arXiv:2301.06353v1 [math.FA] 16 Jan 2023

盖尔范德-希洛夫类上的复合算子

H´ector Ariza、Carmen Fern´andez、Antonio Galbis

2023年1月18日

摘要

我们研究在傅里叶变换下不变的 Beurling 型超可微函数全局类上的复合算子。特别地，对于经典的 Gelfand-Shilov 类 Σ_d, $d > 1$, 我们证明，复合算子 $f \mapsto f \circ \psi$ 有良定义的必要条件是 ψ'. 的有界性。我们找到了最优指标 d'，使得对于任意非常数多项式ψ·， $C_\psi(\Sigma_d(\mathbb{R})) \subset \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$ 成立。

1 引言

本文旨在开启对傅里叶变换下不变的超可微函数全局类上的复合算子的研究。定义这些类有两种方法：一是利用权函数 ω 控制函数及其傅里叶变换的衰减性质，二是用权序列 $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$· 来衡量函数的增长行为。事实证明，有些类可以通过这两种方法定义，其中最重要的是经典的 Gelfand-Shilov 空间。近年来，Gelfand-Shilov 空间及作用于其上的若干类算子已得到研究（例如参见 [8, 9, 11, 13]）。关于哪些权函数可使超可微函数全局空间也能用权序列定义，反之亦然，我们参考 [6]和 [4] 中的刻画。我们首先证明，与施瓦茨类的情形一样，这一框架中的复合算子从来都不是紧的。由此可见，Gelfand-Shilov 空间上的复合算子与施瓦茨类上的复合算子的行为截然不同，正如第 3 节中的结果所示。

接着，在第4节中，我们给出光滑函数 ψ 的一些充分条件，以保证相应的复合算子在给定的盖尔范德-希洛夫类上定义良好。例如，对于盖尔范德-希洛夫类 $\Sigma_d(\mathbb{R})$ $d > 1$，复合算子 C_ψ保持该类不变的一个必要条件是 ψ'. 有界。另一方面，可以找到最优指标 d'，使得对于任意非常数多项式 ψ，均有 $C_\psi(\Sigma_d(\mathbb{R})) \subset \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$ 成立（参见推论 3.8 和定理 4.4）。

1.1 由权函数定义的 Gelfand-Shilov 空间 n

定义1.1. 连续递增函数 $\omega : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ 称为权函数，若满足：

(α) 存在 $K \geq 1$，使得对于所有 $t \geq 0$, $\omega(2t) \leq K(\omega(t) + 1)$,

(β) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2}\, dt < \infty$,

(γ) 当 t 趋于 ∞ 时，$\log(1 + t^2) = o(\omega(t))$,

(δ) $\varphi_\omega : t \to \omega(e^t)$ 是凸的。

ω 延拓到 $\mathbb{R}$，定义为 $\omega(x) = \omega(|x|)$。φ_ω 的杨共轭 $\varphi_\omega^* : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi_\omega^*(s) := \sup\{st - \varphi_\omega(t) : \ t \geq 0\}, \ s \geq 0.$$

则 φ_ω^* 是凸的，$\varphi_\omega^*(s)/s$ 是递增的，且 $\lim_{s\to\infty} \underline{\varphi_\omega^*(s)\, s} = +\infty$. 此外，对于每个 $A > 0$, $\lambda > 0$，存在 $C > 0$ 使得

$$A^j j! \leq C e^{\lambda \varphi_\omega^*(\frac{j}{\lambda})}$$

对每个 $j \in \mathbb{N}_0$（见 [5, LemmaA.1(viii)]）。若权函数 ω 满足以下条件，则称其为强权

(ε) 存在一个常数 $C \geq 1$，使得对所有 $y > 0$，以下不等式成立

$$\int_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\, dt \leq C\omega(y) + C.$$

定义 1.2. 设 ω 为一个权函数。Beurling 型 Gelfand-Shilov空间 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 由满足以下性质$\widehat{\ }$的函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$组成： $f, \widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$，并且

$$q_{\lambda,j}(f) := \max\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(j)}(x)|e^{\lambda\omega(x)},\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f}^{(j)}(\xi)|e^{\lambda\omega(\xi)}\right) < +\infty$$

对每个 $\lambda > 0, j \in \mathbb{N}_0$.

