arXiv:2301.06290v1 [math.CV] 16 Jan 2023

具有多项式系数的线性差分方程的超越整函数解所有可能的小于1阶的阶

KatsuyaIshizaki *和 Zhi-Tao Wen †‡

摘要

本文研究线性差分方程的超越整函数解所有可能的小于1阶的阶

$$P_m(z)\Delta^m f(z)+\cdots+P_1(z)\Delta f(z)+P_0(z)f(z)=0, \qquad (+)$$

其中，对于 $j=0$， $P_j(z)$ 是多项式，.....， m。首先，我们给出差分方程（+）存在小于1阶的超越整函数解的条件。其次，我们列出差分方程（+）的超越整函数解所有可能的小于1阶的阶。此外，我们还给出了差分方程（+）的超越整函数解中小于1阶的不同阶的最大数量。另外，对于任意给定的有理数 $0<\rho<1$，我们都可以构造一个具有多项式系数的线性差分方程，使其具有一个阶为 ρ的超越整函数解。最后，我们列举了一些例子来说明主要定理。

关键词：二项级数、线性差分方程、阶的增长、多项式系数、渐近解、Poincar´e-Perron 定理

2020年数学主题分类：39B32；30D35。

1 引言

对于函数 f，我们将 $\Delta f(z)=f(z+1)-f(z)$ 记为差分算子。设 n 为非负整数。定义 $\Delta^n f(z)=\Delta(\Delta^{n-1}f(z))$，其中 $n\geq 1$，并记 $\Delta^0 f=f$。众所周知，阶为 m 的线性差分方程

$$a_m(z)\Delta^m f(z)+\cdots+a_1(z)\Delta f(z)+a_0(z)f(z)=0$$

* 日本学术振兴会科研费项目（编号：20K03658）资助

† 国家自然科学基金委员会（项目编号：11971288）和汕头大学 SRFT（NTF18029）资助

‡通讯作者。

若其系数 a_j, $j = 0, 1, \ldots, m$ 为整函数，则该方程有一组 m 个亚纯解，这些解在周期为1的周期函数域上线性无关，见 [21]。特别地，若 a_j, $j = 0, 1, \ldots, m$ 为多项式，即，

$$P_m(z)\Delta^m f(z) + \cdots + P_1(z)\Delta f(z) + P_0(z)f(z) = 0, \tag{1.1}$$

人们结合牛顿多边形研究了整函数解的增长级，其中 P_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, $P_m(z) \not\equiv 0$ 是次数为 d_j 的多项式，其中 $j =$ 为 0, 1, . . ., m。

牛顿多边形或牛顿-普伊索图不仅在线性微分方程理论中发挥重要作用，也在线性差分方程理论中发挥重要作用，参见例如 [3], [15, 第 163] 节。在 [12, 定理 1.1], Ishizaki 和 Yanagihara 将式 (1.1) 的牛顿多边形定义为 $\mathfrak{N} = \bigcup_{j=0}^{m} \mathfrak{N}_j$ 的凸包，其中 $\mathfrak{N}_j = \{(x, y);\ x \geq j,\ y \leq d_{m-j} - (m - j)\}$，其中 $0 \leq j \leq m$，并在条件 $\rho(f) < 1/2$ 下建立了整函数的维曼-瓦利龙理论的一个差分版本，从而得到下述定理 A。Chiang 和 Feng 通过在 [6] 中建立另一个维曼-瓦利龙理论的差分版本，将增长级条件推广到阶严格小于 1 的整函数解。Chiang 和 Feng 在 [7], 中给出了更精确的维曼-瓦利龙估计的差分版本；他们得出结论，阶严格小于 1 的多项式系数线性差分方程的整函数解必定具有有理增长级的完全正则增长。

定理 A [7, 定理 4] 设 f 是一个增长级为 $\rho(f) < 1$的整函数解。那么，增长级 $\rho(f)$ 是一个有理数，可由方程 (1.1) 对应的牛顿多边形的斜率确定。特别地，

$$\log M(r, f) = Lr^{\rho(f)}(1 + o(1)),$$

其中 $L > 0$和 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$。此外，该解具有完全正则增长。

由定理 A 自然引出一个问题：方程 (1.1) 的整函数解的所有可能阶，是否都由方程 (1.1) 对应的牛顿多边形的斜率决定？遗憾的是，一般情形并非如此简单。例如，差分方程 $z\Delta f(z) + z - 1f(z) = 0$ 存在一个整函数解 $f(z) = 1/\Gamma(z)$，其阶为 $\rho(f) = 1$。事实上，整函数 $g(z) = \pi(z)f(z)$ 也是方程 $z\Delta f(z) + z - 1(f)z = 0$ 的解，其中 $\pi(z)$ 是任意一个周期为 1 的整函数。注意，对于任意 $\sigma \in [1, \infty)$，根据 [16, 定理 1]，存在一个阶为 $\rho(\pi) = \sigma$ 的素周期整函数 $\pi(z)$。因此， g 的增长级并非由该方程决定。

然而，小于1阶的整函数解情形有所不同。假设f_1, . . ., f_n是小于1阶的整函数，且在周期为1的周期函数域上线性无关； $f = \pi_1 f_1 + \cdots + \pi_n f_n$，其中 π_1, . . ., π_n是周期为1的周期函数。如果 $\rho(f) < 1$，那么 π_1, . . ., π_n是常数。因此，具有多项式系数的线性差分方程的整函数解所有可能的小于1阶的阶，都可以由方程本身确定。

这启发我们研究具有多项式系数的线性差分方程的小于1阶整函数解。事实上，在某些条件下，存在阶小于

1 的具有多项式系数的线性差分方程的整函数解。例如，差分方程存在一个阶为 $\rho(f)$ 的整函数解 $f = 1/2$

$$(4z+6)\Delta^2 f(z) + 3\Delta f(z) + f(z) = 0.$$

Wittich [22, 第 65–68]页以及 Gundersen 等人 [9] 讨论了对于带多项式系数的线性微分方程，其整函数解的牛顿多边形所给出的可能有理增长级是否能够达到。Chiang 和 Feng 在 [7] 针对差分方程 (1.1) 提出了这个问题。根据上述讨论，可以提出一些问题。例如

- 什么条件可以保证 (1.1) 至少有一个阶小于 1 的超越整函数解?
- 能否列出给定差分方程 (1.1) 的超越整函数解所有小于 1 的可能阶?
- 给定差分方程的超越整函数解中，小于 1 的不同阶最多有多少个?

本文利用二项级数回答这三个问题；与 Gundersen 等人 [9]的论文相比，我们采用了不同的表述和方法。我们还回应了 Chiang 和 Feng 在 [7]中提出的关切。此外，对于任意给定的有理数 $0 < \rho < 1$，我们证明可以构造一个带多项式系数的线性差分方程，使其至少有一个阶为 ρ 的超越整函数解。最后，我们给出若干例子来说明所得结果。

2 结果陈述

考虑方程 (1.1)。为方便起见，我们令 $d_j = \deg P_j$。我们定义一个严格递减有限的非负整数数列

$$s_1 > s_2 > \cdots > s_p \geq 0 \tag{2.1}$$

如下。我们选取 s_1，使其为满足下列条件的唯一整数

$$d_{s_1} = \max_{0\leq k\leq m} d_k \quad \text{and} \quad d_{s_1} > d_k \quad \text{for all } 0 \leq k < s_1. \tag{2.2}$$

给定 s_j, $j \geq 1$ 后，我们定义 s_{j+1} 为满足下列条件的唯一整数

$$d_{s_{j+1}} - s_{j+1} > d_{s_j} - s_j \tag{2.3}$$

and

$$d_{s_{j+1}} = \max_{0\leq k<s_j} d_k \quad \text{and} \quad d_{s_{j+1}} > d_k \quad \text{for all } 0 \leq k < s_{j+1}. \tag{2.4}$$

对于某个 p，整数 s_p 将存在，但整数 s_{p+1} 将不存在，而数列 s_1、s_2、.....、s_p 以 s_p 结束。显然，$1 \leq p \leq n$，且 (2.1) 成立。

