论若干单生成元左拟群的结构

L.A. Kurdachenko，I.Ya. Subbotin

摘要。我们描述满足条件 $A^3 = < 0 >$ 的单生成元 brace。

关键词：左 brace、单生成元 brace、幂零 brace

数学主题分类：主要分类：17D99：本节中其他未列出的主题。

次要分类：16T25：杨–巴克斯特方程，81R50：量子群及相关代数方法。

致谢：第一作者感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所和爱丁堡大学在LMS团结补充资助计划框架内提供的支持。

作者谨向 A. Smoktunowicz教授致以诚挚谢意，感谢其提供的宝贵咨询。

一个左 brace是一个集合 A，带有两个二元运算+ 和· ，满足以下条件：A 在加法下构成阿贝尔群，在乘法下构成群，并且对于每个 a、b、c+ ∈= A+ ，都有 a(b+c)∈ = ab+ac−a。

为了帮助研究杨–巴克斯特方程的对合的集合论解，W. Rump [RW2005，RW2007A] 引入了 brace，将其作为雅各布森根环的推广。引入这一代数对象的主要原因在于，它为解决此类解的分类问题提供了另一种可能的策略。后续论文 [RW2007B, RW2007C, RW2008, RW2009] 揭示了 brace 与其他代数结构之间的联系。目前，brace 理论正蓬勃发展。该理论的一个重要组成部分是研究 brace 的内部结构。由此立即产生的一个问题，是研究由一个元素生成的 brace（即单生成元 brace）。一般而言，这项任务十分困难，因此研究单生成元 brace 应从附加一些条件入手：

A 是一个左 brace，它是一个集合 A，带有两个二元运算 + 和 · ，满足以下条件：A 关于加法构成阿贝尔群，A 关于乘法构成群，并且对每个 a、b、c + ，有 = a(b + c) – a ∈ ∈A。

设 A 是一个左 brace。A 的子集 S 称为 子 brace（更准确地说是 左子 brace），如果 S 对加法和乘法封闭，并且在限制到 S 的运算下构成左括号（即，S 在加法限制下是 A 的加法群的子群，在乘法限制下是 A 的乘法群的子群）。

设 A 是一个左 brace。对每个元素 a ∈ A，我们定义函数 λ_a: $A \longrightarrow A$ 满足规则 $\lambda_a(x) = ax - a$，其中所有元素 x ∈ A。

设 A 为一个左 brace。令 $a*b = ab - a - b$。我们可以看到，$a*b = \lambda_a(b) - b$。这种新运算在左 brace 中发挥着非常重要的作用。

若对所有元素 a、b ∗，左 brace A 称为平凡的或阿贝尔的，当= 0 b + 或 a = b ∈ ab 时，A。

brace A 的子 brace L 称为理想，如果对所有元素 $a * z$，$z * a \in L$，且 $a \in A$，$z \in L$。

若 K、L 是 A 的子 brace，则用 $K * L$ 表示由元素 $x*y$ 生成的 A 的加法群的子群，其中 $x \in K$，$y \in L$。

设 A 为左 brace。令 $A^{(1)} = A$，并递归地，对所有序数 α，令 $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)} * A$；对极限序数 λ，令 $A^{(\lambda)} = \bigcap_{\mu<\lambda} A^{(\mu)}$。注意，对每个序数 α，$A^{(\alpha)}$ 都是 A 的一个理想。

如果对每个元素 $a \in A$ 和每个元素 $b \in L$，都有 $a * b \in L$，则称左 brace A 的子 brace L 为 A 的左理想。

令 $A^1 = A$，并递归地定义：对所有序数 α，$A^{\alpha+1} = A * A^{(\alpha)}$；对于极限序数 λ，$A^{\lambda} = \bigcap_{\mu<\lambda} A^{\mu}$。注意，对每个序数 α，A^{α} 都是 A 的左理想。

设 A 为左 brace，$\mathfrak{S}$ 为 A 的一族子 brace。那么，族 $\mathfrak{S}$ 中所有子 brace 的交集是 A 的子 brace。若 M 是 A 的子集，则令$\mathfrak{M}$为包含 M 的 A 的所有子 brace 所构成的族。那么，族$\mathfrak{M}$中所有子 brace 的交集是包含 M 的 A 的最小子 brace。这个子 brace 称为由子集 M 生成的 A 的子 brace，记作$\mathbf{br}$(M)。

brace A 的子 brace S 称为有限生成，如果存在一个有限子集 M，使得 A = $\mathbf{br}$(M)。如果 M = {a}，则称 A 为单生成元 brace。

如果 M = {a}，那么我们将讨论 A 的单生成元子 brace。

研究左括号的基础工作之一是研究单生成元 brace。总的来说，这是一个复杂的问题。对此类问题的每一种研究都很重要。本文将研究满足 $A^3 = < 0 >$ 的单生成元 brace A。

