arXiv:2301.06352v1 [math.CO] 16 Jan 2023

树的结构理论 II：树的完备性与完备化

Valentin Goranko[1], RuaanKellerman[2], 和 Alberto Zanardo[3][1]斯德哥尔摩大学， [2]比勒陀利亚大学， [3]帕多瓦大学 valentin.goranko@philosophy.su.se, ruaan.kellerman@up.ac.za, alberto.zanardo@unipd.it

2023年1月18日

摘要

树是这样一种偏序集：每个元素的所有较小元素构成一个线性有序集。我们定义并研究了若干种自然的树完备性概念，将线性序的戴德金完备性和偏序集的戴德金-麦克尼尔完备化推广到树。随后，我们定义了树完备化的构造方法，将任意一棵树扩展为满足相应完备性条件的极小树。

1 引言

树是连通的偏序，其中每个元素的前驱（较小元素）构成一个线性有序集。树是无处不在的结构，自然地出现在数学、计算机科学、博弈论与决策理论、语言学、哲学等众多领域； [6] 中提到了这些领域中的一些应用。

本文是对树的一般结构理论的贡献，也是对[6] 的后续研究；[6] 开启了这一研究。我们强调，在定义和研究树时，我们不假设其具有良基性；而这正是树的集合论研究主流传统中的标准假设，这一传统概括并拓展了序数理论，参见例如 [7],[14]。这里我们仅指出，良基性假设会对一般理论以及树的具体性质产生非常重大的影响；不作这一假设时，树的研究主要仍属序理论，并以一种相当非平凡的方式拓展了 [11]中全面探讨的线性序理论。此外，我们的一般理论涵盖有限树和无限树，而本文所讨论的完备性概念只有在无限树的情形下才具有非平凡意义。

本文定义并探讨了树的若干种自然的完备性概念，直观而言，这些概念表示在某种意义上不存在“间隙”或“缺失节点”。这些树的完备性概念自然推广了线性序的戴德金完备性，以及使偏序集成为完备格的戴德金-麦克尼尔完备化。这些构造十分重要，也已得到充分研究，但关于它们在树中的具体应用，相关文献却有限，而树中存在一些本质上的微妙之处。线性序的戴德金完备性等价地可定义为：所有非空且有上界的集合都有上确界，或者所有非空且有下界的集合都有下确界。然而，对于树而言，这两种刻画大不相同。事实上，在树中，有下界的节点线性有序集的下确界若存在，则必定唯一

；而有上界的线性有序节点集，可能在树的某些路径上有上确界，在另一些路径上却没有，因此它在该树中可能有多个上确界（也可能一个都没有）。这引出了树的多种完备性概念，其一般形式如下：考虑树中由 $\mathcal{F}$ 组成的一个（自然）节点集族，并称该树为 $\mathcal{F}$完备，如果树中每个有下界且属于 $\mathcal{F}$的节点集都有下确界。将这一通用概念应用于所有子集构成的族，就定义了树的戴德金完备性的标准推广形式；其变体已在 [4], [12], [15], 和 [1]等文献中得到定义和研究。此外，将 $\mathcal{F}$完备性这一通用概念应用于其他重要的节点族也很有意义，例如路径（由此得到“路径完备性”）、反链（由此得到“反链完备性”）、节点对（由此得到“分支完备性”）等。

本文的贡献。本文研究上述绝对完备性和相对完备性的概念；在我们看来，这两者是最自然、最重要的概念。我们证明，它们通常并不相同，但彼此相关；并且可以用路径的向下封闭部分和向上封闭部分的上确界与下确界，以相当统一的方式刻画。随后，我们以相对统一的方式定义并研究若干种树完备化的泛化构造，这些构造可将任意一棵树扩展为满足相应完备性条件的极小树。每一种构造都能以一种“极小的典范方式”，将任意一棵树转化为相应意义下的完备树。特别地，我们给出了另外一些构造，可生成分别与 [15] 的戴德金-麦克尼尔完备化（该完备化适用于更广泛的“无圈偏序”类）和 [1] 的“分枝完备化”等价的树。

我们指出，树的完备化在树的一般理论中有多种应用，这些应用超出了本文的讨论范围；此处仅提及，树的完备化在公理化某些重要树类的一阶理论及其他逻辑理论，以及证明此类公理化的完备性时，均有用处，参见 [5]。

本文结构如下。首先，我们在第2节介绍必要的术语和记号。然后，我们在第3节和第4节定义、比较并刻画若干完备性概念。在第5节，我们介绍若干树完备化的构造，它们分别对应于第3节中定义的完备性性质。最后，我们在第6节给出总结性评论，并提出进一步研究的建议。

2 预备知识

我们在此定义一些关于树的基本概念，以统一记号和术语。读者也可参阅 [7], [8], 和 [9] 了解更多细节。

线性序$(\mathbb{N};<)$、$(\mathbb{Z};<)$、$(\mathbb{Q};<)$和$(\mathbb{R};<)$的序型分别记为 ω、 ζ、 η 和 λ，其中每种情况下，$<$ 表示该集合上的通常序。

若有序集 $(A;<)$ 配备严格偏序 $<$，且对每个$x \in A$，集合 $\{y \in A : y < x\}$ 都是线性的，则称其为向下线性的；若对任意 x、$y \in A$，都存在 $z \in A$，使得 $z \leqslant x$ 且 $z \leqslant y$，则称其为向下连通的。森林是向下线性的偏序。树是向下连通的森林[1]。森林 $\mathfrak{F} = (F;<)$ 的子树是其任意一个子结构$\mathfrak{T} = \left(T;<^T\right)$，该子结构 $\mathfrak{F}$ 是一棵树；也就是说，T是 F 的非空向下连通子集，且 $<^T$ 是 $<$ 在 T上的限制。

[1]请注意，我们不假设树具有良基性，甚至不假设树存在根。

树 $(T;<)$ 的元素称为节点或点。如果一棵树有一个 $<$-极小节点，那么它是唯一的（由向下连通性可知），称为这棵树的根。$<$-极大节点（如果存在）称为这棵树的叶节点。

我们将以任意固定的树 $\mathfrak{T}=(T;<)$ 为基础，定义各种概念和记号。首先，对于任意节点 t, $u\in T$，我们定义 $t\frown u$ 表示 $t<u$ 或 $t=u$ 或 $u<t$。如果成立，我们就称 t 和 u 为可比较节点。如果 $t<u$，则按通常方式定义区间 (t,u)、$(t,u]$, $[t,u)$ 和 $[t,u]$。例如，如果 $t<u$，那么 $(t,u]:=\{x\in T\colon\ t<x\leqslant u\}$，等等。我们还定义集合 $T^{<t}:=\{x\in T\colon\ x<t\}$, $T^{\leqslant t}:=\{x\in T\colon\ x\leqslant t\}$, $T^{>t}:=\{x\in T\colon\ t<x\}$ 和 $T^{\geqslant t}:=\{x\in T\colon\ t\leqslant x\}$。对于树 $\mathfrak{T}$ 在这些集合上相应的子结构（作为偏序），我们也将使用类似的记号。例如，$\mathfrak{T}^{<t}$ 表示 $\left(T^{<t};\ <\restriction_{T^{<t}}\right)$，等等。

对于非空子集 $A,B\subseteq T$，我们定义 $A<B$（分别地，$A\leqslant B$, $A>B$, $A\geqslant B$）当且仅当对于所有 $x\in A$ 和 $y\in B$，$x<y$（分别地，$x\leqslant y$, $x>y$, $x\geqslant y$）。除了写作 $\{x\}<B$，我们也会写作 $x<B$；其他关系和单元素集也类似。接着，我们定义集合 $T^{<A}:=\{x\in T\colon\ x<A\}$，以及集合 $T^{\leqslant A}$, $T^{>A}$ 和 $T^{\geqslant A}$。以这些集合为底集的 $\mathfrak{T}$ 的子结构分别记作 $\mathfrak{T}^{<A}$, $\mathfrak{T}^{\leqslant A}$, $\mathfrak{T}^{>A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\geqslant A}$。

更一般地，给定 T 的任意子集 A，$\mathfrak{T}^{A}$ 表示结构 $(A;\ <\restriction_{A})$.

注意，对于任意 $A\neq\emptyset$，$\mathfrak{T}^{<A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\leqslant A}$ 都是线性序；当 A 不是线性有序时，$T^{>A}$ 和 $T^{\geqslant A}$ 为空。如果 A 是线性有序的，那么 $\mathfrak{T}^{>A}$ 和 $\mathfrak{T}^{\geqslant A}$（若非空）是森林；而对于每个节点 t，$\mathfrak{T}^{\geqslant t}$ 都是以 t 为根的树。

为便于阅读，A的下界集和上界集 $T^{\leqslant A}$、$T^{\geqslant A}$有时分别记作 $L(A)$和 $U(A)$。若 $A=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$，则 $L(A)$和 $U(A)$将简记为 $L(x_1,x_2,\dots,x_k)$和 $U(x_1,x_2,\dots,x_k)$。

树中线性有序的节点集称为链。极大链称为路径。若节点集 A 满足：只要 $y\in$ A 且 $z<y$, 就有 $z\in$ A，则称 A 向下封闭；相应地，若只要 $y\in$ A 且 $y<z$，就有 $z\in$ A，则称 A 向上封闭。非空、向下封闭、线性有序且有上界的节点集称为茎。路径 A 的非空子集 B 若有下界且在 A 中向上封闭（即若$x\in$ B，$y\in$ A 且 $x<y$，则 $y\in$ B），则称为分支。显然，若 A 是一条路径，且 A $=$ B $\cup$C，其中 B 和 C 不相交，则 B 是茎当且仅当 C 是分支。注意，树中任意两条不同的路径都相交于一条茎。包含节点 t（分别地，包含茎 S）的路径集分别记作 Paths_t（分别地，Paths_S）。

若对于任意 x、$y\in\in$A 及 $x<z<y$，都有 $z\in\in$A，则称节点集 A 为凸集。凸的线性有序节点集称为线段。桥是一个非空线段 A，且对于每条路径 P，A $\subseteq$ P 或 A$\cap$P 为空集。注意，任意单元素节点集$\{t\}$ 都是一座桥。

对于树 $\mathfrak{T}$ 中的每个节点 t，包含 t 的 $\mathfrak{T}$ 中的极大桥记作 $t_{\square}$。所有极大桥均为单元素集的树称为凝缩树。如 [6], 所示，属于同一极大桥的节点之间的关系是一种等价关系，而将树 $\mathfrak{T}$ 划分为极大桥族所对应的划分定义了一棵凝缩树 $\mathfrak{T}_{\square}$，称为 $\mathfrak{T}$ 的凝缩。此外，一棵树是凝缩树，当且仅当它与其凝缩同构。关于树凝缩及凝缩树性质的更多详情，见 [6]。

节点集 X 是反链，当且仅当对于所有不同的 x 和 y，它们在 X 中都满足 $x\not<y$。注意，反链 X 与线性有序节点集 Y 的交集要么是单元素集，要么是

空集。当 X 是极大（按包含关系）的反链且 Y 是路径时，第二种情况不可能出现。

集合 X 中节点的下界（分别为上界）是 $\mathfrak{T}$ 中满足以下条件的元素 b：对于每个 $x \in X$，都有 $b \leqslant x$（分别为 $b \geqslant x$）。X 的下确界（分别为上确界）是 X 的最大下界（分别为最小上界）。如果存在，X 的下确界（分别为上确界）是唯一的，记作 $\inf(X)$（分别记作 $\sup(X)$）.