我们指出，(2.1) 中的整数 s_1、.....、s_p 也可以用以下方式表示:

$$s_1 = \min\left\{j:\ d_j = \max_{0\le k\le m} d_k\right\}$$

并给定 s_j 和 $j \ge 1$，我们定义

$$s_{j+1} = \min\left\{i:\ d_{s_i} - s_i > d_{s_j} - s_j \quad \text{and} \quad d_i = \max_{0\le k< s_j} d_k\right\}.$$

由数列 (2.1) 的定义可知，$d_{s_1} > d_{s_2} > \cdots > d_{s_p}$. 此外，显然

$$d_{s_p} - s_p > \cdots > d_{s_2} - s_2 > d_{s_1} - s_1.$$

相应地，我们定义 $j = 1$、2、.....、$p-1$

$$\rho_j = 1 + \frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j}}{s_j - s_{j+1}} \tag{2.5}$$

当 $p \ge 2$ 时。由 (2.1) 到 (2.5)，我们观察到，对于每个 j，$1 \le j \le p-1$。此外，我们看到

$$1 > \rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_p > 0.$$

为了回答第1节中的四个问题，我们将结果陈述如下

定理 2.1 假设 $p = 1$。差分方程 (1.1) 不存在任何具有多项式系数的小于1阶超越整函数解。

定理 2.2 若 $p \ge 2$，则差分方程 (1.1) 至少存在一个阶小于 1 的超越整函数解。此外，存在至少一个且至多 $(d_{s_{j+1}} - s_{j+1})$ 个 $-(d_{s_j} - s_j)$ 阶小于 1 的线性无关解，它们是具有多项式系数的差分方程 (1.1) 的解，并且对于 $j = 1, 2, \ldots, p-1$，有 $\rho(f) = \rho_j$。

由定理 2.1 和定理 2.2 可得以下推论。

推论2.3 差分方程 (1.1) 至少存在一个阶小于 1 的超越整函数解，当且仅当 $p \ge 2$。

推论2.4 若 $p \ge 2$，则差分方程 (1.1) 至多存在 $(s_1 - s_p)$ 个 $-(d_{s_1} - d_{s_p})$ 阶小于 1 的超越整函数解。

推论2.5 差分方程（1.1）不存在阶为 ρ（f）$= 0$的超越整函数解 f。

3 二项级数

我们回顾并研究二项级数的性质， [11], [12]。定义$z^{\underline{0}} = 1$ 和

$$z^{\underline{n}} = z(z-1)\cdots(z-n+1) = n!\binom{z}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.1}$$

这称为下降阶乘。于是得到

$$\Delta z^{\underline{n}} = (z+1)^{\underline{n}} - z^{\underline{n}} = n z^{\underline{n-1}}, \tag{3.2}$$

这在微分学中对应于 $(z^n)' = nz^{n-1}$ 。考虑如下形式的形式级数

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

对于固定的 z，如果 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z^{\underline{n}}|$ 收敛，则称 (3.3) 中的 $Y(z)$ 在 z处绝对收敛。将 $Y(z)$ 的极限函数记为 $y(z)$。设 $\{\alpha_n\}$ 是满足 $|\alpha_n| \to 0$的数列。我们定义一个关于 $\{\alpha_n\}$的量如下

$$\chi(\{\alpha_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{-\log |\alpha_n|}. \tag{3.4}$$

在 [11] 中，我们考察复数域中二项级数的性质，并讨论二项级数的收敛判据与整函数增长级之间的关系。我们的结果陈述如下。

定理 B *[11,* 定理 1。*1]* 设 $\chi(\{a_n\}) < 1$。则由 (3.3) 给出的形式级数 $Y(z)$ 在 $\mathbb{C}$的每个紧子集上一致收敛于 $y(z)$。此外， $y(z)$ 的增长级与 $\chi(\{a_n\})$ 相同。

我们将差幂函数定义为

$$z^{\underline{\rho}} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\rho)} \tag{3.5}$$

对于任意 $\rho \in \mathbb{C}$，可得

$$\begin{aligned}\Delta z^{\underline{\rho}} &= \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z+2-\rho)} - \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\rho)} = \left(\frac{z+1}{z+1-\rho} - 1\right)\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\rho)} \\ &= \rho \frac{\Gamma(z+1)}{(z+1-\rho)\Gamma(z+1-\rho)} = \rho z^{\underline{\rho-1}}.\end{aligned}$$

当 $\rho \in \mathbb{N}^+$ 时，这就是下降阶乘 (3.1) 的定义。考虑形式解 (1.1)，其形式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n+\rho}}, \tag{3.6}$$

其中 $\rho \in \mathbb{C}$ 且 $a_n \in \mathbb{C}$，对于 $n = 0$，1，.....。我们注意到

$$z^{\underline{n+\rho}} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-n-\rho)} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\rho)}(z-\rho)^{\underline{n}} = z^{\underline{\rho}}(z-\rho)^{\underline{n}}.$$

因此，根据.....，级数 (3.3) 收敛当且仅当级数 (3.6) 收敛

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n+\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{\rho}}(z-\rho)^{\underline{n}} = z^{\underline{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\rho)^{\underline{n}}.$$

下面的引理讨论下降阶乘与差幂函数的乘积。

引理 3.1 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\rho \in \mathbb{C}$，有

$$z^{\underline{m}} z^{\underline{\rho}} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+m-j}}.$$

证明。我们通过归纳法证明这一引理。当 $m = 1$ 时，有

$$z z^{\underline{\rho}} = (z-\rho) z^{\underline{\rho}} + \rho z^{\underline{\rho}} = (z-\rho)\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\rho)} + \rho z^{\underline{\rho}} = z^{\underline{\rho+1}} + \rho z^{\underline{\rho}}.$$

假设当 $m = k$ 时该断言成立。注意到

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q-1} = \binom{p+1}{q}$$

for 任意 p、$q \in \mathbb{N}^+$ 和 $p \le q$，这称为帕斯卡法则。如果 $m = k+1$，则 n

$$\begin{aligned}
z^{\underline{k+1}} z^{\underline{\rho}} &= (z-k)\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j}} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \rho^{\underline{j}} \left(z^{\underline{\rho+k-j+1}} + (\rho-j) z^{\rho+k-j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j+1}} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \rho^{\underline{j+1}} z^{\underline{\rho+k-j}} \\
&= z^{\underline{\rho+k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j+1}} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j+1}} + \rho^{\underline{k+1}} z^{\rho} \\
&= z^{\underline{\rho+k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j+1}} + \rho^{\underline{k+1}} z^{\rho} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \rho^{\underline{j}} z^{\underline{\rho+k-j+1}}.
\end{aligned}$$

因此，我们证明了所述结论。 □

4 线性差分方程解的渐近行为

本节回顾线性差分方程解的渐近行为的基本定理。差分方程领域的研究者普遍认为，庞加莱定理´ [20] 开创了线性差分方程定性理论的研究，参见 [8, 第 8 节2]或 [13, 第 5 节3]。1885 年，法国数学家 H. 庞加莱´研究了以下形式的线性差分方程

$$x(n+k)+p_1(n)x(n+k-1)+\cdots+p_k(n)x(n)=0 \tag{4.1}$$

使得存在实数 p_i、 $1\le i\le k$、 $k\in\mathbb{N}^+$，满足

$$\lim_{n\to\infty}p_i(n)=p_i,\qquad 1\le i\le k. \tag{4.2}$$

满足条件 (4.2) 的形式为 (4.1) 的方程称为庞加莱型差分方程。与 (4.1) 对应的特征方程为

$$\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+\cdots+p_k=0. \tag{4.3}$$

庞加莱定理。假设条件 (4.2) 成立，且 (4.3) 的特征根 λ_1、 λ_2、...、 λ_k 的模互不相同。如果 $x(n)$ 是 (4.1) 的一个解，那么要么对所有充分大的 n ， $x(n)=0$ ，要么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)}=\lambda_i \tag{4.4}$$