与其他代数结构一样，brace 中也有幂零性的概念。在 brace 理论中，对这一概念有不同的处理方法（例如，参见论文 [**CF2018**、**CSV2019**、**JvAV2022**、**SA2018**、**CGIS2017**]）。对于满足 $A^3 = < 0 >$ 的单生成元 brace，我们得到以下幂零性概念：

我们称 A 为一个满足以下条件的级数：按照 Smoktunowicz 的意义是幂零的，即存在正整数 n、k，使得 $A^{(n)} = < 0 > = A^k$。这些 brace 由 A. Smoktunowicz 在一篇论文中引入[**SA2018**]。记 $\mathcal{N}_S(n, k)$ 为满足 $A^{(n)} = < 0 > = A^k$ 这一性质的左 brace 类，其中 n、k 是满足此性质的最小整数。

本文的主要结果如下：

定理 A. 设 A 是一个满足 $A^3 = < 0 >$ 的左 *brace*。假设 A 由元素 a 生成，并令 $a_1 = a$，$a_2 = a * a = a_1 * a$，$a_3 = a_2 * a$。那么 A 的每个元素都具有如下形式

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$, $t_1, t_2, t_3 \in Z$，那么 $x + y = (k_1 + t_1)a_1 + (k_2 + t_2)a_2 + (k_3 + t_3)a_3$，其中 k、k、k 是整数。此外，$x + y + a_3 \in A$ 当且仅当 $k_1 + t_1, k_2 + t_2, k_3 + t_3, k_1, t_1, k_2, t_2 \in Z$。

若 $x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$，$y = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3$ 是 A 的元素，且 $k_1, k_2, k_3, t_1, t_2, t_3 \in Z$，那么

$$x * y = t_1 k_1 a_2 + \tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1 a_3 \text{ and}$$
$$xy = (k_1 + t_1)a_1 + (k_2 + t_2 + t_1 k_1)a_2 + (k_3 + t_3 + \tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1)a_3.$$

特别地，若 $a_3 = 0$，则 A 的每个元素都可表示为 $k_1 a_1 + k_2 a_2$，k_1，k_2 均为整数。此外，若 $x = k_1 a_1 + k_2 a_2$，$y = t_1 a_1 + t_2 a_2$ 是 A 的元素，且 $k_1, k_2, t_1, t_2 \in Z$，则

$$x * y = t_1 k_1 a_2 \text{ and } xy = (k_1 + t_1)a_1 + (k_2 + t_2 + t_1 k_1)a_2.$$

此外，A 在 *Smoktunowizc* 的意义下是幂零的。更确切地说，当 $a_3 = 0$ 时，$A \in \mathcal{N}_S(3, 3)$；当 $a_3 \neq 0$ 时，$A \in \mathcal{N}_S(4, 3)$。

定理 B1。存在一个单生成元左 *brace* $D = Z \times Z$，其加法和乘法由以下规则定义：

$$(k_1, k_2) + (t_1, t_2) = (k_1 + t_1, k_2 + t_2),$$
$$(k_1, k_2)(t_1, t_2) = (k_1 + t_1, k_1 t_1 + k_2 + t_2).$$

若 A 是任意一个满足 $A \in \mathcal{N}_S(3, 3)$ 的单生成元左 *brace*，则存在一个满同态 $f: D \longrightarrow A$。

定理 B2。存在一个单生成元左 *brace* $D = Z \times Z \times Z$，其加法和乘法由以下规则定义：

$$(k_1, k_2, k_3) + (t_1, t_2, t_3) = (k_1 + t_1, k_2 + t_2, k_3 + t_3),$$
$$(k_1, k_2, k_3)(t_1, t_2, t_3) = (k_1 + t_1, k_1 t_1 + k_2 + t_2, k_3 + t_3 + \tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1).$$

若 A 是任意一个满足 $A \in \mathcal{N}_S(4, 3)$ 的单生成元左 *brace*，则存在一个满同态 $f: D \longrightarrow A$。

因此，我们可以看到，在**定理 B1**（分别在**定理 B2**）中构造的左 brace，是一个自由单生成元左 brace，且满足 $A^3 = <0> = A^{(3)}$（分别地，$A^3 = <0> = A^{(4)}$）。

1. 一些预备结果

我们还需要运算 $*$ 和映射 λ_a的以下性质。例如，可以在论文 [**CF2018**、**JvAV 2022**], 中找到这些结果的证明。

1.1. 引理。设 A 是一个左 *brace*。则

$$a*(b + c) = a*b + a*c,\ (ab)*c = a*(b*c) + b*c + a*c,$$
$$(a + b)*c = a*(\lambda_{a^{-1}}(b)*c) + (\lambda_{a^{-1}}(b)*c) + a*c.$$
$$\lambda_y(b*a) = yby^{-1} * \lambda_y(a),\ yby^{-1} = \lambda_y(\lambda_b(y^{-1}) - y^{-1} + b) = \lambda_y(b*y^{-1} + b)$$

