arXiv:2301.06347v2 [math.RA] 4 Aug 2023

模理想化子链与含重复部分的分拆的不可细化性

RICCARDO ARAGONA、ROBERTO CIVINO 和 NORBERTO GAVIOLI

摘要。Aragona 等人最近在 Sym(2^n) 的一个 Sylow 2-子群中引入了一条正规化子链，该链始于一个初等阿贝尔正则子群。他们证明，链中相邻群的指标取决于互异部分分拆的数量，并借助刚性交换子给出了链中前$n-2$ 项的描述。此外，他们还证明，链中的第（$n-1$）项可通过与互异部分的不可细化分拆相对应的刚性交换子来描述。尽管所述链可以在 Sym(p^n) 的一个 Sylow p-子群中定义，但由于缺乏适当的刚性交换子概念，$p>2$ 计算正规化子链仍是一项艰巨的任务。本文从另一种角度处理这一问题。我们提出了一个更一般的正规化子链框架，在 $\mathbb{Z}_m$ 上的一个李环中定义一条理想化子链，其元素由整数分拆表示。我们展示了相应的理想化子如何由至多$m-1$ 个部分的分拆子集生成，并猜想该理想化子链在对称群中的增长方式与正规化子链相同。作为这一猜想的证据，我们在情形 $m=2$ 下建立了这两种构造之间的对应关系。

1. 引言

设 $n\geq 3$ 为一个整数， $\Sigma\leq$ Sym(2^n) 为一个包含初等阿贝尔正则子群 T 的 Sylow 2-子群。定义 $N_0=N_\Sigma(T)$，并递归地令 N_i 为前一项在 Σ 中的正规化子，即

$$N_i=N_\Sigma(N_{i-1}). \tag{1}$$

Aragona 等人 [ACGS21b] 最近证明，对于 $1\leq i\leq n-2$， N_{i-1} 在N_i 中的一个横截集可以与一组互异部分分拆建立一一对应，使得若以 $\{q_{2,i}\}_{i\geq 1}$ 表示由互异部分分拆序列 $\{p_{2,i}\}_{i\geq 1}$ 的部分和，则满足以下等式：

$$\log_2|N_i:N_{i-1}|=q_{2,i+2}. \tag{2}$$

所述序列的前几项及相应的 OEIS 编号列于表 1。

在后续的一项工作中 [ACGS22], 作者引入了不可细化分拆的概念，并证明 N_{n-2} 在 N_{n-1} 中的一个横截集，与一组满足额外要求的不可细化分拆一一对应，该要求涉及其最小排除数。关于正规化子上的 链 $(N_i)_{i\geq 0}$ 的研究，借助刚性交换子 [ACGS21b], 一组 Σ的生成元展开；该生成元集在交换运算下封闭，且专为此目的设计。然而，刚性交换子的方法

2010 数学学科分类。 17B70；17B60；20D20；05A17。关键词和短语。整数分拆；正规化子链；李环；刚性交换子；Sylow p- 子群。所有作者均为 INdAM-GNSAGA（意大利）的成员。R. Civino 的经费由拉奎拉大学的卓越中心 ExEMERGE 提供，其他作者也与该中心合作。

却难以推广到正规化子链的奇数情形，即在 Sym(p^n) 的 Sylow p-子群中定义的情形，其中 p 为奇数。理解该链在奇数情形下的行为，确实是作者留下的一个开放问题。

1.1. **新贡献概述**。为尝试在这一方向上取得成果，我们引入与 Σ 的下中心列相关联的分次李环。该李环是秩一李环的迭代绕积，并反映了任意素数 p 下 Sym(p^n 的 Sylow 子群的构造（另见 Sushchansky 和 Netreba [SN05]），其中 $p \geq 2$ 为素数。

更一般地，给定任意整数 $m \geq 2$，我们在每个部分至多重复 $m-1$ 次的分拆集合上赋予上述李环结构。我们称其为分拆李环（参见第 2 节）。在该李环中，我们递归地定义正规化子链的对应概念，即理想化子链，其起点是一个阿贝尔子环，它扮演初等阿贝尔正则子群 T 的角色。注意，当 $m = 2$ 时，任何部分都不能重复，也就是说，我们所处的组合背景与 Aragona 等人 [ACGS21b] 相同。不出所料，我们注意到，理想化子链的前 $n-2$ 项的行为与正规化子链完全一致，即式 (2) 对理想化子链的各项也有相应版本，概括于定理 2.14 中。有趣的是，在分拆李环的背景下，这一结果还可以推广。事实上，当 m 为任意大于二的整数时，该定理仍然成立，条件是考虑至多含有 $m-1$ 个重复部分的分拆，以取代互异部分分拆。在定理 2.15 中，我们证明，理想化子链的增长与至多含有 $m-1$ 个重复部分的分拆数序列的部分和有关。该结果涉及理想化子链的前 $n-1$ 项，比 $m = 2$ 的情形多一项。我们猜想，定理 2.15 是 Sym(p^n) 中正规化子链的 p-对应版本，其中 $m = p$ 为奇数。

第 3 节完全专注于 $m = 2$ 这一情形。我们证明，正规化子链中的各项实际上可以通过本文所述的李环结构计算得到（见定理 3.4）。具体而言，我们定义了一个从分拆李环的基元素到刚性交换子集合的双射（参见定义 3.2），并且该双射保持交换子。

第 4 节讨论第一个不遵循定理 2.14 和 2.15 规则的理想化子问题，即第 ($n - \delta_m$,2) 个理想化子。对于 $m = 2$，Aragona 等人 [ACGS22] 已证明，$\log_2 |N_{n-1} : N_{n-2}|$ 取决于满足某些额外约束的不可细化分拆的适当子集的个数。本文将不可细化性的概念自然推广到含有至多 $m-1$ 个重复部分的分拆。我们在李环的框架下证明，第 ($n - \delta_m$,2) 个理想化子由含有至多 $m-1$ 个重复部分、且满足与 Aragona 等人 [ACGS22] 中相同额外约束的不可细化分拆所确定（见定理 4.5）。本节最后给出 n 个理想化子的刻画（参见定理 4.7）；凭借定理 3.4，这也使我们能够精确刻画第 n 个正规化子 N_n，从而改进了已有结果 [ACGS21b, ACGS22]。

第5 节以对开放问题的一些评论作为全文结尾。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	OEIS
$p_{2,i}$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	26	31	A111133
$q_{2,i}$	0	0	1	2	4	7	11	16	23	32	43	57	74	95	121	152	A317910

表 1. 序列 $\{p_{2,i}\}$ 和 $\{q_{2,i}\}$ 的前几项

1.2. 整数分拆组合学中的相关研究。互异部分分拆的不可细化这一原始概念至少可以追溯到 OEIS 条目 A179009 [OEI]（由 David S. Newman 于 2011年提出），并由 Aragona 等人 [ACGS22]正式引入。在那篇论文中，满足关于最小排除数的某个特殊条件的不可细化分拆，自然地出现在与正规化子链 [ACGS21b]相关的研究中。其他作者也在整数分拆的背景下研究了最小排除数 [AN19, BM20, HSS22, DT23], ，尽管这一概念也出现在组合博弈论中 [Gur12, FP15]。近期， [ACCL22, ACC22], 证明了有关不可细化分拆的部分组合等式，并探讨了生成给定整数的所有不可细化分拆的算法复杂度问题 [ACCL23]。

2. 整数分拆的多项式表示

Let $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个有限支撑的非负整数序列，也就是说，满足

$$\mathrm{wt}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda_i < \infty.$$

序列 Λ 定义了 $N = \mathrm{wt}(\Lambda)$ 的分拆。每个非零的 i 都是该分拆的一个部分，整数 λ_i 是部分 i 在 Λ 中的重数，而 Λ 的支撑记作 $\mathrm{supp}(\Lambda) = \{i \mid \lambda_i \neq 0\}$。 Λ 的最大部分是满足 $\lambda_i \neq 0$ 的最大 i，即 $\max \mathrm{supp}(\Lambda)$。最大部分不超过 j 的分拆集合记作 $\mathrm{P}(j)$，并且对每个 $m > 0$，我们定义

$$\mathcal{P}_m(j) = \{\Lambda \in \mathcal{P}(j) \mid \lambda_i \leq m-1 \text{ for all } i\}$$

为最大部分不超过 j 且每个部分的重数不超过 $m-1$ 的分拆集合。我们还定义

$$\mathcal{P}_m = \bigcup_{j \geq 1} \mathcal{P}_m(j).$$

2.1. **幂单项式**。在多项式环 $\mathbb{Z}[x_k]_{k=1}^{\infty}$ 中，我们考虑单项式 x_k^i，其中 i 是非负整数。幂单项式 x^{Λ}（其中 Λ 是一个分拆）定义为

$$x^{\Lambda} = \prod_i x_i^{\lambda_i}.$$

这些单项式显然构成了 $\mathbb{Z}[x_k]_{k=1}^{\infty}$ 作为自由 $\mathbb{Z}$-模的一组基。至多含有 n 个变量的幂单项式集合记为

$$\mathrm{Mon}_n = \left\{x^{\Lambda} \mid \Lambda \in \mathcal{P}(n)\right\}.$$

幂单项式 x^{Λ} 的次数定义为 $\deg(x^{\Lambda}) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$。注意，

$$x^{\Lambda} x^{\Theta} = \prod_i x_i^{\lambda_i + \theta_i} = x^{\Lambda + \Theta}.$$

特别地，具有基 Mon_n 的 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ 具有自然的 $\mathbb{Z}$-代数结构，并且是一个以 $\mathbb{Z}$ 为系数、含有 n 个变量的多项式环。

k-偏导数定义为

$$\partial_k(x^{\Lambda}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_k = 0, \\ \lambda_k x^{D_k(\Lambda)} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $D_k(\Lambda) = \{\lambda_i - \delta_{ik}\}_{i=1}^{\infty}$。特别地， ∂_k 可通过线性扩张为$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$上的导子。

令 m 为正整数，并考虑理想 $I=(x_1^m,\dots,x_n^m)$，它属于 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$。显然$\partial_k(I)\subseteq m\,\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$，因此 k阶偏导数也可以视为定义在幂单项式环模 m 中的 n 个变量上的导子(另见 Strade [Str17])

$$\mathcal{O}_m(n)=\mathbb{Z}_m[x_1,\dots,x_n]/(x_1^m,\dots,x_n^m).$$

从模李环 $\mathfrak{g}$ over $\mathbb{Z}$出发，我们定义 $\mathfrak{g}^{\uparrow}=\mathsf{O}_m(1)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathfrak{g}$。我们还将膨胀李代数定义为膨胀李代数，其定义如下

$$\mathrm{Inf}(\mathfrak{g})=\langle\partial\otimes 1\rangle\ltimes\mathfrak{g}^{\uparrow},$$