线性序 $(W; <)$ 若其中每个有下界的非空子集 W 都有下确界，则称其为戴德金完备。等价地（参见 [11]），若 $(W; <)$ 中每个有上界的非空子集 W 都有上确界，则称其为戴德金完备。戴德金完备线性序的例子包括 $(\mathbb{N}; <)$、$(\mathbb{Z}; <)$ 和 $(\mathbb{R}; <)$；反例是 $(\mathbb{Q}; <)$。

3 树的完备性概念

3.1 完备性性质与相互依赖结果

我们在此定义树中若干自然的完备性概念。请注意，戴德金完备线性序的两种等价刻画并不能作为等价性质推广到树上，因为树中一个有上界的线性有序节点集，可能在某些路径上有上确界，而在另一些路径上没有，因此它在树中可能有多个上确界（也可能一个都没有）。因此，这里会出现多种完备性性质。

对于其中一些定义，我们需要以下术语：

- 树中的一个节点 t 若满足：对于某些不可比节点 u和 v，有 $t = \inf\{u, v\}$，则称其为分叉点；
- 给定树中的两条不同路径 P 和 Q，集合 P ∩Q 在 P（或 Q）中的上确界（若存在）称为弱分支点[2]。

下文图1–图3中的树的例子将用于证明独立性结果。图1中的树由线性序 $\omega + \zeta$ 构成，并在其每个元素上附加一个叶节点。于是，$\omega + \zeta$ 中的每个节点都是分叉点。图2中的树由一份 ω 及附加在其上的两份不相交的 ω 构成。这两份拷贝各自的首元素都是弱分支点，但不是分叉点。图3中的树由一份非正有理数 $\eta^{\leqslant 0}$以及附加在其上的两份不相交的正有理数 $\eta^{>0}$ 构成。$\eta^{\leqslant 0}$ 中的数0既是分叉点，也是弱分支点。

我们称一棵树为：

（C1）当每个有下界的非空节点集合都有下确界时，称为（戴德金）完备。下文通常省略“戴德金”，简称完备。（C2）对于每条路径 P 和每个有下界的集合 $X \subseteq$P，若 X 在 P 中有下确界，则称为路径（戴德金）完备。同样，下文通常简称路径完备。注意，（C2）等价于：

[2]注意，　弱分支点也可能是真正分支点，按照前述定义的含义　on.

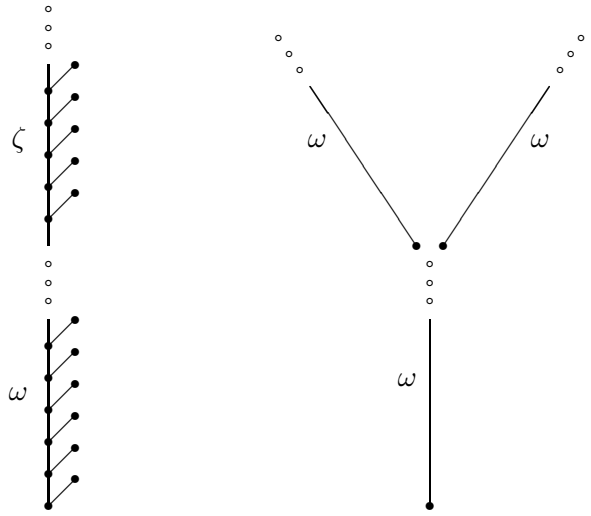


图1　　图2　　图3

(C2′) f 或每条路径 h P and each set $X \subseteq$ P that is bounded above, X h作为上确界　　in P;

(C3) 当每个有下界的非空反链都有下确界时，称其为反链完备；

（C4）分支完备[3]，即每对不可比节点（等价地，每个有限反链）都有下确界；

（C5）弱分支完备，即对于任意两条不同的路径 P 和 Q，集合 P ∩Q 在 P 和 Q 中都有上确界；

（C6）弱分支点完备，即对于每条路径 P 及 P 中每个 X弱分支点的非空集合，如果 X 有下界（分别地，有上界），那么 X在 P 中有下确界（分别地，上确界）[4]。

请注意，性质（C1）、（C2）、（C3）和（C4）都符合以下一般性的完备概念：给定树 $\mathfrak{T}$中节点集的一个族 $\mathcal{F}$，若 $\mathfrak{T}$ 中的每个有下界的节点集 $\mathfrak{T}$ 都属于 $\mathcal{F}$并且有下确界，则称 $\mathfrak{T}$ 为 $\mathcal{F}$-完备。对于戴德金完备性，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathfrak{T}$中所有节点集构成的集族；对于路径完备性，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathfrak{T}$中所有节点的线性有序集构成的集合；对于反链完备性，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathfrak{T}$中所有反链构成的集合；对于分支完备性，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathfrak{T}$中所有不可比节点对构成的集合。

一些简单的观察：

- 每个分叉点也是弱分支点，而在分支完备树中，每个弱分支点也都是分叉点。

- 在任何树中，每个分叉点都是某个极大桥的最大元，而每个弱分支点则是某个极大桥的最大元或最小元。这些命题的逆命题并不成立。例如，考虑一棵类似于图1所示的树，但在初始部分 ω 与末端部分 ζ之间插入了一个节点 u。这个节点 u 构成一个极大桥

[3]在 [16], 中，分支完备树称为 *jointed* 树；在 [1] 中，它们称为 *ramification complete* 树；在 [3] 中，它们称为 *join-trees*。[4]请注意，关于下确界和上确界存在性的两个条件并不等价。事实上，考虑一棵与图1类似的树，但去掉树末端 ζ部分的叶节点。这棵树的弱分支点恰好是其初始 ω部分中的非叶节点。显然，弱分支点的每个非空集合都有下确界，而所有弱分支点构成的集合有上界，却没有上确界。

（即' $\overline{u}=\{u\}$），并且 u 既是该极大桥的最小元，也是最大元；但是 u 既不是分叉点，也不是弱分支点。

- 在任意一棵树中，如果 P 是一条路径，且 X 是 P 的一个非空子集，并且其下确界 u 在 P 中，那么u 在任何包含 X的路径 Q 中都将是 X 的下确界；换言之，非空链的下确界并不依赖于具体路径。
- 此外，在任意分支完备树中，如果 P 是一条路径，且 $X \subseteq$P 是一个非空集合，并且其上确界 v 在 P 中，那么 v 在任何包含X的路径 Q 中都将是 X 的上确界；换言之，分支完备树中非空链的上确界并不依赖于具体路径。

由这些观察可知，在分支完备树中，（C6）等价于以下性质：

（C7）每个有下界（分别有上界）的分叉点非空链都有下确界（分别都有上确界）。

以下定理总结了性质（C1）至（C7）之间成立的所有依赖关系。

定理 1 （C1）至（C7）这些性质之间成立的蕴含关系如下；所有成立的蕴含关系都可由这些关系通过传递性推出。

1. （C1）蕴含（C2）至（C7）中的每一项；2. （C2）等价于（C2′）；3. （C2）蕴含（C5）至（C7）；4. （C3）蕴含（C4）；5. （C4）蕴含（C5）。

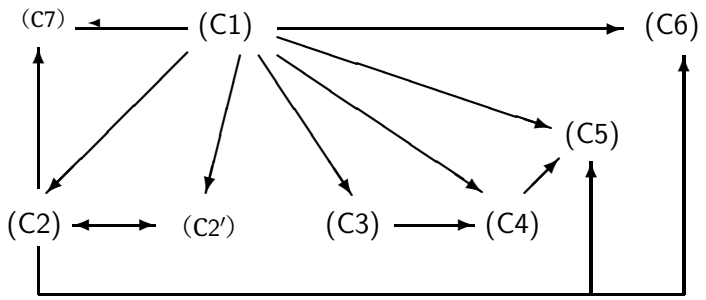


图4：（C1）至（C7）之间成立的依赖关系。

证明。
我们首先考察性质（C1）至（C6）之间的关系，随后再讨论它们与辅助性质（C7）的关系。

1. 从（C1）到性质（C2）至（C6）的大多数蕴含关系都显而易见。对于（C5），考虑在 P 和 Q 中分别包含 P ∩Q 的所有上界的集合。

2. 与线性序的论证类似：要证明（C2）蕴含（C2′），考虑 P 中 X 的所有上界构成的集合，并取其下确界；要证明（C2′）蕴含（C2），则考虑 P 中 X 的所有下界构成的集合，并取其上确界。

3. 从（C2）到（C5）的蕴含关系与从（C1）到（C5）的蕴含关系类似；到（C6）的蕴含关系则显然成立。

4. （C3）蕴含（C4）是显然的。

5. 取两个点，一个位于 P \Q 上，另一个位于 Q \ P 上。它们的下确界是每条路径上 Q ∩P 的一个上确界。

现在，我们证明所有无法由命题中列出的蕴含关系推出的蕴含关系都不成立。

首先，考虑图2中的树。性质（C2）成立，因此（C5）和（C6）也成立；而（C1）、（C3）和（C4）均不成立。由此可知，（C2）、（C5）和（C6）均不能蕴含（C1）、（C3）和（C4）中的任何一个。

