得

$$|X| \leq 2^{d(X)w\psi_c(X)} \leq 2^{d(X)\pi w(X)^{dot(X)}} = 2^{\pi w(X)^{dot(X)}}.$$

对于 (2)，由 (1) 以及对任意空间都有 $dot(X) \leq \pi\chi(X)$ 这一事实，可得

$$|X| \leq 2^{\pi w(X)^{dot(X)}} = 2^{(d(X)\pi\chi(X))^{dot(X)}} \leq 2^{d(X)\pi\chi(X)^{\pi\chi(X)}} = 2^{d(X)^{\pi\chi(X)}}.$$

□

注意，在推论 4.11(1) 中将 $dot(X)$ 放在指数位置是必要的。例如，考虑 $X = \beta\omega$，即自然数的斯通-切赫紧化。X 有一个由孤立点构成的可数稠密集，因此 $\pi w(X) = \omega$ 且 $dot(X) \leq \pi\chi(X) \leq \pi w(X) = \omega$。因此 $|X| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = 2^{\pi w(X)dot(X)}$，这表明在推论 4.11(1) 中取消 $dot(X)$ 的指数位置是不成立的。尽管如此，应将 $dot(X)$ 视为一个“较小”的基数函数，因为由命题 2.9(1) 和 (2)，$dot(X) \leq \min\{ot(X), \pi\chi(X)\}$。

Gotchev、Tkachenko 和 Tkachuk 在 [13] 中证明，若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi w(X)^{ot(X)\psi_c(X)}$。我们将在下一个结果中证明，可以用 $w\psi_c(X)$ 替代 $\psi_c(X)$。

定理 4.12. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi w(X)^{ot(X)w\psi_c(X)}$。

证明。设 $\mathcal{B}$ 是一个 π-基，使得 $|\mathcal{B}| = \pi w(X)$，并令 $\kappa = ot(X)w\psi_c(X)$。对于所有 $x \in X$，令 $\mathcal{V}_x$ 为 x 处的一个弱闭伪基，使得 $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$。对于所有 $x \in X$ 和 $V \in \mathcal{V}_x$，令 $\mathcal{B}(x,V) = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq V\}$。于是 $x \in \overline{V} = \bigcup \mathcal{B}(x,V)$。由于 $ot(X)$ 不小于等于 κ，存在 $\mathcal{C}(x,V) \in [\mathcal{B}(x,V)]^{\leq\kappa}$，使得 $x \in \bigcup \mathcal{C}(x,V)$。（注意，在这种情况下我们不能使用命题 4.2，因为 x 可能不属于 V。）于是 $\{x\} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \bigcup \mathcal{C}(x,V)$。枚举 $\mathcal{V}_x = \{V(x,\alpha) : \alpha < \kappa\}$。

定义 $\phi\colon X \to \left([\mathcal{B}]^{\leq\kappa}\right)^{\kappa}$，使其由 $\phi(x)(\alpha) = \mathcal{C}(x, V(x,\alpha))$ 给出。我们证明 ϕ 是单射。设 x 和 y 是 X 中两个不同的点。那么

$$\bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{\bigcup \mathcal{C}(x, V(x,\alpha))} \neq \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{\bigcup \mathcal{C}(y, V(y,\alpha))}.$$

由此可知，存在 $\alpha < \kappa$，使得 $\mathcal{C}(x, V(x,\alpha)) \neq \mathcal{C}(y, V(y,\alpha))$，因此 $\phi(x)(\alpha) \neq \phi(y)(\alpha)$。这表明 $\phi(x) \neq \phi(y)$，且 ϕ 是单射。由此可知

$$|X| \leq \left|\left([\mathcal{B}]^{\leq\kappa}\right)^{\kappa}\right| \leq \pi w(X)^{\kappa} = \pi w(X)^{ot(X) w\psi_c(X)}.$$

□

利用上述定理 4.12，我们得到任意豪斯多夫空间基数的另一个新界，它不涉及任何伪特征概念。

推论 4.13. 若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq d(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}$。