其中 ∂ 是标准导数。

2.2. **分拆李环**。最大部分不超过 $n-1$ 的分拆李环 $\mathfrak{L}(n)$ *over* $\mathbb{Z}_m$ 由最大部分至多为 $n-1$ 的分拆构造得到：从平凡李环 $\mathfrak{L}(1)=\mathbb{Z}_m$ 出发，递归定义$\mathfrak{L}(i)=\mathrm{Inf}(\mathfrak{L}(i-1))$。为简洁起见，我们用 $\mathfrak{L}$ 代替 $\mathfrak{L}(n)$。

为了得到更适合计算的描述，$\mathfrak{L}$ 可视为以 $\mathsf{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathsf{B}_i$ 为基的自由 $\mathbb{Z}_m$-模，其中

$$\mathcal{B}_i=\left\{x^{\Lambda}\partial_i\mid x^{\Lambda}\in\mathcal{O}_m(n)\text{ with }\Lambda\in\mathcal{P}_m(i-1)\right\}.$$

李括号在此基 b 上定义 $\qquad\qquad\mathrm{y}$

$$\begin{aligned}\left[x^{\Lambda}\partial_k,x^{\Theta}\partial_j\right]=&\quad\partial_j(x^{\Lambda})x^{\Theta}\partial_k-x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})\partial_j=\\&=\begin{cases}\partial_j(x^{\Lambda})x^{\Theta}\partial_k & \text{if } j<k,\\ -x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})\partial_j & \text{if } j>k,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\end{aligned}\tag{3}$$

并通过双线性延拓至 $\mathfrak{L}$。若 $\mathfrak{L}_i$ 是 B_i 的 $\mathbb{Z}_m$-线性张成，则 $\mathfrak{L}_i$ 是 $\mathfrak{L}$ 的阿贝尔子环，且 $[\mathfrak{L}_i,\mathfrak{L}_j]\subseteq\mathfrak{L}_{\max(i,j)}$ 作为一个 $\mathbb{Z}_m$-模，$\mathfrak{L}(n)=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{L}_i=\mathfrak{L}(n-1)\oplus\mathfrak{L}_n$。此外，$\mathfrak{L}_n$ 是一个理想，因此作为李环，$\mathfrak{L}(n)=\mathfrak{L}(n-1)\ltimes\mathfrak{L}_n$。

对于 $\mathfrak{L}$ 的子集 H，我们令 $\mathbb{Z}_m\,\mathsf{H}=\left\{ax^{\lambda}\partial_k\mid a\in\mathbb{Z}_m\right.$，并令 $\left.x^{\lambda}\partial_k\in\mathsf{H}\right\}$。令 $\varphi_{\Theta,\,j}\colon\mathsf{B}\to\mathbb{Z}_m\,\mathsf{B}$ 为如下定义的右伴随映射：

$$\varphi_{\Theta,j}\left(x^{\Lambda}\partial_k\right)=\left[x^{\Lambda}\partial_k,x^{\Theta}\partial_j\right].$$

引理 2.1。设 $x^{\Theta}\partial_j\in\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{E}=\left\{x^{\Lambda}\partial_k\in\mathcal{B}\mid\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^{\Lambda}\partial_k\right)\neq 0\right\}$。则$\varphi_{\Theta,\,j}$ 在$\mathcal{E}$ 上的限制是单射。

证明。假设 $x^{\Lambda}\partial_k$，$x^{\Xi}\partial_l\in\mathsf{E}$ 满足

$$\varphi_{\Theta,j}\left(x^{\Lambda}\partial_k\right)=\varphi_{\Theta,j}\left(x^{\Xi}\partial_l\right).\tag{4}$$

由于 $\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^{\Lambda}\partial_k\right)$ 和 $\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^{\Xi}\partial_l\right)$ 均非平凡，因此我们有 $j>\max(k,\,l)$ 或 $j<\min(k,\,l)$。在第一种情况下，不妨设 $k\le l<j$，由式 (4) 得到 $\partial_k(x^{\Theta})x^{\Lambda}\partial_j=\partial_l(x^{\Theta})x^{\Xi}\partial_j$，即

$$x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})=x^{\Xi}\partial_l(x^{\Theta}).\tag{5}$$

反设 $k<l$，由于 $\lambda_l=\xi_l=0$，我们有：x_l 中的指数在等式（5）左边的项中经导数运算后保持不变，而在等式（5）右边的项中则减一，矛盾。因此 $k=l$，由此可得$x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})=x^{\Xi}\partial_k(x^{\Theta})$，从而 $x^{\Lambda}=x^{\Xi}$，命题得证。

在第二种情况下，$j<\min(k,l)$ 表示

$$\partial_j(x^{\Lambda})x^{\Theta}\partial_k=\partial_j(x^{\Xi})x^{\Theta}\partial_l,\tag{6}$$

from，它立即 $k=l$。于是，等式 (6) 推出 $\partial_j(x^\Lambda)=\partial_j(x^\Xi)$，因此 $x^\Lambda=x^\Xi$. □

定义 2.2。 $\mathfrak{L}$ 的李子环 $\mathfrak{H}$ 若为 B 中某个子集 H 的 $\mathbb{Z}_m$-线性张成，则称为齐次的 。

例 2.3。 由 T $=\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ 张成的 $\mathfrak{L}$ 的 $\mathbb{Z}_m$-子模是一个齐次（阿贝尔）李子环。注意， ∂_i 是 $\mathfrak{L}(i)$ 的中心的生成元。当 m 是素数时，这表明 $\mathfrak{T}$ 是 Sym(p^n) 的 Sylow p-子群的初等阿贝尔正则子群的自然对应物。

定义 2.4。 若 H 是 B 的一个子集，则其理想化子 定义为

$$N_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})=\{b\in\mathcal{B}\mid[b,h]\in\mathbb{Z}_m\,\mathcal{H}\text{ for all }h\in\mathcal{H}\}\,.$$

下述定理表明，可以直接根据交集 $\mathfrak{H}\cap$B 高效地计算齐次子环 $\mathfrak{H}$ 的理想化子。

定理 2.5。 设 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个齐次子环，其基为$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{B}$。 $\mathfrak{L}$ 中 $\mathfrak{H}$ 的理想化子是 $\mathfrak{L}$ 的齐次子环，它作为自由 Z_m-模由 $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$ 张成。

证明。 令 $\mathfrak{N}=N_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{H})$ 为 $\mathfrak{H}$ 在 $\mathfrak{L}$ 中的理想化子，并令

$$z=\sum_{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}} l_{\Lambda,k}x^\Lambda\partial_k\in\mathfrak{N}.$$

我们需要证明，对于所有 Λ 和 k，都有 $l_{\Lambda,\,k}x^\Lambda\partial_k\in\mathfrak{N}$ 。由于 $\mathfrak{H}$ 是一个齐次子环，因此对于所有 $x^\Theta\partial_j\in$H，只需证明若 $[l_{\Lambda,k}x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_j]\neq 0$，则 $[l_{\Lambda,k}x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_j]=l_{\Lambda,\,k}\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^\Lambda\partial_k\right)\in\mathbb{Z}_m$H。事实上，若 $x^\Theta\partial_j\in$ H，则

$$\mathfrak{H}\ni[z,x^\Theta\partial_j]=\sum_{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}} l_{\Lambda,k}\varphi_{\Theta,j}\left(x^\Lambda\partial_k\right).$$

由于 $\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^\Lambda\partial_k\right)\in\mathbb{Z}_m$B，且集合 B 是 $\mathfrak{L}$ 的一组基，并且子集 H $\subseteq$ B 是 $\mathfrak{H}$ 的一组基，根据引理 2.1 ，我们得到 $l_{\Lambda,\,k}\varphi_{\Theta,\,j}\left(x^\Lambda\partial_k\right)\in\mathbb{Z}_m$H，正如所需。□

2.3. **理想化子链**。 现在我们来定义从子环 理想化子链开始的基，子环 $\mathcal{T}$定义于例2.3中。

定义 2.6。 对于 $-1\le i\le n-1-\delta_{m,\,2}$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{U}&=\mathcal{T}\cup\{x_j\partial_k\mid 1\le j<k\le n\},\\ \mathcal{N}_i&=\begin{cases}\mathcal{T} & \text{if } i=-1\\ \mathcal{U} & \text{if } i=0\\ \mathcal{N}_{i-1}\dot\cup\,\mathcal{W}_i & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$\mathcal{W}_i=\left\{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}\mid n-i+1\le k\le n\text{ and }\operatorname{wt}(\Lambda)=k+i-n+1+\delta_{m,2}\right\}.\tag{8}$$

注 1。 正如后文将会更清楚地看到，之所以需要符号 $\delta_{m,\,2}$，是因为情形 $m=2$ 与其他情形不同：不存在将 2 分拆为至少两个互异部分的分拆。

注 2. 注意，由（7）可得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{n-1-\delta_{m,2}}&=\left\{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}\mid\operatorname{wt}(\Lambda)\le k\right\},\\ \mathcal{N}_{n-2-\delta_{m,2}}&=\left\{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}\mid\operatorname{wt}(\Lambda)\le k-1\right\},\end{aligned}$$

一般而言，对于 $3+\delta_{m,\ 2}\leq i\leq n$

$$\mathcal{N}_{n-i}=\left\{x^{\Lambda}\partial_k\in\mathcal{B}\mid \mathrm{wt}(\Lambda)\leq k-i+1+\delta_{m,2}\right\}\cup\mathcal{U}.$$

定义 2.7. 从 $\mathbb{Z}_m$理想化子链 开始的 -子模 $\mathfrak{T}$ 的 $\mathfrak{L}$ (参见例2.3) 定义如下:

$$\mathfrak{N}_i=\begin{cases}N_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}) & i=0,\\ N_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{N}_{i-1}) & i\geq 1.\end{cases}\tag{9}$$

我们将证明，对于 $0\leq i\leq n-1$，李子环 $\mathfrak{N}_i$ 是 N_i 的 $\mathbb{Z}_m$-线性张成。为此，我们需要以下结果。

引理 2.8. $\mathcal{N}_0=N_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$。

证明。 显然，$\mathsf{T}\ \subseteq N_{\mathcal{B}}(\mathsf{T})$。现在，如果 $x_i\partial_j\in\mathsf{U}$ 且 $i<j$，那么

$$\mathbb{Z}_m\,\mathcal{T}\ni[x_i\partial_j,\partial_k]=\begin{cases}\partial_j & k=i,\\ 0 & k\neq i,\end{cases}$$

