arXiv:2301.06344v1 [math.CO] 16 Jan 2023

树的结构理论 I：树的分支与凝缩

Valentin Goranko[1], RuaanKellerman[2], 和 Alberto Zanardo[3][1]斯德哥尔摩大学， [2]比勒陀利亚大学， [3]帕多瓦大学 valentin.goranko@philosophy.su.se, ruaan.kellerman@up.ac.za, alberto.zanardo@unipd.it

2023年1月18日

摘要

树是这样一种偏序，其中每个元素的前驱构成一个线性有序集。本文开始探索树的结构理论，研究树中不同的分支概念以及凝缩树；凝缩树是指每个节点都是分支节点的树。随后，我们介绍并研究两种不同的树凝缩构造：一种将树缩小为凝缩树，另一种则将树扩展为凝缩树。

1 引言

树是连通的偏序，其中每个元素的前驱（较小元素）构成一个线性序集。在各种广泛的语境中，继线性序之后，树可能是最常见、最自然出现的偏序。树及树状结构不仅出现在离散数学中，也出现在计算机科学（非确定性过程、并发过程和交错过程，迁移系统以及计算树）、哲学（非确定性和分支时间的模型）、博弈论与决策理论（博弈树和决策树），以及理论语言学（句法树和解析树）中。树有着各种应用，并与集合论（[10], [19]）、逻辑学（某些无限树的一元二阶理论的可判定性的 Rabin 定理，参见 [15]）、数学（例如超度量空间理论 [13], [8], [9]）、理论计算机科学（树上的自动机，参见 [1]）、图论和计算复杂性理论（树分解、具有有界树宽的结构以及 Courcelle 定理，参见 [3], [2]）中的深刻而重要的结果密切相关。

一类值得关注且已得到充分研究的树是良基树，这类树主要在集合论背景下进行研究，被视为对序数理论的推广和扩展，参见 [10], [19]。事实上，数学文献中几乎所有关于树的研究都专注于这一类。实际上，出于历史原因和特定应用方面的考虑，良基性假设已被纳入集合论传统中最常采用的树定义，并且通常默认这一假设。

因此，我们必须在此强调，在本研究中，树是指任何满足以下条件的连通偏序：节点的前驱构成线性有序集。我们不假设它们是良基的，也不认为采用这一假设有任何内在理由。事实上，对于上文指出的大多数应用而言，这一假设并无正当依据。因此，我们研究的是一个远大于良基树的偏序类，并且我们采用的是

一般的序理论视角，而非上文提到的特定集合论视角。我们还要强调，良基性假设会对一般理论和树的具体性质产生重大影响。没有这一假设，对树的研究主要仍属于序理论范畴，并以一种颇具挑战性且非平凡的方式拓展了线性序理论，同时又比一般偏序理论具体得多。除了对良基树的研究之外，迄今为止，人们对树的一般性方面鲜有探索；据我们所知，尚无人系统研究树的一般结构理论，更遑论对线性序理论进行如 [16] 中那般全面的探究。

在此，我们开始系统地探索树的结构理论。数学结构类 $\mathcal{C}$ 的结构理论中，一个普遍的方向是，找出具有重要且理想的特定性质的结构，然后发展并研究自然的一般构造，将 $\mathcal{C}$ 中的任意结构转换或分解为具有这些理想性质的结构。本文及其所开启的研究正是遵循这一思路。

三　　项最重要的树及树类的结构特征是：

1. 树中路径（极大链）的序型谱。
2. 树中不同分支节点处的分支度谱。
3. 整棵树的分支结构。

关于这些特征中第一项的先前研究，着重探讨了从线性序到树的性质和结果的传递，包括 [7], [5], [6]。关于分支度的研究包括 [18], [4], [17]。涵盖其中部分结果及更多内容的一般参考文献是 [11]。

本文聚焦于这些特征中的第三项，并从研究树中分支的不同概念以及凝缩树入手，开启对树的一般结构理论的探索。凝缩树是指每个非叶节点都是分支节点的树。我们介绍并探讨树凝缩的两种不同构造：一种是将任意树缩减为其唯一确定的“凝缩”；另一种是将树扩展为一棵凝缩树，其中包含原树所有路径的副本，且不包含其他路径。我们得到若干结果，揭示任意树的结构与其凝缩的结构之间的关系。树凝缩这一概念在某种意义上扩展了 [16], 中定义的线性序凝缩概念；后者是将线性序划分为若干区间后得到的商结构。按照一种自然的同胚概念，凝缩也具有拓扑特征。研究凝缩树的另一个动机在于，其结构理论通常更为简单，因为与非凝缩树相比，凝缩树的路径序型谱及其分支结构都更容易描述。此外，树中的分支和树的凝缩在树的一般理论中都有各种应用，尽管这些应用超出了本文的讨论范围；这里只提及一点：在对某些重要树类的一阶及其他逻辑理论进行公理化，以及证明此类公理化的完备性时，两者都会用到，参见 [11], [6]。

论文结构。第2节介绍必要的术语和记号；第3节定义、比较并研究两种分支概念。随后，我们分别在第4节和第5节定义凝缩树，并研究两种树凝缩概念：一种将树缩减为凝缩树，另一种则将树扩展为凝缩树。最后，我们在第6节作总结性评述，并概述本项目后续的研究方向。

2 预备知识

这里我们定义一些关于树的基本概念，以统一记号和术语。读者也可参阅 [10], [11], 和 [12] ，了解更多细节。

带有严格偏序 $<$ 的有序集（$A;<$）称为向下线性，如果对每个 $x\in A$，集合 $\{y\in A:\ y<x\}$ 都是线性的；称为向下连通，如果对每个 x、$y\in A$，都存在 $z\in A$，使得 $z\leqslant x$ 且 $z\leqslant y$（其中，按通常方式，$x\leqslant y$ 定义为 $x<y$ 或 $x=y$）。森林是向下线性的偏序。树是向下连通的森林[1]。森林 $\mathfrak{F}=$（F; $<$）的子树是其任意一个为树的子结构 $\mathfrak{T}=\left(T;<^{T}\right)$，即其中 T 是 F 的非空向下连通子集，且 $<^{T}$ 是 $<$ 在 T 上的限制。

树（T; $<$）的元素称为节点或点。如果一棵树有一个 $<$-极小节点，那么它是唯一的（由向下连通性可知），称为该树的根。树中 $<$-极大节点（如果存在）称为该树的叶节点。

接下来，我们以任意固定的树 $\mathfrak{T}=(T;<)$ 为基础，定义若干概念和记号。首先，对于任意节点 $t,u\in T$，我们定义 $t\smile u$ 表示 $t<u$ 或 $t=u$ 或 $u<t$。若此条件成立，则称 t 和 u 为可比较节点。若 $t<u$，则按通常方式定义区间 (t,u)、$(t,u]$, $[t,u)$ 和$[t,u]$。例如，若 $t<u$，则 $(t,u]:=\{x\in T:\ t<x\leqslant u\}$，等等。我们还定义集合 $T^{<t}:=\{x\in T:\ x<t\}$, $T^{\leqslant t}:=\{x\in T:\ x\leqslant t\}$, $T^{>t}:=\{x\in T:\ t<x\}$和 $T^{\geqslant t}:=\{x\in T:\ t\leqslant x\}$。对于树 $\mathfrak{T}$ 在这些集合上的相应子结构（作为偏序），我们也将使用类似的记号，例如，$\mathfrak{T}^{<t}$ 表示 $\left(T^{<t};\ <\restriction_{T^{<t}}\right)$，等等。

对于非空子集 A、$B\subseteq T$，当且仅当对所有 $x\in A$ 和 $y\in B$ 都有 $x<y$（分别为 $x\leqslant y$、$x>y$、$x\geqslant y$）时，我们定义 $A<B$（分别为 $A\leqslant B$、$A>B$、$A\geqslant B$）。我们也将 $\{x\}<B$ 写作 $x<B$，其他关系和单元素集同理。接着，我们定义集合 $T^{<A}:=\{x\in T:\ x<A\}$，同样地定义 $T^{\leqslant A}$、$T^{>A}$、$T^{\geqslant A}$。以这些集合为底层集合的 $\mathfrak{T}$ 的子结构分别记为 $\mathfrak{T}^{<A}$、$\mathfrak{T}^{\leqslant A}$、$\mathfrak{T}^{>A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\geqslant A}$。

More ge一般地，给定 T 的任意非空子集 A，$\mathfrak{T}^{A}$ 表示结构（A; $<\restriction_{A}$).