对于某些 i、 $1\le i\le k$。

注意，庞加莱定理并未说明每个特征根 λ_i是否都能写成形式 (4.4)。1909 年，O. Perron 在 [17] 中对这个问题给出了肯定的回答。

Perron第一定理。假设对所有 $n\in\mathbb{N}^+$， $p_k(n)\neq 0$ ，且 Poincar´e 定理的假设成立。那么，方程 (4.1) 的一个基本解组 $\{x_1(n)\ x_2(n)\ldots,x_k(n)\}$ 满足以下性质

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_i(n+1)}{x_i(n)}=\lambda_i,\quad 1\le i\le k.$$

后来，Perron 在 [18] 中证明了一种不同类型的渐近结果，该结果不受特征方程 (4.3) 的根的任何限制。

Perron第二定理：假设对所有 $n\in\mathbb{N}^+$， $p_k(n)\neq 0$ ，且 (4.3) 成立。则 (4.2) 有一个由 (4.1) 的解 $\{x_1(n)\ x_2(n)\ldots,x_k(n)\}$ 构成的基本解组，具有如下性质

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_i(n)|}=\lambda_i,\quad 1\le i\le k.$$

2002 年，Pituk [19] 得到了一个结果。与 Poincar´e 定理中的情形类似，该结果不对 $p_k(n) \neq 0$ 作出假设。

Pituk 定理 假设条件 (4.2) 成立。如果 $x(n)$ 是 (4.1) 的解，那么对于所有充分大的 n，要么 $x(n) = 0$，要么

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = \lambda$$

is 等于特征方程 (4.3) 的某个根的模).

关于解的渐近行为的这篇重要论文出自 C.R. Adams[1]。我们利用他论文中的结果得到形式级数解的主项。我们重点研究线性差分方程解的渐近行为

$$p_0(n)x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0 \tag{4.5}$$

其系数函数可表示为以下形式

$$p_i(n) = a_{i0} + a_{i1}n^{-1} + a_{i2}n^{-2} + \cdots$$

对于所有充分大的 n，且其特征方程为

$$a_{00}\lambda^k + a_{10}\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1,0}\lambda + a_{k0} = 0. \tag{4.6}$$

已知 (4.5) 有 k 个线性无关解。下面简要概述 Adams 的结果中关于如何计算形式解主项的内容，这足以帮助我们在第 5 节考察二项级数的行为。

情形 1（$a_{00} \neq 0$ 和 $a_{k0} \neq 0$）。对于（4.6）中重数为 $m \geq 1$ 的根 λ，存在 m 个如下形式的线性无关形式级数

$$x(n) \sim \lambda^n n^r e^{L(n)}, \tag{4.7}$$

其中 r 是常数，$L(n)$ 是一个关于 $n^{1/j}$ 的多项式，其系数在不同级数中各不相同，次数至多为 $j-1$，其中某个 $j \leq m$。显然，对于特征方程（4.6），存在 k 个形如（4.7）的线性无关形式解。

情形 2（一个或两者均为 $a_{00}, a_{k0} = 0$）。将 $p_i(n)$（$i = 0, 1, \ldots, k$）中的首个非零系数记为 a_{i,j_i}，并以 $i-$ 和 $j-$ 为坐标轴，按图 1 绘出点 (i, j_i)。构造向上凸的折线 L，使每条线段的两个端点都是点集 (i, j_i) 中的点，且点集中的所有点都位于折线上或折线下方，参见例如 [1, P. 511]。设任一此类线段 L 的斜率为 μ，位于该线段 L 上或下方的点 (i, j_i) 的数量为 ν。则与该线段 L 相关联的特征方程的次数为 $\nu - 1$。与线段 L 相关联的线性无关形式解有 $\nu - 1$ 个，其形式如下

$$x(n) \sim n^{-\mu n} e^{\mu n} \lambda^n e^{L(n)} n^r, \tag{4.8}$$

其中，λ 是与该线段 L相关联的特征方程的根，r 是常数，而 $L(n)$ 是关于 $n^{1/j}$ 的多项式，其系数在不同级数中各不相同，次数至多为 $j-1$，其中 $j \leq \nu - 1$。显然，这几个特征方程的次数之和为 k。显然，差分方程（4.5）有 k 个形式为（4.8）的线性无关形式解。

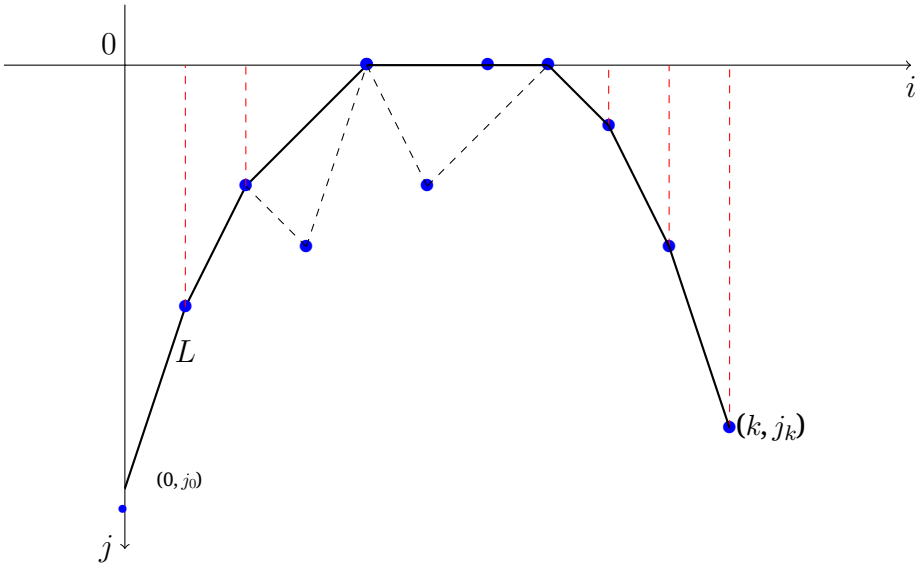


图 1：线性差分方程的凸曲线

这里我们指出，对于本文而言，形式为 (4.7) 或 (4.8) 的差分方程 (4.1) 的解的渐近行为已足够，但对于渐近分析而言则不够。事实上，已有许多论文介绍如何计算形式级数解的系数。更多详情请参阅 [1], [2, 3], [4]，二阶情形请参阅 [23]。

5 主要定理的证明

我们假设 (1.1) 存在如下形式的形式解

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}}.$$

显然，对于任意给定的 $j > 0$，我们有

$$\Delta^j f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} z^{\underline{n}}.$$

对于任意给定的 j, $j = 0, 1, \ldots, m$，我们假设多项式 P_j 的形式为

$$P_j(z) = A_{j,d_j} z^{\underline{d_j}} + A_{j,d_j-1} z^{\underline{d_j-1}} + \cdots + A_{j,1} z + A_{j,0},$$

其中 $A_{j,\ i} \in \mathbb{C}$ 对于 $0 \le i \le d_j$，且 $A_{j,\ d_j} \neq 0$。因此，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} P_j(z)\Delta^j f(z) &= \left(\sum_{t=0}^{d_j} A_{j,t} z^{\underline{t}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} z^{\underline{n}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{d_j}\sum_{k=0}^{t} a_{n+j} A_{j,t}\binom{t}{k}(n+j)^{\underline{k+j}} z^{\underline{n+t-k}}. \end{aligned}$$

因此，由 (1.1) 可得

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{d_j}\sum_{k=0}^{t} a_{n+j} A_{j,t}\binom{t}{k}(n+j)^{\underline{k+j}} z^{\underline{n+t-k}} = 0. \tag{5.1}$$

在 (5.1) 中令 $i = t-k$，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \sum_{t=0}^{d_j}\sum_{k=0}^{t} A_{j,t}\binom{t}{k} n^{\underline{k}} z^{\underline{n+t-k}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \sum_{t=0}^{d_j}\sum_{i=0}^{t} A_{j,t}\frac{\Delta^i(n^{\underline{t}})}{i!} z^{\underline{n+i}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \sum_{i=0}^{d_j}\sum_{t=i}^{d_j} \frac{\Delta^i(A_{j,t}n^{\underline{t}})}{i!} z^{\underline{n+i}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \sum_{i=0}^{d_j} \frac{\Delta^i(P_j(n))}{i!} z^{\underline{n+i}} = 0. \end{aligned}$$