因此 $\mathsf{U}\ \subseteq N_{\mathcal{B}}(\mathsf{T})$。

反过来，设 $x^{\Lambda}\partial_j\in N_{\mathcal{B}}(\mathsf{T})$。对于 $1\leq k\leq n$，我们有 $[x^{\Lambda}\partial_j,\partial_k]=\partial_k(x^{\Lambda})\partial_j\in\mathbb{Z}_m\,\mathsf{T}$。当 $\Lambda=0$ 或者存在某个 $1\leq k\leq n$ 使得 $x^{\Lambda}=x_k$ 时，这是可能的；也就是说， $x^{\Lambda}\partial_j\in\mathsf{N}_0$。□

下面的结果显然成立，稍后将会用到。

引理 2.9. 若 $[x^{\Lambda}\partial_j,x^{\Theta}\partial_k]=cx^{\Gamma}\partial_u$，其中 $0\neq c\in\mathbb{Z}_m$，则 $u=\max(j,k)$ 且 $\mathrm{wt}(\Gamma)\ =\mathrm{wt}(\Lambda)\ +\ \mathrm{wt}(\Theta)\ -\min(j,k)$。

引理 2.10. 若 $1\leq i\leq n-1-\delta_{m,2}$，则 $[\mathcal{U},\mathcal{W}_i]\subseteq\mathbb{Z}_m\,\mathcal{N}_{i-1}$。

证明。令 $x^{\Lambda}\partial_j\in\mathsf{W}_i$ 和 $x_h^{e_h}\partial_k\in\mathsf{U}$，其中 $0\leq e_h\leq 1$，并令 $cx^{\Gamma}\partial_u=[x^{\Lambda}\partial_j,x_h^{e_h}\partial_k]$，其中 $0\neq c\in\mathbb{Z}_m$。若 $x^{\Gamma}\partial_u\in\mathsf{U}$，则无需证明，因此假设 $x^{\Gamma}\partial_u\notin\mathsf{U}$。若 $k\leq j$，则要么$c=0$，要么由于 $\mathrm{wt}(\Gamma)\ <\mathrm{wt}(\Lambda)$， $x^{\Gamma}\partial_u\in\mathsf{N}_{i-1}$。否则，若 $k>j$，则 $cx^{\Gamma}\partial_u=\partial_j(x_h^{e_h})x^{\Lambda}\partial_k\neq 0$当且仅当 $h=j$ 且 $e_h=1$。此外，由于我们假设 $x^{\Gamma}\partial_u\notin\mathsf{U}$，它满足式 (8)，因此有

$$\mathrm{wt}(\Lambda)=j+1-(n-1)+\delta_{m,2}.$$

现在， $cx^{\Gamma}\partial_u=x^{\Lambda}\partial_k$ 并且

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\Gamma)=\mathrm{wt}(\Lambda)\ &=\ j+i-(n-1)+\delta_{m,2}\\ &\leq\ k+i-1-(n-1)+\delta_{m,2},\end{aligned}$$

因此 $x^{\Gamma}\partial_u\in\mathsf{N}_{i-1}$。 □

引理 2.11. 若 $1\leq i<h\leq n-1-\delta_{m,\ 2}$ 则 $[\mathcal{W}_i,\ \mathcal{W}_h]\subseteq\mathbb{Z}_m\,\mathcal{N}_{h-1}$。

证明。设 $x^{\Lambda}\partial_j\in\mathsf{W}_i$ 且 $x^{\Theta}\partial_k\in\mathsf{W}_h$。记 $[x^{\Lambda}\partial_j,x^{\Theta}\partial_k]=cx^{\Gamma}\partial_u$ 为 $c\neq 0$，并假设 $x^{\Gamma}\partial_u\notin\mathsf{U}$；否则，与之前一样，无需证明。由 $x^{\Lambda}\partial_j\in\mathsf{W}_i$ 可得 $\mathrm{wt}(\Lambda)\ =j+i-(n-1)+\delta_m,2$；由 $x^{\Theta}\partial_k\in\mathsf{W}_h$可得 $\mathrm{wt}(\Theta)\ =k+h-(n-1)+\delta_m,2$。现在，由引理 2.9 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\Gamma)\ &=\ \mathrm{wt}(\Lambda)+\mathrm{wt}(\Theta)-\min(j,k)\\ &=\ j+i-(n-1)+\delta_{m,2}+k+h-(n-1)+\delta_{m,2}-\min(j,k)\\ &=\ \max(j,k)+i-(n-1)+\delta_{m,2}+h-(n-1)+\delta_{m,2}\\ &=\ u+h-(n-1)+\delta_{m,2}+i-n+1+\delta_{m,2}\\ &\leq\ u+(h-1)-(n-1)+\delta_{m,2},\end{aligned}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	OEIS
$p_{2,i}$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	26	31	A111133
$q_{2,i}$	0	0	1	2	4	7	11	16	23	32	43	57	74	95	121	152	A317910
$p_{3,i}$	0	1	1	3	4	6	8	12	15	21	26	35	43	56	69	88	A000726
$q_{3,i}$	0	1	2	5	9	15	23	35	50	71	97	132	175	231	300	388	
$p_{4,i}$	0	1	2	3	5	8	11	15	21	28	37	49	63	81	104	131	A001935
$q_{4,i}$	0	1	3	6	11	19	30	45	66	94	131	180	243	324	428	559	
$p_{5,i}$	0	1	2	4	5	9	12	18	24	33	43	59	75	99	126	163	A035959
$q_{5,i}$	0	1	3	7	12	21	33	51	75	108	151	210	285	384	510	673	

表 2. 序列 $(p_{m,\,i})$ 和 $(q_{m,\,i})$ 的前几项，其中 $2 \le m \le 5$

这意味着 $x^{\Gamma}\partial_u \in \mathrm{N}_{h-1}$。 □

命题 2.12。若 $1 \le i \le n-1-\delta_{m,\,2}$，则 $\mathcal{N}_i = N_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}_{i-1})$。

证明。由前述引理可得包含关系 $\mathrm{N}_i \subseteq N_{\mathcal{B}}(\mathrm{N}_{i-1})$。剩下要证明 $N_{\mathcal{B}}(\mathrm{N}_{i-1}) \subseteq \mathrm{N}_i$。设 $x^{\Lambda}\partial_j \in N_{\mathcal{B}}(\mathrm{N}_{i-1})$。那么对于每个 $1 \le l \le n-1-\delta_{m,2}$ 以及每个 $x^{\Theta}\partial_k \in \mathrm{W}_l$，我们有 $[x^{\Lambda}\partial_j, x^{\Theta}\partial_k] \in \mathrm{N}_{i-1} \setminus \mathrm{N}_0$。令 $k < j$ 为满足 $\lambda_k \neq 0$的最小值，并令 $x^{\Theta}\partial_k = x_{k-1}\partial_k$。那么，由于 $\lambda_k \neq 0$，我们有 $[x^{\Lambda}\partial_j, x_{k-1}\partial_k] \neq 0$，并且根据假设，$[x^{\Lambda}\partial_j, x_{k-1}\partial_k]$ 是元素 $x^{\Gamma}\partial_j \in \mathrm{N}_{i-1}$ 的一个标量倍数，使得

$$\begin{aligned} \mathrm{wt}(\Gamma) = \mathrm{wt}(\Lambda) - 1 &\le j + i - 1 - (n-1) + \delta_{m,2} \\ &< j + i - (n-1) + \delta_{m,2}. \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{wt}(\Lambda) \le j + i - (n-1) + \delta_{m,\,2}$，即 $x^{\Lambda}\partial_j \in \mathrm{N}_i$。 □

根据前面的引理，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，我们可以定义

$$\mathcal{N}_i = N_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}_{i-1}) \tag{10}$$

定理 2.13. 李子环 $\mathfrak{N}_i$ 是齐次的，而李子环 $\mathfrak{N}_i$ 是 $\mathcal{N}_i$ 的 $\mathbb{Z}_m$-线性张成。

证明。该结论可由定理 2.5 、引理 2.8 和命题2.12直接推出。 □

2.4. **与整数分拆的联系**。设 $p_{m,i}$ 为将 i 分拆为至少两部分，且每个部分最多重复 $m-1$ 次的分拆数；设 $q_{m,i}$ 为部分和

$$q_{m,i} = \sum_{j=1}^{i} p_{m,j}.$$

这些序列的前几项列于表 2。注意，表中 OEIS 条目的最后三项包含了 i 的单部分分拆，而我们不予考虑。

由定理2.13 我们推出以下推论，现分别在 $m = 2$ 和$m > 2$ 的情形下陈述。

定理 2.14。设 $m = 2$ 和 $1 \le i \le n-2$。那么，对于 $n-i+1 \le k \le n$，我们有$|\mathcal{W}_i \cap \mathcal{B}_k| = p_{2,k+2+i-n}$，因此自由 $\mathbb{Z}_2$-模 $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 的秩为 $q_{2,i+2}$。

注意，定理 2.14 的结果与从初等阿贝尔正则子群出发时，对称群 Sym(2^n) 的 Sylow 2-子群中正规化子链的类似结果完全一致（[ACGS21b，推论 5]）。这并不令人意外：我们将在第 3 节证明，这两种构造之间存在对应关系。更重要的是，使用本文引入的分拆李环，可以轻松将结果推广到 $m > 2$ 的情形。

定理 2.15。设 $m > 2$ 和 $1 \le i \le n-1$。那么，对于 $n-i+1 \le k \le n$，我们有$|\mathcal{W}_i \cap \mathcal{B}_k| = p_{m,\ k+1+i-n}$ 因此，自由 $\mathbb{Z}_m$-模 $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 的秩为 $q_{m,\ i+1}$。

3. 一个显式对应（$m = 2$时）

本节中，我们将默认 $m = 2$，不再另行说明。正如前文所述，我们现在证明，对于任意 $i \ge 1$，商群 $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 的秩等于从初等阿贝尔正则子群出发的 Sym(2^n) 的 Sylow 2-子群中正规化子链各因子的对数 $\log_2 |N_i : N_{i-1}|$。具体而言，我们将构造一个双射，它把刚性交换子映射为分拆李环的基元素，并且保持交换子不变。