注意，对于任意 $A\neq\emptyset$，$\mathfrak{T}^{<A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\leqslant A}$ 都是线性序；当 A 不是线性有序时，$T^{>A}$ 和 $T^{\geqslant A}$ 为空。一般而言，如果 A 是线性有序的，那么 $\mathfrak{T}^{>A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\geqslant A}$ 是森林；而对于每个节点 t，$\mathfrak{T}^{\geqslant t}$ 都是一棵以 t 为根的树。

树中节点的极大线性有序集称为路径。如果在 $y\in$ A 且 $z<y$ 时有 $z\in$ A，则节点集 A 称为向下封闭；类似地，如果在 $y\in$ A 且 $y<z$ 时有 $z\in$ A，则 A 称为向上封闭。非空、线性有序、向下封闭且有上界的节点集称为茎。注意，路径不能视为茎。路径 A 的非空子集 B 若有下界且在 A 中向上封闭，则称为分支（即，如果 $x\in$ B 且 $y\in$ A，并且 $x<y$，则 $y\in$ B）。包含节点 t（分别包含茎 S）的路径集合记为 Paths_t（分别记为 $\mathsf{Paths}_{\mathsf{S}}$）。

如果在 x、$y\in$ A 且 $x<z<y$ 时有 $z\in$ A，则节点集 A 称为凸集。凸的线性有序节点集称为线段。桥是指非空线段 A，且对每条路径 P，A $\subseteq$ P 或 A $\cap$P 为空集。不是桥的线段 A 称为分叉。注意，每个单元素节点集 $\{t\}$ 都是桥。

节点集合 X 是反链，当且仅当对于所有 $x\neq y$，$x\not\prec y$。请注意，反链 X 与节点的线性有序集合 Y 的交集要么是单元素集，要么是空集。当 X 是（按包含关系）极大反链且 Y 是路径时，后一种情况不会发生。还要注意，树中任意两条不同的路径都相交于一个茎。

[1]请注意，我们并不假设树是良基的，甚至不假设根的存在。

线性序 $(\mathbb{N};<)$、$(\mathbb{Z};<)$、$(\mathbb{Q};<)$ 和 $(\mathbb{R};<)$，其中每种情况下 $<$ 表示该集合上的通常序，分别记作 ω、ζ、η 和 λ。

3 树的分支

3.1 连通分支与分支茎

定义 1 树 $\mathfrak{T}=(T;<)$ 中的两条路径 A_1 和 A_2 在树干 $\mathsf{S}\subseteq\mathsf{A}_1\cap\mathsf{A}_2$，处分支相同，记作 $\mathsf{A}_1\curlyvee_{\mathsf{S}}\mathsf{A}_2$，，当且仅当 $\mathsf{A}_1\cap\mathsf{A}_2\cap T^{>\mathsf{S}}\neq\emptyset$。否则，$\mathsf{A}_1$ 和 A_2 在 S 处分支。如果 $\mathsf{S}=T^{\leqslant t}$，我们就说 A_1 和 A_2 在 t 处分支相同，或分支不同，并且 $\curlyvee_{\mathsf{S}}$ 也记作 $\curlyvee_t$。

在下文中，一些关于树干的概念会像前面的定义那样，默认为也适用于节点。

命题 2 设 S 是一条树干。关系 $\curlyvee_{\mathsf{S}}$ 是 $\mathrm{Paths}_{\mathsf{S}}$ 上的等价关系。

证明。显然。 ∎

对于每条路径 $\mathsf{A}\in\mathrm{Paths}_{\mathsf{S}}$，我们用 $[\mathsf{A}]_{\curlyvee_{\mathsf{S}}}$ 表示 A 关于$\curlyvee_{\mathsf{S}}$的等价类。

定义 3 森林 $\mathfrak{F}=(F;<)$ 的一个 $<$-连通分支[2]（简称 $<$-分支）是 F 的一个非空子集 C，满足：

1. 若 $t\in\mathsf{C}$，$t'\leqslant t$ 且 $t'\leqslant u$，则 $u\in\mathsf{C}$；并且
2. 对于条件 1，C 关于包含关系是极小的。

命题 4 设 $\mathfrak{F}=(F;<)$ 是一个森林。对于任意 $t\in F$，令

$$\mathsf{C}_t=\{u:t\geqslant t'\leqslant u,\ \textit{for some } t'\in F\}\ . \tag{1}$$

那么：

1. 每个集合 C_t 都是 $<$ 的一个分支，反之，每个 $<$-分支都具有 C_t 的形式。2. $\mathfrak{F}$ 的 $<$-分支集合是 F 的一个划分；3. $\mathfrak{F}$ 的每个 $<$-分支都是 $\mathfrak{F}$ 的极大子树。

证明。1. 为证明集合 C_t 在定义 3 的条件 1 下是封闭的，设 $t''\in\mathsf{C}_t$, $t'\leqslant t''$, 且 $t'\leqslant u$。根据 C_t 的定义，存在一个 v，使得 $t\geqslant v\leqslant t''$。将向下线性应用于 v 和 t'，可分为两种情况：

i) $v\leqslant t'$。那么，$v\leqslant u$，因此 $u\in\mathsf{C}_t$。

ii) $t'<v$。那么 $t'<t$ 和 $t'\leqslant u$。根据 C_t 的定义，这些条件意味着 $u\in\mathsf{C}_t$。

为证明条件 2（C_t 的极小性），任取一个满足定义 3 的闭包条件 1 的非空集合 $\mathsf{C}\subseteq\mathsf{C}_t$。任取 $u\in\mathsf{C}$。于是 $u\in\mathsf{C}_t$，所以对于某个 $t'\leqslant t$，有 $t'\leqslant u$，从而由条件 1 得 $t\in\mathsf{C}$。因此，由条件 1 将其应用于 C，可得 $\mathsf{C}_t\subseteq\mathsf{C}$，故

[2]这个定义源自 [18]。

C_t =C，证毕。由极小性还可知，每个 $<$-分支都是 C_t，其中任意t均属于该分支。

2. 由上述内容可知，$C_t \cap C_v \neq \emptyset$ 蕴含 $C_t = C_v$，因此，F的$<$-分支构成一个划分。

3. 显然，每个 C_t 都是一棵子树。对于任意 $u \notin C_t$，不存在满足 $w \leqslant t$ 和 $w \leqslant u$的 w，否则 u 就会属于 C_t。因此，$\mathfrak{F}$的任何子树都不会真包含 C_t。 ■

推论 5 设 P 是森林 $\mathfrak{F}$ 中的一条路径，令 T_P 为所有满足 $P \cap A \neq \emptyset$ 的路径 A 的并集。那么 T_P 是 $\mathfrak{F}$ 的一个 $<$-分支。反过来，$\mathfrak{F}$ 中的每个 $<$-分支 C 都具有 T_P这种形式，其中 P 是任意一条与 C 相交的路径。

下文将关注给定树 $\mathfrak{T}$ 的形如 $\mathfrak{T}^{>S}$ 的森林的 $<$-分支。$C_u^{>S}$表示包含节点 u 的 $\mathfrak{T}^{>S}$ 的 $<$-分支。

引理 6 设有一棵树 $\mathfrak{T}$，其中有一条茎 S。设 t、u 是 $\mathfrak{T}$ 中的节点，满足 $S < t$ 且 $S < u$。那么，$C_t^{>S} = C_u^{>S}$ 当且仅当对于所有分别包含 t 和 u的路径 A 和 B，都有 $A \curlyvee_S B$。

证明。设 A 和 B 分别是包含 t 和 u 的路径。若 $C_t^{>S} = C_u^{>S}$，则命题 4 中的 (1) 推出，对于某个 t' 属于 $\mathfrak{T}^{>S}$，有 $t \geqslant t' \leqslant u$。于是 $t' \in A \cap B$ 且 $S < t'$，因此 $A \curlyvee_S B$。

反过来，设 $A \curlyvee_S B$，且 $t \in A$ 和 $u \in B$。考虑任意满足 $S < v$ 的 $v \in A \cap B$。无妨假设 $v \leqslant t$ 且 $v \leqslant u$；否则，t 或 u 可代替 v。于是$v \in C_t^{>S} \cap C_u^{>S}$，由命题 4 可得 $C_t^{>S} = C_u^{>S}$。 ■

这一观察表明，模去 S 处不分离性的等价类与 $<$ 的 $\mathfrak{T}^{>S}$-分支之间存在一一对应。对于每个 $[A]_{\curlyvee_S}$，集合 $\{B \cap T^{>S} : B \in [A]_{\curlyvee_S}\}$ 是 $\mathfrak{T}^{>S}$ 的某个唯一 $<$-分支中所有路径构成的集合。反过来，对于 $\mathfrak{T}^{>S}$ 的每个 $<$-分支 C，集合 $\{P \cup S : P \text{ 是 } C\}$ 中的任意路径，是模去 S 处不分离性的某个唯一等价类中所有路径构成的集合。

给定节点处的不分离类体现了树在该节点处的分支方式。不过，有些情况下，这似乎与直觉相悖。例如，考虑这样一棵树 $\mathfrak{T}$：取一份有理数集 η_0，并在每个正有理数 r 处附加另一份有理数集 η_r η_0（见图 1）。在这棵树的 η_0 中，节点 0 处只有一个不分离类，但很难说这棵树在 0 处没有分支。

于是，可以考虑两种定义。

定义 7 树 $\mathfrak{T}$中的一条茎 S 称为

1. 分支的$_1$，当且仅当 $\curlyvee_S$ 有多个等价类；等价地，当且仅当 $\mathfrak{T}^{>S}$ 有多个 $<$分支；又等价地，当且仅当存在两条不同的路径 A_1,$A_2 \in \text{Paths}_S$，它们在 S 处分支；

2. 分支的$_2$，当且仅当 $T^{>S}$ 中的每个节点在 $T^{>S}$中都有一个与之不可比较的节点。

我们称 $\mathfrak{T}$ 具有分支性$_i$ 的节点，当且仅当在该节点结束的茎具有分支性$_i$，对于$i = 1$，2。

命题 8

1. 分支$_1$ 蕴含分支$_2$。

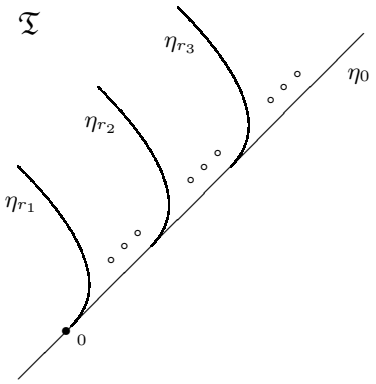


图 1：一棵带有茎的树，该茎是分支的$_2$ 但不是分支的$_1$。

2. 分支$_2$ 不蕴含分支$_1$。

证明。1. 设 $\mathfrak{T}$ 是任意一棵树，S 是其中的一条茎。假设 S 是分支的$_1$，并设 u 是 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中任意一个节点。考虑 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中任意一个不同于 $\mathsf{C}_u^{\geqslant\mathsf{S}}$ 的 $<$-分支 C。根据命题 4，$u \not< v$ 对所有 $v \in \mathsf{C}$ 都成立。