$\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 是一个 Fr´echet 空间，具有不同的等价半范数系（例如参见 [3]）。特别地，我们将使用以下半范数族

$$p_\lambda(f) := \sup_{j,k\in\mathbb{N}_0}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k f^{(j)}(x)|e^{-\lambda\varphi^*(\frac{j+k}{\lambda})},\quad \lambda > 0$$

or

$$\pi_{\lambda,\mu}(f) := \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(j)}(x)|e^{-\lambda\varphi^*(\frac{j}{\lambda})+\mu\omega(x)},\quad \lambda > 0, \mu > 0.$$

条件（β）等价于 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 上存在非平凡的紧支撑函数，因此根据 [17], ，条件（ε）等价于博雷尔映射的满射性

$$B : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\}), f \mapsto \left(f^{(j)}(0)\right)_{j\in\mathbb{N}_0},$$

其中

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\}) = \left\{(x_j)_j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} :\ \sup_j |x_j| \exp(-k\varphi^*_\omega(\frac{j}{k})) < \infty\ \forall k > 0\right\}.$$

1.2 由权序列定义的 Gelfand-Shilov 空间

定义 1.3. 若序列（M_p）$_{p\in\mathbb{N}_0}$ 满足以下条件，则称其为权序列

(M0) 存在 $c > 0$，使得 $\left(c(p+1)\right)^p \le M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$.

(M1) $M_p^2 \le M_{p-1}M_{p+1}$、 $p \in \mathbb{N}$ 和 $M_0 = 1$.

(M2) 存在 $A, H > 0$ 使得 $M_p \le AH^p \min_{0\le q\le p} M_q M_{p-q}$, $p \in \mathbb{N}_0$.

(γ_1) $\sup_p \frac{m_p}{p}\sum_{j\ge p}\frac{1}{m_j} < \infty$, where $m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}$.

定义 1.4. 与权序列 $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$相关的空间 $\mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R})$ 由满足以下条件的函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 构成：对每个 $h > 0$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{j,\ell\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\ell f^{(j)}(x)|}{h^{j+\ell} M_{j+\ell}} < +\infty.$$

条件 (γ_1) 是必要的，因为它等价于博雷尔映射的满射性

$$B : \mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R}) \to \Lambda_{(M_p)}, f \mapsto \left(f^{(p)}(0)\right)_{p\in\mathbb{N}_0},$$

其中

$$\Lambda_{(M_p)} = \left\{(x_p)_p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \sup_p \frac{|x_p|}{h^p M_p} < \infty \ \forall h > 0\right\}.$$

条件 (γ_1) 蕴含 (M3)'：$\sum_p \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty$，这等价于 $\mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R})$ 包含非平凡的紧支撑函数。此外，根据 [20, 命题 1.1], (γ_1) 等价于

$$\exists Q \in \mathbb{N} : \liminf_{j\to\infty} \frac{m_{Qj}}{m_j} > 1.$$

根据 ([6, 定理 14]), $M(t) := \sup_p \log \frac{|t|^p}{M_p}$, $t \neq 0, M(0) = 1$ 是一个权函数，且以下断言成立:

对每个 $0 < h < 1$，都存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $C > 0$，使得 $\exp(k\varphi^*_M(p/k)) \leq Ch^p M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$.

对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $0 < h < 1$ 和 $D > 0$，使得

$$h^p M_p \leq D \exp\left(k\varphi^*_M(p/k)\right), \ p \in \mathbb{N}_0.$$

因此

$$\mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$$

对于 $\omega = M$. 由博雷尔映射的满射性，我们得出 $\omega = M$是一个强权。最后我们注意到，根据 [15, 命题 3.6]，存在 $H \geq 1$ 使得

$$2\omega(t) \leq \omega(Ht) + H, \ t \geq 0. \tag{1}$$

反过来，[6, 推论 16] 和 [4, 第 3] 节推出，对于任意满足条件 (1) 的权函数 ω，存在一个权序列 $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$，使得 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R})$。

例1。(a) 设 $d > 1$ 已给定。Gelfand-Shilov空间 $\Sigma_d(\mathbb{R})$ 为

$$\Sigma_d(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(M_p)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}),$$

其中

$$M_p = p!^d, \quad \omega(t) = t^{\frac{1}{d}}.$$

（b）对于 $s > 1$，我们定义 $\omega(t) = \max(0,\log^s t)$。这些是强权函数，且为次可加的（或等价于次可加权函数）；根据 [6, 20，例如]，相应的类 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 不能用权序列来描述。