3.1. 与 Sym(2^n) 的 Sylow 2-子群的对应关系。这里我们回顾一些关于刚性交换子的基本事实，不过建议读者参阅 Aragona 等人 [ACGS21b]，以了解相关记号和结果。我们采用上述论文中的穿孔记号。更确切地说，如果 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 是 Sym(2^n) 的 Sylow 2-子群的生成元集，且 $X = \{x_1 > x_2 > \cdots > x_\ell\}$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的子集，则记 $[X]$ 为左范数交换子 $[s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_\ell}]$。以 b 为基、在 I 处穿孔的刚性交换子为

$$\vee[b; I] = [\{1, \dots, b\} \setminus I] \in \mathcal{R}^*,$$

其中 $1 \le b \le n$ 和 $I \subseteq \{1, \dots, b-1\}$，符号 R^* 表示非平凡刚性交换子的集合。我们还记 $\mathrm{R} = \mathrm{R}^* \cup \{[\emptyset]\}$。我们将使用交换子公式

$$\big[\vee[a; I], \vee[b; J]\big] = \begin{cases} \vee[\max(a,b);\ (I \cup J) \setminus \{\min(a,b)\}] & \text{if } \min(a,b) \in I \cup J \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

已在所引论文的命题 4 中证明。我们还提醒，初等阿贝尔正则群 T 可表示为刚性交换子 $T = \mathbf{h}t_1, \dots, t_n\mathbf{i}$，其中 $t_i = \vee[i;\ \emptyset]$ 对于 $1 \le i \le n$。

即将定义的这个双射，关键依赖于以下结果所给出的刚性交换子表示。

引理 3.1. 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ 由$\{t_1, \dots, t_n\}$正规化。若 $\vee[a;\ X]$ 是任意一个正规化$\mathcal{S}$的刚性交换子，且 $\vee[b; Y] \in \mathcal{S}$，则存在一个刚性交换子 $\vee[b;\ Z] \in \mathcal{S}$，使得$Z \cap X = \emptyset$ 并且

$$\big[\vee[a; X], \vee[b; Y]\big] = \big[\vee[a; X], \vee[b; Z]\big].$$

证明。设 $i \in X \cap Y$。注意到

$$\big[\vee[a; X], \vee[b; Y \setminus \{i\}]\big] = \big[\vee[a; X], [\vee[b; Y], t_i]\big] = \big[\vee[a; X], \vee[b; Y]\big].$$

这样，我们可以从 Y 中逐一去除 $X \cap Y$ 中的所有元素，得到 Z，同时保持交换子不变。□

现在定义李环的基元素与刚性交换子集合之间的双射 f。我们稍后将证明 f 保持交换子。

定义 3.2。 设 $f: \mathrm{B} \cup\{0\} \rightarrow \mathrm{R}$，由令 $f(0)=[\emptyset]$ 且

$$f(x^{\Lambda}\partial_k) = \vee[k; \operatorname{supp}(\Lambda)]\,.$$

注记 3. 由公式（11）可知，如果 $[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_h] \neq 0$ 或 $\Lambda \cap \Gamma = \emptyset$，则

$$f\left([x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_h]\right) = \left[f\left(x^{\Lambda}\partial_k\right), f\left(x^{\Gamma}\partial_h\right)\right].$$

事实上，我们注意到，如果 $[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_h] = 0$ 且 $\Lambda \cap \Gamma = \emptyset$，那么 $k \notin \Gamma$ 且 $h \notin \Lambda$，因此前一个等式的两边都是单位元。

引理 3.3. 如果 $S \subseteq \mathcal{B} \cup\{0\}$ 被 $\mathcal{T} = \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ 正规化且在交换下封闭，那么 $x^{\Theta}\partial_u$ 正规化 S 当且仅当 $f(x^{\Theta}\partial_u)$ 正规化 $\mathcal{S} = f(S)$。

证明. 我们首先证明 $\mathcal{S}$ 在交换下封闭。注意，由于 $[\mathcal{T}\ S] \subseteq S$，根据注记 3 可知 $f(\mathcal{T}) = \{t_1, \ldots, t_n\}$ 正规化 $\mathcal{S}$。设 $f(x^{\Lambda}\partial_k)$ 和 $f(x^{\Gamma}\partial_h)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的两个元素。根据引理 3.1 以及注记 3 我们有

$$\left[f(x^{\Lambda}\partial_k), f(x^{\Gamma}\partial_h)\right] = \left[f(x^{\Lambda}\partial_k), f(x^{\Gamma'}\partial_h)\right] = f\left([x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma'}\partial_h]\right) \in \mathcal{S}$$

对于某个 Γ'，使得 $\operatorname{supp}(\Lambda) \cap \operatorname{supp}(\Gamma') = \emptyset$。

令 $x^{\Lambda}\partial_k \in S$ 和 $x^{\Theta}\partial_u$ 为李环中规范化 S的一个基元素。交换子$[x^{\Theta}\partial_u, x^{\Lambda}\partial_k] \in S$，因此，根据引理 3.1，存在 Λ' 使得 $\operatorname{supp}(\Lambda') \cap \operatorname{supp}(\Theta) = \emptyset$ 并且

$$[f(x^{\Theta}\partial_u), f(x^{\Lambda}\partial_k)] = [f(x^{\Theta}\partial_u), f(x^{\Lambda'}\partial_k)] = f\left([x^{\Theta}\partial_u, x^{\Lambda'}\partial_k]\right) \in \mathcal{S}.$$

因此， $f(x^{\Theta}\partial_u)$ 规范化 S。反之，若 $f(x^{\Theta}\partial_u)$ 规范化 S，且 $f(x^{\Lambda'}\partial_k) \in$S，则$[f(x^{\Theta}\partial_u)\ f(x^{\Lambda}\partial_k)] \in$S。因此，要么 $[x^{\Theta}\partial_u, x^{\Lambda}\partial_k] = 0 \in S$，要么

$$[f(x^{\Theta}\partial_u), f(x^{\Lambda}\partial_k)] = f\left([x^{\Theta}\partial_u, x^{\Lambda}\partial_k]\right) \in \mathcal{S} = f(S).$$

因此 $[x^{\Theta}\partial_u, x^{\Lambda}\partial_k] \in S$，因为 f 是一个双射，所以 $x^{\Theta}\partial_u$ 规范化 S。 □

我们终于可以证明所声称的结果了。

定理 3.4。 对于所有非负整数 i，正规化子链的第 N_i 项是由刚性交换子饱和集 f（$\mathcal{N}_i$）生成的饱和子群。特别地，对每个 $i \geq 1$，下列等式成立：

$$\operatorname{rk}\left(\mathfrak{N}_i / \mathfrak{N}_{i-1}\right) = \log_2\left|N_i : N_{i-1}\right|.$$

证明。 这是将定理 2.13 以及 Aragona 等人的推论 2 和命题 5 [ACGS21b]应用于前一个引理即可直接得到的结果。 □

4. 具有重复部分的不可细化分拆与第（$n-1$）个理想化子 R

将一个分拆为互异部分的分拆定义为不可细化的做法，已由 Aragona 等人 [ACGS22] 在讨论 Sym(2^n) 中正规化子链的第（$n-1$）项时给出。这里我们将其自然推广到部分最多可重复 $m-1$ 次的分拆，并说明它与第一个不遵循定理 2.14 和2.15规则的理想化子（参见定理 4.5）之间的联系，即第（$n-\delta_{m,\ 2}$）项。

定义4.1。 令 $\Lambda \in \mathrm{P}_m$ 为一个分拆，其中每个部分的重数至多为 $m-1$，且存在满足以下条件的指标 $j_1 < \cdots < j_\ell < j$

- $j = \sum_{i=1}^{\ell} a_i j_i$, with $a_i \leq m - 1 - \lambda_{j_i}$,
- $\lambda_j \geq 1$.

从 Λ 中移除部分 j，并插入部分 j_1、……、j_ℓ（每个部分各取 a_i 次）后得到的分拆 Θ，称为 Λ 的 a-细化，其中 $a=\sum a_{i}$。我们用 $\Theta \prec \Lambda$ 表示 Θ 是 Λ的2-细化。若一个分拆存在细化，则称其在 P_m中可细化；否则称其在 P_m中不可细化。

注记 4. 请注意，尽管部分 j 的重数最高可达 $m-1$，但定义 4.1 中的细化操作是针对单个部分进行的。

命题 4.2. 对分拆 Λ 进行任意一次 a-细化，都恰好可以通过连续进行 $a-1$ 次后续的 2-细化得到。

证明。 设分拆 Λ 中的部分 j 被替换为 a_1 个 j_1、……以及 a_ℓ 个 j_ℓ。根据 $\lambda_{j_1+j_2}\geq 1$ 或 $\lambda_{j_1+j_2}=0$，分两种情况证明，并用归纳法论证；当 $a=2$时，结论显然成立。设 $\lambda_{j_1+j_2}\geq 1$。首先进行一次 2-细化，以 j_1 和 j_2 替换 j_1+j_2。随后，对将 j替换为 j_1+j_2，j_3，……，j_ℓ 的细化应用归纳法论证，这一步通过连续进行 $a-2$次 2-细化完成。现在假设 $\lambda_{j_1+j_2}=0$。我们首先进行一次（$a-2$）-细化，以 j_1+j_2，j_3，……，j_ℓ替换 j；随后进行一次 2-细化，以 j_1 和 j_2 替换 j_1+j_2。在这两种情况下，根据归纳法，均进行了 $a-1$ 次 2-细化。由于每次 2-细化都会使部分总数增加一，因此 $a-1$ 是连续进行 2-细化以得到最终 a-细化所需的最少次数。□

定义4.3。 设 $\Lambda\in$P$_m$ 且 $t>0$ 为一个整数。若 Λ 在 P$_m$中不可细化，则称其为 0步可细化的。若 t 取最大值，且存在一个由 t 个连续的真2-细化组成的序列 $\Lambda_t\prec\Lambda_{t-1}\prec\cdots\prec\Lambda_0=\Lambda$，使得$\Lambda_t$ 不可细化，则称 Λ 为 t步可细化的。换言之，从 Λ 开始连续进行 2-细化以获得某个在 P_m 中不可细化的分拆，最多可以进行 t 次。

注 5. 命题 4.2 的一个直接推论是，分拆 Λ 在 $\mathcal{P}_m$ 中为 t步可细化的，当且仅当 t 是满足 a 的最大值，且 Λ 存在一个 a-细化。

定义 4.4。 设 $\Lambda\in \mathrm{P}_m(n-1)$。考虑单项式 $f=\prod_{i=1}^{n-1}x_i^{m-1}$ 和 l et

$$x_{e_1}^{\mu_1}\cdots x_{e_s}^{\mu_s}=f/x^{\Lambda},$$

其中 $e_1<\cdots<e_s$和 $\mu_i\geq 1$。称指标 e_i为 Λ的第 i个排除数，而 μ_i是其重数。 Λ 的第一个排除数也称为其最小排除数。如果 i 是满足 $n<k+e_i$的最小指标，我们就说 $x^\Lambda\partial_k$满足第 i 个排除数条件。此外，如果 i 是满足$n<k+e_1+\cdots+e_i$的最小指标，我们就说 $x^\Lambda\partial_k$ 满足弱 i个排除数条件。