2. 图 1 中的树给出了一个反例：茎（$-\infty$，0] 属于 η_0 ）是分支的$_2$但不是分支的$_1$。 ■

茎 S 上的一个横截集是一个节点集合 X，满足对于每个 $v \in X$ 都有 S $< v$，并且对于每条包含 S 的路径 A 都有 A $\neq \emptyset$ $X \cap$。节点 t 上的一个横截集就是茎 $T^{\leqslant t}$ 上的一个横截集。横截集也可用于描述树如何从给定的茎处分支，但下面的结果表明，这样做并没有带来任何新内容。

命题 9 树 $\mathfrak{T}$ 中的茎 S 是分支的$_2$ 当且仅当，对于 S 上的每个横截集 X，$|X| \geqslant 2$。

证明。假设 S 是分支的$_2$，并令 v为 $T^{>\mathsf{S}}$中的任意元素。集合 $T^{>\mathsf{S}}$包含一个与 v不可比较的节点 u。于是，对于每条经过 u的路径 P，都有 S $\subseteq$ P 且 $\{v\} \cap$P $= \emptyset$，因此 $\{v\}$ 不可能是 S 上的横截集。

反过来，假设 $T^{>\mathsf{S}}$中存在一个节点 t，使得对于每个 $u \in T^{>\mathsf{S}}$都有 $t \smile u$。那么，很容易验证 $\{t\}$ 是 S 上的横截集。 ■

3.2 有界分支

对于树中的任意节点集 X、Y，若对每个 $u \in Y$，都存在 $v \in X$ 使得 $v \leqslant u$，我们称 X 支配 Y，记作 $X \leq_{\mathsf{und}} Y$。

定义 10 对任意 $n \in \mathbb{N}$，树 $\mathfrak{T}$ 为

1. 在茎 S 处分支为 n，当且仅当 $\curlyvee_{\mathsf{S}}$ 恰有 n 个等价类，或者等价地，当且仅当 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 恰有 $n <$个分支；2. 在茎 S 处分支为 n，当且仅当对于 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$中的每个反链 X，都存在 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中的一个反链L_X，使得 $L_X \leq_{\mathsf{und}} X$ 且 $|L_X| = n$。

对于 $i \in \{1, 2\}$，如果存在某个 n，使得 $\mathfrak{T}$ 在 S 处是 n-分支的$_i$，那么 $\mathfrak{T}$ 在 S 处就是有限分支的$_i$。如果 $\mathfrak{T}$ 在 S 处不是有限分支的$_i$，则称其在 S 处是无限分支的$_i$。

回顾一下，假定树干非空。不过，可以如下扩展n-分支$_2$ 的概念，将“空茎”也包括在内。当 S 不是树干而是空集时，根据定义 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}} = \mathfrak{T}^{>\emptyset} = \mathfrak{T}$。因此，当对于 $\mathfrak{T}$ 中的每个反链 X，都存在 $\mathfrak{T}$ 中的一个反链 L_X，使得 $L_X \leq_{\mathsf{und}} X$ 且 $|L_X| = n$ 时，我们称 $\mathfrak{T}$ 在 $\emptyset$ 处是 n-分支的$_2$。和之前一样，如果存在某个n，使得 $\mathfrak{T}$ 在 $\emptyset$ 处是 n-分支的$_2$，那么就称 $\mathfrak{T}$ 在 $\emptyset$ 处是有限分支的$_2$。

定义11 若树 $\mathfrak{T}$ 在 $\emptyset$ 处及其每个树干处都有限分支$_2$，则称其为有限分支树$_2$。

将 n-分支$_1$ 的概念扩展到空集并无意义，因为关系 $\curlyvee_{\mathsf{S}}$ 仅对树干有定义。不过，如果尝试作此扩展定义，那么由树 $\mathfrak{T}$ 在树干 S 处是 n-分支$_1$，当且仅当它恰有 $n <$ 个 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 分支，可自然地将定义扩展为： $\mathfrak{T}$ 在$\emptyset$ 处是 n-分支$_1$，当且仅当它恰有 $n <$ 个 $\mathfrak{T}$ 分支。这样便会得到一个平凡的定义：每棵树都是 1-分支$_1$ 的，因为树是连通的，恰有一个 $<$分支。

引理 12 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵树，S 是 $\mathfrak{T}$中的空集或一个树干。若 $\mathfrak{T}$ 在 S 处有限分支$_2$，则 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中的每条路径都有一个作为桥的初始段。

证明。
设 $\mathfrak{T}$ 在 S 处是 n-分支的$_2$，且设 X 是 $T^{>\mathsf{S}}$中的一个极大反链。则存在一个有限反链 $L \subseteq T^{>\mathsf{S}}$，使得 $L \leq_{\mathsf{und}} X$ 且 $|L| = n$。对于 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$中的每条路径 P，令 u_{P}为 L 中位于 P 上的唯一节点。

现在，固定 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$中的任意路径 A。对于每个 $w \in L$，我们选择一个节点 w(A) $\in$ A，使得 w(A) $\leqslant w$ 且 w(A) $\leqslant u_{\mathsf{A}}$；若这样的节点不存在，则令 w(A) $:= u_{\mathsf{A}}$。考虑由所有这些节点组成的集合 L_{A}。令 v_{A} 为 L_{A}中的最小节点。它存在，因为 L_{A} 是有限的、线性有序的，且 $u_{\mathsf{A}} \in L_{\mathsf{A}}$。于是，集合 $B_{\mathsf{A}} = \{v : \mathsf{S} < v \leqslant v_{\mathsf{A}}\}$ 是 A 的一个初始段，也是 A 中的一座桥。事实上，若 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中存在一条路径 P，使得 $B_{\mathsf{A}} \not\subseteq$ P，则 P $\neq$ A 且 $v_{\mathsf{A}} \notin$ P，因此 $u_{\mathsf{A}} \notin$ P。假设 $B_{\mathsf{A}} \cap$P $\neq \emptyset$ 且令 $x \in B_{\mathsf{A}} \cap$ P。则 $x < u_{\mathsf{P}}$ 且$x \leqslant v_{\mathsf{A}} \leqslant u_{\mathsf{A}}$。根据对 $u_{\mathsf{P}}(A)$ 的选择，必有 $u_{\mathsf{P}}(A) \leqslant u_{\mathsf{P}}$，因此$u_{\mathsf{P}}(A) \in$ P，因此 $u_{\mathsf{P}}(A) \leqslant v_{\mathsf{A}}$，根据 v_{A}的定义，也就有 $u_{\mathsf{P}}(A) = v_{\mathsf{A}}$。这与假设 $B_{\mathsf{A}} \not\subseteq$P 相矛盾。

■

以下结果确立了有限分支这两种概念之间的关系。

命题 13 如果树 $\mathfrak{T}$ 在茎 S 处是 n-分支的$_2$，那么 $\mathfrak{T}$在 S 处也是 n-分支的$_1$。

证明。
对于 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$中的每个 A，令 b_{A} 为 $\mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$ 中所有满足 P $\cap$A $\neq \emptyset$的路径 P 的交集。由引理 12 可知，每个 b_{A} 都是桥。假设 $b_{\mathsf{A}} \neq b_{\mathsf{B}}$ 和 $b_{\mathsf{A}} \cap b_{\mathsf{B}} \neq \emptyset$，并考虑 $u \in b_{\mathsf{A}} \cap b_{\mathsf{B}}$ 和 $v \in b_{\mathsf{A}} \setminus b_{\mathsf{B}}$。那么区间 $[u, v]$ 是包含于 b_{A}中的一个分叉，这与 b_{A} 是桥这一事实矛盾。因此，对于所有路径 A 和 B，要么 $b_{\mathsf{A}} = b_{\mathsf{B}}$，要么$b_{\mathsf{A}} \cap b_{\mathsf{B}} = \emptyset$。此外，对于 $b_{\mathsf{A}} \neq b_{\mathsf{B}}$，对所有 $u \in b_{\mathsf{A}}$ 和 $v \in b_{\mathsf{B}}$，都有 $u \not\succ v$。令 B 为所有桥 b_{A}组成的集合。

令 X 为包含于$\bigcup_{b \in B} b$ 的任意集合，并且对于每个 $b \in B$，$X \cap b$ 都是单元素集。于是 X 属于一个反链。由于 $\mathfrak{T}$ 是 n-分支的$_2$,，存在一个反链 $L_X \subseteq \mathfrak{T}^{>\mathsf{S}}$，使得 $L_X \leqslant_{\mathsf{und}} X$ 且 $|L_X| = n$。那么 L_X 必须恰好包含来自每个 $b \in B$ 的一个元素，

因此 B 恰好由 n 个桥组成。Paths_S（在 $\mathfrak{T}$ 中）中的任意两条路径 A 和 B 在 S 处不分离，当且仅当它们包含来自 B 的同一座桥，而这座桥是唯一的。因此， B 与 S 处的不分离类集合之间存在一一对应关系。因此 $\mathfrak{T}$ 是 n-分支的$_1$。

这个命题的逆命题并不成立。事实上，图 1 中所考虑的树在 η_0 中的节点 0 处只有一个不分离性类，但它在该节点处并非有限分支$_2$ 。下面的结果是前一个命题的直接推论，它确立了有限分支$_1$ 与有限分支$_2$之间更精确的关系。

推论 14 如果树 $\mathfrak{T}$ 在茎 S 处是 n-分支$_1$ 的，那么要么 $\mathfrak{T}$ 在 S 处是 n-分支$_2$ 的，要么它在 S 处是无限分支$_2$ 的。

现在，考虑树 $\mathfrak{T}$ 中任意一条包含茎 S 和不分离性类$[\mathrm{A}]_{\Upsilon_S}$的路径 A。令 $\mathfrak{T}'$ 为 $\mathfrak{T}$的子树，其定义域 T' 是 $[\mathrm{A}]_{\Upsilon_S}$中所有路径的并集。显然，树 $\mathfrak{T}'$ 在 S 处是 1-分支$_1$ 的，因此它在 S 处要么是 1-分支$_2$ 的，要么是无限分支$_2$的。这表明，这两种概念之间的唯一区别源自类似于图 1 所示的情形。