对所有元素 a、b、c、$y \in A$。

以下结果的证明可见论文 [**CF2018**], ，我们也会用到。

1.2. 命题。设 A 是一个左 *brace*，L 是 A 的左理想。那么，$L * A$ 和 $A * L$ 都是 A 的左理想。此外，若 L 是 A 的理想，则 $L * A$ 是 A 的理想。

根据**命题 1.2,** 我们得到：

1.3. 命题。设 A 是一个左 *brace*。则对于每个序数 α，A^{α} 是一个左理想；对于每个序数 α，$A^{(\alpha)}$ 是一个理想。

称 brace A 为 **可解**，如果 A 有一个有限级数

$$< 0 > = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_{n-1} \leq A_n = A$$

由理想组成，其因子 A_j/A_{j-1} 均为阿贝尔群，$1 \leq j \leq n$。

1.4. 命题。设 A 是一个左 *brace*，且假设 $A^3 = < 0 >$。则

A^2 是阿贝尔群。此外，对每个元素 $x \in A$、$y \in A^2$, ，有 $x * y = 0$ (或 $xy = x + y$)；对每个元素 x、y、$z \in A$，有 $(xz) * y = x * y + z * y$；对每个整数 n 及每个元素 g、$z \in A$，有 $g^n * z = n(g * z)$。

证明。 等式 $A^3 = < 0 >$ 意味着，对于每个元素 $x \in A$，都有 $x * y = 0$， $y \in A^2$。因此，$xy = x + y$。特别地，$A^2 = A^{(2)}$ 是阿贝尔的。

根据**引理 1.1,** 对于 A 中的任意元素 x、y、z，我们有：

$$(xz) * y = x * (z * y) + x * y + z * y = x * y + z * y.$$

此外，

$$0 = 0 * z = 1 * z = (g^{-1} g) * z = g * z + g^{-1} * z.$$

因此，$g * z + g^{-1} * z = 0$。由此可得，$g^{-1} * z = -g * z$。此外，

$$g^2 * z = (gg) * z = g * z + g * z = 2(g * z).$$

利用普通归纳法，我们得到，对于每个正整数 n，$g^n * z = n(g * z)$。

现在，令 n 为负整数。那么 $n = -k$，$k > 0$。我们有 $g^n = (g^{-1})^k$。根据上文已证明的内容，

$$g^n * z = ((g^{-1})^k * z) = k((g^{-1}) * z) = -k(g * z) = n(g * z).$$

1.5. 命题。 设 A 是一个左 *brace*，并假设 $A^3 = < 0 >$。那么

$$a^m = ma + \tfrac{1}{2}(m^2 - m)(a * a)$$

对于 A 的每个元素 a 和每个整数 m。

Proof. 令 $b = a * a$。由 $a * a = a^2 - a - a = a^2 - 2a$，可得 $a^2 = 2a + b$。此外，

$$a^3 = aa^2 = a(a + a + b) = a^2 + a^2 + ab - 2a = 2a + b + 2a + b + ab - 2a = 2a + 2b + ab.$$

由上文所述，$ab = a + b$，因此 $a^3 = 2a + 2b + a + b = 3a + 3b$。再者，我们有：

$$a^4 = aa^3 = a(a + a + a + b + b + b) = 3a^2 + 3ab - 5a = 3(2a + b) + 3a + 3b - 5a = 4a + 6b,$$

$$a^5 = aa^4 = a(4a + 6b) = 4a^2 + 6ab - 9a = 4(2a + b) + 6a + 6b - 9a = 5a + 10b,$$
$$a^6 = aa^5 = a(5a + 10b) = 5a^2 + 10ab - 14a = 5(2a + b) + 10a + 10b - 14a = 6a + 15b.$$

应用普通归纳法，我们得到，对于任意正整数 m，$a^m = ma + 1/2(m^2 - m)b$。

现在，假设 $m < 0$。令 $y = a^{-1}$。则 $a^m = y^t$，其中 $t = -m > 0$。由上文已证可知，$a^m = y^t = ty + 1/2\,(t^2 - t)z_1$，，其中 $z_1 = y * y = (a^{-1}) * (a^{-1})$。根据上文所述，我们得到 $(a^{-1}) * (a^{-1}) = -(a) * (a^{-1})$。现在，我们有：

$$a * (a^{-1}) = aa^{-1} - a - a^{-1} = 1 - a - a^{-1} = 0 - a - a^{-1} = -a - a^{-1},$$
$$(a^{-1}) * a = a^{-1}a - a - a^{-1} = -a - a^{-1},$$