注意，如果一个分拆满足第 i个排除数条件，那么对于某个 $j\leq i$，它也满足弱j个排除数条件。

我们将填充元定义为

$$\mathrm{fil}_{i,j}=x_ix_j\partial_{i+j}\in\mathfrak{N}_{n-1-\delta_{m,2}}\setminus\mathfrak{N}_{n-2-\delta_{m,2}}. \tag{12}$$

设 $\Lambda\in \mathrm{P}_m(n-1)$是一个具有排除指标 $e_1<\cdots<e_s$ 的分拆，并假设对于某个 $j\geq n-\delta_{m,\ 2}$，有 $x^\Lambda\partial_k\in\mathfrak{N}_j$。若 $k+e_i\leq n$，则对易子运算

$$[x^\Lambda\partial_k,\mathrm{fil}_{e_i,k}]=x_{e_i}x^\Lambda\partial_{k+e_i}\in\mathfrak{N}_{j-1}$$

其作用是填充 Λ的第 i个排除数。

现在我们来处理本节的主要结果。分拆 $\Lambda \in \mathrm{P}_m(k-1)$可细化的条件等价于存在一个分拆 $\Theta \in \mathrm{P}_m(h-1)$，满足$h = \mathrm{wt}(\Theta) < k$，且 $[x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_h] \neq 0$。

定理 4.5. 集合 $\mathcal{N}_{n-\delta_{m,2}} \setminus \mathcal{N}_{n-1-\delta_{m,2}}$ 中的元素均具有形式 $x^\Lambda \partial_k \in \mathcal{B}$，其中$\Lambda \in \mathcal{P}_m(n-1)$ 是满足第一排除条件的 $k+1$ 的不可细化分拆。

证明. 我们假设 $m > 2$ 来证明这一断言。情形 $m = 2$ 的证明几乎完全相同，而且根据第 3 节所示的对应关系，也没有必要再证明。

令 $x^\Lambda \partial_k \in \mathcal{N}_n \setminus \mathcal{N}_{n-1}$，并令 e 为 Λ 的最小排除数。根据注记 2，由于$x^\Lambda \partial_k \notin \mathcal{N}_{n-1}$，有 $\mathrm{wt}(\Lambda) \geq k+1$。令 $h = \min\{j \mid \lambda_j \neq 0\}$，并令

$$\mathcal{N}_0 \ni x^\Gamma \partial_h = \begin{cases} \partial_1 & \text{if } h = 1 \\ x_{h-1}\partial_h & \text{if } h > 1 \end{cases}$$

由于 $\mathrm{N}_{n-1} \ni [x^\Gamma \partial_h, x^\Lambda \partial_k] = x^\Theta \partial_k \neq 0$，可得 $\mathrm{wt}(\Theta) = \mathrm{wt}(\Lambda) - 1 \leq k$。因此 $\mathrm{wt}(\Lambda) = k+1$。

设 Ξ 是权为 $k+1$ 的任意分拆。由引理 2.9 $[x^\Xi \partial_k, \mathrm{N}_{n-2}] \subseteq \mathrm{N}_{n-1}$，再由引理 2.9 和注 2 可知，$x^\Xi \partial_k \in \mathrm{N}_n \setminus \mathrm{N}_{n-1}$ 当且仅当 $[x^\Xi \partial_k, \mathrm{W}_{n-1}] = 0$。于是设 $x^\Sigma \partial_h \in \mathrm{W}_{n-1}$，使得 $\mathrm{wt}(\Sigma) = h$。对所有满足 $h \leq k$ 的 $x^\Sigma \partial_h \in \mathrm{W}_{n-1} \setminus \mathrm{U}$，条件 $[x^\Sigma \partial_h, x^\Lambda \partial_k] = 0$ 等价于 $x^\Lambda \partial_k$ 不可细化。因此我们假设 $h > k$ 且 $x^\Theta \partial_h = [x^\Sigma \partial_h, x^\Lambda \partial_k] \neq 0$。特别地，$\mathrm{wt}(\Sigma) \geq e + k$，因为 $\sigma_k \geq 1$，并且只有当 $i \neq k$ 是 Λ 的排除数时，Σ 才可能有非零分量 σ_i。因此 $n \geq h = 1 + \mathrm{wt}(\Sigma) \geq e + k$，从而得到 $k \leq n - e$。反过来，若 $0 < k \leq n - e$，则 $\mathrm{fil}_{e,k} \in \mathrm{N}_{n-1}$ 且 $[x^\Lambda \partial_k, \mathrm{fil}_{e,k}] = x_e x^\Lambda \partial_{e+k} \neq 0$。因此，若 $\mathrm{wt}(\Lambda) = k+1$，则 $[x^\Lambda \partial_k, \mathrm{W}_{n-1} \setminus \mathrm{U}] = 0$ 当且仅当 $n - e < k \leq n$，且 $x^\Lambda \partial_k$ 在 P_m 中不可细化。□

4.1. **再看一个理想化子。** 在最后这一节中，我们再次令 $m = 2$，并旨在刻画由式（n）定义的理想化子链的第 9 项。根据第 3.1 节的结果，该刻画自动推广到式（n）中 $\mathrm{Sym}(2^n)$ 的第 1 个正规化子。接下来的结果相当技术性，将真正展示试图超越（$n-1$）阶理想化子/正规化子这一“自然”界限所付出的组合复杂度代价。

令 $x^\Lambda \partial_k \in \mathfrak{N}_n \setminus \mathfrak{N}_{n-1}$，并设 $e_1 < \cdots < e_s$ 为 Λ的排除指标。我们首先给出 $x^\Lambda \partial_k$ 必须满足的一些必要条件，因为它属于 $\mathfrak{N}_n \setminus \mathfrak{N}_{n-1}$。

由定理 2.13，我们有 $\mathrm{wt}(\Lambda) \geq k+1$。首先假设 $\mathrm{wt}(\Lambda) = k+1$。由定理 4.5，要么 Λ 可细化，要么 Λ 不可细化且 $k \leq n - e_1$。若 Λ 可细化，则存在一个分拆 Γ，满足 $h = \mathrm{wt}(\Gamma) < k$，且 $\mathfrak{N}_{n-1} \ni x^\Theta \partial_k = [x^\Lambda \partial_k, x^\Gamma \partial_h] \neq 0$；于是分拆 Θ不可细化，而 Θ 的最小排除数 e 满足 $k > n - e$。假设 Λ满足带有 $j \geq 1$的第 j 个排除数条件。由于存在一个 Λ 的不可细化 2-细化 Θ，它是通过将一个部分 λ_u 替换为两个排除数 e_s 和 e_t得到的，因此我们有 $j \leq 3$。此外，若 $j \geq 2$，则交换子元素

$$x^\Xi \partial_{e_1+k} = [x^\Lambda \partial_k, \mathrm{fil}_{e_1,k}] = x_{e_1} x^\Lambda \partial_{e_1+k} \in \mathfrak{N}_{n-1},$$

因此，$x^\Lambda \partial_k$ 满足弱第二排除数条件，而通过 Λ填入其最小排除数得到的分拆 Ξ 是一个不可细化分拆。这意味着 Λ 的任何细化都在第 e_1 个分量中含有 1。在更具体的情形 $j = 3$ 下，将 e_1 替换为 e_2，同样的论证仍然适用。因此，Λ 的每个细化 Θ 都将第 e_1 个和第 e_2 个分量设为 1。由命题 4.2 可知，若 $j = 3$，则 $\lambda_{e_1+e_2} = 1$ 和 Θ 是通过在Λ 的第（$e_1 + e_2$）个分量中插入 0，并在第 e_1 个和第 e_2 个分量中插入 1 而得到的 Λ。一个

类似的论证表明，若 Λ 是不可细化的，则它必须满足第二弱排除指标条件。我们将之前的条件总结如下：

定义 4.6. 元素 $x^\Lambda\partial_k$ 满足可一步排除条件，当且仅当 $wt(\Lambda) = k+1$ 且Λ 满足以下条件之一：

(a) Λ 是可一步细化的，且满足第一排除条件；(b) Λ 是可一步细化的，且满足第二排除条件，并且每个细化Θ 都满足 $\theta_{e_1} = 1$；(c) Λ 是可一步细化的，且同时满足第三排除条件和第二弱排除指标条件，$\lambda_{e_1+e_2} = 1$，并且 Λ 的唯一细化 Θ 满足$x^\Theta = x_{e_1}x_{e_2}x^\Lambda/x_{e_1+e_2}$；(d) Λ 是不可细化的，并且必须满足第二弱排除指标条件。

现在只剩下 wt(Λ) $\geq k+2$ 这一情形。若 $\lambda_1 = 1$，则 $x^\Theta\partial_k = [x^\Lambda\partial_k, \partial_1] \in \mathfrak{N}_{n-1}$，因此 $k+1 \leq \sum_{i\geq 2} i\lambda_i \leq k+1$ 意味着 wt(Λ) $= k+2$。Θ 的最小排除数为 1，这意味着 $k > n-1$，即 $k = n$。此外，Θ 必须是不可细化的，因此若对某个 $i \geq 2$ 有 $\lambda_i = \theta_i = 0$，则 $\lambda_{i+1} = \theta_{i+1} = 0$ 也成立。这意味着存在一个指标 t，使得对 $1 \leq i \leq t$ 有 $\lambda_i = 1$，并且对 $i > t$ 有 $\lambda_i = 0$。因此，Λ 是一个三角分拆。现在假设 $\lambda_1 = 0$。设 h 为一个指标，使得 $\lambda_{h-1} = 0$ 且 $\lambda_h = 1$。我们要证明 $h = 2$。若 $h > 2$，则交换子元素 $x^\Theta\partial_k = [x^\Lambda\partial_k$,fil1,$_{h-1}] \in \mathfrak{N}_{n-1}$，其中 wt($\Theta$) $= k+2$，矛盾。因此存在一个指标 $t > 2$，使得对 $i > t$ 有 $\lambda_i = 0$。此时我们称 Λ 为弱三角分拆。特别地，$\lambda_2 = 1$，因此交换子元素 $[x^\Lambda\partial_k, x_1\partial_2] = x^\Theta\partial_k \in \mathfrak{N}_{n-1}$，其中 Θ 的最小排除数为 2。因此$n-2 < k \leq n$，即 k 不是 n 就是 $n-1$。注意，$k = n-1$ 这种情形不可能出现，因为此时$[x^\Lambda\partial_k$,fil1,$_k] = x^\Theta\partial_n \neq 0 \in \mathfrak{N}_{n-1}$，从而导致矛盾 wt($\Theta$) $= k+3 = n+2 > n+1$。