现在，我们假设 $d = \max_{0\le j\le m}\{d_j\}$，并将其化为

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{d} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \frac{\Delta^i(P_j(n))}{i!} z^{\underline{n+i}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{d}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j}(n+j)^{\underline{j}} \frac{\Delta^i(P_j(n))}{i!} z^{\underline{n+i}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{d}\sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}} \frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!} z^{\underline{n}} \\ =&\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{n=0}^{d-1}\sum_{i=0}^{n} + \sum_{n=d}^{\infty}\sum_{i=0}^{d}\right) a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}} \frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!} z^{\underline{n}} \\ =&\left(\sum_{n=0}^{d-1}\sum_{i=0}^{n} + \sum_{n=d}^{\infty}\sum_{i=0}^{d}\right)\sum_{j=0}^{m} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}} \frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!} z^{\underline{n}} = 0. \end{aligned}$$

由于对于不同的 n，$z^{\underline{n}}$ 在周期为一的周期域上是线性无关的，因此

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}}\frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!}=0 \quad \text{for} \quad n<d, \tag{5.2}$$

and

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{m} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}}\frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!}=0 \quad \text{for} \quad n\geq d. \tag{5.3}$$

我们根据 (5.3) 考察 a_n 在 n趋于无穷大时的渐近行为，并忽略 (5.2)。假设当 $\alpha<0$时， $\Delta^\alpha f(z)=0$。因此，我们将 (5.3) 写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{m} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}}\frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!}\\
=&\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{d} a_{n-i+j}(n-i+j)^{\underline{j}}\frac{\Delta^i(P_j(n-i))}{i!}\\
=&\sum_{j=0}^{m}\sum_{t=-j}^{d-j} a_{n-t}(n-t)^{\underline{j}}\frac{\Delta^{t+j}(P_j(n-j-t))}{(t+j)!}\\
=&\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=-m}^{d} a_{n-i}(n-i)^{\underline{j}}\frac{\Delta^{i+j}(P_j(n-j-i))}{(i+j)!}\\
=&\sum_{i=-m}^{d} a_{n-i}\sum_{j=0}^{m}(n-i)^{\underline{j}}\frac{\Delta^{i+j}(P_j(n-j-i))}{(i+j)!}.
\end{aligned}$$

令

$$Q(n,i)=\sum_{j=0}^{m}\frac{(n-i)^{\underline{j}}}{(i+j)!}\Delta^{i+j}(P_j(n-j-i))$$

当 $i=-m,\dots,d$ 时。我们看到， a_n 满足一个 $m+d$ 阶递推关系

$$a_{n+m}Q(n,-m)+a_{n+m-1}Q(n,-m+1)+\cdots+a_{n-d}Q(n,d)=0. \tag{5.4}$$

接下来，我们将寻找 (5.4) 的线性无关渐近解。定理的证明在很大程度上依赖于线性差分方程解的渐近行为。

5.1 定理 2.1 的证明

假设 $p=1$。由于 $d_{s_1}\geq d_k$ 对于 $k\geq s_1$ 成立，且 $d_{s_1}>d_k$ 对于 $0\leq k<s_1$ 成立，我们有

$$\deg Q(n,k)\leq d_{s_1}-k \qquad \text{for} \qquad -m\leq k<d_{s_1}-s_1 \tag{5.5}$$

且 $\deg Q(n,d_{s_1}-s_1)=s_1$，并且

$$Q(n,k)=0 \qquad\qquad \text{for} \quad d_{s_1}-s_1<k\leq d.$$

我们将 (5.4) 改写为

$$a_{n+m}Q(n,-m)+a_{n+m-1}Q(n,-m+1)+\cdots+a_{n-(d_{s_1}-s_1)}Q(n,d_{s_1}-s_1)=0. \tag{5.6}$$

我们用一个满足 $-m\le\xi\le d$ 的指标 ξ 表示，使得对于 $\xi>k$，$\deg Q(n,\xi)>\deg Q(n,k)$；对于 $-m\le k\le d$，$\deg Q(n,\xi)\ge\deg Q(n,k)$。显然，$\xi\ge -s_1$。将 (5.6) 两边同时除以 $Q(n,\xi)$，可将 (5.6) 写为

$$a_{n+m}A_0(n)+a_{n+m-1}A_1(n)+\cdots+a_{n-(d_{s_1}-s_1)}A_{m+d_{s_1}-s_1}(n)=0, \tag{5.7}$$

其中

$$A_i(n)=A_{i,0}+A_{i,1}n^{-1}+A_{i,2}n^{-2}+\cdots$$

对于 $i=0,1,\dots,m+d_{s_1}-s_1$。我们用 $A_{i,\ j_i}$ 表示 $i=0,1,\dots,m+d_{s_1}-s_1$ 时 A_i 中的第一个非零系数。选取 i 轴和 j 轴，绘出点 (i,j_i)。构造一条凸线段 L，使其两端均为点集 (i,j_i) 中的点，并且该点集中的所有点都位于该线段上或其下方。显然，这些线段的数量不超过 $m+d_{s_1}-s_1$。这些线段依次记为 $L_1,L_2,\dots$，其斜率依次记为 $\mu_1,\mu_2,\dots$，这些斜率均为有理数。与这些线段对应的特征方程的次数依次记为 $\nu_1,\nu_2,\dots$。此外，从左到右，点 $(0,j_0)$ 为起点，点 $(m+d_{s_1}-s_1,j_{m+d_{s_1}-s_1})$ 为终点，见图 1。

从 构造凸线可知，μ_t 在 t时递增，并且

$$j_i=\deg Q(n,\xi)-\deg Q(n,i-m)$$

对于 $i=0$，1，...，$m+d_{s_1}-s_1$。设最后一条线段记为 L_χ，它连接点（t，j_t）和（$m+d_{s_1}-s_1$，$j_{m+d_{s_1}-s_1}$）。因此，由（5.5）可得

$$\begin{aligned}\mu_\chi&=\frac{\deg Q(n,t-m)-\deg Q(n,d_{s_1}-s_1)}{(m+d_{s_1}-s_1)-t}\\&\le\frac{(d_{s_1}-(t-m))-s_1}{(m+d_{s_1}-s_1)-t}\\&=1.\end{aligned}$$

这说明所有线段的斜率均不大于 1。由 [1],，对任意 $j=1$，2，...，χ，可知存在 ν_j 个线性无关形式解，它们对应于（5.7）的线段 L_j，形式为

$$a_{n,j}\sim n^{-\mu_j n}e^{\mu_j n}\lambda_j^n e^{L_j(n)}n^{r_j}\qquad\text{as}\quad n\to\infty,$$

其中 λ_j 是与该线段 L_j 对应的特征方程的一个根，r_j 是常数，而 L_j（n）是关于 $n^{1/j}$ 的多项式，其系数在不同级数中各不相同，次数至多为 $j-1$，其中某个 $j\le\nu_j$。因此，我们化简

$$\chi(\{a_n,j\})=\limsup_{n\to\infty}\frac{n\log n}{-\log|a_{n,j}|}=\frac{1}{\mu_j}\ge 1$$

对于 $j=1$、2、.....、χ。由定理 B 和 [11, 推论 A，1], 我们得到 f不可能是小于1阶的整函数。由此证明了我们的断言。□

5.2 定理2.2的证明

为了证明定理 2.2，我们接下来用 [1] 中的方法，寻找方程 (5.4) 的所有线性无关渐近解。由于关系式 (2.2) 至 (2.4) 成立，我们有

$$\begin{aligned}
&\deg Q(n,k) \le d_{s_1} - k && \text{for} && -m \le k < d_{s_1} - s_1;\\
&\deg Q(n,k) = s_j && \text{for} && k = d_{s_j} - s_j;\\
&\deg Q(n,k) \le d_{s_{j+1}} - k && \text{for} && d_{s_j} - s_j < k < d_{s_{j+1}} - s_{j+1};\\
&Q(n,k) = 0 && \text{for} && d_{s_p} - s_p < k \le d.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