因此 $a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = -a * a = -b$。所以，$(a^{-1}) * (a^{-1}) = a * a = b$，并且

$$a^m = y^t = ty + \tfrac{1}{2}\,(t^2 - t)b = t(a^{-1}) + \tfrac{1}{2}\,(t^2 - t)b.$$

如上文所见，$(a^{-1}) * a = -a - a^{-1}$。另一方面，$(a^{-1}) * a = -(a * a) = -b$，因此 $-a - a^{-1} = -b$ 且 $a^{-1} = b - a$。因此，$t(a^{-1}) = t(b - a)$，并且

$$a^m = y^t = t(a^{-1}) + \tfrac{1}{2}\,(t^2 - t)b = t(b - a) + \tfrac{1}{2}\,(t^2 - t)b = t(-a) + \tfrac{1}{2}\,(t^2 + t)b =$$
$$(-t)a + \tfrac{1}{2}\,(t^2 + t)b = ma + \tfrac{1}{2}\,(m^2 - m)b.$$

1.6. 命题。 设 *A* 是一个左 *brace*，并假设 $A^3 = <0>$。那么

$$(na) * (ka) = kn(a * a) + \tfrac{1}{2}\,(n - n^2)k((a * a) * a)$$

对于 *A* 中的每个元素 *a* 以及每个整数 *n, k*。

证明。 令 $b = a * a$，$c = b * a = (a * a) * a$。我们有：

$$a^n + a^{-n} = na + \tfrac{1}{2}\,(n^2 - n)b + (-n)a + \tfrac{1}{2}\,(n^2 + n)b = n^2b.$$

由此可得 $a^n + a^{-n} - n^2b = 0$，因此 $-a^n = a^{-n} - n^2b$。

现在，我们来求元素 $(na) * (ka)$。由**引理 1.1,** 可得 $(na) * (ka) = k((na) * a)$。等式 $a^n = na + 1/2\,(n^2 - n)b$ 蕴含

$$na = a^n - \tfrac{1}{2}\,(n^2 - n)b = a^n + \tfrac{1}{2}\,(n - n^2)b.$$

由**命题 1.5,** 可得

$$a^n + \tfrac{1}{2}\,(n - n^2)b = a^n\,(\tfrac{1}{2}\,(n - n^2)b).$$

应用**引理 1.1**和**命题 1.5**可得

$$(na) * a = (a^n\,(\tfrac{1}{2}\,(n - n^2)b)) * a = a^n * a + (\tfrac{1}{2}\,(n - n^2)b) * a = n(a * a) + \tfrac{1}{2}\,(n - n^2)(b * a).$$

因此，

$$(na) * (ka) = knb + \tfrac{1}{2}\,(n - n^2)kc.$$

2. 满足 $A^3 = <0>$ 的单生成元 brace A 的结构

2.1. 命题。设 A 是一个左 *brace*，满足 $A^3 = <0>$。设 a 是 A 的一个元素，并令 $a_1 = a$，$a_2 = a * a = a_1 * a$，$a_3 = a_2 * a$，$a_{j+1} = a_j * a$，$j \in N$。则由元素 a 生成的 A 的子 *brace*，是具有以下形式的元素的子集：$\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j$，$k_j \in Z$，且 $k_j \neq 0$ 仅对有限多个指标 $j \in N$ 成立。

证明。 注意，由子集 $\{ a_j \mid j \in N \}$ 生成的 A 的加法子群由元素 $\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j$ 组成，其中 $k_j \neq 0$ 仅对有限多个指标 j 非零。

Let $x = \sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j$，$y = \sum_{j \in \mathbf{N}} t_j a_j$。利用**引理 1.1**和**命题 1.4,** 我们得到

$$x * y = x * (\sum_{j \in \mathbf{N}} t_j a_j) = \sum_{j \in \mathbf{N}} (x * (t_j a_j)) = \sum_{j \in \mathbf{N}} t_j((x * a_j) = t_1(x * a_1).$$

命题 1.4意味着 $\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j = (k_1 a_i)(\sum_{j>1} k_i a_i)$，而 A^2 是阿贝尔的这一事实意味着

$$k_j a_j = a_j^{k_j}, j > 1, \sum_{j>1} k_j a_j = \prod_{j>1} k_j a_j = \prod_{j>1} a_j^{k_j},$$

并且我们得到

$$x * a_1 = (\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j) * a_1 = (k_1 a_1)(\sum_{j>1} k_j a_j) * a_1 = (k_1 a_1) * a_1 + (\sum_{j>1} k_j a_j) * a_1 =$$
$$(k_1 a_1) * a_1 + (\prod_{j>1} a_j^{k_j}) * a_1 = (k_1 a_1) * a_1 + \sum_{j>1} (a_j^{k_j} * a_1) =$$
$$(k_1 a_1) * a_1 + \sum_{j>1} k_j (a_j * a_1) = (k_1 a_1) * a_1 + \sum_{j>1} k_j a_{j+1}.$$