证明. 根据定理 4.12 和命题 4.1，我们有

$$\begin{aligned} |X| &\leq \pi w(X)^{ot(X) w\psi_c(X)} \leq \pi w(X)^{ot(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}} = \pi w(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}} \\ &= (d(X)\pi\chi(X))^{\pi\chi(X)^{ot(X)}} = d(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}. \end{aligned}$$

□

Pospi˘sil [19] 于 1937 年证明，对于任意豪斯多夫空间，$|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$。Bella 和 Cammaroto [1] 于 1988年将此界改进为 $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$。作者于 2018 年在 [6] 中证明，$t(X)$可以替换为 $wt(X)$。我们在定理 4.17 中证明，事实上，$\psi_c(X)$还可以进一步替换为 $w\psi_c(X)$。首先，我们需要给出一个定义和一些引理。

在 [18], Juh´asz 和 van Mill 引入了空间 X 的 $\mathcal{C}$-饱和子集这一概念。

定义 4.14. 给定 X 的一个覆盖 $\mathcal{C}$，若对于每个 $C \in \mathcal{C}$，$A \cap C$ 在 A 中稠密，则称子集 $A \subseteq X$ 为 $\mathcal{C}$-饱和的。

显然，$\mathcal{C}$-饱和子集的并是 $\mathcal{C}$-饱和的。这个结果在 [18] 中针对情形 $\kappa = \omega$ 给出，并在 [6] 中推广到了一般情形。

引理 4.15 ([18],[6]). 设 X 是一个空间，$wt(X) = \kappa$，并设 $\mathcal{C}$ 是一个见证 $wt(X) = \kappa$ 的覆盖。那么对所有 $x \in X$，存在 $S_x \in [X]^{\leq 2^{\kappa}}$ 使得 $x \in S_x$，且 S_x 是 $\mathcal{C}$- 饱和的。

引理 4.16 ([6] 中的命题 2.4). 设 X 是一个空间，$D \subseteq X$，并假设存在一个基数 κ，使得对所有 $x \in X$，都存在 $\mathcal{B}_x \in \left[[D]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}$ 满足 $\{x\} = \bigcap_{B\in\mathcal{B}_x} \overline{B}$。那么 $|X| \leq |D|^{\kappa}$。

定理 4.17. 若 X 是豪斯多夫的，则 $|X| \leq d(X)^{wt(X) w\psi_c(X)}$。

证明。令 $\kappa = wt(X)w\psi_c(X)$，并设 D 是一个稠密子集，使得 $|D| = d(X)$。对于所有 $x \in X$，令 $\mathcal{V}$ 为一个弱闭伪基，使得 $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$。令 $\mathcal{C}$ 为 X 的一个覆盖，见证 $wt(X) \leq \kappa$。根据引理 4.15，对于所有 $x \in X$，存在一个 $\mathcal{C}$- 饱和集 S_x，使得 $x \in S_x$ 且 $|S_x| \leq 2^\kappa$。令 $S = \bigcup_{d\in D} S_d$。那么 S 是 $\mathcal{C}$-饱和的，因为 S 是 $\mathcal{C}$-饱和集的并集，并且 $|S| \leq |D| \cdot 2^\kappa = |D|^\kappa$。注意，由于 $D \subseteq S$，我们有 S 在 X 中稠密。

取定 $x \in X$，并令 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $x \in C$。我们证明对每个 $V \in \mathcal{V}_x$，都有$x \in cl_C(V \cap S \cap C)$。由于 S 是 $\mathcal{C}$-饱和的，且在 X 中稠密，因此有

$$x \in \overline{V} = \overline{V \cap S} = cl(V \cap cl_S(S \cap C)) \subseteq cl(V \cap cl(S \cap C)) = cl(V \cap S \cap C).$$

因此，$x \in C \cap cl(V \cap S \cap C) = cl_C(V \cap S \cap C)$。由于 $t(C) \leq \kappa$，存在 $A_V \subseteq V \cap S \cap C$ 使得 $x \in cl_C(A_V) \subseteq cl(A_V)$ 且 $|A_V| \leq \kappa$。