4 树的凝缩

这里介绍的树的凝缩构造，扩展了线性序的凝缩构造，例如 [16] 中的构造。它们与凝缩树的概念相关，后文将对该概念作形式化定义。

4.1 线段和桥

引理 15 设 $\{\mathrm{I}_i : i \in I\}$ 是给定树 $\mathfrak{T}$ 中的线段集合，满足对于某个指标 i_0，对所有 $i \in I$ 都有 $\mathrm{I}_{i_0} \cap \mathrm{I}_i \neq \emptyset$ 。此外，假设 $\mathrm{I}^* = \bigcup_{i\in I} \mathrm{I}_i$ 是线性有序的。那么 I^* 是一条线段。

证明。我们需要证明 I^* 是凸的。假设 $x < z < y$，其中 x 和 y 是 I^* 的元素。假设 $x \in \mathrm{I}_i$ 且 $y \in \mathrm{I}j$，并分别令 t_i 和 t_j 为 $\mathrm{I}_i \cap \mathrm{I}_{i_0}$ 和 $\mathrm{I}_j \cap \mathrm{I}_{i_0}$ 的元素。根据 t_i、t_j、x、y 和 z 在 $\mathrm{I}_{i_0} \cup \mathrm{I}_i \cup \mathrm{I}j$ 中的相对位置，可以考虑若干种情形。在所有情形中，利用 I_{i_0}、$\in \mathrm{I}_i$ 或 $\mathrm{I}j$ 的凸性，都很容易推出 $z \in \mathrm{I}_{i_0} \cup \mathrm{I}_i \cup \mathrm{I}j$。因此，$z \in \mathrm{I}^*$。

命题 16 设 $\mathfrak{T}$是一棵树。那么：

1. 若 $\{\mathrm{I}_i : i \in I\}$ 是一个桥的集合，满足对于某个 i_0，有 $\mathrm{I}_{i_0} \cap \mathrm{I}_i \neq \emptyset$，且对 I 中所有 i 都成立，那么 $\mathrm{I}^* = \bigcup_{i\in I} \mathrm{I}_i$ 是一个桥。2. 若 I 是 $\mathfrak{T}$ 中的一个桥，则 I 包含于唯一一个极大桥中。3. $\mathfrak{T}$ 中极大桥的集合构成 $\mathfrak{T}$ 的一个划分；也就是说， $\mathfrak{T}$ 中两个节点属于同一个极大桥的关系，在 $\mathfrak{T}$ 上构成一个等价关系。

证明。

1. 设 C 是一条路径，满足 $I_{i_0} \subseteq C$。对于每个 i，都有 $C \cap I_i \supseteq I_{i_0} \cap I_i \neq \emptyset$，这意味着 $I_i \subseteq C$，因为每个 I_i 都是一个桥。于是 $I^* \subseteq C$，它是线性有序的，因此根据引理 15，I^* 是一条线段。

设 P 是任意一条满足 $P \cap I^* \neq \emptyset$ 的路径。那么，对某个 i，$P \cap I_i \neq \emptyset$。由于 I_i 是一座桥，我们有 $P \supseteq I_i \supseteq I_i \cap I_{i_0}$，因此 $P \cap I_{i_0} \neq \emptyset$。所以，$P \supseteq I_{i_0}$。接着，根据关于 I_{i_0} 的假设，P 与每个 I_j 都有非空交集，因此对所有 j，$I_j \subseteq P$。于是，$I^* \subseteq P$。

2. 设 $\mathcal{A}$ 是所有满足 $I \subseteq J$ 的桥 J 所组成的族。那么，根据断言 1，$I^* = \bigcup \mathcal{A}$ 是一座桥。显然，它是唯一包含 I 的极大桥。

3. 设 I_1 和 I_2 是交集非空的极大桥。那么，根据断言 1，$I_1 \cup I_2$ 是一座桥，因此，根据 I_1 和 I_2，的极大性，我们有 $I_1 = I_1 \cup I_2 = I_2$。 ■

对于每个 $t \in T$，包含 t 的 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 中的极大桥（回想一下，$\{t\}$ 是一座桥）记作 $t_\circ$ 回想一下，记号 $t < u$ 表示对于所有 $x \in t$ 和 $y \in u$，都有 $x < y$；而 $t \smile u$ 表示 $t < u$ 或 $t = u$ 或 $u < t$。

命题 17 设 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 是一棵树，且 $t, u \in T$。

1. 若 $t < u$ 且 $t \neq u$，则 $t < u_\circ$ 2. 若 $t \not\asymp u$，则对所有 $x \in t$ 和 $y \in u$，都有 $x \not\perp y$。

证明。1. 设 A 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径，满足 $t, u \in A$。由于 t 和 u 是桥，因此 $t, u \subseteq A$，从而 $t \cup u$ 是线性有序的。由于 $t \neq u$，因此 $t \cap u = \emptyset_\circ$ 由于桥是线段，因而是凸的，所以 $t < u_\circ$

2. 由第 1 部分可得。 ■

推论 18 设 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 是一棵树，且 $t, u \in T$。那么 $t \smile u$ 当且仅当 $t \smile u$.

Prop命题 19 设 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 是一棵树，且 $t, u \in T$。以下各项等价：

1. 存在一座桥 B，使得 $t, u \in B$；2. $t = u$；3. 对每条路径 P，在 $\mathfrak{T}$, $t \in P$ 当且仅当 $u \in P$；4. 对每个节点 $v \in \mathfrak{T}$, $v \smile t$ 当且仅当 $v \smile u_\circ$

证明。

$1 \iff 2$：显然。

$2 \implies 3$：设 $t = u_\circ$ 令 P 为一条路径，使得 $t \in P_\circ$ 则 $t \subseteq P$，因此 $u \in u \subseteq P_\circ$ 同样，若 $u \in P$，则 $t \in P_\circ$

$3 \implies 2$：设条件 3 成立。若 $t = u$，则结论显然，因此假设 $t \neq u$，并令 A 为一条路径，使得 $t \in A_\circ$ 于是 $u \in A$，因此 $t \smile u$，记作 $t < u_\circ$ 考虑线段 $[t, u]$，并令 P 为任意一条满足 $P \cap [t, u] \neq \emptyset$ 的路径。则 $t \in P$，因此 $u \in P$，进而 $[t, u] \subseteq P_\circ$ 因此，$[t, u]$ 是一个桥。根据命题 16，$[t, u]$ 包含于唯一的极大桥中，因此 $t = u_\circ$

$3 \implies 4$：假设条件 3 成立。

设 $v \in \mathfrak{T}$ 满足 $v \smile t$，且 A 是一条满足 v、$t \in A$ 的路径。则 $u \in A$，因此 $v \smile u_\circ$ 同样，若 $v \smile u$，则 $v \smile t_\circ$

$4 \Longrightarrow 3$：假设条件 4 成立。

设 P 是一条满足 $t \in \mathrm{P}$ 的路径。由于 $v \smile t$ 对每个 $v \in \mathrm{P}$ 都成立，因此 $v \smile u$ 对每个 $v \in \mathrm{P}$ 都成立，故 $u \in \mathrm{P}$。同样，若 $u \in \mathrm{P}$，则 $t \in \mathrm{P}$。

因此，树中的两个节点 x 和 y 属于同一个极大桥，当且仅当它们在该树中满足公式

$$\beta(x, y) := \forall z \, (z \smile x \leftrightarrow z \smile y) \, . \tag{2}$$

所以，β 在树的节点集合上定义了一个等价关系。

4.2 凝缩

定义 20 给定一棵树 $\mathfrak{T} = (T; <)$，定义集合 $\overline{T} := \left\{ \overline{t} : t \in T \right\}$。结构 $\overline{\mathfrak{T}} := \left(\overline{T}; < \right)$ 称为树 $\mathfrak{T}$ 的凝缩（或凝缩商）。

因此，树的凝缩是由“属于同一个极大桥”这一等价关系生成的商结构。因此，树的凝缩将其中所有极大桥都收缩为单个节点。

以下是命题 17 的一个直接推论。

命题 21 对于任意树 $\mathfrak{T}$，其凝缩 $\overline{\mathfrak{T}}$ 也是一棵树。

引理 22 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵树。那么，树 $\mathfrak{T}$ 中的每座桥都只包含一个节点。

证明。设 $\overline{t}$、$\overline{u} \in \overline{\mathfrak{T}}$ 和 $\overline{t} \neq \overline{u}$。那么，$t$ 和 u 属于 $\mathfrak{T}$ 中不同的极大桥。由命题 19，不妨设存在 $w \in \mathfrak{T}$，使得 $w \smile t$ 和 $w \not\smile u$。由推论 18 可知，$\overline{w} \smile \overline{t}$ 和 $\overline{w} \not\smile \overline{u}$，因此 t 和 u 属于 $\mathfrak{T}$ 中不同的极大桥。于是，$\overline{\mathfrak{T}}$ 中所有极大桥都是单元素集。

■

备注 4.9 树的凝缩也可以用包含给定节点 t 的路径集合 Paths_t 来等价地定义。令 $\mathrm{Paths}_T := \{\mathrm{Paths}_t : t \in T\}$。容易验证，逆包含 $\supset$ 是 Paths_T 上的树关系。由命题 19，节点 t 和 u 属于同一座桥，当且仅当 $\mathrm{Paths}_t = \mathrm{Paths}_u$。因此，映射 $\chi : t \mapsto \mathrm{Paths}_t$ 是一个双射。此外，$t < u$ 当且仅当 $\mathrm{Paths}_t \supset \mathrm{Paths}_u$。于是，映射 $\chi : t \mapsto \mathrm{Paths}_t$ 是从 $\overline{\mathfrak{T}}$ 到 $(\mathrm{Paths}_T; \supset)$ 的一个同构。