接下来，考虑图3中的树。这棵树表明，（C3）（因此也包括（C4））并不蕴含（C1），而（C3）至（C6）均不蕴含（C2）。

与前一个例子类似，考虑这样一棵树：它由一份有理数集 η的副本组成，并在其上附加两份互不相交的有理数集 η 副本。这棵树的结构与图3中的树相同，只是缺少了那棵树中的弱分支点。这棵树上的（C6）性质空泛地成立，而（C5）不成立，因此（C6）并不蕴含（C5）。

要看出（C4）（因此也包括（C5））并不蕴含（C6），考虑图1中的树；它也表明（C4）并不蕴含（C3）。

从图1中的树移除那些附着在 $\omega+\zeta$中 ζ 副本的元素上的叶节点后得到的树，表明（C3）并不蕴含（C6）。

至此，所有可能的（C1）至（C6）性质之间的依赖关系便已确定。

现在来看所有树的类中（C1）至（C6）与（C7）之间的依赖关系。首先，（C1）以及等价命题（C2）和（C2’）中的任意一个都蕴含（C7）。此外，（C3）、（C4）、（C5）和（C6）均不蕴含（C7）。为说明（C3）不蕴含（C7），考虑这样一棵树：它由路径 $\omega+\zeta$ 构成，并在 ω 的副本中每个节点旁边各附加一个节点。这棵树反链完备，但不满足（C7）。（C4）和（C5）均不蕴含（C7），这一点可由图1中的树看出。为说明（C6）不蕴含（C7），考虑在图2中的树的每个节点旁边都添加一个叶节点后得到的树。原树中的每个节点在这棵新树中都是分支节点（因而也是弱分支节点）。这棵树满足（C6），但不满足（C7），因为位于初始的 ω 副本上的分支节点集合没有上确界。

反过来，（C7）并不能推出（C1）至（C6）中的任何一个。事实上，图2中的树满足（C7），但不满足（C1）、（C3）或（C4）；而图3中的树满足（C7），但不满足（C2）。将图3中相似的那棵树的初始副本中的最大节点 $\eta^{\leqslant 0}$ 移除后，所得的树显然满足（C7），但不满足（C5）。最后，由 $\omega\cdot(\zeta+\zeta)$ 的一个副本（即将 $\zeta+\zeta$ 个 ω 副本首尾相接）构成，并在 $\omega\cdot(\zeta+\zeta)$ 中的每个 ω 副本旁放置另一个 ω 副本的树，显然满足（C7），但不满足（C6）。 ■

3.2 Rubin 完备性

在 [12] (定义0.2) 中讨论了一种限制更严格的完备性概念。若一棵树 $\mathfrak{T}$ 满足以下条件，我们称它为 Rubin 完备：

(1) 每个非空节点集合都有一个下确界；

(2) 每条非空链都有一个上确界；

(3) 若 A 和 B 是不相交的非空凸链，则 inf(A) $\neq$ inf(B)。

那么，Rubin 完备树是（Dedekind）完备的，因此可以置于本节所考察层级中的 (C1) 之上。还可以注意到，根据 (1)，Rubin 完备树是有根的；根据 (2)，其中的每条路径都有一个叶节点。

命题 2 完备树是 Rubin 完备的，当且仅当：
(a) 对于每个满足 $\{\mathrm{P}_i$ 的 $i \in I\}$ 路径集合，如果 $\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i \neq \emptyset$，则该集合有最大元，

(b) 对于任意两条路径 P $\neq$ Q、P $\setminus$ Q，且 Q $\setminus$P 有最小元，并且

(c) 每个非叶节点在每条经过它的路径上都有一个直接后继。

证明。($\Rightarrow$) 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵 Rubin 完备树。考虑 $\{\mathrm{P}_i : i \in I\}$ 中的路径集合，并假设 A $=\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i \neq \emptyset$。根据条件 (2)，A 有一个上确界 t_A。如果 I 是单元素集$\{i\}$，则 A 是 P_i，而 t_A 是它的叶节点。如果 $|I| \geqslant 2$，反设 $t_\mathsf{A} \notin$ A，于是对于某个 $i \in I$有 $t_\mathsf{A} \notin \mathrm{P}_i$。这意味着对于每个 $v \in \mathrm{P}_i$都有 $t_\mathsf{A} \not\leqslant v$。但是 P_i 包含 A 的上界。

现在设 P $\neq$Q 是 $\mathfrak{T}$ 中的路径。考虑非空线段 A $=$P $\setminus$Q 和 B $=$Q $\setminus$P，并设 t_A 和 t_B 分别是它们的下确界。设 t 是 P $\cap$Q 的最大元，该最大元根据条件 (a) 存在。反证设 A 没有最小元，因此 $t_\mathsf{A} = t$。节点 t 也是线段 B$' = \{t\} \cup$Q $\setminus$P 的下确界，因此 inf(A) $=$inf(B$'$) $= t$。但这与 (3) 矛盾，因为 A 和 B$'$ 不相交。

最后，考虑一个非叶节点 t 以及一条经过它的路径 P。设 A 为所有满足 $t < u$ 的节点 $u \in$ P 的集合。那么 A 和 B $= \{t\}$ 是不相交的非空凸链。由于 inf(A) $\neq$ inf(B) $= t$，inf(A) 必须是 P 中 t 的直接后继。

($\Leftarrow$) 设 $\mathfrak{T}$ 是一棵满足 (a)、(b) 和 (c) 的完备树。考虑 $\mathfrak{T}$ 中的一个非空链 A，以及集合 $\{\mathrm{P}_i : i \in I\}$，它由所有包含 A 的路径组成。令 B 为集合$\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i$，并令 t_B 为 B 的最大元。给定任意 P_i，$\mathfrak{T}$ 的路径完备性意味着 A 在 P_i 中有上确界u_i。现在可以看出，t_B 是 A 的一个上界，且属于每个 P_i。于是$u_i \leqslant t_\mathsf{B}$ 对每个 i 都成立，因此，对所有 i，j，$u_i = u_j$。这意味着 u_i 也是 A 在 $\mathfrak{T}$ 中的上确界。

现在考虑两个不相交的线段 A 和 B，并令 t_A 和 t_B 分别为它们的下确界。可以分为两种情形。
情形1：A $\not<$B 且 B $\not<$ A。于是存在两条不同的路径 P 和 Q，分别包含 A 和 B。由于 A 和 B 不相交，必有包含关系 A $\subseteq$ P $\setminus$ Q 或 B $\subseteq$ Q $\setminus$ P 成立。不妨假设前者成立。根据 (b)，我们可以考虑 P $\setminus$ Q 的最小元 t。于是$t \leqslant t_\mathsf{A} \in$ P $\setminus$ Q。这意味着 $t_\mathsf{A} \neq t_\mathsf{B}$，因为 $t_\mathsf{B} \in$ Q。

情形2：A $<$B（B $<$A 的情形类似）。如果 A 不是单元素集，则 $t_\mathsf{A} \neq t_\mathsf{B}$ 显然成立。否则，假设 A $= \{u\}$，并令 P 为任意一条包含 B 的路径，使得 $u \in$ P。根据 (c)，u 有

一个直接后继 u' 位于 P 中。于是由不等式 $t_{\mathsf{A}} \leqslant u < u' \leqslant t_{\mathsf{B}}$即可得出结论。

■

请注意，强条件 (c) 仅在处理非常特殊的情形 $\mathsf{A} = \{u\} < \mathsf{B}$ 时才需要。比如，假设 A 和 B 含有不可比较的节点，或者假设链不是单元素集，就可以避免这种情形。在这些情况下，可以省略条件 (c) 和上述证明的最后一部分。

3.3 弱分支完备性与划分

弱分支完备性不仅是树中一种自然的完备性概念，在沿树的一条茎对树进行划分时也至关重要。在 [5] 中，这类划分用于将树近似为着色线性序[5]。

对于 $\mathfrak{T}$ 任意一棵树、$\mathfrak{T}$ 中的任意一条路径以及 $s \in \mathsf{A}$，我们定义以下集合：

$$F_l(s) := \begin{cases} \emptyset, & \text{when } s \text{ has an immediate predecessor,} \\ \left(\bigcap_{t<s} T^{>t}\right) \setminus T^{\geqslant s}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$F_u(s\backslash\mathsf{A}) := T^{>s} \setminus \left(\bigcup_{t \in \mathsf{A} \cap T^{>s}} T^{\geqslant t} \right).$$

若这些集合非空，我们定义结构 $\mathfrak{F}_l(s) := \mathfrak{T}^{F_l(s)}$ 和 $\mathfrak{F}_u(s\backslash\mathsf{A}) :=_{\mathfrak{T}} {}^{F_u(s\backslash\mathsf{A})}$。一般而言，集合 $F_l(s)$ 和 $F_u(s\backslash\mathsf{A})$ 可能有一个或两个为空，此时相应的结构未定义。结构 $\mathfrak{F}_l(s)$ 和 $\mathfrak{F}_u(s\backslash\mathsf{A})$ 若有定义，则为森林。它们分别称为相对于 A 的 s下侧森林和 s 上侧森林。最后，相对于 A 的 s 侧森林是森林 $\mathfrak{F}(s\backslash\mathsf{A}) := \left(\mathfrak{T}^{F(s\backslash\mathsf{A})};\ s\right)$，其中

$$F(s\backslash\mathsf{A}) := \{s\} \cup F_l(s) \cup F_u(s\backslash\mathsf{A}).$$

森林 $\mathfrak{F}_l(s)$ 和 $\mathfrak{F}_u(s\backslash\mathsf{A})$ 如图 5 所示。

直观地说，s 相对于 A 的上侧森林由那些位于 s 上方、但不位于 $\mathsf{A} \cap T^{>s}$ 上任何节点上方的节点组成；而 s 的下侧森林由那些位于 $T^{<s}$ 上方、但与 s 不可比较的节点组成。不过，若 s 有直接前驱，则其下侧森林留空，以免与该前驱的上侧森林重合。