下面总结前文的讨论，并说明除在 $n = 8$ 情形下存在一些孤立例外之外，所提条件也是充分的。由于该问题具有复杂的组合性质，这一结果的证明相当冗长且颇为繁琐，因为证明分为若干情形及子情形展开。

定理 4.7。 除了 $n = 8$ *and*

$$x^\Lambda\partial_k = x_2x_7\partial_8, \tag{13}$$

$$x^\Lambda\partial_k = x_4x_5\partial_8, \tag{14}$$

$$x^\Lambda\partial_k = x_2x_4\partial_5, \tag{15}$$

元素 $x^\Lambda\partial_k$ 属于 $\mathfrak{N}_n \setminus \mathfrak{N}_{n-1}$，当且仅当以下条件之一成立：

(1) 权重(Λ) $= k+1$ 且 $x^\Lambda\partial_k$ 满足*<1-step excludant condition>一步排除条件</1-step excludant condition>*；*(2)* 权重(Λ) $= k+2$，$k = n$，并且以下条件之一成立：*(i)* $n+2$ 是第 t 个三角数且 $x^\Lambda = x_1\cdots x_t$，即 Λ 是第 t 个三角分拆；*(ii)* $n+3$ 是第 t 个三角数且 $x^\Lambda = x_2\cdots x_t$，即 Λ 是第 t 个弱三角分拆。

证明。 我们已经证明，如果 $x^\Lambda\partial_k \in \mathfrak{N}_n \setminus \mathfrak{N}_{n-1}$ 那么条件之一 1–2 必须成立。

现在我们证明这些条件也足以成立。证明分为两个步骤。在步骤 1中，我们证明，若 $x^\Gamma\partial_u \in \mathfrak{N}_{n-1} \setminus \mathfrak{N}_{n-2}$，则 $[x^\Lambda\partial_k, x^\Gamma\partial_u] = 0$ 对于每个满足$x^\Lambda\partial_k$ 的基元1 或2。之后，根据注2，只需证明若 wt($x^\Gamma\partial_u$) $\leq u$，则

$[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_u] \in \mathfrak{N}_{n-1}$ 对于每个满足 $x^{\Lambda}\partial_k$ 的基元1 或2。这将在步骤 2中完成。

步骤 1。

我们根据不可细化分拆 Γ 的形式，考虑若干种情形。注意，由于 Γ 不是零分拆， γ_1 和 γ_2 中至少有一个不为零，否则 Γ 就是可细化的。下文中，除非另有说明，我们都假设 $[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_u] \neq 0$ ；特别地，对所有 i，分量 λ_i 和 γ_i 不会同时等于 1。

情形 1 ．我们先考虑 $\gamma_1 = 0$ 和 $\gamma_2 = 1$ 的情形。如果对某个 $i \geq 0$， $\gamma_{i-1} = 0$ 和 $\gamma_i = 1$ ，那么通过令 $x^{\Theta}\partial_u = [x^{\Gamma}\partial_u, x_1 x_{i-1}\partial_i]$， Γ 就有一个细化 Θ 。这是不可能的，因为 Γ 不可细化，因此 Γ 是弱三角形的，即 $x^{\Gamma} = x_2 \cdots x_s$。由于 $x^{\Gamma}\partial_u \in \mathfrak{N}_{n-1} \setminus \mathfrak{N}_{n-2}$，所以 $n - e < u \leq n$，其中 $e = 1$ 是 Γ 的最小排除数。因此 $u = n$ ，我们必然有 $k < n$。由于上述交换子非平凡，所以 $2 \leq k \leq s$。因此，对于 $i \geq 2$，有 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_i = 0$ ，从而得到 $x^{\Lambda}\partial_k = x_1\partial_k \in \mathsf{U} \setminus \mathsf{T}$，矛盾。

情形 2。接下来考虑 $\gamma_1 = 1$ 和 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$的情形。注意， $\gamma_4 = 1$ 否则，不可细化性 Γ 将意味着对所有 $i \geq 2$都有 $\gamma_i = 0$ 。若对所有 $i > 4$都有 $\gamma_i = 0$ ，则 $u = \mathsf{wt}(\Gamma) - 1 = 4$ ，这与 $\gamma_4 = 1$ 矛盾。因此，对某个 $t > 4$有 $\gamma_t \neq 0$ 。注意，若 $i > 3$ 且 $i \equiv 3$ 模 2，则必有 $\gamma_i = 0$ ，也就是说，若 i 为奇数。因此，对某个 $h \geq 3$有 $t = 2h$ 。若 $h > 3$，则 $2h = (2h-3) + 3$ ，而事实 $\gamma_3 = \gamma_{2h-3} = 0$ 表明，交换子$x^{\Theta}\partial_u = [x^{\Gamma}\partial_u, x_3 x_{t-3}\partial_t]$ 给出了 Γ的一个真细化 Θ ，矛盾。因此，$h = 3$ 是唯一可能的选择，所以 $x^{\Gamma}\partial_u = x_1 x_4 x_6 \partial_{10}$。由 $n - e < u \leq n$可知，其中 $e = 2$是 Γ的最小排除数，我们有 $n = 10$ 或 $n = 11$。先假设 $k < u = 10 \leq n$。那么 k 的可能取值为 4 或 6，否则 $[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Gamma}\partial_u] = 0$。由于 $\mathsf{wt}(\Lambda) = k + 1$ 或 $\mathsf{wt}(\Lambda) = k + 2$， $x^{\Lambda}\partial_k$ 的可能取值只有 $x^{\Lambda}\partial_k = x_2 x_5 \partial_6$、$x^{\Lambda}\partial_k = x_3 x_5 \partial_6$ 或 $x^{\Lambda}\partial_k = x_2 x_3 \partial_4$。这些取值均不满足条件 1 或 2，因为我们假设 $n \geq 10$。另一种可能是 $k > u = 10$。因此我们有 $k = n = 11$ 和 $\lambda_{10} = 1$。由于 $\mathsf{wt}(\Lambda) \leq k + 2 \leq 13$， Λ 不可能是弱三角形的。因此 $\mathsf{wt}(\Lambda) = k + 1$ ，于是我们得到 $x^{\Lambda}\partial_k = x_2 x_{10}\partial_{11}$；它不满足定义 4.6 的任何条件，因为 Λ 是二步可细化的。

情形 3。我们考虑 $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$ 和 $\gamma_2 = 0$ 的情形 ．
不可细化分拆 Γ 于是具有如下形式：

$$\Gamma = (1, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{l}, \underbrace{0, 1, \ldots, 0, 1}_{m}, 0, \ldots). \tag{16}$$

换言之，该序列以 1，0 开始，随后是 $l \geq 1$ 次重复的 1 和 $m \geq 0$ 次重复的块 0，1，之后便全为 0。相应地， Λ 具有如下形式

$$\Lambda = (0, *, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \underbrace{*, 0, \ldots, *, 0}_{m}, *, \ldots),$$

其中星号表示 {0，1} 中未指定的数字。由于 $\Lambda \notin \mathsf{U}$，因此它至少有两个等于 1 的分量。特别地， $\lambda_i = 1$ 对于某个最小的 $i > l + 2$ 成立。我们继续考察 i 的可能取值。

首先假设 $i \geq 8$，这给出 $\lambda_4 = 0$。在这种情况下， $\lambda_{i-3} = 0$ ，且交换子 $x^{\Theta}\partial_k = [x^{\Lambda}\partial_k, x_3 x_{i-3}\partial_i]$ 给出了 Λ 的一个细化 Θ ，该细化是不可细化的，因为交换子属于 $\mathfrak{N}_{n-1} \setminus \mathfrak{N}_{n-2}$。此外， $\theta_1 = 0$，因此 Θ 必须是弱三角形的。这意味着$\lambda_4 = \theta_4 = 1$，矛盾。因此 $i < 8$。

如果 $i = 7$，那么 $\lambda_4 \neq 0$ 否则，交换子 $x^{\Theta}\partial_k = [x^{\Lambda}\partial_k, x_3 x_4 \partial_7] \in \mathfrak{N}_{n-1} \setminus \mathfrak{N}_{n-2}$将给出一个弱三角分拆 Θ。这一事实 $i = 7$ 还意味着 $\lambda_5 = 0$。因此$x^{\Theta}\partial_k = x_2 x_3 x_4 \partial_8$， $n = k = 8$ 并且 $x^{\Lambda}\partial_k = x_2 x_7 \partial_8$，这正是方程（13）中的孤立例外。

假设 $i=6$，那么 $\gamma_6=0$。Γ 的不可细化性意味着，对于 $h\geq 0$，有 $\gamma_{2h}=0$，唯一可能的例外是 $h=2$。令 s 为满足条件的最大值，使得