为完整起见，我们回顾一下：权函数 ω 等价于次可加权函数，当且仅当 $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 在复合运算下封闭（见 [12]）。

2 紧性

我们回顾一下，若线性算子 $T : E \to F$ 从一个 Fr´echet 空间映射到另一个 Fr´echet 空间，且存在 E 中的一个零邻域 U，使得 $T(U)$ 是 $F.$ 中的相对紧子集，则称该算子为紧算子。在 [14] 中已证明，施瓦茨类上的复合算子从不紧。盖尔范德-希洛夫类上的情况也一样，不过其证明与 [14] 的证明大不相同。

引理 2.1. 设 $h, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得只要 $k \neq n.$，就有 $h^{(k)}(\psi(x_0)) = 0$。那么

$$(h \circ \psi)^{(n)}(x_0) = h^{(n)}(\psi(x_0))\,(\psi'(x_0))^n\,.$$

证明。根据 Fa`a di Bruno 公式（例如参见 [16, 1.3.1]），我们有

$$(h \circ \psi)^{(n)}(x_0) = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} h^{(k)}(\psi(x_0)) \left(\frac{\psi'(x_0)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n} \quad (2)$$

其中求和遍历所有满足 $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$ 的 $(k_1, \ldots, k_n)$，并记 $k := k_1 + \ldots + k_n.$。求和中唯一不为零的项出现在 $k = n$ 时，因此，$k_1 = n$, $k_2 = \ldots = k_n = 0$.由此即可得出结论。 □

定理2.2. 设 ω 是一个强权函数，并假设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $C_\psi(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。那么 $C_\psi : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 不是紧算子。

证明. 与 [14, 引理2.2], 中一样，我们有 $\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = \infty.$ 。不失一般性，假设存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $|\psi'(x_0)| > 1$ （反之，我们考虑适当的 $a > 0$ 所对应的 $\sigma(x) = \psi(ax)$，并注意到 C_ψ 的紧性等价于 C_σ 的紧性）。现在假设 C_ψ 是紧的，并在 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 中取一个零邻域 U，使得 $C_\psi(U)$ 在 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 中相对紧（因而有界）。映射

$$B_{x_0} : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\}), f \mapsto \left(f^{(j)}(\psi(x_0))\right)_{j\in\mathbb{N}_0},$$

由于它是平移与博雷尔映射的复合，因此它连续、线性且满射。因此它是开映射，且 $B_{x_0}(U)$ 是 $\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 中的一个零邻域。因此，存在 $p \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，使得条件 $(a_j)_j \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 以及

$$\sup_j |a_j| \exp(-p\varphi_\omega^*(\frac{j}{p})) \le \varepsilon$$

推出 $(a_j)_j \in B_{x_0}(U)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑由 $b_n(n) = \varepsilon \exp(p\varphi_\omega^*(\frac{n}{p}))$ 定义的 $b_n \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$，而 $b_n(j) = 0$ 对于 $j \neq n$ 成立，并取 $f_n \in U$ 使得 $B_{x_0}(f_n) = b_n.$。于是

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(f_n \circ \psi)^{(n)}(x_0)| \exp(-p\varphi_\omega^*(\frac{n}{p})) < \infty.$$

由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi'(x_0)|^n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n^{(n)}(\psi(x_0))| \cdot |\psi'(x_0)|^n \exp(-p\varphi_\omega^*(\frac{n}{p})) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(f_n \circ \psi)^{(n)}(x_0)| \exp(-p\varphi_\omega^*(\frac{n}{p})) < \infty\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

3 否定性结果与必要条件

引理 3.1. 设 ω 是一个权函数，且 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}_0$ 的一个划分，其中 I_m 对所有 $m.$ 都是有限集。对所有 $j \in I_{m.}$，令 $a_j := \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m}))$。那么 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$。

证明. 固定 $k \in \mathbb{N}.$。由于对每个 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $m \geq k$，都有 $m\varphi_\omega^*\left(\frac{j}{m}\right) \leq k\varphi_\omega^*\left(\frac{j}{k}\right)$，因此我们得到