于是，

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} cl(A_V) \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} cl(V \cap S \cap C) \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \overline{V} = \{x\}.$$

这表明 $\{x\} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} cl(A_V)$。现在注意到 $\mathcal{B}_x = \{A_V : V \in \mathcal{V}_x\} \in \left[[S]^{\leq\kappa}\right]^{\leq\kappa}$。由引理 4.16，可得 $|X| \leq |S|^\kappa \leq (|D|^\kappa)^\kappa = |D|^\kappa = d(X)^{wt(X)w\psi_c(X)}$。

□

5. 关于齐性空间的几点说明。

回顾一下，若对任意 x、$y \in X$，都存在一个同胚映射 $h : X \to X$，使得 $h(x) = y$（定义 2.7），则称空间 X 为齐性的。

利用这一点：对于任意紧豪斯多夫空间 X，可以很容易看出，σ-紧空间 X 的基数不超过 $\omega \cdot 2^{\psi(X)} = 2^{\psi(X)}$。下一个例子表明，$2^{w\psi_c(X)}$ 并不是所有 σ-紧齐性空间 X 基数的上界。

例 5.1. 在 [9], 中，作者和 Ridderbos 证明，对每个无限基数 κ，都存在一个基数为 κ、具有可数紧致度和可数 π-特征的 σ-紧齐性空间。（注意，如果这类空间是紧空间，那么其基数将不超过 $\mathfrak{c}$。这是因为 de la Vega 的结果表明，紧齐性空间的基数至多为 $2^{t(X)}$ [26]。）请读者参阅 [9]中对这些例子的极其详尽的描述。

对于每个无限基数 κ，令 X_κ 为一个具有基数 κ 、可数紧致度以及可数 π-特征的 σ-紧致齐性空间。根据命题 4.1，我们注意到，对每个 X_κ，都有 $w\psi_c(X_\kappa) \leq \pi\chi(X_\kappa)^{ot(X_\kappa)} \leq \omega^\omega = \mathfrak{c}$。由于每个 X_κ 都是 σ- 紧致的，它是可数个紧子空间的并。因此，$|X_\kappa| \leq \omega \cdot 2^{\psi(X_\kappa)} = 2^{\psi(X_\kappa)}$。然而，当 $\lambda = (2^\mathfrak{c})^+$ 时，我们有 $|X_\lambda| = (2^\mathfrak{c})^+ > 2^\mathfrak{c} \geq 2^{w\psi_c(X_\lambda)}$。因此，$2^{w\psi_c(X)}$ 并非所有 σ-紧致齐性空间的基数上界。此外，由于 $(2^\mathfrak{c})^+ = |X_\lambda| \leq 2^{\psi(X_\lambda)}$，我们看到 $\psi(X_\lambda) > \mathfrak{c}$，而 $w\psi_c(X_\lambda) \leq \mathfrak{c}$。如此，通过将 κ 取得足够大，我们可以使 $\psi(X_\kappa)$ 任意大，同时 $w\psi_c(X_\kappa) \leq \mathfrak{c}$。这表明

在 σ-紧致齐性空间中， $w\psi_c(X)$ 与 $\psi(X)$ 之间的离散度可以任意大。

然而，即使已知例 3.11 和例 5.1， $2^{w\psi_c(X)}$ 是否为所有紧致齐性豪斯多夫空间基数的一个上界，仍不清楚。（例 3.11 中的空间是紧致的，但不是齐性的；例 5.1 中的空间是齐性的，但不是紧致的。）因此我们提出以下问题。

问题 5.2. 如果 X 是紧致齐性豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{w\psi_c(X)}$ 吗?

根据命题 4.1，由于 $w\psi_c(X) \leq \pi\chi(X)^{ot(X)}$，我们也可以提出以下问题:

问题 5.3. 若 X 是紧致、齐性豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}$?

这个问题的一个更强版本如下。

问题 5.4. 若 X 是紧致、齐性豪斯多夫空间，那么 $|X| \leq 2^{ot(X)\pi\chi(X)}$?