根据**命题 1.6,** $(k_1 a_1) * a_1 = k_1 a_2 + 1/2\,(k_1 - k_1^2) a_3,$，因此

$$x * a_1 = k_1 a_2 + \tfrac{1}{2}\,(k_1 - k_1^2) a_3 + k_2 a_3 + k_3 a_4 + \sum_{j>3} k_j a_{j+1} =$$
$$k_1 a_2 + \tfrac{1}{2}\,(2k_2 + k_1 - k_1^2) a_3 + k_3 a_4 + \sum_{j>3} k_j a_{j+1}.$$

并且我们有：

$$x * y = t_1\,(x * a_1) = t_1 k_1 a_2 + \tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2) t_1 a_3 + k_3 t_1 a_4 + \sum_{j>3} k_j t_1 a_{j+1}.$$

由 $x * y = xy - x - y$ 得到

$$xy = (\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j)(\sum_{j \in \mathbf{N}} t_j a_j) =$$
$$t_1 k_1 a_2 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2) t_1 a_3 + k_3 t_1 a_4 + \sum j_{>3} k_i t_1 a_{j+1} + \sum j_{\in N} k_j a_j + \sum j_{\in N} t_j a_j = (k_1 + t_1) a_1 + (k_2 + t_2 + t_1 k_1) a_2 + (k_3 + t_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2) t_1) a_3 + \sum j_{\geq 4} (k_j + t_j + t_1 k_j - 1) a_i.$$

可以验证

$$x^{-1} = -k_1 a_1 + (k_1^2 - k_2) a_2 + (\tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2) k_1 - k_3) a_3 + t_3 + \tfrac{1}{2}(2k_2 + k_1 - k_1^2) t_1) a_3 +$$
$$\sum_{j \geq 4} (k_1 k_{j-1} - k_j) a_j.$$

因此，我们可以看到，具有形式 $\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_i, k_j \in Z$ 的元素构成的集合，其中所有指标 $j \in N$，构成一个子 brace。另一方面，任何包含元素 a 的子 brace 都包含元素 $\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_i, k_j \in Z$，其中所有指标 $j \in N$。因此，我们得到，由元素 a 生成的子 brace 与具有形式 $\sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_i, k_j \in Z$ 的元素构成的集合相同，其中所有指标 $j \in N$。

定理 A 的证明。

由**命题 2.1,** A 的每个元素 x 都具有形式 $x = \sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_i, k_j \in Z$，对所有指标 $j \in N$ 均成立。由**命题 2.1,** 的证明还可得到

$(\sum j \in N\ k_j a_i)(\sum j \in N\ t_j a_i) = t_1k_1a_2 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1a_3 + k_3t_1a_4 + \sum j > 3\ k_it_1a_{j+1} + \sum j \in N\ k_j a_j + \sum j \in N\ t_j a_j = (k_1 + t_1)a_1 + (k_2 + t_2 + t_1k_1)a_2 + (k_3 + t_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1)a_3 + \sum j \geq 4\ (k_j + t_j + t_1k_j - 1)a_i.$

A 中的乘法必须是结合的。

Let

$$x = \sum_{j \in \mathbf{N}} k_j a_j,\ y = \sum_{j \in \mathbf{N}} t_j a_j,\ z = \sum_{j \in \mathbf{N}} s_j a_j,\ xy = \sum_{j \in \mathbf{N}} r_j a_j,$$
$$(xy)z = \sum_{j \in \mathbf{N}} m_j a_j,\ yz = \sum_{j \in \mathbf{N}} u_j a_j,\ x(yz) = \sum_{j \in \mathbf{N}} v_j a_j.$$