$$\gamma_1=\gamma_3=\cdots=\gamma_{2s-1}=1.$$

那么，对所有 $j>2s-1$，都有 $\gamma_j=0$。我们有

$$\mathrm{wt}(\Gamma)=1+3+\cdots+2s-1+4\gamma_4=s^2+4\gamma_4,$$

因此 $n-2<u=s^2-1+4\gamma_4\leq n$。于是 $s^2-1+4\gamma_4\leq n\leq s^2+4\gamma_4$。注意，对所有奇数 $j\leq 2s-1$，都有 $\lambda_j=0$。假设对所有 $t\geq 2s$，都有 $\lambda_t=0$。由于 $i=6$，于是 $\lambda_4=0$，从而 $k+1=\mathrm{wt}(\Lambda)\leq 2+6+\cdots+2s-2=s^2-s-4$。由此可得 $k\leq s^2-s-5$。根据假设，$x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6，因此 $k>n-e_1-e_2=n-4\geq s^2-5$。这就得到$s^2-5<s^2-s-5$，矛盾。因此，对于某个最小的 $t\geq 2s$，有 $\lambda_t=1$。我们先考虑 $s>3$ 的情形，因此 $t\geq 2s\geq 8$。假设 $t-3\geq 2s$，则 $\lambda_3=\lambda_{t-3}=0$。若 $t-3<2s$ 且 t 为偶数，则 $t-3>3$ 为奇数且小于 $2s$，因此我们再次得到 $\lambda_3=\lambda_{t-3}=0$。剩下的情形是 t 为奇数且 $3<t-3<2s$，即 $t=2s+1$。若 $\lambda_{2(s-1)}=0$，则再次有$\lambda_3=\lambda_{t-3}=0$。否则，我们可以通过两次细化 Γ：先将 $2s-2=(2s-3)$ 替换为 $+1$，再将$t=(2s-2)$ 替换为 $+3$，这不可能。综上，若 $s\geq 4$，则 $t-3\neq 3$ 且 $\lambda_3=\lambda_{t-3}=0$。由此可知，$\Lambda$ 可通过将 t 替换为 3，并将 $t-3$ 替换为一个弱三角分拆，进行一次细化。只有在 $t=8$ 且 $x^\Lambda\partial_k=x_2x_4x_6x_8\partial_{19}$时，这才可能发生。若 $k<u$，则 $\gamma_{19}\neq 0$，因此 $u>2s-1\geq 19$。特别地，$8=t\geq 2s\geq 20$，矛盾。因此 $k>u$。在这种情况下，由于 $s\geq 4$，我们有 $u>2s-1\geq 7$；而要使 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]\neq 0$ 成立，必须有$u=8$、$\gamma_4=0$，从而 $x^\Gamma=x_1x_3x_5x_7$。于是我们有 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]=x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\partial_{19}$ 和 $20=k+1<1+2+\cdots+8=28$，再次产生矛盾。因此我们可以假设 $s\leq 3$，这意味着 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_3x_4^{\gamma_4}x_5\partial_{8+4\lambda_4}$ 且 $n=8+4\gamma_4$ 或 $n=9+4\gamma_4$。相应地，$x^\Lambda\partial_k=x_2^{\lambda_2}x_4^{\lambda_4}x_6x_8^{\lambda_8}\partial_k$。注意，若 $\lambda_8=1$，则 $\lambda_2=\lambda_4=0$；否则 $k+1=\mathrm{wt}(\Lambda)>14>n$，这会导致矛盾 $k\geq n+1$，因此 $x^\Lambda=x_6x_8$，且 Λ 是二步可细化的。因此 $\lambda_8=0$。由于 $k>6$，我们有 $x^\Gamma\partial_u$ 和 $x^\Lambda\partial_k$ 可交换，矛盾。

现在假设 $i=5$。在这种情况下 $\lambda_4=0$。假设 $\lambda_2=0$，则可得 Λ 是二步可细化的。于是 $x^\Lambda=x_2x_5\prod_{i\geq 6}x_i^{\lambda_i}$ 且 $k=6+\sum_{i\geq 6}i\lambda_i$。我们首先注意到 $l=2$ 且 $m\leq 3$，因为 Γ 不可细化，且 5 和 7 是排除指标。此外，$n-1\leq\mathrm{wt}(\Gamma)-1=m^2+5m+7\leq n$，由此可得

$$n=\begin{cases}m^2+5m+7\\ m^2+5m+8\end{cases}.$$

注意到 $x^\Lambda\partial_k$ 满足第二弱排除指标条件，因此

$$m^2+5m+6\leq n-1\leq\mathrm{wt}(\Lambda)\leq n+1\leq m^2+5m+9.$$

接下来分析 m 的可能取值。若 $m=0$，则 $6\leq\mathrm{wt}(\Lambda)\leq 9$。唯一的可能性是 $x^\Lambda\partial_k=x_2x_5\partial_6$。于是 Λ 可细化，因为 $5=1+4$，且其唯一的细化必须满足第一排除条件，即 $n-3<6$，因此 $n\leq 8$。注意到 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_3x_6\partial_9$，我们还有 $n\geq 9$，这就产生了矛盾。现在假设 $m=1$。在这种情况下，$12\leq\mathrm{wt}(\Lambda)\leq 15$。$x^\Lambda\partial_k$ 的可能取值只有 $x_2x_5x_7\partial_{13}$ 和 $x_2x_5x_8\partial_{14}$。第二种情况是二步可细化的，因此不符合条件。若 $x^\Lambda\partial_k=x_2x_5x_7\partial_{13}$，则 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_3x_4x_6\partial_{13}$，且这两个元素可交换。现在考虑 $m=2$ 的情况。我们有 $20\leq\mathrm{wt}(\Lambda)\leq 23$，由此得到唯一可能性 $x^\Lambda\partial_k=x_2x_5x_7x_9\partial_{22}$，而它是二步可细化的。同理，当 $m=3$ 时，我们得到 $30\leq\mathrm{wt}(\Lambda)\leq 33$，进而可知 $x^\Lambda\partial_k$ 的可能情况均由二步可细化的分拆表示。

假设 $i=4$，那么 $\gamma_4=0$。Γ 的不可细化性意味着，对于 $h\geq 0$，有 $\gamma_{2h}=0$。令 $s\geq 2$ 为满足 $\gamma_1=\gamma_3=\cdots=\gamma_{2s-1}=1$的最大可能值。于是对所有 ……，都有 $\gamma_j=0$

$j > 2s-1$。我们有 $\mathrm{wt}(\Gamma) = 1+3+\cdots+2s-1 = s^2$，因此 $n-2 < u = s^2-1 \le n$。由此 $s^2-1 \le n \le s^2$。注意，对所有奇数 $j \le 2s-1$，都有 $\lambda_j = 0$。假设对所有 $t \ge 2s$，都有 $\lambda_t = 0$。由于$i=4$，于是 $k+1 = \mathrm{wt}(\Lambda) \le 2+4+\cdots+2s-2 = s^2-s$。由此可得 $k \le s^2-s-1$。根据假设，$x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6，因此 $k > n-e_1-e_2 = n-4 \ge s^2-5$。这给出 $s^2-5 < s^2-s-1$，从而 $2 \le s \le 3$。若 $s=2$，则 $k=3$，因此 γ_3 必为 0，这与假设矛盾。若 $s=3$，则 $x^\Gamma\partial_u = x_1x_3x_5\partial_8$，因此 $n=8$ 或 $n=9$。由于 $x^\Lambda\partial_k$ 满足第二弱排除指标条件，所以 $5 \le n-3 \le k \le n \le 9$，从而有 $x^\Lambda = x_2^{\lambda_2}x_4x_6^{\lambda_6}$。由于 $[x^\Lambda\partial_k, x^\Gamma\partial_u] \ne 0$，于是 $k=5$，因此 $\lambda_2 = 1$、$\lambda_6 = 0$，并且必有$n=8$。由此我们得到方程（15）中的例外元素。剩下的情况是，对于某个最小的 $t \ge 2s$，有$\lambda_t = 1$。我们先考虑 $s > 3$ 的情况，因此 $t \ge 2s \ge 8$。假设 $t-3 \ge 2s$，则 $\lambda_3 = \lambda_{t-3} = 0$。若 $t-3 < 2s$ 且 t 为偶数，则 $t-3 > 3$ 为奇数且小于 $2s$，因此我们再次得到 $\lambda_3 = \lambda_{t-3} = 0$。剩下的情况是 t 为奇数且$3 < t-3 < 2s$，也就是说 $t = 2s+1$。若 $\lambda_{2(s-1)} = 0$，则再次有 $\lambda_3 = \lambda_{t-3} = 0$。否则，我们可以通过两次细化$\Gamma$：先将 $2s-2 =$（$2s-3$）替换为 $+1$，再将 $t =$（$2s-2$）替换为 $+3$，这不可能。综上，若 $s \ge 4$，则 $t-3 \ne 3$ 且 $\lambda_3 = \lambda_{t-3} = 0$。因此，$\Lambda$ 可通过将 t 替换为 3 并将 $t-3$ 替换为.....来细化一次，从而得到一个弱三角分拆。只有当$t=8$ 且 $x^\Lambda\partial_k = x_2x_4x_6x_8\partial_{19}$ 时，这才可能发生。若 $k < u$，则 $\gamma_{19} \ne 0$，从而 $u > 2s-1 \ge 19$。特别是 $8 = t \ge 2s \ge 20$，这就产生了矛盾。因此 $k > u$。在这种情况下，由于 $s \ge 4$，我们有 $u > 2s-1 \ge 7$；为了使 $[x^\Lambda\partial_k, x^\Gamma\partial_u] \ne 0$ 成立，必须有 $u=8$、$\gamma_4 = 0$，因此 $x^\Gamma = x_1x_3x_5x_7$。于是我们有 $[x^\Lambda\partial_k, x^\Gamma\partial_u] = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\partial_{19}$ 和 $20 = k+1 < 1+2+\cdots+8 = 28$，再次产生矛盾。因此可以假设 $s \le 3$，这意味着 $x^\Gamma\partial_u = x_1x_3x_5\partial_8$ 且 $n=8$ 或 $n=9$。此外，$x^\Lambda = x_2^{\lambda_2}x_4x_6^{\lambda_6}x_8^{\lambda_8}$。注意，若 $\lambda_8 = 1$，则 $k+1 = \mathrm{wt}(\Lambda) \ge 12$，这与 $n \le 9$ 矛盾。因此 $\lambda_8 = 0$。我们还有 $\lambda_6 = 0$，否则 $[x^\Lambda\partial_k, x^\Gamma\partial_u] = 0$。由此我们再次得到孤立例外 $x^\Lambda\partial_k = x_2x_4\partial_5$ 和 $n=8$。

情形 4。最后剩下情形 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$。
我们有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。假设对于某个最小的 $i \ge 3$，$\lambda_i = 0$ 且 $\lambda_{i+2} = 1$，则 $x^\Theta\partial_k = [x^\Lambda\partial_k, x_2x_i\partial_{i+2}] \in \mathfrak{N}_{n-1}\backslash\mathfrak{N}_{n-2}$。由于 $\theta_1 = 0$，因此 Θ必须是弱三角形的。于是

$$\Lambda = (0,0,\underbrace{1,\dots,1}_{i-3},0,*,1,0,\dots)$$

相应地

$$\Gamma = (1,1,\underbrace{0,\dots,0}_{i-3},*,*,0,*,\dots),$$

其中星号表示 {0,1} 中未指定的数字。我们有 $x^\Gamma = x_1x_2$，这将推出 $n=2$；或者有 $i \le 6$；在后一种情况下，我们有 Γ 是可细化的。

首先假设 $i=6$。同样，Γ 的不可细化性给出 $\gamma_6 = 1$ 和 $\gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 0$。由于 $\gamma_3 = 0$，Γ 的不可细化性意味着对于 $j \ge 10$有 $\gamma_j = 0$。因此 $x^\Gamma\partial_u = x_1x_2x_6\partial_8$ 和$8 \le n \le 10$。此外，$n \ge k = \mathrm{wt}(\Lambda) - 1 \ge 3+4+5+8 > 10$，矛盾。