将 (5.4) 改写为

$$a_{n+m}Q(n,-m) + a_{n+m-1}Q(n,-m+1) + \cdots + a_{n-(d_{s_p}-s_p)}Q(n,d_{s_p}-s_p) = 0. \tag{5.9}$$

众所周知，(5.9) 有 $m + d_{s_p} - s_p$ 个线性无关解。令

$$a_{n+m} = \frac{x(n)}{[(n+m)!]^{\mu}},$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$。那么 $x(n)$ 满足递推关系

$$x(n)T(n,\mu,0) + x(n-1)T(n,\mu,1) + \cdots + x(n-(d_{s_p}-s_p))T(n,\mu,d_{s_p}-s_p) = 0, \tag{5.10}$$

其中

$$T(n,\mu,i) = Q(n,i-m)[(n+m)^{\underline{i}}]^{\mu}$$

当 $i = 0$ 为 $1, \ldots, m+d_{s_p}-s_p$ 时。$T(n,\mu,i)$ 关于 n 的最高次幂记作 $\deg T(n,\mu,i)$。显然，

$$\deg T(n,\mu,i) = \deg Q(n,i-m) + i\mu$$

对于 $i = 0$，1，...，$m + d_{s_p} - s_p$。由于我们假设 $p \ge 2$，对于给定的 $j = 1$，2，...，$p-1$，以及任意 $\mu > 1$，由 (5.8) 可得

$$\begin{aligned}
&\deg T(n,\mu,m+d_{s_{j+1}}-s_{j+1}) > \deg T(n,i) && \text{for} && m + d_{s_j} - s_j < i < m + d_{s_{j+1}} - s_{j+1};\\
&\deg T(n,\mu,m+d_{s_1}-s_1) > \deg T(n,i) && \text{for} && 0 \le i < m + d_{s_1} - s_1.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

现在令 $\mu_j = 1/\rho_j$ 对于 $j = 1$，2，...，$p-1$，我们有

$$\deg T(n,\mu_j,m+d_{s_j}-s_j) = \deg T(n,\mu_j,m+d_{s_{j+1}}-s_{j+1}) \tag{5.12}$$

对于任意 $j = 1$、2、...、$p-1$。此外，若 $p \ge 3$，则可得，对于任意给定的 $j = 1$、2、...、$p-1$

$$\begin{aligned}
&\deg T(n,\mu_j,m+d_{s_j}-s_j) - \deg T(n,\mu_j,m+d_{s_k}-s_k)\\
=&s_j + (m+d_{s_j}-s_j)\mu_j - s_k - (m+d_{s_k}-s_k)\mu_j\\
=&(s_j - s_k) + (d_{s_j} - s_j + s_k - d_{s_k})\mu_j\\
=&(s_j - s_k)\left(1 - \left(\frac{d_{s_j}-d_{s_k}}{s_k - s_j} + 1\right)\mu_j\right)\\
>&(s_j - s_k)\left(1 - \left(\frac{d_{s_j}-d_{s_{j+1}}}{s_{j+1} - s_j} + 1\right)\mu_j\right)\\
=&(s_j - s_k)(1 - \mu_j/\mu_j)\\
=&0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

当 $j+1 < k \le p$ 时。因此，由 (5.11) 至 (5.13) 可推得，对于给定的 $j = 1$、2、. . .、$p-1$,

$$\deg T(n, \mu_j, m + d_{s_j} - s_j) = \deg T(n, \mu_j, m + d_{s_{j+1}} - s_{j+1}) > \deg T(n, i)$$

对 $i \neq m + d_{s_j} - s_j$ 和 $i \neq m + d_{s_{j+1}} - s_{j+1}$成立。根据 [1], , μ_j 的特征方程为

$$A\gamma^{m+d_{s_j}-s_j} + B\gamma^{m+d_{s_{j+1}}-s_{j+1}} = 0, \tag{5.14}$$

其中 A和 B是常数。方程 (5.14) 存在 $(d_{s_{j+1}} - s_{j+1}) - (d_{s_j} - s_j)$ 个非零单根，记为 $\gamma_{j,\ t}$, 其中 $t = 1, 2, \ldots, (d_{s_{j+1}} - s_{j+1}) - (d_{s_j} - s_j)$。于是，对给定的 $j = 1, 2, \ldots, p-1$，我们至多找到 $(d_{s_{j+1}} - s_{j+1}) - (d_{s_j} - s_j)$ 个 (5.9) 的线性无关解，其渐近行为为

$$a_n^{(j,t)} \sim n^{-\mu_j n} e^{\mu_j n} \gamma_{j,t}^n e^{L_j(n)} n^{r_j},$$

其中 r_j是常数， $L_j(n)$ 是关于 $n^{1/j}$ 的多项式。此外，对于给定的 j =1, 2, . . ., $p-1$，有

$$\chi(\{a_n^{(j,t)}\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n^{(j,t)}|} = \frac{1}{\mu_j} < 1.$$

由定理 B，对于给定的 $j = 1, 2, \ldots, p-1$，我们至多能找到 $(d_{s_{j+1}} - s_{j+1}) - (d_{s_j} - s_j)$ 个方程 (1.1) 的 $\rho_j = 1/\mu_j < 1$ 阶线性无关整函数解。

这里指出，在我们的假设下，阶小于1的超越整函数解至多有 $\sum_{j=1}^{p-1}[(d_{s_{j+1}} - s_{j+1})) - ($ $d_{s_j} - s_j)]$ 个。由 (2.1) 至 (2.4)，可得

$$\sum_{j=1}^{p-1}[(d_{s_{j+1}} - s_{j+1})) - (d_{s_j} - s_j)] = (s_1 - s_p) - (d_{s_1} - d_{s_p}) < m.$$

因此，方程 (1.1) 的其他 $m - [(s_1 - s_p) - (d_{s_1} - d_{s_p})]$ 个在周期为一的周期域上线性无关的解, 不可能是阶小于1的整函数。证明方法和工具与定理 2.1 的证明类似，此处省略细节。因此，我们证明了定理 2.2 的断言。□

6 Enti关于有理增长级介于 0 和 1 之间的解

本节中，我们将构造一个具有多项式系数的线性差分方程 (1.1)，它有一个有理增长级介于 0 和 1 之间的整函数解。

定理 6.1 对任意正有理数 $\lambda < 1$，都存在一个具有多项式系数的线性差分方程 (1.1)，使得 f 是 (1.1) 的一个阶为 $\rho(f) = \lambda$ 的整函数解。

证明。对于任意给定的正有理数 $\lambda < 1$，记作

$$\lambda = \frac{q}{p},$$

其中 p 和 q 是互质的正整数，且满足 $q < p$。我们设一个线性差分方程

$$A_p z^{\underline{p}} \Delta^p f(z-p) + \cdots + A_1 z \Delta f(z-1) - A_0 z^{\underline{q}} f(z-q) = 0, \tag{6.1}$$

其中， A_j是 $j = 0$、.....、 p的常数。我们考虑由 (3.6) 给出的形式解 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}}$。由于

$$z^{\underline{k}} \Delta^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-k)^{\underline{n}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{\underline{m}} z^{\underline{n-m+k}}$$

对于任意正整数 k 和 m，将 (6.1) 写为

$$A_p \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{\underline{p}} z^{\underline{n}} + \cdots + A_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{\underline{n}} - A_0 \sum_{n=q}^{\infty} a_{n-q} z^{\underline{n}} = 0. \tag{6.2}$$

因此，我们得到 $a_1 = \cdots = a_{q-1} = 0$ 和

$$f(n) a_n = a_{n-q}$$

对于 $n \geq q$，其中 $f(n) = (A_p n^{\underline{p}} + \cdots + A_1 n)/A_0$。因此，令 $n = qt$，可知当 $t \in \mathbb{N}$ 时 $a_{qt-1} = \cdots = a_{qt-q+1} = 0$，并得到

$$f(qt) a_{qt} = a_{q(t-1)}. \tag{6.3}$$

现在令 $f(qt) = (pt)^{\underline{p}}$，也就是说，我们选择 A_0、.....、 A_p，使得

$$\frac{A_p n^{\underline{p}} + \cdots + A_1 n}{A_0} = \left(\frac{n}{\lambda} \right)^{\underline{p}}. \tag{6.4}$$