算子 $\overline{\cdot}$ 定义了一个典范映射

$$\overline{\cdot} : \mathfrak{T} \to \overline{\mathfrak{T}} \, .$$

对于 $X \subseteq T$、$y \in \overline{T}$ 和 $Y \subseteq \overline{T}$，我们记

$$\begin{aligned} \overline{X} &:= \left\{ \overline{x} \in \overline{T} : x \in X \right\}, \\ \overline{y}^{-1} &:= \left\{ x \in T : \overline{x} = y \right\}, \\ \overline{Y}^{-1} &:= \left\{ x \in T : \overline{x} \in Y \right\}. \end{aligned}$$

-1 然后，对于所有 $X \subseteq T$ 和 $Y \subseteq \overline{T}$，$X \subseteq \overline{X}$ 和 $Y = \overline{Y}^{-1}$。

例23 图2展示了一棵树 $\mathfrak{T}$ 及其凝缩 $\mathfrak{T}$。桥 t_1 至 t_6 是线性序，可以是无限的，并分别凝缩为 $\mathfrak{T}$ 中的节点 A_1 至 A_6，因此 $\mathfrak{T}$ 是有限的。

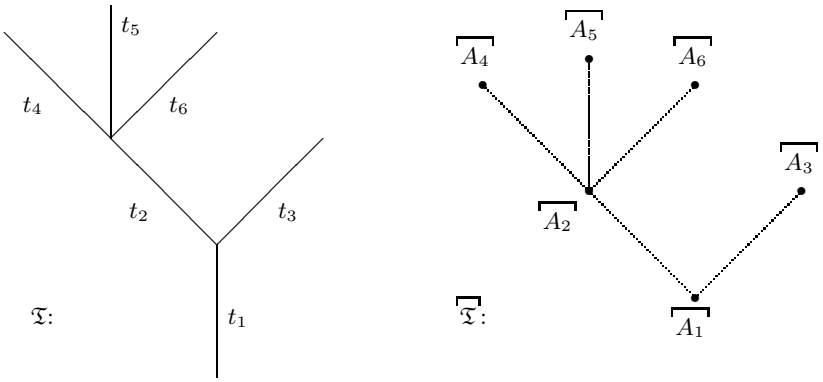


图2：树的凝缩（见例23）。

命题 24 设 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 是一棵树，且设 $X \subseteq T$。

1. 若 X 是 $\mathfrak{T}$ 中的反链，则 X 是 $\mathfrak{T}$ 中的反链。2. 若 X 在 $\mathfrak{T}$ 中是线性的，则 X 在 $\mathfrak{T}$ 中是线性的。3. 若 X 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径，则 X 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径。4. 若 X 在 $\mathfrak{T}$ 中是凸的，则 X 在 $\mathfrak{T}$ 中是凸的。5. 若 X 在 $\mathfrak{T}$ 中向下封闭，则 X 在 $\mathfrak{T}$ 中向下封闭。6. 若 X 在 $\mathfrak{T}$ 中向上封闭，则 X 在 $\mathfrak{T}$ 中向上封闭。

证明。1、2. 根据推论 18。

3. 设 X 在 $\mathfrak{T}$ 中是极大线性序。则 X 是线性的。设 $u \in T \setminus X$。则 $u \notin X$，因此 $u \not< v$ 对某个 $v \in X$ 成立。这意味着 $u \not< v$ 对 $v \in X$ 成立。因此可得，X 在 $\mathfrak{T}$ 中是极大线性序。

4. 令 $t, u \in X$，并令 $y \in T$ 满足 $t < y < u$。于是 $t < y^{-1} < u$，因此 $y^{-1} \in X$。这意味着 $y^{-1} = y \in X$。

第 5 部分和第 6 部分的证明类似。 ■

命题25 令 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 为一棵树，并令 $Y \subseteq T$。

1. 如果 Y 在 $\mathfrak{T}$ 中是线性的，那么 Y^{-1} 在 $\mathfrak{T}$ 中也是线性的。 2. 如果 Y 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径，那么 Y^{-1} 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径。
3. 如果 Y 在 $\mathfrak{T}$ 中是凸的，那么 Y^{-1} 在 $\mathfrak{T}$ 中也是凸的。 4. 如果 Y 在 $\mathfrak{T}$ 中是向下封闭的，那么 Y^{-1} 在 $\mathfrak{T}$ 中也是向下封闭的。

5. 如果 Y 在 $\mathfrak{T}$ 中是向上封闭的，那么 Y^{-1} 在 $\mathfrak{T}$ 中也是向上封闭的。

证明与命题 24 的证明非常相似。

因此，在树及其凝缩之间，路径、线段、树干和分支在映射 $\cdot$ 及其逆映射下均得以保留。

4.3 奇异路径与涌现路径

定义 26 若存在 $t \in$ A，使得 $T^{\geqslant t}$ 为线性（因此 $T^{\geqslant t} \subseteq$ A），则称树 $\mathfrak{T}$ 中的路径 A 为奇异路径。否则，称 A 为涌现路径。

从模型论视角看，奇异路径特别值得关注，因为每条奇异路径都可以用一阶公式定义：若 A 是奇异路径，且 $t \in$ A 满足 $T^{\geqslant t}$ 为线性，则可以在 $\mathfrak{T}$ 中用公式 $\varphi(x)$ 定义 A，该公式由 $x \smile t$给出。

命题 27 树 $\mathfrak{T}$中的路径 A 是奇异路径，当且仅当 A 在$\mathfrak{T}$中包含一个最大节点。

证明。设 A 是奇异的，并且 $t \in$A 满足 $T^{\geqslant t}$是线性的。注意， $T^{\geqslant t}$是 $\mathfrak{T}$ 和 $T^{\geqslant t} \subseteq t$ 中的桥，因此 t是 A 的最大节点

反过来，假设 A 包含一个最大节点 t。那么 $t \in$A。令 $u, v \in T^{\geqslant t}$。那么$t \leqslant v$和 $t \leqslant v$，因此 $u = v = t$，所以 $u \smile v$。因此， $T^{\geqslant t}$是线性的。 ■

因此，路径 A 是涌现的，当且仅当 A 不包含最大节点 e.

如果树 $\mathfrak{T}$ 中的每个非空节点集合都包含一个极小节点，则称该树为良基的。注意，一棵树是良基的，当且仅当它的每条路径都是良序的。

命题 28 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵良基树，且 A 是 $\mathfrak{T}$中的一条路径。那么：

1. $\mathfrak{T}$ 是一棵良基树；2. A 是奇异的，当且仅当 A 的序型是一个后继序数；3. A 是涌现的，当且仅当 A 的序型是一个极限序数。

证明。首先， $\mathfrak{T}$ 中的每条路径都是 $\mathfrak{T}$中某条路径 P 的商 P；若 P 良序，则 P 也良序（因此其序型为某个序数的序型）。结论由命题 27 得出。 ■

4.4 凝缩树

定义29 若树 $\mathfrak{T}$ 满足$\mathfrak{T} \cong \mathfrak{T}$，则称其为凝缩树。

命题30 设 $\mathfrak{T} = (T; <)$为一棵树。以下条件等价：

1. $\mathfrak{T}$ 是凝缩的；
2. $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{T}'$ 对于某棵树 $\mathfrak{T}'$；

3. $\overline{w} = \{w\}$ 对于每个 $w \in T$；4. 路径
$_u \neq$ 路径$_v$ 对于所有 $u \neq v$ 在 T 中。[3]

证明. $1 \Longrightarrow 2$: 设 $\mathfrak{T}$ 是凝缩的。那么 $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{T}$.

$2 \Longrightarrow 3$: 假设 $f : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}'$ 是一个同构。取 $t, u \in T$，使得 $t \neq u$。那么$f(t)$ 和 $\neq f(u)$, 并且根据引理 22, $f(t)$ 和 $f(u)$ 属于 $\mathfrak{T}'$ 中不同的极大桥。根据命题 19，不失一般性，我们可以得出结论：存在 $\mathfrak{T}'$ 中的一个节点 s，使得 $s \smile f(t)$ 且 $s \not\smile f(u)$。由于 f是一个同构，因此 $f^{-1}(s) \smile t$且$f^{-1}(s) \not\smile u$。于是根据命题 19, $t \neq \overline{u}$，结论得证。

$3 \Longrightarrow 1$: 如果对每个 $w \in T$ 都有 $\overline{w} = \{w\}$，那么由 $w \mapsto w$ 给出的典范映射定义了一个从 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{T}$ 的同构。

$3 \Longleftrightarrow 4$: 在备注 4.9 中，我们观察到映射 $t \mapsto$Paths$_t$ 是一个双射。因此，当且仅当第 4 部分成立时，每座桥都是单元素集。 ■

命题 31 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵树，且 y 是 $\mathfrak{T}$中的任意一个非叶节点。那么 $\overline{y}^{-1}$ 是 $\mathfrak{T}$中一条分支$_2$ 茎 S 的末段，即 S 的一个在 S 中向上封闭的子集。

证明。集合 $\overline{y}^{-1}$ 是一条线段。集合 $\mathsf{S} = \{t : \ t \leqslant u$ 对某个 $u \in \overline{y}^{-1}\}$ 而言是$\mathfrak{T}$中的一条茎，而$\overline{y}^{-1}$是它的一个末段。任取 $T^{>\mathsf{S}}$中的一个节点 v。如果对于每个 $t \in T^{>\mathsf{S}}$都有 $v \smile t$，那么 $\overline{y}^{-1} \cup \{u : \ \overline{y}^{-1} < u \leqslant v\}$ 是一座桥，这与 $\overline{y}^{-1}$的极大性矛盾。因此，S 是一条分支$_2$ 茎。 ■

命题 32 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵有限分支$_2$ 树。那么 $\mathfrak{T}$ 是良基的。

证明。假设 $\mathfrak{T}$ 不是良基的。那么存在一个无限序列 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq T$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$, 都有 $y_{i+1} \leq y_i$。