我们有

$m_1 = r_1 + s_1 = k_1 + t_1 + s_1, v_1 = k_1 + u_1 = k_1 + t_1 + s_1, m_2 = r_2 + s_2 + s_1r_1 = k_2 + t_2 + t_1k_1 + s_2 + s_1(k_1 + t_1) = k_2 + t_2 + t_1k_1 + s_2 + s_1k_1 + s_1t_1,\ v_2 = k_2 + u_2 + u_1k_1 = k_2 + t_2 + s_2 + s_1t_1 + (t_1 + s_1)k_1 = k_2 + t_2 + s_2 + s_1t_1 + t_1k_1 + s_1k_1,\ m_3 = r_3 + s_3 + 1/2(2r_2 + r_1 - r_1^2)s_1 = r_3 + s_3 + r_2s_1 + 1/2\ r_1s_1 - 1/2r_1^2s_1 = k_3 + t_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1 + s_3 + (k_2 + t_2 + t_1k_1)s_1 + 1/2\ (k_1 + t_1)s_1 - 1/2\ (k_1^2 + t_1^2 + 2k_1t_1)s_1 = k_3 + t_3 + k_2t_1 + 1/2k_1t_1 - 1/2k_1^2t_1 + s_3 + k_2s_1 + t_2s_1 + t_1k_1s_1 + 1/2k_1s_1 + 1/2t_1s_1 - 1/2k_1^2s_1 - 1/2t_1^2s_1 - k_1t_1s_1 = k_3 + t_3 + k_2t_1 + 1/2k_1t_1 - 1/2k_1^2t_1 + s_3 + k_2s_1 + t_2s_1 + 1/2k_1s_1 + 1/2t_1s_1 - 1/2k_1^2s_1 - 1/2t_1^2s_1, v_3 = k_3 + u_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)u_1 = k_3 + u_3 + k_2u_1 + 1/2k_1u_1 - 1/2\ k_1^2u_1 = k_3 + t_3 + s_3 + 1/2(2t_2 + t_1 - t_1^2)s_1 + k_2t_1 + k_2s_1 + 1/2k_1t_1 + 1/2k_1s_1 - 1/2k_1^2t_1 - 1/2k_1^2s_1 = k_3 + t_3 + s_3 + t_2s_1 + 1/2t_1s_1 - 1/2\ t_1^2s_1 + k_2t_1 + k_2s_1 + 1/2k_1t_1 + 1/2k_1s_1 - 1/2k_1^2t_1 - 1/2k_1^2s_1, m_4 = r_4 + s_4 + s_1r_3 = k_4 + t_4 + t_1k_3 + s_4 + s_1(k_3 + t_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1)) = k_4 + t_4 + t_1k_3 + s_4 + s_1k_3 + s_1t_3 + k_2s_1t_1 + 1/2\ k_1s_1t_1 - 1/2\ k_1^2s_1t_1, v_4 = k_4 + u_4 + u_1k_3 = k_4 + t_4 + s_4 + s_1t_3 + (t_1 + s_1)k_3 = k_4 + t_4 + s_4 + s_1t_3 + t_1k_3 + s_1k_3.$

一般而言，

$m_{j+1} = r_{j+1} + s_{j+1} + s_1r_j = k_{j+1} + t_{j+1} + s_{j+1} + t_1k_j + s_1(k_j + t_j + t_1k_j - 1) = k_{j+1} + t_{j+1} + s_{j+1} + t_1k_j + s_1k_j + s_1t_j + s_1t_1k_j - 1, v_{j+1} = k_{j+1} + u_{j+1} + u_1k_j = k_{j+1} + t_{j+1} + s_{j+1} + s_1t_j + (t_1 + s_1)k_j = k_{j+1} + t_{j+1} + s_{j+1} + s_1t_j + t_1k_j + s_1k_j.$

注意，若 $a_j = 0$，则 $a_{j+1} = a_j * a = 0$，因此对所有正整数 k，$a_{j+k} = 0$。

假设 $2a_1 \neq 0$。那么我们有：

$a_2a_1 = 3a_1 + 2a_2 - a_3, ((2a_1)a_1)a_1 = (3a_1 + 2a_2 - a_3)a_1 = 4a_1 + 5a_2 - 2a_3 - a_4,\ a_1a_1 = 2a_1 + a_2, (2a_1)(a_1a_1) = (2a_1)(2a_1 + a_2) = 4a_1 + 5a_2 - 2a_3$.

因此，$(2a_1)(a_1a_1) - (2a_1)(a_1a_1) = a_4$. 因此，若 $a_4 \neq 0$，则乘法不满足结合律。由此可知，在此情形下，$a_4 = 0$。此外，$a_5 = a_4 * a = 0$，并且，$a_j = 0$ 对所有 $j > 5$均成立。我们可以看出，在此情形下，A 按 Smoktunowizc 的意义是幂零的；更准确地说，$A \in \mathcal{N}_S(4, 3)$。

如果我们假设 $ma_1 = 0$ 对某个正整数 v 成立，那么

$$ma_2 = m(a_1 * a_1) = a_1 * a(ma_1) = 0,\ ma_3 = m(a_2 * a_1) = a_2 * a(ma_1) = 0,$$

并且 $ma_k = 0$ 对所有正整数 k 均成立。

现在，考虑 $2a_1 = 0$ 的情形。于是 $2a_2 = 0$ 且 $2a_k = 0$ 对所有正整数 k 均成立。因此，在这种情况下，A 的加法群是初等阿贝尔 2 – 群。我们有：

$$a_2a_1 = a_1 + a_2 + a_3,\ (a_2a_1)a_1 = (a_1 + a_2 + a_3)a_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4,$$
$$a_1a_1 = 2a_1 + a_2 = a_2,\ (a_2)(a_1a_1) = a_2\ a_2 = 2a_2 = 0.$$