以下结果改编自 [5]。

命题 3 设 $\mathfrak{T}$ 为弱分支完备树，A 为 $\mathfrak{T}$ 中的一条路径。集合 $\{F(s\backslash\mathsf{A})\}_{s\in\mathsf{A}}$ 构成 T 的一个划分。

证明。每个侧森林 $F(s\backslash\mathsf{A})$ 都非空，因为 $s \in F(s\backslash\mathsf{A})$；而不同的侧森林 $F(s\backslash\mathsf{A})$ 和 $F(t\backslash\mathsf{A})$ 根据侧森林的定义彼此不相交。为证明 $\{F(s\backslash\mathsf{A})\}_{s\in\mathsf{A}}$ 覆盖 T，任取一个节点 $u \in T$，并考虑以下情形。

[5] 在该文献中，弱分支完备性这一性质简称为 *branching completeness*，因为该语境中并未使用更强形式的分支完备性。

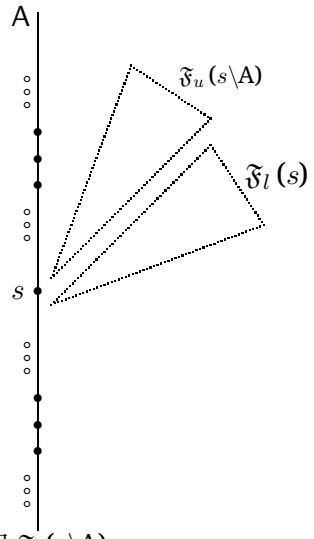


图5：侧森林 $\mathfrak{F}_l(s)$和 $\mathfrak{F}_u(s\backslash \mathrm{A})$。

情形1： $u \in \mathrm{A}$。于是 $u \in F(u\backslash \mathrm{A})$。

情形2： $u \notin \mathrm{A}$。于是存在 $v \in \mathrm{A}$，使得 $\{u, v\}$ 是一个反链。设B为一条包含 u的路径。根据 $\mathfrak{T}$的弱分支完备性，集合A∩B在A中有一个上确界w 。

情形2.1： $w < u$。于是 $u \in F_u(w\backslash \mathrm{A})$。情形2.2： $w \not< u$。于是 $u \in F_l(w)$。

这表明$\bigcup_{s\in \mathrm{A}} F(s\backslash \mathrm{A}) = T$。 ■

4 完备性概念的刻画

定理4 一棵树完备（C1），当且仅当它既路径完备（C2），又分支完备（C4）。

证明。(⇒) 显然。

(⇐) 假设树 $\mathfrak{T}$ 满足（C2）和（C4）。考虑 $\mathfrak{T}$ 中一个有下界的非空节点集合 X 。设 A 是 $\mathfrak{T}$ 中任意一条与 X 相交的路径。那么 $\mathrm{A} \cap X$ 是 A 的一个有下界的非空子集，因此根据（C2），它在 A 上有下确界，记为 v。对于任意一条与 X 相交的路径 P，同样，$\mathrm{P} \cap X$ 在 P 上有下确界，记为 t_{P}。根据（C4），集合 $\{v, t_{\mathrm{P}}\}$ 有下确界 u_{P}，它是 A 上的一个节点。注意到 $t_{\mathrm{A}} = v = u_{\mathrm{A}}$。现在考虑集合

$$Y := \{u_{\mathrm{P}} \mid \mathrm{P} \text{ is any path that intersects with } X\}.$$

对于 X 的任意下界 u ，我们有 $u \leqslant v$、 $u \leqslant t_{\mathrm{P}}$，因此对于每条与 X 相交的路径 P，都有 $u \leqslant u_{\mathrm{P}}$ 。于是，集合 Y 是路径 A 的一个非空子集，且有下界。根据性质（C2），它在 A 中有一个下确界 t 。我们断言， t 是 X 的下确界。事实上，根据 Y 的定义可知， t 是 X 的一个下界；并且我们在上文已经指出， X 的每个下界 t' 也是 Y 的下界，因此 $t' \leqslant t$。 ■

推论 5：路径完备（C2）树 $\mathfrak{T}$ 是反链完备（C3）的，当且仅当 $\mathfrak{T}$ 是分支完备（C4）的；而这又当且仅当 $\mathfrak{T}$ 是完备（C1）的。

接下来的结果表明，反链完备性等价于分支完备性与“半个”弱分支点完备性这两种性质的合取（请注意，在分支完备树中，分叉点与弱分支点重合）。

命题 6 树 $\mathfrak{T}$ 是反链完备的（C3），当且仅当 $\mathfrak{T}$ 是分支完备的（C4），且每个有下界的非空分叉点链都有下确界。

证明。（$\Rightarrow$）假设 $\mathfrak{T}$ 中每个有下界的非空反链都有下确界。显然，$\mathfrak{T}$ 是分支完备的。设 $\mathfrak{T}$ 中的 X 是一个有下界的非空分叉点链。对每个 $x \in X$，取不可比节点 u_x 和 v_x，使得 $x = \inf\{u_x, v_x\}$，并令 $Y := \bigcup_{x\in X}\{u_x, v_x\}$。由佐恩引理可知，存在一个关于成为反链而极大的 $Z \subseteq Y$；由于 X 有下界，因此 Z 也必有下界。令 $t := \inf(Z)$。

注意到 $L(X) = L(Y)$。令 $s \in L(X)$。由于 $Z \subseteq Y$，因此 $L(Y) \subseteq L(Z)$，由此$s \in L(Z)$，故 $s \leqslant t$。为证明 $t \in L(X)$，先注意到，根据 Z 的极大性，对每个 $y \in Y$，都存在一个节点 $y' \in Z$，使得 $y' \smile y$。令 $x \in X$。若 $(u_x)' \neq (v_x)'$，则 $(u_x)' \not\smile (v_x)'$（因为 Z 是反链），故 $t \leqslant \inf\{(u_x)', (v_x)'\} = \inf\{u_x, v_x\} = x$。另一方面，若 $(u_x)' = (v_x)'$，则 $(u_x)' \smile u_x, v_x$，故 $t \leqslant (u_x)' \leqslant \inf\{u_x, v_x\} = x$，从而$t \in L(X)$，由此可得 $t = \inf(X)$，证毕。

($\Leftarrow$) 设 X 是一个非空且有下界的反链。设 $x_0 \in X$，并令 P 为一条经过 x_0的路径。对每个 $y \in X \setminus \{x_0\}$，令 $u_y := \inf\{x_0, y\} \in \mathrm{P}$。集合$\{u_y : y \in X \setminus \{x_0\}\}$ 于是构成一个有下界的分叉点链，因此该集合有一个下确界 v。很容易验证，v 也是 X的下确界。

完备性问题促使我们考察特定的茎和分支。回想一下，t表示树中包含 t的极大桥。若 $\mathrm{A} = \bigcup_{t\in\mathrm{A}} t$，我们称茎 A 为树干；类似地，若 $\mathrm{B} = \bigcup_{t\in\mathrm{B}} t$，则称分支 B 为枝条。图2中的树 $\mathfrak{T}$ 是树干和枝条的反例。对于 $\mathfrak{T}$中 ω的初始副本里的每个节点 u，集合 $T^{\leqslant u}$ 构成一条非树干的茎；对于叠加在 ω初始副本上的两个 ω 副本中的每个节点 v，集合 $T^{>v}$ 构成一条非枝条的分支。

若 P 是一条路径且 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{P}$，则 A 是树干，当且仅当 $\mathrm{P} \setminus \mathrm{A}$ 是一条枝条。若 A 是树干，B 是枝条，且 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ 并且 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ 是一条路径，则称 A 和 B 互补。在凝缩树中，茎与树干相同，分支与枝条也相同。注意，若树干 A 与枝条 B 互补，则如果 A 存在上确界，它将是 B 的下确界。然而，如果 B 有下确界，该下确界未必是 A 的上确界；事实上，A 甚至未必有上确界。图2中的树可作为一个反例。

定理 7 设 $\mathfrak{T}$ 为任意一棵树。

1. 对于 $\mathfrak{T}$ 中任意一个非单元素的路径集 $\{\mathrm{P}_i\}_{i\in I}$，集合 $\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i$ 若非空，则是一个树干。
2. 对于任意路径 Q 以及 $\mathfrak{T}$ 中任意一个非单元素的路径集 $\{\mathrm{P}_i\}_{i\in I}$，集合 $\mathrm{B} := \mathrm{Q} \setminus \bigcup \mathrm{P}_i, i\in I$ 若非空，则是一条枝条（因此 $\mathrm{Q} \setminus \mathrm{B}$ 是一个树干）。

3. $\mathfrak{T}$ 中的每个树干都属于上述两种形式之一，也可能同时属于两种形式。

证明。1. 设 $\mathfrak{T}$ 中任意路径集为 $\{P_i\}_{i\in I}$，并令 $A := \bigcap_{i\in I} P_i \neq \emptyset$。任取一条路径 $P_0 \in \{P_i\}_{i\in I}$。A 是一条茎，这一点可由 $A \subseteq P_0$ 以及每条路径 P_i 都向下封闭这一事实得出。要证明 A 是一个树干，只需证明：对于所有满足 $u \in A$ 和 $v \in u$ 的节点 u 和 v，都有 $v \in A$。任取满足 $u \in A$ 和 $v \in u$ 的节点 u 和 v。对于每个 $i \in I$，由于 $u \in P_i$，所以 $P_i \cap \overline{u} \neq \emptyset$；又因为 u 是一座桥，故 $P_i \cap u = u$，因此 $v \in P_i$。由此可知 $v \in A$，证毕。

2. 设 Q 是一条路径，$\{P_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{T}$ 中的路径集合，且 $B := Q \setminus \bigcup_{i\in I} P_i \neq \emptyset$。设 $u \in B$，并设 $v \in Q$ 且 $u < v$。假设 $v \notin B$。那么，对于某个 $j \in I$，有 $v \in P_j$。于是 $u \in P_j$ 也成立，因此 $u \notin B$，矛盾。由此可知，B 在 Q 中向上封闭，因此 B 是一个分支。