设 $Y = \{y \in T : \text{对所有 } i \in \mathbb{N}\}$，都有 $y < y_i$（注意，Y 可能为空）；并设 $Z = \{y \in T : Y < y < y_0\}$。那么，要么 $\overline{Y}^{-1} = \emptyset$ 是 $\mathfrak{T}$ 中的一根茎，要么 $\overline{Y}^{-1}$ 是 $\mathfrak{T}$ 中的一根茎；并且 $\overline{Z}^{-1}$ 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条线段，不存在节点 $v \in T$ 使得 $\overline{Y}^{-1} < v < \overline{Z}^{-1}$。于是，$\overline{Z}^{-1}$ 的每个初始子线段（即 $\overline{Z}^{-1}$的一个向下封闭子集）都包含无穷多个不相交的桥，因此它是一个分叉。由引理 12 可知，从$\overline{Y}^{-1}$开始，$\mathfrak{T}$ 不是有限分支的$_2$。 ■

由上述命题可以得到一些有用的观察：

1. 树是凝缩的，当且仅当它的每条（极大）桥都是单元素集。2. 树是凝缩的，当且仅当它的每个非叶节点都是分支$_2$ 节点。3. 凝缩树的凝缩结果与该树（同构）相同。

[3]由于这一性质，凝缩树在 [17]中被称为完全分支树。

4.5 树的细化与同胚

树 $\mathfrak{T}$ 的细化仍然是一棵树，它由 $\mathfrak{T}$ 在桥内插入节点而得到。（注意，树类在此类插入操作下是封闭的。）如果两棵树有同构细化，则它们是同胚的。树之间的同胚关系是一种等价关系。利用以下观察即可很容易看出这一点。

树 $\mathfrak{T}$ 与 $\mathfrak{S}$ 同胚，当且仅当 $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{S}$。正向显然：如果 $\mathfrak{T}'$ 和 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{T}$ 和 $\mathfrak{S}$ 的同构细化，那么 $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{T}' \cong \mathfrak{S}' \cong \mathfrak{S}$。反过来，如果 $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{S}$，则可以按如下方式构造一棵树 $\mathfrak{T}'$，使它同构于 $\mathfrak{T}$ 和 $\mathfrak{S}$ 的某些细化。设 $f\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ 是一个同构。按如下方式从 $\mathfrak{T}$ 得到 $\mathfrak{T}'$：对于 $\mathfrak{T}$ 中的每个 t，若 $t \cong f\left(t\right)$，则保持 $\mathfrak{T}$ 中的桥 t 不变；若 $t \ncong f\left(t\right)$，则将 $\mathfrak{T}$ 中的桥 t 替换为一份 t，后接一份 $f\left(t\right)$。显然，这棵树 $\mathfrak{T}'$ 同构于 $\mathfrak{T}$ 和 $\mathfrak{S}$ 的某些细化。

现在，取一棵树 $\mathfrak{T}$，并考虑将它划分为一组桥 S。$\mathfrak{T}$中的序继承到 S中，正如其凝缩商中的情况一样；凝缩商将集合 S 本身变成一棵树，记作 $\mathfrak{T}(S)$。从 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{T}(S)$ 的典范映射称为 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{T}(S)$ 的同胚，而 $\mathfrak{T}(S)$ 称为树 $\mathfrak{T}$ 的同胚抽象。因此，两棵树同胚，当且仅当它们共有一个在同构意义下相同的同胚抽象。请注意，同胚抽象推广了凝缩商构造；当 S 是极大桥的集合时，便得到凝缩商构造。本节中关于凝缩的许多结果同样适用于同胚抽象。常规细节从略。

显然，树之间的每个同胚都是偏序的同态，但反之不成立。事实上，任何树状偏序都可以同态地映射到一个线性序上，但这通常并不是树之间的同胚。

我们还要指出，树的同胚概念具有拓扑性质，具体如下。树 $\mathfrak{T} = (T; <)$ 中路径的集合 $\mathrm{Paths}(\mathfrak{T})$ 可以赋予一种拓扑结构：将所有形如 Paths_t 的集合构成的族 Paths_T（其中 $t \in T$）视为开集子基。将此拓扑记为 $\tau_{\mathfrak{T}}$。可以证明，$(\mathrm{Paths}(\mathfrak{T})\ \tau_{\mathfrak{T}})$ 是一个非阿基米德拓扑空间（[14]），因为它是豪斯多夫的，且 $\{\mathrm{Paths}_t : t \in T\}$ 是一个秩为1的子基；也就是说，对所有 t、$t' \in T$，要么 $\mathrm{Paths}_t \subseteq \mathrm{Paths}_{t'}$，要么 $\mathrm{Paths}_{t'} \subseteq \mathrm{Paths}_t$，要么 $\mathrm{Paths}_t \cap \mathrm{Paths}_{t'} = \emptyset$。因此，根据注4.2，同胚的树生成同胚的拓扑，这也说明了采用这一术语的合理性。

5 凝缩分叉与扩张

凝缩树的定义可以自然地延拓到凝缩森林。很容易验证，上一节中关于凝缩树的所有结果同样适用于凝缩森林。还需注意，森林是凝缩的，当且仅当它的所有 $<$-分支都是凝缩树。

命题24和命题25表明，对给定的树 $\mathfrak{T}$ 进行凝缩，会产生一棵与 $\mathfrak{T}$具有相同“分支结构”的新树。但这一操作会丢失其路径的大部分内部结构。有时，我们希望在确保分支凝缩的同时保留路径的类型和结构。为此，继 [17], 之后，我们将引入并研究一种替代构造：它不对树进行凝缩，而是扩展树

从而生成一棵新的凝缩树，其中每条路径都与原树中的某条路径同构。

我们将介绍该构造的两个版本：完整版本和改进版本。两者的基本思路都是通过复制节点及由这些节点生成的子树，来消除非单点桥。此外，在完整版本中，通过复制原树中每个节点为根的子树来确保凝缩性；在改进版本中，则只复制原树中以非分支节点为根的子树。

由于该构造（两个版本皆如此）通常会生成森林，因此我们将把它应用于森林，而不只是树。所得扩张中的每个连通 $<$-分支都将是一棵凝缩树。

我们先定义完整版本。给定任意 $t \in T$，我们从复制 $T^{\leqslant t}$ 中的所有节点开始。具体来说，我们考虑为 $T^{\leqslant t}$ 中的每个元素赋予 0 或 1 的函数。新结构由所有这些函数组成，其中 t 遍历 T。我们定义

$$F_{\mathfrak{T}} := \bigcup \left\{ 2^{T^{\leqslant t}} : t \in T \right\} \tag{3}$$

其中 2^X 表示全体函数集 $f\colon X \to \{0,1\}$。当 $X \subset Y$、$f \in 2^X$ 和 $g \in 2^Y$ 时，我们用 $f \subset g$ 表示这样的断言：g 延拓 f，即 f 是 g 在 X 上的限制 $g{\restriction}_X$。

对于任意给定的 $\mathfrak{T}$，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 都表示上述定义的结构 $(F_{\mathfrak{T}};\ \subset)$。

现在，可以进一步细化 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 的定义，以便按照以下非正式说明得到一个更小的延拓 $F^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$。首先注意，在构造 $F_{\mathfrak{T}}$ 时复制节点，主要是为了将非单点桥转化为分叉。此外，如果 t 是某个桥的初始节点，那么对于每个 $u < t$，区间 $[u,t]$ 都是一个分叉，因此复制 t 只会产生已有分叉的副本。这意味着无需复制 t。于是，我们令

$$F^{\dagger}_{\mathfrak{T}} := F_{\mathfrak{T}} \setminus \{f : f(t) = 0 \text{ for some initial node } t \text{ of a maximal bridge}\}. \tag{4}$$

因此，$F^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 是 $F_{\mathfrak{T}}$ 中满足以下条件的全体函数集：每当 t 是极大桥的初始点时，$f(t) = 1$。现在我们定义 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}} := (F^{\dagger}_{\mathfrak{T}};\ \subset)$。

注意，如果 $\mathfrak{T}$ 是凝缩的，那么对于每个节点 t，集合 $\{t\}$ 都是一个极大桥，而该节点就是它的初始节点。因此，$F^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 是 $F_{\mathfrak{T}}$ 中恒取值 1 的全体函数集。对于每个节点 t，只有一个以 $T^{\leqslant t}$ 为定义域的此类函数，因此 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 与 $\mathfrak{T}$（作为一棵树）同构。此外，如果 $\mathfrak{T}$ 不是有根的，那么 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 可能是一个（凝缩的）真森林。

例 33 图 3 展示了左侧的一棵树 $\mathfrak{T}$、中间对 $\mathfrak{T}$应用完整构造 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$后得到的一个 $<$分支，以及右侧的改进版本 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$。

再举一例，若 $\mathfrak{T} = (\mathbb{N}; <)$，则 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 是无限二叉分支树，而 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 由该树的两个副本构成。

命题34（[17],命题5.19）
对于任意树 $\mathfrak{T} = (T;\ <)$，结构 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}} = (F_{\mathfrak{T}};\ \subset)$ 是一个凝缩森林。

精细扩张 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$ 也同样成立。

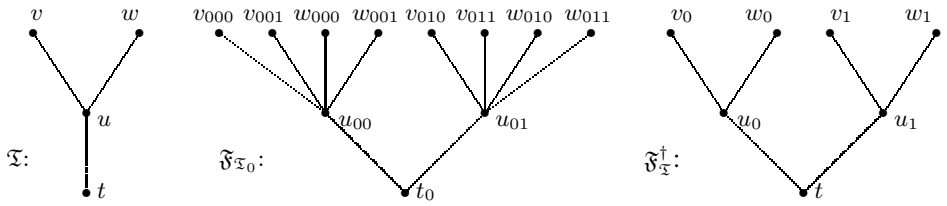


图 3：一棵树 $\mathfrak{T}$、$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 的 $<$ 个分支，以及 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$。

命题35 对于任意树 $\mathfrak{T}=(T;<)$，结构 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}=(F_{\mathfrak{T}}^{\dagger};\subset)$ 是一个凝缩森林。