若上述问题的答案为肯定，则可同时改进关于齐性紧豪斯多夫空间的结果 $|X| \leq 2^{wt(X)\pi\chi(X)}$ （见 [2]），以及关于任意齐性豪斯多夫空间的结果 $|X| \leq 2^{c(X)\pi\chi(X)}$ （[8]），因为 $ot(X) \leq \min\{wt(X), c(X)\}$。

不变量 $q\psi(X)$（定义 2.4）由 Ismail 在 [16] 中针对豪斯多夫空间 X 定义。Ismail 得出了以下结论。

命题 5.5（[16]）。若 X 是齐性豪斯多夫空间，则 $|X| \leq |RO(X)|^{q\psi(X)}$。

注意，这改进了在齐性情形下的结果：若 X 是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq |RO(X)|^{w\psi_c(X)}$（命题 3.8）；因为根据命题 2.9(6)，对任意豪斯多夫空间都有 $q\psi(X) \leq w\psi_c(X)$。

由推论 3.6，对于拟正则豪斯多夫空间，我们有 $|RO(X)| \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$。结合命题 5.5，可得以下结果。该结果最初在 [7] 中针对正则齐性空间提及，但实际上也适用于拟正则齐性空间。

定理 5.6. 若 X 是齐性拟正则豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)q\psi(X)}$。

注意，这改进了 [8]中给出的齐性豪斯多夫空间的基数上界 $2^{c(X)\pi\chi(X)}$，适用于 X 额外满足拟正则条件的情形，因为根据命题 2.9(7)，有$q\psi(X) \leq \pi\chi(X)$。

利用 $|RO(X)| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)}$（推论 3.7）这一事实，并结合 5.5，我们得到：若 X 是齐性豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)d\psi_c(X)q\psi(X)}$。这似乎是对界 $2^{c(X)\pi\chi(X)}$的一种变体。然而，很容易看出，对于齐性空间 X，若存在一个闭伪特征为 κ的点，则 $\psi_c(X) \leq \kappa$。因此，若 X 是齐性豪斯多夫空间，则有 $d\psi_c(X) = \psi_c(X)$。所以，该结果等价于：若 X 是齐性豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)\psi_c(X)q\psi(X)} = \pi\chi(X)^{c(X)\psi_c(X)}$。然而，这恰好是 Sun 不等式 $|X| \leq \pi\chi(X)^{c(X)\psi_c(X)}$，对任意豪斯多夫空间 X都成立。因此，关于齐性豪斯多夫空间 X 基数的界 $2^{c(X)\pi\chi(X)}$ [8]，似乎是这一方向上最强的界。

将 Ismail 在命题 5.5 中的结果与命题 2.9(8) 中给出的关于 $|RO(X)|$的两个界结合起来，我们得到齐性豪斯多夫空间基数的两个新界。

定理 5.7。设 X 是一个齐性豪斯多夫空间。那么，

(1) $|X| \leq 2^{d(X)q\psi(X)}$，以及

(2) $|X| \leq \pi w(X)^{c(X)q\psi(X)}$。

有研究者独立地证明了 [25] 和 [20]：若 X 是一个齐性豪斯多夫空间，则 $|X| \leq d(X)^{\pi\chi(X)}$。（另见 [7]）。请注意，这个界也不包含 $\psi_c(X)$ 或其变体。将此界与定理 4.11(2) 比较，后者指出任意豪斯多夫空间的基数至多为 $2^{d(X)^{\pi\chi(X)}}$。此外，将此结果与推论 4.13 比较，推论 4.13 给出了任意豪斯多夫空间基数的界 $d(X)^{\pi\chi(X)^{ot(X)}}$，并与定理 5.7(1) 比较。最后，齐性豪斯多夫空间基数的界 $2^{c(X)\pi\chi(X)}$ 应与定理 4.6 中给出的拟正则豪斯多夫空间的界 $2^{c(X)\pi\chi(X)^{ot(X)}}$ 和 $2^{c(X)^{\pi\chi(X)}}$ 进行比较。

参考文献

[1] A. Bella 和 F. Cammaroto，关于乌雷松空间的基数，Canad. Math. Bull. 31（1988年），第 2 期，153–158。[2] A. Bella、N. Carlson，关于将紧致度弱化为弱紧致度，Monatsh. Math. 192，第 1 期（2020），39–48。[3] A. Bella、N. Carlson、I. Gotchev，关于涉及弱 Lindel¨of 度的基数界的进一步研究，Quaestiones Mathematicae，DOI：10 2989 16073606 2022 2040634 。/ . . A. Bella、N.