要证明 B 是一条枝条，同样只需证明：对于所有满足 $u \in B$ 和 $v \in u$ 的节点 u 和 v，都有 $v \in B$。因此，任取满足 $u \in B$ 和 $v \in u$ 的节点 u 和 v，但反设 $v \notin B$。由 $v \in u$ 可知，对于某个 $j \in I$，有 $v \in P_j$，因此 $u = v \subseteq P_j$。于是 $u \in P_j$，从而 $u \notin B$，矛盾。

3. 设 A 是一棵树干，Q 是一条包含 A 的路径，且 $B := Q \setminus A$。我们考虑三种情形（情形1和情形2可能重叠）。

情形1：A 不包含最大的极大桥。令 $\mathcal{A}$ 为 A 中极大桥的集合。注意，对每个 $J \in \mathcal{A}$，都存在一条路径 P_J 和一个节点 $u_J \in A$，使得 $J \subseteq P_J$，而 $u_J \notin P_J$。于是 $B = Q \setminus \bigcup_{J\in\mathcal{A}} P_J$。

情形2：B 不包含最小极大桥。令 $\mathcal{B}$ 为 B 中极大桥的集合。注意，对每个 $J \in \mathcal{B}$，都存在一条路径 P_J，使得 $P_J \cap J = \emptyset$，而 $P_J \cap B \neq \emptyset$。于是 $A = \bigcap_{I\in\mathcal{B}} P_I$。

情形3：A 包含最大的极大桥 I，且 B 包含最小极大桥 J。由于 I 和 J 是不同的极大桥，必定存在一条包含 I 的路径 P，但 $P \cap J = \emptyset$。于是 $P \cap Q = A$，如所需。

■

定理 7 第 1 部分中所述形式的树干称为 I 型主干，定理第 2 部分中所述形式的树干称为 II 型主干。根据与某枝条互补的树干是 I 型还是 II 型，该枝条称为 I 型肢或 II 型肢。定理 7 中的路径集 $\{P_i\}_{i\in I}$ 被称为生成相应的树干或枝条，以及与之互补的枝条或树干。若树干 A 可以写成 $A = P \cap Q$ 的形式，其中 P 和 Q 是路径，则称 A 为有限生成树干；若枝条 B 可以写成 $B = Q \setminus P$ 的形式，其中 Q 和 P 是路径，则称 B 为有限生成枝条。若树干 A 包含于路径 P 中，则 A 是有限生成的，当且仅当枝条 $P \setminus A$ 是有限生成的。有限生成树干和枝条既可以是 I 型，也可以是 II 型，但此时路径集 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是有限的。

引理 8 设 A 是树 $\mathfrak{T}$ 中的有限生成树干，P 是一条路径，且 $A \subseteq P$。那么存在一条路径 Q，使得 $A = P \cap Q$。

证明。由于 A 是有限生成树干，存在路径 B 和 C，使得 $A = B \cap C$.

如果 $P \cap B = A$，那么结论成立，因此考虑 $P \cap B \supsetneq A$ 的情形。令 $u \in (P \cap B) \setminus A$。反设 $P \cap C \supsetneq A$。令 $v \in (P \cap C) \setminus A$。于是 $\min\{u, v\} \in (B \cap C) \setminus A$，矛盾。因此 $P \cap C = A$，证毕。

■

以下结果用涉及茎、分支、主干和枝条的性质刻画完备性（C1）至（C6）。

定理 9 设 $\mathfrak{T}$ 是任意一棵树。则以下各项结论均成立。

1. $\mathfrak{T}$ 完备（C1）当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个茎都有上确界。 2. $\mathfrak{T}$ 路径完备（C2）当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个分支都有下确界。 3. $\mathfrak{T}$ 反链完备（C3）当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个 I 型主干都有最大节点。 4. $\mathfrak{T}$ 分支完备（（C4））当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个有限生成树干都包含一个最大节点。 5. $\mathfrak{T}$ 弱分支完备（C5）当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个有限生成枝条都有下确界。 6. $\mathfrak{T}$ 分支完备（（C4））且弱分叉点完备（（C6））当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个树干都有上确界。 7. $\mathfrak{T}$ 弱分支完备（C5）且弱分叉点完备（（C6））当且仅当 $\mathfrak{T}$ 中的每个枝条都有下确界。

证明。命题 1：(⇒) 给定 $\mathfrak{T}$ 中的一条茎 A，可以很容易验证，$T^{\geqslant \mathsf{A}}$ 的下确界就是 A 的上确界。

(⇐) 给定一个非空且有下界的 $X \subseteq T$，$\mathrm{B} := T^{\leqslant X}$ 将是 $\mathfrak{T}$ 中的一条茎。其上确界 u 可以很容易验证是 X 的下确界。

命题 2：显然。

命题 3：(⇒) 设 $\mathfrak{T}$ 反链完备，且 $\mathrm{A} := \bigcap_{i\in I} \mathrm{P}_i$，其中 $\{\mathrm{P}_i\}_{i\in I}$ 是一组路径，是一个 I 型主干。设 X 是 $\left(\bigcup_{i\in I} \mathrm{P}_i\right) \setminus \mathrm{A}$ 中的极大反链。那么 X 有下界（由 A 给出），因此 X 有一个下确界 u。于是 u 是 A 的最大节点。

(⇐) 设 X 是一个非空且有下界的反链。对于每个 $t \in X$，取一条经过 t 的路径 P_t。那么 $\mathrm{A} := \bigcap_{t\in X} \mathrm{P}_t$ 是一个 I 型主干，因此 A 有一个最大节点 u。此节点 u 将是所需的 X 的下确界。

断言 4：显然。

断言 5：显然（使用引理 8）。

断言 6：(⇒) 假设 $\mathfrak{T}$ 满足（C4）和（C6），因而也满足（C7）。设 A 是 $\mathfrak{T}$中的一条主干。首先考虑 A 为 I 型主干的情形，即 $\mathrm{A} := \bigcap_{i\in I} \mathrm{P}_i$，其中 $\{\mathrm{P}_i\}_{i\in I}$ 是某个路径集。固定 $j \in I$，对于每个 $i \in I \setminus \{j\}$，令 t_i 为 $\mathrm{P}_j \cap \mathrm{P}_i$ 中的最大节点，该节点由（C4）保证存在。根据（C7），集合 $\{t_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ 有一个下确界 u，不难看出该下确界就是 A 的上确界。相反，在 A 为 II 型主干的情形，同样可以证明：由生成 A 的路径在 A 上形成的分支点集合的上确界，也是 A 本身的上确界。

（⇐）假设 $\mathfrak{T}$ 中的每个树干都有上确界。为证明（C4）成立，取不可比节点 u 和 v，并取包含 u 和 v 的路径 A 和 B。树干 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ 的上确界也将是 $\{u, v\}$ 的下确界。为证明（C7），进而证明（C6）成立，取 $\mathfrak{T}$ 中由分支点构成的非空链 X，并取一条满足$X \subseteq \mathrm{P}$ 的路径 P。对每个 $t \in X$，取一条路径 P_t，使得 t 是树干 $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}_t$ 的上确界。如果X 有下界，那么 I 型主干 $\bigcap_{t\in X} \mathrm{P}_t$ 的上确界将是X的下确界；而如果 X 有上界，那么 II 型主干 $\mathrm{P} \setminus \bigcup_{t\in X} \mathrm{P}_t$ 的上确界将是 X 的上确界。

断言 7：证明与断言 6 的证明类似。 ■

命题10 树 $\mathfrak{T}$ 路径完备（C2），当且仅当 $\mathfrak{T}$ 弱分支完备（C5）、弱分支点完备（C6），并且 $\mathfrak{T}$中的每个极大桥都完备。

证明。($\Rightarrow$) 显然。

($\Leftarrow$) 设 P 是 $\mathfrak{T}$ 中的任意路径，且 $X \subseteq$P 非空并有下界。

情形1：存在 $\mathfrak{T}$ 中的一条枝条 A，使得 X 在 A 中共初始。则 A 的下确界（根据定理9第7部分，该下确界存在）也是 X的下确界。

情形2：存在 $\mathfrak{T}$ 中的一条最小极大桥 B，使得 B$\cap X \neq \emptyset$，且存在一个节点 $b \in$ B，使得 $b < x$ 对每个 $x \in X$都成立。由于 B 完备，集合 B$\cap X$ 有下确界，该下确界也是 X的下确界。

■

推论11 设 $\mathfrak{T}$是一棵凝缩树。

1. $\mathfrak{T}$ 是路径完备的（C2），当且仅当它是弱分支完备的（C5）且弱分支点完备的（C6）。
2. $\mathfrak{T}$ 是完备的（C1），当且仅当它是分支完备的（C4）且弱分支点完备的（C6）。

证明。1. 由命题10以及凝缩树中的每个极大桥都是单点集、因而完备这一事实可得。2. 由定理 1、定理4以及上文第1部分可得。下文将用到森林中的 $<$-连通分支这一概念。

■

定义12 森林 $\mathfrak{F} =$中的一个 $<$-连通分支（简称 $<$-分支）[6] (F; $<$) 是 F 的一个非空子集 C，满足：(1) 若 $t \in$ C、$t' \leqslant t$ 且 $t' \leqslant u$，则 $u \in$C；(2) 对于性质 (1)，C 按包含关系是极小的。

可以验证，森林的 $<$-分支与该森林的极大子树一致。在第5节构造树的完备化时，将用到下面的刻画。

命题 13 设 $\mathfrak{T}$ 是任意一棵树。

1. $\mathfrak{T}$ 路径完备（C2），当且仅当对于 $\mathfrak{T}$ 中的每个茎 X，$\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{X}}$ 的每个 $<$-分支都有一个根。2. $\mathfrak{T}$ 弱分支完备（C5），当且仅当对于 $\mathfrak{T}$ 中的每个有限生成树干 X，$\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{X}}$ 的每个 $<$- 分支都有一个根。