证明。森林的定义不涉及存在性假设。因此，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 是森林，因为 $F_{\mathfrak{T}}^{\dagger}\subseteq F_{\mathfrak{T}}$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 是森林。我们证明，对于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 中任意两个不同的节点 f 和 g，$\mathsf{Paths}_f\neq\mathsf{Paths}_g$。根据命题30，这意味着 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 是凝缩的。

当 $f\not\prec g$ 时，该断言显然成立。假设 $f\subset g$，并令 t 为 $\mathrm{dom}(g)\setminus\mathrm{dom}(f)$ 中的一个元素。可以考虑两种情况。

情况 a：t 不是极大桥的初始节点。令 g' 为由以下条件定义的 $F_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 中的元素：$\mathrm{dom}(g')=\mathrm{dom}(g)$；对于 $\mathrm{dom}(g)$ 中的所有 $u\neq t$，$g'(u)=g(u)$；$g'(t)\neq g(t)$。于是，g 和 g' 是 $\subset$-不可比节点，并且 $f\subset g'$。在 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 中包含 g' 的任意路径都是 $\mathsf{Paths}_f\setminus\mathsf{Paths}_g$ 的一个元素。

情形 b：t是极大桥 b的初始节点。假设 $f\in 2^{T^{\leqslant u}}$，从而 $u<t$。注意，若对所有 $v>u$都有 $v\smile t$，那么 $b\cup[u,t]$ 就是一座桥，这与 b的极大性矛盾。于是我们可以考虑一个满足 $v\not\prec t$的节点 $v>u$。令 g'为 $2^{T^{\leqslant v}}$中 f的任意延拓。$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$中每一条包含 g'的路径都是 $\mathsf{Paths}_f\setminus\mathsf{Paths}_g$的一个元素。

■

现在，令 π 表示从 $F_{\mathfrak{T}}$ 到 T 的函数，其定义如下：

$$\pi(f)=t\ \text{ for all } f\in 2^{T^{\leqslant t}}. \tag{5}$$

命题36 对任意树 $\mathfrak{T}=(T;<)$，函数 π 具有以下性质：

1. π 是保序的；2. 对于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$中的每条路径 $\tilde{\mathsf{P}}$，$\pi\left(\tilde{\mathsf{P}}\right)$ 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径，且将 π 限制在 $\tilde{\mathsf{P}}$ 上得到的是一个同构；3. $\mathfrak{T}$ 中的每条路径都是 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$中某条路径在 π下的像。

证明。首先注意，对于 $f\in 2^{T^{\leqslant t}}$ 和 $g\in 2^{T^{\leqslant u}}$，$f\subset g$ 当且仅当 $t<u$，且 f 是 g 在 $T^{\leqslant t}$上的限制 $g{\restriction}_{T^{\leqslant t}}$。于是第 1 部分成立。

考虑 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 中的一条路径 $\tilde{\mathsf{P}}$，并令 A 为 $\pi(\tilde{\mathsf{P}})$。$\subset$ 在 $\tilde{\mathsf{P}}$ 上的线性性意味着 A 在 $<$下是线性有序的。此外，$\bigcup\{f:f\in\tilde{\mathsf{P}}\}$ 是 ξ 中的一个函数，并且 $\tilde{\mathsf{P}}$ 中的每个元素都可以写成 $\xi{\restriction}_{T^{\leqslant u}}$，其中 $u\in\mathsf{A}$。假设 $\mathsf{A}\cup\{v\}$ 是线性有序的。若对某个 $u\in\mathsf{A}$ 有 $v<u$，则 $\tilde{\mathsf{P}}\cup\{\xi{\restriction}_{T^{\leqslant v}}\}$ 也是线性有序的。因此，$\xi{\restriction}_{T^{\leqslant v}}\in\tilde{\mathsf{P}}$ 和 $v\in\mathsf{A}$。若对所有 $u\in\mathsf{A}$ 都有 $u<v$，从而 $v\notin\mathsf{A}$，则考虑函数 $\xi'=\xi\cup\{\langle v,0\rangle\}$。对每个 $f\in\tilde{\mathsf{P}}$，我们有 $f\subset\xi'{\restriction}_{T^{\leqslant v}}$，因此集合 $\tilde{\mathsf{P}}\cup\{\xi'{\restriction}_{T^{\leqslant v}}\}$ 在 $\subset$下是线性有序的。$\tilde{\mathsf{P}}$ 的极大性意味着它包含 $\xi'{\restriction}_{T^{\leqslant v}}$，这与 $v\notin\mathsf{A}$ 矛盾。因此，A 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径。

˜ ˜我们已经观察到 $\mathsf{P} = \{\xi\restriction_{T^{\leqslant t}} : t \in \mathsf{A}\}$。这意味着 π 在 P 上的限制是单射的，且在 A 上是满射。由于 π 保序，它便是一个同构。由此完成了第 2 部分的证明。

给定 $\mathfrak{T}$ 中的任意路径 P，取 2^{P} 的一个元素 χ，并令

$$\chi^* := \{\chi\restriction_{T^{\leqslant t}} : t \in \mathsf{P}\}. \tag{6}$$

首先注意，$\mathsf{P} = \pi(\chi^*)$。容易验证，χ^* 关于 $\subset$ 线性有序。若对某个 $t \in T$ 有 $f \in 2^{T^{\leqslant t}}$，且 $\chi^* \cup \{f\}$ 关于 $\subset$ 线性有序，则由 P 的极大性可知 $t \in \mathsf{P}$。由于 $f \smile \chi\restriction_{T^{\leqslant t}}$ 且 $f \in 2^{T^{\leqslant t}}$，因此 $f = \chi\restriction_{T^{\leqslant t}} \in \chi^*$。我们得出结论，$\chi^*$ 是 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 中的一条路径，且第 3 部分成立。 ■

注意，对于每棵树 $\mathfrak{T}$，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 都是真森林。事实上，任取 $\mathfrak{T}$ 中的一个节点 t，并设 f 和 g 是 $2^{T^{\leqslant t}}$ 的元素，使得对于每个 $u \in T^{\leqslant t}$，都有 $f(v) \neq g(v)$，其中某个 $v \leqslant u$ 满足该条件。对于任何 $h \in F_{\mathfrak{T}}$，都不存在 $h \subset f$ 和 $h \subset g$。

在 $\mathfrak{T}$ 是有根的特殊情形下，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 由两棵不相交的凝缩树组成。事实上，若 t_0是根，则对每个 $f \in 2^{T^{\leqslant t}}$，要么 $\{\langle t_0, 0\rangle\} \subseteq f$，要么 $\{\langle t_0, 1\rangle\} \subseteq f$。于是，$\{\langle t_0, 0\rangle\}$和 $\{\langle t_0, 1\rangle\}$分别是两棵不相交子树 $\mathfrak{T}_0$和 $\mathfrak{T}_1$的根。注意，$T_0 = \{f \in F_{\mathfrak{T}} \colon \{\langle t_0, 0\rangle\} \subseteq f\}$以及 $T_1 = \{f \in F_{\mathfrak{T}} \colon \{\langle t_0, 1\rangle\} \subseteq f\}$。因此，$\mathfrak{T}_0$和 $\mathfrak{T}_1$同构。

这些观察可以推广如下。

引理 37 对于树 $\mathfrak{T}$ 中的任意路径 P，以及 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$的任意 $<$-分支 $\mathfrak{T}^*$，在 $\mathfrak{T}^*$ 中存在一条 ˜ ˜路径 P，使得 $\pi(\mathsf{P}) = \mathsf{P}$。

同样适用于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 的每个 $<$-分支。

证明。我们只证明关于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 的断言，因为关于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 的证明非常相似。任取 $\mathfrak{T}^*$ 中的一条路径 ˜A，并令 A 为 $\pi(\tilde{\mathsf{A}})$。令 $\mathsf{S} = \mathsf{P} \cap \mathsf{A}$。由于 π 对 ˜A˜ ˜的限制是一个同构，S 是 π 下 $\mathfrak{T}^*$ 中 A 的某个向下封闭子集的像。集合 $\xi = \bigcup\{f : f \in \mathsf{S}\}$ 是从 S 到 2 的函数，并且可以扩展为一个从 P 到 2 的函数 χ。集合 $\{\chi\restriction_{T^{\leqslant t}} : t \in \mathsf{P}\}$ 是 $\mathfrak{T}^*$ 中的一条路径 ˜P，并且 $\pi(\tilde{\mathsf{P}}) = \mathsf{P}$。 ■

命题 38 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 的所有 $<$-分支都彼此同构。

同样，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 的所有 $<$-分支彼此同构。

证明。我们仍然只证明关于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$的断言，因为关于$\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}^{\dagger}$ 的证明非常相似。设$\mathfrak{T}_0$ 和 $\mathfrak{T}_1$ 是 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{T}}$ 的分支，并设 P 是 $\mathfrak{T}$中的一条路径。根据引理 37，我们可以考虑 $\mathfrak{T}_0$ 中的一条路径 ˜P_0 以及 $\mathfrak{T}_1$ 中的一条路径 ˜P_1，使得 $\pi(\tilde{\mathsf{P}}_0) = \pi(\tilde{\mathsf{P}}_1) =$ 。分别将集合˜ ˜⋃{f: $f \in \mathsf{P}_0$} 和 ⋃{f: $f \in \mathsf{P}_1$}记为 ξ_0 和 ξ_1。显然，ξ_0 和 ξ_1 是从 P 到 2 的函数。

设 f是 T_0的一个元素，并假设 $f \in 2^{T^{\leqslant t}}$。我们将 T_1中的元素 $\varphi(f)$ 定义为

$$\varphi(f) \in 2^{T^{\leqslant t}} \quad \text{and} \quad \varphi(f)(u) := \begin{cases} f(u) & \text{if } u \in T^{\leqslant t} \setminus \mathsf{P} \\ \xi_1(u) & \text{if } u \in \mathsf{P} \end{cases}. \tag{7}$$