等式 $(a_2a_1)a_1 = (a_2)(a_1a_1)$ 意味着 $a_3 + a_4 = 0$ 或 $a_3 = a_4$。于是

$a_3 = a_4 = a_3 \ast a_1 = a_3a_1 – a_3 – a_1 = a_3.$

由此可得

$a_3a_1 = a_3 + a_1 + a_3 = 2a_3 + a_1 = a_1.$

由 A 在乘法下构成群这一事实可知 $a_3 = 1 = 0$。于是，对于所有 $j > 3$，也有 $a_j = 0$。根据 **命题 2.1，** A 的每个元素都可写成 $k_1a_1 + k_2a_2$, 的形式，其中 k_1, k_2 是整数。此外，若 $x = k_1a_1 + k_2a_2$, 和 $y = t_1a_1 + t_2a_2$ 是 A 的元素，且 $k_1, k_2, t_1, t_2 \in Z$，那么

$$x \ast y = t_1k_1a_2 \text{ and } xy = (k_1 + t_1)a_1 + (k_2 + t_2 + t_1k_1)a_2.$$

此外 ，A 在 Smoktunowizc 的意义下是幂零的。更确切地说，$A \in \mathcal{N}_S(3, 3$).

定理 B2 的证明。

显然，由加法可知，D 是一个阿贝尔群。此外，设

$$x = (k_1, k_2, k_3),\ y = (t_1, t_2, t_3),\ z = (s_1, s_2, s_3),\ xy = (r_1, r_2, r_3),$$
$$(xy)z = (m_1, m_2, m_3),\ yz = (u_1, u_2, u_3),\ x(yz) = (v_1, v_2, v_3).$$

我们有：

$m_1 = r_1 + s_1 = k_1 + t_1 + s_1$,$v_1 = k_1 + u_1 = k_1 + t_1 + s_1$,$m_2 = r_2 + s_2 + s_1r_1 = k_2 + t_2 + t_1k_1 + s_2 + s_1(k_1 + t_1) = k_2 + t_2 + t_1k_1 + s_2 + s_1k_1 + s_1t_1$, $v_2 = k_2 + u_2 + u_1k_1 = k_2 + t_2 + s_2 + s_1t_1 + (t_1 + s_1)k_1 = k_2 + t_2 + s_2 + s_1t_1 + t_1k_1 + s_1k_1$, $m_3 = r_3 + s_3 + 1/2(2r_2 + r_1 – r_1^2)s_1 = r_3 + s_3 + r_2s_1 + 1/2\ r_1s_1 – 1/2r_1^2s_1 = k_3 + t_3 + 1/2(2k_2 + k_1 – k_1^2)t_1 + s_3 + (k_2 + t_2 + t_1k_1)s_1 + 1/2\ (k_1 + t_1)s_1 – 1/2\ (k_1^2 + t_1^2 + 2k_1t_1)s_1 = k_3 + t_3 + k_2t_1 + 1/2k_1t_1 – 1/2k_1^2t_1 + s_3 + k_2s_1 + t_2s_1 + t_1k_1s_1 + 1/2k_1s_1 + 1/2t_1s_1 – 1/2k_1^2s_1 - 1/2t_1^2s_1 - k_1t_1s_1 = k_3 + t_3 + k_2t_1 + 1/2k_1t_1 – 1/2k_1^2t_1 + s_3 + k_2s_1 + t_2s_1 + 1/2k_1s_1 + 1/2t_1s_1 – 1/2k_1^2s_1 - 1/2t_1^2s_1$,$v_3 = k_3 + u_3 + 1/2(2k_2 + k_1 – k_1^2)u_1 = k_3 + u_3 + k_2u_1 + 1/2k_1u_1 – 1/2\ k_1^2u_1 = k_3 + t_3 + s_3 + 1/2(2t_2 + t_1 – t_1^2)s_1 + k_2t_1 + k_2s_1 + 1/2k_1t_1 + 1/2k_1s_1 – 1/2k_1^2t_1 – 1/2k_1^2s_1 = k_3 + t_3 + s_3 + t_2s_1 + 1/2t_1s_1 – 1/2\ t_1^2s_1 + k_2t_1 + k_2s_1 + 1/2k_1t_1 + 1/2k_1s_1 – 1/2k_1^2t_1 – 1/2k_1^2s_1.$

因此，我们得到 $m_1 = v_1, m_2 = v_2, m_3 = v_3,$ ，这证明了等式 $(xy)z = x(yz)$。

因此，我们可以看出乘法是结合的。
单位元是 (0, 0, 0)。事实上，

$$(k_1, k_2, k_3)(0, 0, 0) = (k_1 + 0, 0 + k_2 + 0, k_3 + 0 + 0\,) = (k_1, k_2, k_3).$$

若 $x = (k_1, k_2a, k_3)$，则 $x^{-1} = (–k_1, k_1^2 – k_2, k_1k_2 + 1/2\ (k_1^2 – k_1^3) – k_3)$。