证明。1.（$\Rightarrow$）设 X 是 $\mathfrak{T}$ 中的一条茎。若 X 有最大节点 u，则 u 是 $\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{X}}$ 的根，因此考虑 X 没有最大节点的情形。令 $\mathfrak{T}'$ 为 $\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{X}}$ 的任意一个 $<$-分支，并令 A 为 $\mathfrak{T}'$ 中的一条路径。那么 A 是 $\mathfrak{T}$ 中满足 $T^{<\mathsf{A}} =$ X 的一条分支。根据定理 9 的第 2 部分，A 在 $\mathfrak{T}$ 中有下确界 v。由于 X 没有最大节点，因此 v 必定是 A 的最小元。由此可得，v 是 $\mathfrak{T}'$ 的根。

[6]这个定义源自 [13]。

（⇐）根据定理 9 的第 2 部分，只需证明 $\mathfrak{T}$ 中的每条分支都有下确界。设 A 是这样一条分支。若 A 有最小节点，则该最小节点就是它的下确界，因此考虑 A 没有最小节点的情形。令 $\mathsf{B} := T^{<\mathsf{A}}$，并令 $\mathfrak{T}'$ 为 $\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{B}}$ 中包含 A 的那个 $<$-分支。根据假设，$\mathfrak{T}'$ 有一个根 u。由于 A 没有最小节点，u 必定是 B 的最大节点，由此可得 u 是 A 的下确界。

2. (⇒) 通过考察一个有限生成树干 X，可以像本证明第 1 部分正向论证那样证明这一点，不过此处使用的是定理 9 的第 5 部分，而非第 2 部分：$\mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{X}}$ 的每个 $<$ 分支都有一个根。

(⇐) 这一方向可以用类似于本证明第 1 部分反向论证的方法来证明，不过同样使用定理 9 的第 5 部分而非第 2 部分，并考察一个有限生成枝条 A，而不是一个分支；由此得到的 $\mathsf{B} := T^{<\mathsf{A}}$ 将是一个有限生成树干，而非一个茎。 ∎

5 树的完备化

现在我们转向构造树的完备化这一问题。直观而言，这需要向一棵树添加必要的“缺失”节点，使其以某种意义变为完备。本文将讨论的完备化包括戴德金完备化、反链完备化、分支完备化、路径戴德金完备化、弱分支完备化以及 α-填充。定理 9 和命题 13 将是以直观方式构造这些完备化的关键。

5.1 戴德金完备化

我们首先概述一种构造方法，用以得到给定树的戴德金完备化。该方法见于 [15]（在那里，它被应用于更广泛的一类所谓“无圈偏序”）。给定一棵树 $\mathfrak{T}$，T 的非空子集 X 称为戴德金理想，当且仅当 X 有上界且 $L(U(X)) = X$；若 X 具有某个 $y \in T$ 的形式 $X = T^{\leqslant y}$，则称其为主理想。令 $\mathcal{I}(\mathfrak{T})$ 表示由 $\mathfrak{T}$ 的所有戴德金理想构成的集合，并定义 $\mathfrak{T}^{\mathcal{I}} := (\mathcal{I}(\mathfrak{T}); \subseteq)$。

事实 **14** *[15,*引理 2.2。*5]* 对于任意树 $\mathfrak{T}$，结构 $\mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$ 是一棵完备树。[7]

树 $\mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$ 与 $\mathfrak{T}$ 的关系如下：定义 $f : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$，使得 $x \mapsto T^{\leqslant x}$；也就是说，$\mathfrak{T}$ 中的每个节点都映射到由它生成的主理想。

事实 **15** *[15,* 引理 2.2.3、2.2.5、2.2.*7]* 映射 f 是从 $\mathfrak{T}$到 $\mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$的同构嵌入，而 $\mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$ 是每个扩展了 $f[\mathfrak{T}]$的完备树的子结构。

注意到，上述构造是对偏序集通常的戴德金-麦克尼尔完备化（例如参见 [10], [2]）的一种改编，但有以下区别：树 $\mathfrak{T}$ 的戴德金-麦克尼尔完备化以满足 $L(U(X)) = X$ 的所有 T 的子集作为其底集，而不只是那些非空且有上界的集合 X；所得结构（在同构意义下）是包含 $\mathfrak{T}$ 的最小完备格。

[7] 在 [15], 中，戴德金完备性定义为每个理想都是主理想这一性质。这与本文所采用的（戴德金）完备性的定义等价。

现在我们用更直观的方式描述如何构造一棵树的戴德金完备化。[8] 给定一棵树 $\mathfrak{T}:=(T;<)$，令 $\mathcal{S}$ 表示由 $\mathfrak{T}$ 中所有没有上确界的茎构成的集合。对于每个 $\mathsf{S}\in\mathcal{S}$，令 t_{S} 表示一个不属于 $\mathfrak{T}$ 的新节点，并令$T^{DC}:=T\cup\{t_{\mathsf{S}}:\mathsf{S}\in\mathcal{S}\}$。令 $<^{DC}$ 为关系

$$\{(x,y)\in T\times T: x<y\}\cup\{(t_{\mathsf{R}},t_{\mathsf{S}}):\mathsf{R},\mathsf{S}\in\mathcal{S}\text{ with }\mathsf{R}\subsetneq\mathsf{S}\}\cup \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}\{(u,t_{\mathsf{S}}):u\in\mathsf{S}\}\cup\bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}\{(t_{\mathsf{S}},u):u\text{ is any upper bound of }\mathsf{S}\}\quad(1)$$

在 T^{DC} 上，并记该结构为 $\left(T^{DC};<^{DC}\right)$ 为 $\mathfrak{T}^{DC}$。

命题 16 结构 $\mathfrak{T}^{DC}$ 是包含 $\mathfrak{T}$ 的完备树。

证明。容易验证，$<^{DC}$ 是自反的、传递的、向下线性的且向下连通的，因此 $\mathfrak{T}^{DC}$ 是一棵树。

根据定理 9，我们只需证明 $\mathfrak{T}^{DC}$ 中的每个茎都有上确界。首先注意，任何同时也是 $\mathfrak{T}$ 中的茎的茎 S，在 $\mathfrak{T}^{DC}$ 中都有上确界，即它在 $\mathfrak{T}$ 中的上确界 sup(S)，或 t_{S}。

接下来，设 R 是 $\mathfrak{T}^{DC}$ 中任意一个不是 $\mathfrak{T}$ 中的茎的茎。若 R 有最大元，则无需证明。否则，考虑集合 $\mathsf{R}^{-}:=\mathsf{R}\cap T$，它是 $\mathfrak{T}$ 中的一条茎。只需证明 R^{-} 在 R 中共尾，也就是说，对每个 $u\in\mathsf{R}$，都存在一个 $t\in\mathsf{R}^{-}$，使得 $u\leqslant^{DC}t$；那么 $t_{\mathsf{R}^{-}}$，即 R^{-} 在 $\mathfrak{T}^{DC}$ 中的上确界，也将是 R 在 $\mathfrak{T}^{DC}$ 中的上确界。

事实上，假设 u 是自然数集 R 中的一个元素，且对于所有 $t\in\mathsf{R}^{-}$，都有 $t<^{DC}u$。那么 $u\notin\mathsf{R}^{-}$，因此，对于某个茎 S，有 $u=t_{\mathsf{S}}$，其中 S 属于 $\mathfrak{T}$。既然 $\mathsf{S}\subseteq\mathsf{R}$，那么 $\mathsf{S}\subseteq\mathsf{R}^{-}$，并且很容易验证 $\mathsf{R}^{-}\subseteq\mathsf{S}$，因此 $\mathsf{S}=\mathsf{R}^{-}$，于是 $u=t_{\mathsf{S}}=t_{\mathsf{R}^{-}}$。现在考虑 R 中任意一个满足$u<^{DC}u'$的节点 u'；这样的节点 u' 存在，因为 R 没有最大元。接着，对于所有 $t\in\mathsf{R}^{-}$，都有 $t<^{DC}u'$，由此再次可得 $u'=t_{\mathsf{R}^{-}}$，进而 $u'=u$，这与 $<^{DC}$的非自反性矛盾。

■

树 $\mathfrak{T}^{DC}$ 将称为 $\mathfrak{T}$的戴德金完备化。根据定理 9，每棵完备树的每个茎都必须有一个上确界。因此，$\mathfrak{T}^{DC}$ 可以嵌入到每一棵扩张 $\mathfrak{T}$的完备树中。利用事实 15，必然有 $\mathfrak{T}^{DC}\cong\mathfrak{T}^{\mathcal{I}}$。

5.2 反链完备化和分支完备化

给定一棵树 $\mathfrak{T}:=(T;<)$，其戴德金完备化为 $\mathfrak{T}^{DC}$，则 $\mathfrak{T}$ 的反链完备化和分支完备化 [9] 分别可得如下:

$$\bigcap\left\{\mathfrak{S}:\mathfrak{S}\text{ is an antichain complete tree such that }\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{T}^{DC}\right\}$$

and

$$\bigcap\left\{\mathfrak{S}:\mathfrak{S}\text{ is a branching complete tree such that }\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{T}^{DC}\right\}.$$

定理 9 再次直观地提示了这些完备化的简单构造方法，这次是通过 $\mathfrak{T}$ 的主干来构造。

[8] 在 [4], 第 5 节中给出了类似的构造。[9] [1] 以这种方式定义了分支完备化，称为 *ramification completions*。

令 $\mathcal{T}_{\mathrm{I}}$ 为 $\mathfrak{T}$ 中所有不包含最大节点的 I 型主干的集合，并令 $\mathcal{T}_{\mathrm{fin}}$ 为 $\mathfrak{T}$ 中所有不包含最大节点的有限生成主干的集合。对于 $\mathfrak{T}$ 中的每个主干 S，令 t_{S} 表示一个不属于 T 的新节点，并定义

$$\begin{aligned} T^{AC} &:= T \cup \{t_{\mathsf{S}} : \mathsf{S} \in \mathcal{T}_{\mathrm{I}}\}, \\ T^{BC} &:= T \cup \{t_{\mathsf{S}} : \mathsf{S} \in \mathcal{T}_{\mathrm{fin}}\}. \end{aligned}$$