[4] Carlson、I. Gotchev，关于具有由紧闭包元素构成的 π-基的空间，预印本。[5] N. Carlson，非正则幂齐性空间，Topology Appl. 154（2007），第 2 期，302–308。[6] N. Carlson，关于弱紧致度与幂齐性紧空间，Topology Appl. 249（2018），103–111。[7] N. Carlson，齐性拓扑空间基数界综述，Top. Proc. 57（2021），259–278。[8] N. Carlson 和 G. J. Ridderbos，分拆关系与幂齐性，Top. Proc. 32（2008），115–124。[9] N. Carlson、G.J. Ridderbos，关于幂齐性空间的若干基数界，Houston Journal of Mathematics，38（2012），第 1 期，311–332。[10] A. Charlesworth，关于拓扑空间的基数，Proc. Amer. Math. Soc. 66（1977），138–142。[11] B. Efimov，连续统权的极端不连通双紧空间，Soviet Math. Dokl. 9（1968），1404–1407。[12] R. Engelking，《一般拓扑学》，Heldermann Verlag，柏林，第二版，1989年。[13] I. Gotchev、M. Tkachenko、V. Tkachuk，正则 π-对角线及拓扑空间基数的一些上界，Acta Math. Hungar. 149（2016），第 2 期，324–337。[14] J. De Groot，豪斯多夫空间的离散子空间，Bull. Acad. Polon. Sci. 13（1965），537–544。[15] R. Hodel，基数函数 I，载于《集合论拓扑学手册》（K. Kunen 和 J.E. Vaughan 编），North-Holland，阿姆斯特丹，1984年，1–61。[16] M. Ismail，齐性空间与拓扑群的基数函数，Math. Japon. 26（1981），第 6 期，635?646。

[17] I. Juh´asz, 《拓扑学中的基数函数——十年后》，第二版，数学中心丛书，第 123 卷，Mathematisch Centrum，阿姆斯特丹，1980年。[18] I. Juh
´ σ **146** 2018 1, asz、429 437
J. van Mill，关于 -可数紧致空间，Proc. Amer. Math. Soc.（ ），第 – 期。[19] B. Pospiˇ sil，论包含一个具有给定基数稠密子集的空间的基数，ˇCasopis Pestov´ani Matematiky a Fysiky 67（1937），89–96。[20] G. J. Ridderbos，关于基数函数与齐性的札记，硕士论文，阿姆斯特丹自由大学（未发表）。[21] B. ˇSapirovskiˇı，关于拓扑空间的离散子空间；权、紧致度与 Suslin 数，Soviet Math. Dokl. 13（1972），215–219。[22] B. ˇ Sapirovskiˇı，典范集与特征。双紧空间中的稠密度与权（俄文），Dokl. Akad. Nauk SSSR 218（1974年），58–61。[23] S. H. Sun，两个新的拓扑基数不等式，Proc. Amer. Math. Soc. 104（1988年），313–316。[24] M. G. Tkaˇcenko，o-紧致度的概念与乘积空间的 C-嵌入子空间，Topology Appl. 15（1983），93–98。[25] R. de la Vega，紧空间上的齐性性质，博士论文，威斯康星大学麦迪逊分校。[26] R. de la Vega，齐性紧空间基数的一个新界，Topology Appl. 153（2006），2118–2123。

加利福尼亚路德大学数学系，美国加利福尼亚州千橡市奥尔森路 60 号，邮编 91360，MC 3750 电子邮箱：ncarlson@callutheran.edu