最后,

$x(y + z) = (k_1, k_2, k_3)\ (\ (t_1, t_2, t_3) + (s_1, s_2, s_3)\ ) = , x(y + z) = (k_1, k_2, k_3)\ (\ t_1 + s_1, t_2 + s_2, t_3 + s_3\ ) = , (\ k_1 + t_1 + s_1, k_1(t_1 + s_1) + k_2 + t_2 + s_2, k_3 + t_3 + s_3 + 1/2\ (2k_2 + k_1 - k_1^2)(\ t_1 + s_1)\ ) = \ (k_1 + t_1 + s_1, k_1t_1 + k_1s_1 + k_2 + t_2 + s_2, k_3 + t_3 + s_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)s_1),$

$xy + xz - x = (k_1, k_2, k_3)\ (t_1, t_2, t_3) + (k_1, k_2, k_3)(s_1, s_2, s_3) - (k_1, k_2, k_3) = \ (k_1 + t_1, k_1t_1 + k_2 + t_2, k_3 + t_3 + 1/2\ (2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1\ ) + \ (k_1 + s_1, k_1s_1 + k_2 + s_2, k_3 + s_3 + 1/2\ (2k_2 + k_1 - k_1^2)\ s_1\ ) - (k_1, k_2, k_3) = \ (k_1 + t_1, k_1t_1 + k_2 + t_2, k_3 + t_3 + 1/2\ (2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1\ ) + \ (s_1, k_1s_1 + s_2, s_3 + 1/2\ (2k_2 + k_1 - k_1^2)s_1\ ) - (k_1, k_2, k_3) = \ (k_1 + t_1 + s_1, k_1t_1 + k_1s_1 + k_2 + t_2 + s_2, k_3 + t_3 + s_3 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)t_1 + 1/2(2k_2 + k_1 - k_1^2)s_1),$

使得 $x(y + z) = xy + xz - x$。

这表明 D 是一个左 brace。

设 A 是任意一个满足 $A^3 = < 0 > = A^{(4)}$ 的左 brace。令 $a_1 = a$, $a_2 =$ $a * a = a_1 * a$, $a_3 = a_2 * a$。由于 $A^{(3)} \neq < 0 >$，因此 $a_3 \neq 0$。根据**定理 A,** A 中的每个元素都可写成 $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$, ，其中 k_1, k_2, k_3 是整数。

按如下规则定义映射 $f: D \longrightarrow A$：$f(k_1, k_2, k_3) = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$。再次利用**定理 A**，可以证明 f 是满同态。

定理 B1 的证明类似。

参考文献

CF2018. Ferran Cedó F. 杨–巴克斯特方程的解。群论与应用进展 *- 5 (2018),* 第 *33 – 90* 页 *CGIS2017. Cedó F., Gateva-Ivanova T., A. Smoktunowicz A.* 关于杨 – 巴克斯特方程与左幂零左 *brace* - 纯粹与应用代数杂志 *221 (2017),* 第 *4* 期, *751–756*。*CSV2019. Cedó F., Smoktunowicz A, Vendramin L.* 幂零型斜左 *brace*，伦敦数学会会刊 *(3) 118 (6) (2019) 1367 – 1392*。*JvAV2022. Jespers E., van Antwerpen A., Vendramin L.* 斜 *brace* 的幂零性与杨–巴克斯特方程的多置换解 – 数学 *arXiv: 2205.01572v1 2022*年*5*月*3*日 *RW2005. Rump W.* 无平方因子酉量子杨–巴克斯特方程解的分解定理，数学进展 *193 (2005), 40–55*。*RW2007A. Rump W. brace*、根环与量子杨–巴克斯特方程 - 代数杂志 *307 (2007), 153 – 170*。*RW2007B. Rump W.* 循环 *brace* 的分类 - 纯粹与应用代数杂志 *209 (2007), 671–685*。*RW2007C. Rump W.* 广义根环、无纽结双拟群与量子群。数学讨论会 *109 (2007), 85 – 100*。*RW2008. Rump W.* 代数逻辑中的半直积与量子杨–巴克斯特方程的解，代数及其应用杂志 *7 (2008), 471 – 490*。*RW2009. Rump W.* 《广义根环、无纽结双拟群与量子群》（数学讨论会 *109 (2007), 85–100*）的补遗，数学讨论会 *117 (2009), 295 – 298*。

SA2018. Smoktunowicz A。 关于恩格尔群、幂零群、环、*brace* 与杨– 巴克斯特方程，美国数学会汇刊 370 (2018), 6535 – 6564

L.A. Kurdachenko 代数系
第聂伯罗国立大学 加加林大
道70 第聂伯罗10 （乌克兰）
电子邮件：
lkurdachenko@i.ua

I.Ya. Subbotin 数学系 国立大学
5245 太平洋大道 洛杉矶，
CA90045 （美国）电子邮件：
isubboti@nu.edu