现在，我们按照（1）定义关系 $<^{AC}$ 和 $<^{BC}$，只是分别用集合 $\mathcal{T}_{\mathrm{I}}$ 和$\mathcal{T}_{\mathrm{fin}}$替代集合 $\mathcal{S}$。最后，令 $\mathfrak{T}^{AC}:=\left(T^{AC};\ <^{AC}\right)$ 以及 $\mathfrak{T}^{BC}:=\left(T^{BC};\ <^{BC}\right)$。

命题17 设 $\mathfrak{T}$为任意一棵树。

1. $\mathfrak{T}^{AC}$ 是包含 $\mathfrak{T}$的反链完备树。2. $\mathfrak{T}^{BC}$ 是包含 $\mathfrak{T}$ 的分支完备树。

证明。1. 为了证明 $\mathfrak{T}^{AC}$ 是一棵树，我们可以使用与命题 16 的证明中用于证明 $\mathfrak{T}^{DC}$ 是一棵树的论证完全相同的方法。

设 R 是 $\mathfrak{T}^{AC}$中的一个 I 型主干，即对于某个路径集 $\{\mathrm{P}_i\}_{i\in I}$，有 $\mathrm{R}=\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i$。设 $\mathrm{R}^-:=\mathrm{R}\cap T$，并且对于每个 $i\in I$，令 $\mathrm{P}_i^-:=\mathrm{P}_i\cap T$。那么对于每个 i，P_i^-是 $\mathfrak{T}$中的一条路径，而 $\mathrm{R}^-=\bigcap_{i\in I}\mathrm{P}_i^-$是 $\mathfrak{T}$中的一个 I 型主干。

首先考虑 R^- 有最大节点 u 的情形。那么 u 也是 R 的最大节点。为证明这一点，反设存在一个 $v\in\mathrm{R}$，使得 $u<^{AC}v$。那么 $v\notin T$（否则 $v\in\mathrm{R}^-$，矛盾），因此对于 $\mathcal{T}_{\mathrm{I}}$ 中的某个树干 S，有 $v=t_{\mathsf{S}}$。又由于 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{R}$（因为 $v\in\mathrm{R}$），所以 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{R}^-$；而由于 $u<^{AC}t_{\mathsf{S}}$，故 $\mathrm{R}^-\subseteq\mathrm{S}$，因此 $\mathrm{S}=\mathrm{R}^-$。这与 S 没有最大节点这一事实矛盾。

接下来考虑 R^- 没有最大节点的情形。那么 T^{AC} 包含节点 t_{R^-}，且 $u:=t_{\mathsf{R}^-}$ 将是 R 的最大节点。为证明这一点，首先注意到，根据 $<^{AC}$ 的定义方式，对于每个 $i\in I$，都有 $u\in\mathrm{P}_i$，因此 $u\in\mathrm{R}$。接下来，再次反设存在一个 $v\in\mathrm{R}$，使得 $u<^{AC}v$。由此再次可得 $v\notin T$；因为若$v\in T$，那么如上所述，$v\in\mathrm{R}^-$，进而 $v<^{AC}t_{\mathsf{R}^-}$，这与 $u<^{AC}v$矛盾。因此，对于 $\mathcal{T}_{\mathrm{I}}$ 中的某个树干 S，有 $v=t_{\mathsf{S}}$。同样，由 $v\in\mathrm{R}$可知 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{R}$，故 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{R}^-$；而由 $t_{\mathsf{R}^-}=u<^{AC}v=t_{\mathsf{S}}$ 可得 $\mathrm{R}^-\subsetneq\mathrm{S}$，矛盾。

命题 2 的证明类似。 ■

树 $\mathfrak{T}^{AC}$ 和 $\mathfrak{T}^{BC}$ 将分别称为 $\mathfrak{T}$ 的反链完备化和分支完备化。由定理 9 可知，$\mathfrak{T}^{AC}$ 可以嵌入每一棵扩张 $\mathfrak{T}$ 的反链完备树中，而 $\mathfrak{T}^{BC}$ 可以嵌入每一棵扩张 $\mathfrak{T}$的分支完备树中。

5.3 路径戴德金完备化与弱分支完备化

构造树的路径戴德金完备化时会遇到一个小小的复杂之处，即该构造并非确定性的。一般而言，扩张给定树的最小路径完备树未必唯一。根据定理 9，要从给定的树得到一棵路径完备树，只需向树的分支添加缺失的最小节点，或向其茎添加缺失的最大节点；而具体采用哪种方式有一定的自由度。

相反，我们将以命题 13 为基础进行构造。之所以使用 $<$-分支进行构造，而不是像

定理 9 所建议的那样使用分支，是因为如果只是将节点作为下确界添加到没有下确界的分支中，那么可能会有多个节点被添加到同一个分支上，因为不同的分支可能具有相同的下界集合。

下面的构造将从任意树 $\mathfrak{T}$ 生成一个最小的逐路径完备树 $\mathfrak{T}^{PDC}$，且不会引入任何额外的分支点。因此， $\mathfrak{T}^{PDC}$ 将是 $\mathfrak{T}$ 最保守的路径戴德金完备化，其含义是：在 $\mathfrak{T}$ 的所有路径戴德金完备化中， $\mathfrak{T}^{PDC}$ 将是距离分支完备最远的一个。

从一棵树生成弱分支完备化时也有类似的观察：同样地，一棵树未必具有唯一的最小弱分支完备化。在这里，我们仍将以命题 13 而非定理 9 为基础进行构造，从而由一棵树 $\mathfrak{T}$ 得到一个最小的弱分支完备树 $\mathfrak{T}^{WBC}$ ；该树不包含任何新的分支点，并且在所有扩张 $\mathfrak{T}$ 的弱分支完备树中，它将是距离分支完备最远的一个。

设 $\mathfrak{T}:=(T;<)$ 是任意一棵树。令 $\mathcal{S}'$ 为 $\mathfrak{T}$ 中所有茎的集合，并令

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}') := \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}'} \left\{ \mathsf{C} : \mathsf{C} \text{ is a } <\text{-component without root in } \mathfrak{T}^{\geqslant \mathsf{S}} \right\}. \tag{2}$$

对于每个 $\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}')$，令 t_{C} 表示一个不属于 $\mathfrak{T}$ 的新节点，并定义 $T^{PDC}:=T\cup\{t_{\mathsf{C}}:\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}')\}$。令 $<^{PDC}$ 为 T^{PDC} 上的如下关系：

$$\{(x,y)\in T\times T : x<y\}\cup\left\{(t_{\mathsf{C}},t_{\mathsf{D}}) : \mathsf{C},\mathsf{D}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}') \text{ with } \mathsf{D}\subsetneq\mathsf{C}\right\}\cup \bigcup_{\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}')}\{(u,t_{\mathsf{C}}) : u \text{ is any lower bound of } \mathsf{C}\}\cup\bigcup_{\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}')}\{(t_{\mathsf{C}},u) : u\in\mathsf{C}\}. \tag{3}$$

现在，我们定义 $\mathfrak{T}^{PDC}:=\left(T^{PDC};<^{PDC}\right)$。

树 $\mathfrak{T}^{WBC}:=\left(T^{WBC};<^{WBC}\right)$ 的定义类似，如下所示。令 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathfrak{T}$ 中所有有限生成树干构成的集合，并按 (2) 中的定义定义 $\mathcal{C}(\mathcal{T}')$，但用集合 $\mathcal{T}'$ 替代 $\mathcal{S}'$。对于每个 $\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{T}')$，再次令 t_{C} 表示一个不属于 $\mathfrak{T}$ 的新节点，并再次定义$T^{WBC}:=T\cup\{t_{\mathsf{C}}:\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathcal{T}')\}$。最后，按 (3) 中的定义定义关系 $<^{WBC}$，但再次用集合 $\mathcal{T}'$ 替代 $\mathcal{S}'$。

命题 18 设 $\mathfrak{T}$是任意一棵树。

1. $\mathfrak{T}^{PDC}$ 是包含 $\mathfrak{T}$的逐路径完备树。2. $\mathfrak{T}^{WBC}$ 是包含 $\mathfrak{T}$的弱分支完备树。

证明。1. 验证 $\mathfrak{T}^{PDC}$ 是一棵树是显然的。

设 R 是 $\mathfrak{T}^{PDC}$中的一条茎，C 是森林 $\left(\mathfrak{T}^{PDC}\right)^{\geqslant^{PDC}\mathsf{R}}$中的一个 $<^{PDC}$-分支。根据命题 13，只需证明 C 有一个根。令 $\mathsf{C}^-:=\mathsf{C}\cap T$。下面分两种情况讨论。

情形1. 假设 C^- 有一个根 u。那么 u 也是 C 中的一个根。为证明这一点，只需证明对于 C 中每个形如 t_{D}的节点，都有 $u<^{PDC}t_{\mathsf{D}}$；因为显然，对于每个 $v\in\mathsf{C}^-$，都有 $u<^{PDC}v$。反设 $u\not<^{PDC}t_{\mathsf{D}}$ 或 $t_{\mathsf{D}}<^{PDC}u$。若 $u\not<^{PDC}t_{\mathsf{D}}$，则 $u\not<^{PDC}\mathsf{D}$ 且 $u\notin\mathsf{D}$。由此可得，对于每个 $v\in\mathsf{D}$，都有 $u\not<^{PDC}v$，这与

$\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}^-$ 这一事实矛盾，而 u 是 C^-的根。另一方面，若 $t_{\mathsf{D}} <^{PDC} u$，则 $u \in \mathsf{D}$。由于 u 是 C^- 的根，因此 $\mathsf{C}^- \subseteq \mathsf{D}$；又由于 $t_{\mathsf{D}} \in \mathsf{C}$，因此 $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}$，进而 $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}^-$，所以 $\mathsf{D} = \mathsf{C}^-$。因此 $t_{\mathsf{D}} = t_{\mathsf{C}^-}$，但这与假设 C^- 有一个根相矛盾。