由 (6.4) 易知 $A_0/A_p = \lambda^p$。由 (6.3) 可得

$$a_{qt} = \frac{a_{q(t-1)}}{(pt)^{\underline{p}}} = \frac{a_{q(t-2)}}{(pt)^{\underline{p}} (p(t-1))^{\underline{p}}} = \cdots = \frac{a_0}{(pt)!}.$$

这意味着 f 具有如下形式

$$f(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_0}{(pt)!} z^{\underline{qt}}.$$

根据定理 B，形式解收敛为一个阶为 $\lambda = q/p$ 的整函数，因为

$$\chi(\{a_{qt}\}) = \limsup_{t \to \infty} \frac{qt \log(qt)}{-\log(pt)!} = \frac{q}{p} = \lambda < 1. \tag{6.5}$$

至此，我们证明了 (6.1) 存在一个阶为 λ 的整函数解。我们在 (6.1) 中用 $z+q$ 替换 z，并使用公式

$$\Delta^m f(z+k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!} (-1)^j \sum_{i=0}^{k+m-j} \frac{(k+m-j)!}{i!(k+m-j-i)!} \Delta^i f(z), \tag{6.6}$$

对于非负整数 m 和 k。于是我们得到一个形如 (1.1) 的差分方程。

□

7 个例子

本节给出若干例子来说明我们的定理。

例 1 在 [12, 备注 6.3] Ishizaki 和 Yanagihara 指出，差分方程存在一个阶为 $\rho(f) = 1/3$ 的超越整函数解 f：

$$(6z^2 + 19z + 15)\Delta^3 f(z) + (z+3)\Delta^2 f(z) - \Delta f(z) - f(z) = 0. \tag{7.1}$$

由定理 2.1 至 2.2 可知，$p = 2$、$s_1 = 3$ 和 $s_2 = 0$。因此，(7.1) 至少存在一个阶为 $\rho(f) < 1$ 的超越整函数解。此外，阶只有一种可能，即 $\rho_1 = 1/3$，且阶为 $\rho(f) = 1/3$ 的整函数解有一个。

此外，假设 (7.1) 有一个形式解

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n+\rho}}.$$

将其代入 (7.1)，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
&6\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+\rho)^{\underline{3}}a_{n+1}z^{\underline{n+\rho}} + 12\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2+\rho)^{\underline{4}}a_{n+2}z^{\underline{n+\rho}} + 6\sum_{n=-3}^{\infty}(n+3+\rho)^{\underline{5}}a_{n+3}z^{\underline{z+\rho}}\\
&+25\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2+\rho)^{\underline{3}}a_{n+2}z^{\underline{n+\rho}} + 25\sum_{n=-3}^{\infty}(n+3+\rho)^{\underline{4}}a_{n+3}z^{\underline{n+\rho}}\\
&+15\sum_{n=-3}^{\infty}(n+3+\rho)^{\underline{3}}a_{n+3}z^{\underline{n+\rho}} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+\rho)^{\underline{2}}a_{n+1}z^{\underline{n+\rho}} + \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2+\rho)^{\underline{3}}a_{n+2}z^{\underline{n+\rho}}\\
&+3\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2+\rho)^{\underline{2}}a_{n+2}z^{\underline{n+\rho}} - \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+\rho)a_{n+1}z^{\underline{n+\rho}} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n z^{\underline{n+\rho}} = 0.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
Q_1(n,\rho) &= 6(n+\rho)^{\underline{5}} + 25(n+\rho)^{\underline{4}} + 15(n+\rho)^{\underline{3}};\\
Q_2(n,\rho) &= 12(n+\rho)^{\underline{4}} + 26(n+\rho)^{\underline{3}} + 3(n+\rho)^{\underline{2}};\\
Q_3(n,\rho) &= 6(n+\rho)^{\underline{3}} + (n+\rho)^{\underline{2}} - (n+\rho),
\end{aligned}$$

我们有

$$-a_n + Q_3(n+1,\rho)a_{n+1} + Q_2(n+2,\rho)a_{n+2} + Q_1(n+3,\rho)a_{n+3} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq -3, \tag{7.2}$$

其中，当 $j < 0$ 时，$a_j = 0$。因此，由此可得 $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 2$, $\rho_4 = 4/3$ 和$\rho_5 = 3/2$，如果 $n = -3$ 在（7.2）中。我们记

$$\begin{aligned}
A_n(\rho) =&(n+\rho+2)(n+\rho+1)(2n+2\rho+1)(3n+3\rho+2)a_{n+2}\\
&+(n+\rho+1)(n+\rho)(6n+6\rho-5)a_{n+1} - a_n
\end{aligned}$$

对于 $n \geq 0$，则由 (7.2) 得

$$(n+\rho+1)A_{n+1}(\rho) + A_n(\rho) = 0.$$

若设 $A_0(\rho) = 0$，则对于任意 $n \geq 0$，$A_n = 0$。因此可得

$$(n+\rho+2)(n+\rho+1)(2n+2\rho+1)(3n+3\rho+2)a_{n+2}+(n+\rho+1)(n+\rho)(6n+6\rho-5)a_{n+1}-a_n = 0.$$

现在记

$$B_n(\rho) = (n+\rho+1)(2n+2\rho-1)(3n+3\rho-1)a_{n+1} - a_n,$$

于是，

$$(n+\rho+1)B_{n+1}(\rho) + B_n(\rho) = 0.$$

令 $B_n(\rho) = 0$，由此可得，对于任意 $n \geq 0$，都有 $B_n(\rho) = 0$。因此，这表明

$$(n+\rho+1)(2n+2\rho-1)(3n+3\rho-1)a_{n+1} - a_n = 0$$

for $n \geq 0$。由求和公式（例如参见 [13, P. 48],），我们得到

$$a_n = \frac{\Gamma(\rho-1/2)\Gamma(\rho-1/3)a_0}{6^n\Gamma(n+\rho+1)\Gamma(n+\rho-1/2)\Gamma(n+\rho-1/3)}.$$

条件 $A_0(\rho) = B_0(\rho) = 0$ 以及 (7.2) 中的 $n = -2$ 给出 $\rho = 0$、$\rho = 3/2$ 和 $\rho = 4/3$。由此，我们得到以下三个线性无关的解:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n\Gamma(n+1)\Gamma(n-1/2)\Gamma(n-1/3)} z^{\underline{n}}$$

由定理 B 可知，其为阶 $1/3$ 的整函数,

$$f_2(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n\Gamma(n+1)\Gamma(n-1/2)\Gamma(n-1/3)} (z-3/2)^{\underline{n}}$$

是阶为 1 且有无穷多个极点的亚纯函数,

$$f_3(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-1/3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n\Gamma(n+1)\Gamma(n-1/2)\Gamma(n-1/3)} (z-4/3)^{\underline{n}}$$

是阶为 1 且有无穷多个极点的亚纯函数。我们声称，f_1、f_2 和 f_3 在周期为1的周期域上线性无关。

例 2 借助定理 6.1 证明中的方法，我们构造一个具有阶为 $3/4$ 的整函数解的差分方程。现在考虑一个四阶、具有多项式系数的线性差分方程

$$\begin{aligned}&(256z^3+1920z^2+4656z+3640)\Delta^4 y(z) + (384z^2+1760z+1944)\Delta^3 y(z)\\ &\quad -(80z+120)\Delta^2 y(z) - (81z^2+405z+446)\Delta y(z) - (81z^2+405z+486)y(z) = 0. \quad (7.3)\end{aligned}$$

设 $k \in \mathbb{N}$。我们使用众所周知的公式

$$f(z+k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j f(z), \quad (7.4)$$

and

$$\Delta^k f(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(z+j). \tag{7.5}$$