我们证明 φ 是一个同构。容易验证，φ 是保序的，因此它是单射。对于每个 $g \in T_1$，$\varphi^{-1}(g)$ 都可以通过交换 $\mathfrak{T}_0$ 和 $\mathfrak{T}_1$，以与定义 $\varphi(f)$ 相同的方式定义。 ■

观察 令 χ为 2^T中的任意固定元素，并考虑集合 $T_\chi = \{\chi\restriction_{T^{\leqslant t}} : t \in T\}$。对应关系 $t \mapsto \chi\restriction_{T^{\leqslant t}}$是一个双射，且 $t < t'$当且仅当 $\chi\restriction_{T^{\leqslant t}} \subset \chi\restriction_{T^{\leqslant t'}}$，因此 $(T_\chi; \subset)$ 与 $\mathfrak{T}$同构。因此， $\mathfrak{F}_\mathfrak{T}$包含 $2^{|T|}$个 $\mathfrak{T}$的副本。在此背景下，我们只提及但暂且不回答这样一个问题： $\mathfrak{F}_\mathfrak{T}$ 有多少个 $<$-分支。不过，作为回答该问题的第一步，可以观察到，集合 $F_\mathfrak{T}$ 可以描述为 $\{\chi\restriction_{T^{\leqslant t}} : t \in T$和 $\chi \in 2^T\}$。因此，只要$f = \chi\restriction_{T^{\leqslant t}}$、 $g = \xi\restriction_{T^{\leqslant u}}$，且 χ和 ξ在 $\mathfrak{T}$的一条茎上重合， f和 g就属于 $\mathfrak{F}_\mathfrak{T}$的同一个 $<$-分支。我们用 $\chi \approx \xi$表示 χ和 ξ之间的这种关系。那么， $\approx$是一个等价关系，而 $\mathfrak{F}_\mathfrak{T}$ 中 $<$-分支的数量就是模 $\approx$的等价类数量。

定义 39 对于每棵树 $\mathfrak{T} = (T; <)$， $\mathfrak{T}$的凝缩分叉是满足以下条件的一对 $(\mathfrak{T}_c, \pi_c)$:

1. $\mathfrak{T}_c = (T_c; <_c)$ 是一棵凝缩树;
2. π_c 是一个从 T_c 到 T上的保序函数;
3. 对于 $\mathfrak{T}_c$中的每条路径 P， π_c 在 P 上的限制是 P 与 $\mathfrak{T}$中的一条路径之间的同构;
4. $\mathfrak{T}$ 中的每条路径都是 $\mathfrak{T}_c$中某条路径在 π_c下的像。

此外，如果

5. 存在一个 $\mathfrak{T}_c$ 的子树 $\mathfrak{T}'_c$，使得将 π_c 限制到 $\mathfrak{T}'_c$ 后得到一个同构,

那么 $(\mathfrak{T}_c, \pi_c)$ 将称为 $\mathfrak{T}$ 的凝缩扩展。

对于 $\mathfrak{F}_\mathfrak{T}$ 的每个 $<$-分支 $\mathfrak{T}^*$，我们用 π^* 表示将公式（5）中定义的函数 π 限制到 T^* 后得到的函数。于是，根据命题 36 和 38，$(\mathfrak{T}^*; \pi^*)$ 是 $\mathfrak{T}$ 的凝缩分叉。根据上述观察，$(\mathfrak{T}^*; \pi^*)$ 也是 $\mathfrak{T}$ 的凝缩扩展。对于 $\mathfrak{F}^\dagger_\mathfrak{T}$ 的每个 $<$-分支，同样如此。

下文图 4 中的树 $\mathfrak{T}^c_1$ 和 $\mathfrak{T}^c_2$ 是凝缩分叉但不是凝缩扩展的例子。

因此，给定一棵树，可能存在许多不同构的凝缩分叉或扩张。由此自然会产生一个问题: 其中是否存在一个按包含关系而言最小的唯一对象（在同构意义下）？ 以下例子表明，这两种情况下答案都是否定的。

例 40 图 4 底部的树 $\mathfrak{T}^c_1$ 和 $\mathfrak{T}^c_2$ 是 $\mathfrak{T}$的凝缩分叉，它们的规模小于$\mathfrak{F}^\dagger_\mathfrak{T}$，且可同构嵌入其中。很容易看出，这两个较小的 $\mathfrak{T}$的凝缩分叉都具有此性质且是极小的。在本例中，它们彼此同构；但若将原树 $\mathfrak{T}$中的叶节点x、 y、 z扩展为两两不同构（且凝缩）的子树，就能使它们不同构。这样得到的树便不存在一个按同构意义而言最小的凝缩分叉。

同样，通过考察从 $\mathfrak{F}^\dagger_\mathfrak{T}$ 中移除 y_1 或 z_1 后得到的树，可以证明 $\mathfrak{T}$ 不存在极小凝缩扩张。

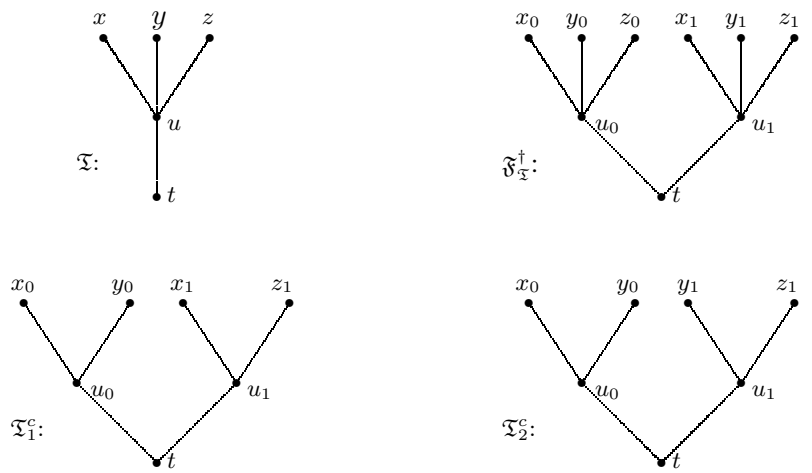


图 4：一棵树 $\mathfrak{T}$、其凝缩扩展 $\mathfrak{F}^{\dagger}_{\mathfrak{T}}$，以及 $\mathfrak{T}$ 的两个更小（且极小）的凝缩分叉。

6 总结

通过这项工作，我们开启了对一般树理论的探索。后续研究将包括：

- 研究完备树（按戴德金完备性的意义）及树完备化的构造；
- 研究树上的一般运算，例如和与积，从而拓展由康托尔、谢尔宾斯基等人开创的序数算术经典研究，并更广泛地研究线性序上的运算（参见 [16]）；
- 研究通过应用这类运算生成的树类，以及它们的结构理论和逻辑理论。

我们的最终目标是系统地构建树的结构理论。本研究预期的一个应用方向，是刻画树的初等等价及其他逻辑等价，并为重要树类的逻辑理论获得新的公理化结果，以及可判定性或不可判定性结果，思路与 [6] 中的工作相同。

致谢

我们感谢审稿人认真审阅论文，并提出有益的评论和建议。

参考文献

[1]H. Comon、M. Dauchet、R. Gilleron、C. L¨oding、F. Jacquemard、D. Lugiez、S. Ti- son 和 M. Tommasi，《树自动机技术与应用》，网址：http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata，2007年，发布于2007年10月12日。

[2] Bruno Courcelle 和 Joost Engelfriet, 《图结构与单子二阶逻辑——一种语言理论方法》, 《数学及其应用百科全书》第138卷, 剑桥大学出版社, 2012年。[3] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows, 《参数化复杂性的基础》, 《计算机科学丛书》, 施普林格, 2013年。[4] V. Goranko, 《树与有限分支》, 《第二届泛希腊逻辑研讨会论文集》, 1999年, 第91–101页。[5] V. Goranko 和 R. Kellerman, 《与一类线性序相关联的树类与理论》, 《IGPL逻辑期刊》19（2011年）, 217–232。[6] ———, 《将树近似为着色线性序及若干树类的完备公理化》, 《符号逻辑杂志》86（2021年）, 1035–1065。[7] V. Goranko 和 A. Zanardo, 《从线性时序逻辑到分支时间时序逻辑：语义与可定义性的迁移》, 《IGPL逻辑期刊》15（2007年）, 53–76。[8]Bruce Hughes, 《树与超度量空间：一种范畴等价》, 《数学进展》189(1)（2004年）, 148–191。[9] ———, 《树、超度量与非交换几何》, 《纯粹与应用数学季刊》8(1)（2012年）, 221–312。[10] T. Jech, 《树》, 《符号逻辑杂志》36（1971年）, 1–14。[11] R. Kellerman, 《树的逻辑理论》, 博士论文, 威特沃特斯兰德大学, 约翰内斯堡, 2010年。[12] ———, 《有界树的一阶理论》, 《数学逻辑档案》61（2022年）, 263–297。[13] Alex Lemin, 《超度量空间范畴与完备原子树状实分级格 LAT* 范畴同构》, 《普遍代数》50（2003年）, 35–49。[14] Peter J. Nyikos, 《论 Alexandroff 和 Urysohn 的若干非阿基米德空间》, 《拓扑学及其应用》91（1999年）, 1–23。[15] Michael O. Rabin, 《二阶理论与无限树上自动机的可判定性》, 《美国数学会会刊》141（1969年）, 1–35。[16] J.G. Rosenstein, 《线性序》, 学术出版社, 纽约, 1982年。[17] M. Sabbadin 和 A. Zanardo, 《分支时间语义的拓扑学方面》, 《逻辑研究》75（2003年）, 271–286。[18] J. Schmerl, 《论 $\aleph_0$-范畴性与树理论》, 《数学基础》94（1977年）, 121–128。[19] S. Todor˘cevi´c, 《树与线性有序集》, 《集合论拓扑学手册》（K. Kunen 和 J.E. Vaughan 编）, 北荷兰出版社, 1984年, 第235–293页。