现在假设 $i=5$，因此 $\lambda_5 = 0$ 和 $\lambda_7 = 1$，并且 $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_7 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = \gamma_{13} =\gamma_{14} = \gamma_{15} = 0$。我们有 $x^\Lambda\partial_k = x_3x_4x_6^{\lambda_6}x_7\partial_{13+6\lambda_6}$，特别是 $n \ge 13$。Γ 的不可细化性给出 $\gamma_j = 0$，其中 $j \ge 13$。此外

$$x^\Gamma\partial_u = x_1x_2x_5^{\gamma_5}x_6^{\gamma_6}x_8^{\gamma_8}x_9^{\gamma_9}x_{12}^{\gamma_{12}}\partial_{2+5\gamma_5+6\gamma_6+8\gamma_8+9\gamma_9+12\gamma_{12}}.$$

如果 $x^\Gamma\partial_u$ 和 $x^\Lambda\partial_k$ 不交换，那么 u 必定是 3、4、6 或 7。只有在$x^\Gamma\partial_u = x_1x_2x_5\partial_7$ 和 $7 \le n \le 9$时才可能如此，而这与先前计算出的 n上界不相容。

现在假设 $i=4$，于是 $\lambda_4=0$、 $\lambda_6=1$ 和 $\gamma_6=0$。我们有 $x^\Lambda\partial_k=x_3x_5^{\lambda_5}x_6\partial_{9+5\lambda_5}$，从而得到 $n=9$ 或 $n=14$。在这种情况下

$$x^\Gamma\partial_u=x_1x_2x_4^{\gamma_4}x_5^{\gamma_5}x_7^{\gamma_7}x_8^{\gamma_8}x_{10}^{\gamma_{10}}x_{11}^{\gamma_{11}}x_{13}^{\gamma_{13}}x_{14}^{\gamma_{14}}\cdots\partial_u.$$

这两个元素可交换，除非 $k=14$ 和 $\gamma_{14}=1$，此时 $n>u>16$，这就产生了矛盾；或者 $u=6$，因此 $n\leq 8$，同样矛盾。

接下来我们只需考虑 $i=3$。在这种情况下 $x^\Lambda\partial_k=x_4x_5\partial_8$，因此 $n=8$。相应地 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_2x_3^{\gamma_3}x_6^{\gamma_6}\cdots\partial_u$。当且仅当 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_2x_3\partial_5$ 且 $x^\Lambda\partial_k=x_4x_5\partial_8$时，这两个元素不可交换；此时它是式（14）中的例外元素；或者 $\gamma_8=1$，这意味着 $\gamma_3=1$ 且 $x^\Gamma\partial_u=x_1x_2x_3x_6^{\gamma_6}x_7^{\gamma_7}x_8\cdots\partial_u$，因此 $n\geq u=\mathrm{wt}(\Gamma)-1>13>n=8$，产生矛盾。

步骤 2。

现在我们继续证明，若 $\mathrm{wt}(\Gamma)\leq u$，则 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]\in\mathfrak{N}_{n-1}$ 对于每个满足 $x^\Lambda\partial_k$ 的基元 1 或 2。记 $x^\Theta\partial_v=[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]$ 并假设 $x^\Theta\partial_v\neq 0$。

我们先讨论 $k<u$ 的情形，这意味着 $v=u$。由此可得 $\gamma_k=1$ 和 $x^\Gamma=x_k\prod x_{e_i}^{\gamma_{e_i}}$，其中 e_i 是 Λ 和 $u\leq k+\sum\gamma_{e_i}\leq n$ 的排除指标。若 $x^\Gamma=x_k$，则 $x^\Theta\partial_v=x^\Lambda\partial_u$，因此 $\mathrm{wt}(\Lambda)=u+1=k+1$ 或 $\mathrm{wt}(\Lambda)=u+1=k+2$。由于 $k<u$，我们有 $u=k+1$，且 $x^\Lambda\partial_k$ 满足 2(i) 或 2(ii)；特别地，$k=n$ 且 $u=n+1$，这就产生了矛盾。因此，我们可以假设对某个 i，有 $\gamma_{e_i}=1$。设 $x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6(a)。那么 $\mathrm{wt}(\Gamma)=k+\sum\gamma_{e_i}\geq k+e_1>n$，矛盾。若 $x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6(b)，则 $x^\Gamma=x_{e_1}x_k$；否则 $u\geq\mathrm{wt}(\Gamma)=k+\sum\gamma_{e_i}\geq k+e_2>n$，此时 $x^\Theta\partial_u\in\mathfrak{N}_{n-1}$，因为 Θ 不可细化，且其最小排除数为 e_2。现在设 $x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6(c) 或定义 4.6(d)。由于我们假设 $0\neq[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]$，因此有 $x^\Gamma=x_{e_1}x_k$ 或 $x^\Gamma=x_{e_2}x_k$。否则，同上可得 $u>n$，因为我们假设 $x^\Lambda\partial_k$ 满足第二弱排除指标条件。在这种情况下，直接检验 $\mathrm{wt}(\Theta)$ 可知 $x^\Theta\partial_u\in\mathfrak{N}_{n-1}$。最后，若 $x^\Lambda\partial_k$ 满足 2(i) 或 2(ii)，则 $u\geq k+1>n$，这是不可能的。

最后，我们考虑这种情形 $k>u$。在这种情形下 $v=k$，并且要么 Θ 是Λ 的细化，要么 $\mathrm{wt}(\Theta)<\mathrm{wt}(\Lambda)$。这意味着 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Gamma\partial_u]\in\mathfrak{N}_{n-1}$ 如果 $x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6(d)或 2(i) 或 2(ii)。反之，如果 $x^\Lambda\partial_k$ 满足定义 4.6(a)(b)(c)，那么要么 Θ 是权为 $k+1$ 的不可细化对象，且满足最小排除数条件；要么 $\mathrm{wt}(\Theta)\leq v=k$。在这两种情形下$x^\Theta\partial_v\in\mathfrak{N}_{n-1}$。证明至此。□

5. 结论与开放问题

计算式（1）的正规化子链是一项计算上极具挑战性的任务，很快就会受到所研究群的阶呈指数增长的制约。事实上，正如 [ACGS21a], 中已指出的，若不引入刚性交换子，就不可能计算正规化子链直到第（$n-2$）项甚至更多 [ACGS21b]。遗憾的是，似乎没有自然的方法能在 p 为奇数时推广刚性交换子的概念，同时使这些对象在交换运算下封闭。正如所引论文中针对 $p=2$所述，奇数情形下的刚性交换子方法确实是有助于计算对称群 $\mathrm{Sym}(p^n)$ 的正规化子链的关键。否则，当 $p\geq 3$时，即使考虑 n 的最小值，这项任务在计算上也不可行。

基于这一目标，在本文中，我们提出了一个新框架，将研究对象从对称群转变为一个李环；其基由整数分拆所表示的元素构成，且每个部分最多可重复 $m-1$ 次。在此框架下，当 $m=p$ 为素数时，李环的构造反映了 $\mathrm{Sym}(p^n)$ 的 Sylow p-子群的构造；而当 m 为合数时，该框架仍能给出有意义的结果。我们定义了

李环中相应的理想化子链，并如预期证明了：当 $m = 2$时，理想化子链的增长与 Sym(2^n) 的情形一致；当 $m > 2$ 时，其增长则遵循自然推广形式（参见定理 2.14 和定理 2.15）。特别是，当$m = 2$ 时，我们给出了一个保持交换子的生成元间显式双射（参见定义 3.2和定理 3.4）。

在 p 奇数的情形下，对刚性交换子概念可能作出的显而易见的推广3.2中给出的类似双射，但这些推广无法产生一个在交换运算下封闭的交换子集合，而这一性质对于定理3.4的证明至关重要。如果能找到一个在交换运算下封闭的推广，那么很容易相信，新刚性交换子与李环的基元素之间可能存在一种保持交换子的自然对应关系，如定义3.2中的对应关系。这将意味着定理 2.15 是对称群中正规化子链的 p-类比，其中 Sym(p^n)，而$m = p$ 为奇数。截至本文撰写之时，这仍是一个非常可信的猜想；在缺乏任何计算证据的情况下，本文为该猜想提供了支持。

参考文献

[ACC22] R. Aragona、L. Campioni 和 R. Civino，《不可细化划分的最大数量》，arXiv 预印本 arXiv:2206.04261（2022）。[ACCL22] R. Aragona、L. Campioni、R. Civino 和 M. Lauria，《三角数的不可细化分拆中的最大部分》，Aequationes Math.（2022）。[ACCL23] ———，《不可细化划分的验证与生成》，arXiv 预印本 arXiv:2112.15096，即将在 Inform. Process. Lett. 上发表（2023）。[ACGS21a] R. Aragona、R. Civino、N. Gavioli 和 C. M. Scoppola，《对称群的 Sylow 2-子群中的一条正规化子链》，Indian J. Pure Appl. Math.（），第 – 期。MR [ACGS21b] ———，《刚性交换子与一条正规化子链》，Monatsh. Math. 196（2021），第 3 期，431–455。MR 4320532[ACGS22] ———，《正规化子链中的互异部分不可细化分拆》，Discrete Math. Lett. 8（ 2022 72 77 4370061 ），–。MR AN G. E. Andrews 和 D. Newman，《分拆与最小排除数》，[19] Ann. Comb. 23 2，249 2019 254（），第 – 期。[BM20] C. Ballantine 和 M. Merca，《最小排除数与彩色划分》，Sém. Lothar. Combin. 84B（2020），第 23 号文章，12。[DT23] J. QD Du 和 D. Tang，《关于最小排斥数之和的一个细化猜想》，Bull. Aust. Math. Soc.（2023），1–12。[FP15] A. S. Fraenkel 和 U. Peled，《驾驭难以处理的 MEX 函数》，Games of No Chance 4（2015），77–94。[Gur12] V. Gurvich，《Wythoff 博弈及最小排除数的进一步推广》，Discrete Appl. Math. 160（2012），第 7-8 期，941–947。[HSS22] B. Hopkins、J. A. Sellers 和 D. Stanton，《Dyson 曲柄与整数划分的 mex》，J. Combin. Theory Ser. A 185（2022），论文编号 105523，10。[OEI] 在线整数序列百科全书，电子版发表于 https://oeis.org，访问日期：2023-01-10。[SN05] V. I. Sushchansky 和 N. V. Netreba，《李代数的花环积以及与有限对称群的 Sylow p-子群相关的李代数》，Algebra Discrete Math.（2005），第 1 期，122–132。MR 2148825[Str17] H. Strade，《正特征域上的单李代数》第 1 卷，De Gruyter Expositions in Mathematics，第 38 卷，De Gruyter，柏林，2017。

DISIM, 拉奎拉大学，维托伊奥路，I-67100 科皮托（AQ），意大利 电子邮箱地址，R. Aragona：riccardo.aragona@univaq.it电子邮箱地址，R. Civino： roberto.civino@univaq.it 电子邮箱地址，N.Gavioli： norberto.gavioli@univaq.it