注意，(6.6) 是由 (7.4) 和 (7.5) 得到的。方程 (7.3) 推导自以下差分方程

$$\begin{aligned} 256z(z-1)(z-2)\Delta^4 y(z-3) + 384z(z-1)\Delta^3 y(z-2) \\ - 80z\Delta^2 y(z-1) + 40\Delta y(z) - 81z(z-1)y(z-2) = 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

事实上，在 (7.6) 中用 $z+3$ 替换 z，我们得到

$$\begin{aligned} &(256z^3 + 1920z^2 + 4656z + 3640)y(z+4) - (1024z^3 + 7296z^2 + 16864z + 12616)y(z+3) \\ &+ (1536z^3 + 10368z^2 + 22576z + 15888)y(z+2) - (1024z^3 + 6609z^2 + 13589z + 8934)y(z+1) \\ &+ (256z^3 + 1536z^2 + 2816z + 1536)y(z) = 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

将 (7.4) 应用于 (7.7)，我们得到 (7.3)。考虑一个解 $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}}$。注意 (7.6) 中的第一项，有

$$\begin{aligned} z(z-1)(z-2)\Delta^4 y(z-3) &= z(z-1)(z-2)\Delta^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3)^{\underline{n}} \right) \\ &= z(z-1)(z-2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n (z-3)^{\underline{n-4}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n z^{\underline{n-1}} = \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)n(n-1)(n-2) a_{n+1} z^{\underline{n}} \end{aligned}$$

类似地，我们计算 (7.6) 中的其他项，得到

$$\begin{aligned} &256 \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)n(n-1)(n-2) a_{n+1} z^{\underline{n}} + 384 \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)n(n-1) a_{n+1} z^{\underline{n}} \\ &- 80 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} z^{\underline{n}} + 40 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^{\underline{n}} - 81 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{\underline{n}} = 0, \end{aligned}$$

由此可得 $a_1 = a_2 = 0$，且对于 $n \geq 3$

$$8(n+1)(2n-1)(4n-5)(4n+1) a_{n+1} - 81 a_{n-2} = 0. \tag{7.8}$$

因此我们看到，对于 $k \in \mathbb{N}$，有 $a_{3k-2} = a_{3k-1} = 0$，并且

$$a_{3(k+1)} = \frac{a_{3k}}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}. \tag{7.9}$$

这意味着 $y(z)$ 可以写成

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{(4k)!} z^{\underline{3k}}.$$

根据定理 B，形式解收敛为一个阶为 $3/4$ 的整函数，因为 $\chi(\{a_{3k}\}) = \limsup_{k\to\infty} 3k\log(3k)/(-\log((4k)!) = 3/4 < 1$。

观察与 (7.3) 对应的牛顿多边形，其中包含 $m = 4$、$d_4 = 3$、$d_3 = 2$、$d_2 = 1$、$d_1 = 2$ 和 $d_0 = 2$，由此得到 $p = 2$、$s_1 = 4$ 和 $s_2 = 0$。因此，我们通过 (2.5) 确认了 $\rho = 3/4$。我们计算与 (5.9) 对应的递推关系如下:

$$a_{n+4}Q(n,-4) + a_{n+3}Q(n,-3) + \cdots + a_{n-2}Q(n,2) = 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
&Q(n,-4) = 8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+5)(4n+7)(4n+13)\\
&Q(n,-3) = 24(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)(4n+3)(4n+9)\\
&Q(n,-2) = 24(n+1)(n+2)(2n+1)(4n-1)(4n+5)\\
&Q(n,-1) = (n+1)(256n^3 - 465n^2 - 357n - 446)\\
&Q(n,0) = -243(n+1)(n+2), \quad Q(n,1) = -243(n+1), \quad Q(n,2) = -81,
\end{aligned}$$

由此得到与 (5.10) 对应的递推关系。根据第 4 节所述的首个非零系数，我们得到点 $(i,\ j_i)$、$i = 0$、1、. . .、6，分别为 (0, 0)、(1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 5)、(5, 6)、(6, 7)。凸折线上从 (3, 3) 到 (6, 7) 的线段斜率意味着其阶为 $3/4$。

例 3 我们给出一个差分方程，它具有两个阶数不同且小于1阶的超越整函数解 $d(z)$ 和 $h(z)$；该方程是对 [12,例 6.1] 的修改。首先，我们采用例 1 中的 (7.1)，它给出了一个阶为 $\rho(f) = 1/3$ 的超越整函数解 $f(z)$。事实上，写作 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，我们有

$$n(2n-3)(3n-4)\alpha_n = \alpha_{n-1}. \tag{7.10}$$

这意味着 $\chi(\{\alpha_n\}) = 1/3$，而定理 B 得出 $\rho(f) = 1/3$，参见例 1 的情形 f_1。

设 $g(z) = zf(z)$。则 $\rho(g) = 1/3$，通过直接计算可知，$g(z)$ 满足如下形式的方程

$$\begin{aligned}
L_3[g(z)] = {}&(6z^5 + 37z^4 + 84z^3 + 83z^2 + 30z)\Delta^3 g(z)\\
&- (17z^4 + 68z^3 + 87z^2 + 36z)\Delta^2 g(z) + (33z^3 + 97z^2 + 66z)\Delta g(z)\\
&- (z^3 + 39z^2 + 108z + 72)g(z) = 0.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

接下来考虑一个五阶差分方程 $\sum_{j=0}^{5} c_j^*(z)\Delta^j h(z-j) = 0$，其中 $c_j^*(z) = c_j \cdot z(z-1)\cdots(z-j+1)$，$j = 1$，2，. . .，5，且 $c_5 = 36$, $c_4 = 228$, $c_3 = 271$, $c_2 = 28$,$c_1 = 3$，以及 $c_0^*(z) = c_0 z$, $c_0 = -1$。上面的方程实际上可以写成

$$\begin{aligned}
L_5[h(z)] = {}&(36z^4 + 588z^3 + 3583z^2 + 9653z + 9702)\Delta^5 h(z)\\
&+ (228z^3 + 2594z^2 + 9806z + 12319)\Delta^4 h(z)\\
&+ (271z^2 + 1981z + 3596)\Delta^3 h(z)\\
&+ (28z + 114)\Delta^2 h(z) - 2\Delta h(z) - h(z) = 0.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

观察与 (7.12) 对应的牛顿多边形，其中 $d_5 = 4$, $d_4 = 3$, $d_3 = 2$, $d_2 = 1$,$d_1 = d_0 = 0$。我们有 $s_1 = 5$ 和 $s_2 = 0$，这意味着根据定理 2.2，可能的阶为 $1/5$。此外，我们记 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$。根据 $c_j^*(z)$、$j = 1$、2、. . .、5 和$zh(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\gamma_n + \gamma_{n-1})z^n$ 的定义，我们有

$$n(2n-1)(2n-3)(3n-1)(3n-4)\gamma_n = \gamma_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{7.13}$$

由此可见 $\chi(\{\gamma_n\}) = 1/5$，而定理 B 得出 $\rho(h) = 1/5$。现在定义 $L_8[y(z)] = L_3[L_5[y(z)]]$。经过计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&L_8[y(z)]\\
&=(216z^9 + 7452z^8 + 105678z^7 + 794461z^6 + 3416591z^5 + 8524337z^4\\
&\qquad + 12085315z^3 + 8972550z^2 + 2691000z)\Delta^8 y(z)\\
&\quad + (3348z^8 + 86148z^7 + 870903z^6 + 4406121z^5 + 11934400z^4 + 17615961z^3\\
&\qquad + 13383629z^2 + 4084050z)\Delta^7 y(z)\\
&\quad + (14130z^7 + 248295z^6 + 1591736z^5 + 4758666z^4 + 7634180z^3\\
&\qquad + 6616921z^2 + 2403240z)\Delta^6 y(z)\\
&\quad + (-36z^7 + 14809z^6 + 143264z^5 + 466401z^4 + 1080909z^3 + 1284431z^2\\
&\qquad - 112998z - 698544)\Delta^5 y(z)\\
&\quad - (228z^6 + 3675z^5 + 30092z^4 - 1004z^3 + 285305z^2 + 1168092z\\
&\qquad + 886968)\Delta^4 y(z)\\
&\quad - (277z^5 + 3909z^4 + 16443z^3 + 155801z^2 + 394482z + 258912)\Delta^3 y(z)\\
&\quad - (11z^4 + 280z^3 + 4861z^2 + 12576z + 8208)\Delta^2 y(z)\\
&\quad + (-31z^3 - 19z^2 + 150z + 144)\Delta y(z)\\
&\quad + (z^3 + 39z^2 + 108z + 72)y(z) = 0.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