情形2. 假设 C^- 没有根。那么节点 t_{C^-} 是 C 的根。这$t_{\mathsf{C}^-} \in \mathsf{C}$ 可由 $\mathsf{R} \leqslant^{PDC} t_{\mathsf{C}^-} <^{PDC} \mathsf{C}^-$推出，再结合 $\mathsf{C} \supseteq \mathsf{C}^-$ 且 C 是 $\left(\mathfrak{T}^{PDC}\right)^{\geqslant^{PDC}}\mathsf{R}$ 中的一个 $<^{PDC}$-分支这一事实即可。现在只需证明，对于每个满足 $t_{\mathsf{D}} \neq t_{\mathsf{C}^-}$ 的 C，$t_{\mathsf{C}^-} <^{PDC} t_{\mathsf{D}} t_{\mathsf{D}} \in$ 。事实上，如果 $t_{\mathsf{D}} \in \mathsf{C}$，那么 $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}$，因此 $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}^-$；此外，由于$t_{\mathsf{D}} \neq t_{\mathsf{C}^-}$，于是 $\mathsf{D} \subsetneq \mathsf{C}^-$，由此可得 $t_{\mathsf{C}^-} <^{PDC} t_{\mathsf{D}}$。

2. 证明与断言 1 的证明相同，只是使用有限生成主干，而不是茎。

■

由命题 13 可知，$\mathfrak{T}^{PDC}$ 在扩张 $\mathfrak{T}$ 的路径完备树类中是极小的；并且 $\mathfrak{T}^{PDC}$ 可嵌入每一棵扩张$\mathfrak{T}$ 且具有与 $\mathfrak{T}$相同分支点的路径完备树中。类似地，$\mathfrak{T}^{WBC}$ 在扩张 $\mathfrak{T}$ 的弱分支完备树类中是极小的；并且 $\mathfrak{T}^{WBC}$ 可嵌入每一棵扩张 $\mathfrak{T}$ 且具有与 $\mathfrak{T}$相同分支点的弱分支完备树中。

最后，我们提出以下尚未解决的问题：对于树中哪些节点集族 $\mathcal{F}$，泛化的 $\mathcal{F}$-完备性概念会产生树的 $\mathcal{F}$-完备化的泛化构造，且该构造能够以类似于此处所介绍构造的方式获得?

5.4 α-填充

上文提出的戴德金完备化未必保留某些自然性质，例如稠密性。举例来说，考虑一棵树 $\mathfrak{T}$，它由有理数集 η 的一个副本构成，其上又接有两个彼此不可比的 $1+\eta$ 副本。 $\mathfrak{T}$ 有两条路径，每条路径的序型都是 $\eta + 1 + \eta \cong \eta$。在 $\mathfrak{T}$ 的戴德金完备化中，这两条路径都变成线性序 $\lambda + 2 + \lambda$ 的副本。因此，$\mathfrak{T}$ 中的路径是稠密线性序，而 $\mathfrak{T}$ 的戴德金完备化中的路径则不稠密。

因此，问题在于如何修改这一构造，以得到稠密的戴德金完备化? 这里我们提出一种替代性的通用构造；特别是，它能够实现这一点。该构造具有非确定性，定义如下。

给定一个凝缩树 $\mathfrak{S} := (S; <_{\mathfrak{S}})$、一组线性序 $\mathcal{A} := \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$，以及一个函数$f$：$S \to I$，$f$-积 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A} := (|\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}|; <)$ 是按如下方式定义的结构：

- $|\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}| := \bigcup_{t\in S} \left(\{t\} \times |\mathfrak{A}_{f(t)}|\right)$;
- 对于 (t_1, x_1)、$(t_2, x_2) \in |\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}|$,

$$(t_1, x_1) < (t_2, x_2) \iff t_1 <_{\mathfrak{S}} t_2 \text{ or } \left(t_1 = t_2 \text{ and } x_1 <_{\mathfrak{A}_{f(t_1)}} x_2\right).$$

非正式地说，结构 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 是通过将 $\mathfrak{S}$ 中的每个节点 t 替换为线性序 $\mathfrak{A}_{f(t)}$，从 $\mathfrak{S}$ 得到的。容易看出，$\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 是一棵树，$\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 的凝缩（参见 [6]）与 $\mathfrak{S}$同构，并且 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 中不同的极大桥在同构意义下恰好是 $f(S) \subseteq \mathcal{A}$ 的元素。严格来说，树 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 并不是 $\mathfrak{S}$ 本身的扩展，因为 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 的元素是有序对，而 $\mathfrak{S}$ 的元素不是。不过，$\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 与一棵扩展 $\mathfrak{S}$的树 $\mathfrak{S}'$ 同构；为求简便，将 $\mathfrak{S} \times_f \mathcal{A}$ 视为这棵树 $\mathfrak{S}'$。

现在，设 α 是任意一个无端点稠密线性序，并设 $\mathfrak{T}=(T;<)$ 是一棵凝缩树。取 $\mathfrak{A}_0:=\alpha$ 和 $\mathfrak{A}_1:=\alpha+1$。将 $\mathfrak{T}$ 的一个 α-填充定义为任何具有如下形式的树

$$\mathfrak{T}\times_f\{\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1\} \tag{4}$$

其中 $f\colon\ T\to\{0,1\}$ 是任意函数。直观地说， $\mathfrak{T}$ 的一个 α-填充，是通过将 $\mathfrak{T}$中的每个节点替换为 α或 $\alpha+1$而得到的。因此，树 $\mathfrak{T}$提供分支结构，而α 提供极大桥内部的填充模式。形如（4）的树也称为局部 α-树。若对于 $\mathfrak{T}$中的每个叶节点， $f(x)=\mathfrak{A}_0$ ，而在其他情况下 $f(x)=\mathfrak{A}_1$ ，则 $\mathfrak{T}\times_f\{\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1\}$ 称为 $\mathfrak{T}$的完整 α-填充。

在上文所述的树 $\mathfrak{T}$ 示例中，该树由 η 的一个副本以及附加在其顶部的 $1+\eta$的两个不相交副本组成；从 $\mathfrak{T}$的凝缩得到完整的 η-填充后，会将 $\mathfrak{T}$中 $1+\eta$各副本的两个最小元合并为一个分支节点。所得的 η-填充既是稠密的，也是分支完备的。

若线性序稠密、无端点且完备，则称其为连续的。若线性序 $\mathfrak{A}:=(A;<)$ 中，每个在 $\mathfrak{A}$ 中稠密的子集 X （即，对于满足 $a<b$的 $a,b\in A$ ，总存在 $x\in X$ 使得 $a<x<b$）至多可数，则称其为可分的。回顾以下两个事实：

- 康托尔定理（例如参见 [11, 定理 2.8]）：每个无端点可数稠密线性序都同构于 η；并且

- 一个线性序同构于 λ，当且仅当它连续且可分（例如参见 [11,定理 2.30]）。

现在特别列出 α-填充的以下两个特例：

- 当 $\alpha=\eta$时。凝缩树 $\mathfrak{T}$ 的每个完全 η-填充都具有这样的性质：其每条路径都是无端点稠密线性序。此外，若 $\mathfrak{T}$ 中的每条路径都至多可数，那么根据康托尔定理， $\mathfrak{T}$ 的完全 η-填充中的每条路径都同构于 η。

- 当 $\alpha=\lambda$时。给定一个凝聚的逐路径完备树 $\mathfrak{T}$， $\mathfrak{T}$ 的完全 λ填充中的每条路径都将是连续线性序。此外，如果 $\mathfrak{T}$ 中的每条路径至多是可数的，那么根据上述对 λ的刻画，可以推出，$\mathfrak{T}$ 的完全 λ填充中的每条路径都将与 λ同构。最后，如果 $\mathfrak{T}$ 是分支完备的，那么根据定理4，其完全 λ填充将是完备的。

6 结论性说明

本文继续研究始于 [6] 的树的一般理论。本项目未来计划开展的工作包括：

- 研究树上的一般运算，例如和与积，从而扩展关于序数算术（康托尔、谢尔宾斯基等人）的经典研究，以及更一般的关于线性序上的运算的研究（参见 [11]）；

- 研究通过应用此类运算生成的树类，以及它们的结构理论和逻辑理论。

本项目的最终目标是系统地发展树的结构理论。本研究的一个预期应用是获得树的初等等价及其他逻辑等价的结构刻画，并利用这些刻画，为重要树类的逻辑理论提出新的公理化，并得出可判定性或不可判定性结果。

致谢

我们感谢审稿人认真审阅本文，并提出有益的意见和建议。

参考文献

[1] R. Barham，《$\aleph_0$-范畴树》，Order 34（2017），第1期，127–138页。[2] S. Burris 和 H. Sankappanavar，《泛代数教程》，施普林格，纽约，1981。[3] B. Courcelle 和 C. Delhomm´e，《可数图的模分解：单子二阶逻辑中的定义与构造》，Theoretical Computer Science 394（2008），1–38页。[4]M. Droste，《具有传递自同构群的偏序集结构》，第57卷，美国数学学会回忆录，第334号，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1985。[5] V. Goranko 和 R. Kellerman，《将树近似为着色线性序，以及若干树类的完备公理化》，Journal of Symbolic Logic 86（2021），1035–1065页。[6] V. Goranko、R. Kellerman 和 A. Zanardo，《树的结构理论 I：树的分支与凝缩》，2021，投稿中的手稿。[7] T. Jech，《树》，Journal of Symbolic Logic 36（1971），1–14页。[8] R. Kellerman，《树的逻辑理论》，博士论文，金山大学，约翰内斯堡，2010。[9] ———，《有界树的一阶理论》，Archive for Mathematical Logic 61（2022），263–297页。[10] H. MacNeille，《偏序集》，Transactions of the American Mathematical Society 42（1937），416–460页。[11] J.G. Rosenstein，《线性序》，学术出版社，纽约，1982。[12] M. Rubin，《从树的自同构群重构树》，Contemporary Mathematics，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993。[13] J. Schmerl，《关于 $\aleph_0$-范畴性与树理论》，Fundamenta Mathematicae 94（1977），121–128页。

[14] S. Todor˘cevi´c, 《树与线性有序集》，《集合论拓扑手册》（K. Kunen 和 J.E. Vaughan 编），North-Holland，1984，第235–293页。[15] R. Warren, 《k-cs-传递无圈偏序集的结构》，美国数学学会回忆录，第129卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[16] A. Zanardo、B. Barcellan 和 M. Reynolds, 《完备束树类的不可定义性》，Order 7（1999），第1期，125–136页，时序逻辑专刊。