考察与 (7.14) 对应的牛顿多边形，其中 $d_8 = 9$, $d_7 = 8$, $d_6 = 7$, $d_5 = 7$,$d_4 = 6$, $d_3 = 5$, $d_2 = 4$, $d_1 = 3$ 和 $d_0 = 3$，可得 $p = 3$, $s_1 = 8$, $s_2 = 5$ 和 $s_3 = 0$。显然，小于 1 的可能阶为 $\rho_1 = 1/3$ 和 $\rho_2 = 1/5$。显然，上述 $h(z)$ 是 $L_8[y(z)] = 0$ 的一个阶为 $1/5$ 的超越整函数解。另一个整函数解为 $L_5[d(z)] = g(z)$，其中 $g(z) = zf(z)$ 是上文得到的 $L_3[g(z)] = 0$ 的解。记 $d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n$。由 $zf(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\alpha_n + \alpha_{n-1})z^n$ 及 (7.13)，可得

$$n(2n-1)(2n-3)(3n-1)(3n-4)\delta_n - \delta_{n-1} = \alpha_{n-1} + n\alpha_n. \tag{7.15}$$

记作 $\delta_n = \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}$，得到满足以下条件的 $\{\delta_n\}$

$$n(2n-1)(2n-3)(3n-1)(3n-4)\delta_n^{(1)} - \delta_{n-1}^{(1)} = \alpha_{n-1}, \tag{7.16}$$

$$n(2n-1)(2n-3)(3n-1)(3n-4)\delta_n^{(2)} - \delta_{n-1}^{(2)} = n\alpha_n, \tag{7.17}$$

这给出了 $L_5[d(z)] = g(z)$ 的一个整函数解候选。记 $D_n = \delta_n^{(1)}/\alpha_n$。由 (7.10) 和 (7.16)，

$$(2n-1)(3n-1)D_n = 1 + D_{n-1}.$$

此外，我们定义 $(2n-1)(3n-1)D_n = D'_n$。于是有

$$D'_n = 1 + \frac{1}{(2n-3)(3n-4)} D'_{n-1} = 1 + \frac{1}{(2n-3)(3n-4)} + \frac{1}{(2n-3)(3n-4)(2n-5)(3n-7)} D'_{n-2} = \cdots,$$

这意味着 $D'_n = O(1)$ 和 $1/D'_n = O(1)$ 满足 $n \to \infty$。由此可得 $\delta_n^{(1)} = O(n^{-2})\alpha_n$和 $\alpha_n = O(n^2)\delta_n^{(1)}$。类似地，我们估计 $\delta_n^{(2)}$。由 (7.10) 和 (7.17),

$$(2n-1)(3n-1)E_n = \frac{1}{(2n-3)(3n-4)} + E_{n-1}.$$

此外，我们定义 $(2n-1)(3n-1)E_n = E'_n$ 并令 $E_n = \delta_n^{(2)}/\alpha_n$。于是有

$$E'_n = \frac{1}{(2n-3)(3n-4)} + E'_{n-1} = \frac{1}{(2n-3)(3n-4)} + \frac{1}{(2n-3)(3n-4)(2n-5)(3n-7)} E'_{n-2} = \cdots,$$

这意味着 $E'_n = O(1)$ 满足 $n \to \infty$，因此 $\delta_n^{(2)} = O(n^{-2})\alpha_n$。由于它们均非负，我们看到 $\chi(\{\delta_n\})$ 与 $g(z)$ 的阶相同，而后者又与 $f(z)$ 的阶相同。因此，我们构造出了 $d(z)$，它是 $L_5[d(z)] = g(z)$ 的一个解，其阶与 $f(z)$ 相同。

参考文献

[1] Adams, C. Raymond, 《线性常微分差分方程的非正规情形》。美国数学会汇刊 30 (1928)，第 3 期，507–541。[2] Birkhoff, G. D., 《线性差分方程的一般理论》。美国数学会汇刊 12 (1911)，第 2 期，243–284。[3] Birkhoff, G. D., 《非正规线性差分方程的形式理论》。数学学报 54 (1930)，第 1 期，205–246。[4] Birkhoff, G. D. 和 Trjitzinsky, W. J., 《奇异差分方程的解析理论》。数学学报 60 (1933)，第 1 期，1–89。[5] Chiang, Y.-M. 和 Feng, S.-J., 《关于 $f(z+\eta)$的Nevanlinna特征及复平面上的差分方程》。Ramanujan杂志 16 (2008)，第 1 期，105–129。[6] Chiang, Y.-M.; Feng, S.-J., 《关于亚纯函数的对数差分、差商和对数导数的增长》。美国数学会汇刊 361 (2009)，第 7 期，3767–3791。[7] Chiang, Y.-M. 和 Feng, S.-J., 《关于亚纯函数对数差分的增长及Wiman–Valiron估计》。构造性逼近 44(3) (2016)，313–326。

[8] Elaydi, S.，《差分方程导论》。第三版。Springer，纽约，2005。[9] Gundersen, G. G.; Steinbart, E. M. 和 Wang, S.，《多项式系数线性微分方程解的可能阶数》。美国数学会汇刊 350 (1998)，第 3 期，1225–1247。[10] Ishizaki, K.，《关于差分Riccati方程和二阶线性差分方程》。《数学方程》81 (2011)，185–198。[11] Ishizaki, K. 和 Wen, Z-T.，《二项级数与复差分方程》，《数学分析与应用杂志》497 (2021)，第 1 期，论文编号 124844，共 15 页。[12]Ishizaki, K. 和 Yanagihara, N.，《差分方程的Wiman-Valiron方法》。《名古屋数学杂志》175 (2004)，75–102。[13] Kelley, W. G. 和 A. C. Peterson，《差分方程：导论及其应用》。第二版。Harcourt/Academic Press，圣迭戈，加利福尼亚州，2001。[14] Milne-Thomson, L. M.，《有限差分演算》。Macmillan，伦敦，1933。.[15] N¨orlund, N. E.，《差分演算讲义》。Springer，柏林，1924。[16] Ozawa, M.，《关于素周期整函数的存在性》。《广岛大学数学研讨会报告》29 (1977/78)，第 3 期，308–321。.[17] Perron, O.《关于Poincar´e先生的一个定理》。《纯粹与应用数学杂志》136 (1909)，17–38。.[18] Perron, O.《关于求和方程和Poincar´e型差分方程》。《数学年刊》84 (1921)，第 1–2 期，1–15。[19] Pituk, M.，《关于差分方程的Poincar´e定理和Perron定理的进一步研究》，《差分方程及其应用杂志》8 (2002)，第 3 期，201–216。[20] Poincar´e, H.，《论常微分线性方程与有限差分线性方程》。《美国数学杂志》7 (1885)，第 3 期，203–258。[21] Praagman, C.，《复平面上亚纯线性差分方程的基本解及相关问题》。《纯粹与应用数学杂志》369 (1986)，101–109。[22] Wittich, H.，《单值解析函数的新近研究》。数学及其交叉领域成果，第 8 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1968。[23] Wong, R.; Li, H.，《二阶线性差分方程的渐近展开，II》。《应用数学研究》87 (1992)，第 4 期，289–324。

Katsuya Ishizaki The Open University of Japan,
2-11 Wakaba,Mihama-ku, Chiba,
261- 8586 Japan email:ishizaki@ouj.ac.jp

Zhi-Tao Wen Shantou University,
Department of Mathematics,Daxue Road No. 243,
Shantou 515063, China e-mail:zhtwen@stu.edu.cn