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} |a_j| \exp(-k\varphi_\omega^*(\frac{j}{k})) = \max\{\sup_{1\leq m\leq k} \sup_{j\in I_m} \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m}) - k\varphi_\omega^*(\frac{j}{k})), 1\} < +\infty.$$

□

对于每个 $x \in \mathbb{R}$，我们考虑平移算子

$$T_x : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}),\ (T_x f)(t) := f(t-x).$$

引理 3.2. 设 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是两个正实数序列，使得 $\lim_j \lambda_j = +\infty.$。我们考虑

$$U_j : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}),\ U_j f = \exp\left(-\lambda_j \omega(x_j)\right) T_{x_j}.$$

那么 $\{U_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ 是等度连续的。

证明. 我们回顾一下，$(\pi_{n,\ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是半范数基本系。由 1.1(α) 可得 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\omega(x) \leq k\left(1 + \omega(x_j) + \omega(x - x_j)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}.$$

固定 $n \in \mathbb{N}$ 并取 $m_n = kn.$。那么，对于每个 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}
\pi_{n,n}(U_j f) &= \exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right) \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(\ell)}(x - x_j)| e^{-n\varphi_\omega^*(\frac{\ell}{n}) + n\omega(x)} \\
&\leq \exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right) \pi_{m,m}(f) \sup_{x\in\mathbb{R}} \exp\left(n\omega(x) - m\omega(x - x_j)\right) \\
&\leq \exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right) \pi_{m,m}(f) \exp\left(m + m\omega(x_j)\right) \\
&\leq C_n \pi_{m,m}(f)
\end{aligned}$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$，其中

$$C_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} \exp\left((-\lambda_j + m)\omega(x_j) + m\right) < +\infty.$$

□

下一个结果可见于 [7]。为使论述完整，我们给出证明。

引理 3.3. 设 $L \in \mathbb{N}$ 满足：对于所有 $t \geq 0.$，$\omega(et) \leq L(1+\omega(t))$。对于 $\lambda > 0$，$N \in \mathbb{N}$，我们取 $\mu = L^N\lambda.$，则

$$\mu\varphi_\omega^*(\frac{j}{\mu}) + Nj \leq \lambda\varphi_\omega^*(\frac{j}{\lambda}) + \lambda\sum_{k=1}^{N} L^k,\ j \in \mathbb{N}_0.$$

证明. 取 $N = 1.$，则

$$\begin{aligned}\mu\varphi_\omega^*(\frac{j}{\mu}) + j &= \sup_{s\geq 0}\left(j(s+1) - \mu\omega(e^s)\right) \leq \sup_{s\geq 0}\left(js - \mu\omega(e^{s-1})\right)\\ &\leq \lambda L + \sup_{s\geq 0}\left(js - \lambda\omega(e^s)\right) = \lambda L + \lambda\varphi_\omega^*(\frac{j}{\lambda}).\end{aligned}$$

现在对 $N.$ 作归纳 □

容易推出，对于每个 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 和 $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{j,k\in\mathbb{N}_0}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k|f^{(j)}(x)|e^{-\lambda\varphi^*(\frac{j+k}{\lambda})} < +\infty.$$

由于 $\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 是 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 的商空间，附加假设 ω 满足条件 (1) 时，下一个引理由 $[4, \text{定理 } 3]$ 推出。另见 [11]。

引理 3.4. $\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 是 Fr´echet 核空间。特别地，$\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 中的每个有界集都是相对紧的。

证明。我们首先观察到 $\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\}) = \cap_{n=1}^{\infty}\ell^\infty(v_n)$，其中

$$v_n(j) := \exp\left(-n\varphi_\omega^*(\frac{j}{n})\right).$$

与引理 3.3 中一样，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们取 $\ell = Lm.$，然后

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_m(j)}{v_\ell(j)} \leq e^{mL}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-j} < +\infty.$$

现在结论由 Grothendieck–Pietsch判据得出。 □

以下结果及其推论与施瓦茨类中复合算子的行为形成对比。在施瓦茨类中，众所周知，若$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$且 ψ 是非恒定多项式，则 $f \circ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$（例如参见 [14,定理 2.3]）。

定理 3.5. 设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ 且 $\psi'(x) \geq (\psi(x))^k$，其中某个 $k > 0$ 以及所有充分大的 x 均如此。设 ω 和 σ 是两个强权函数，且当 $t \to \infty.$ 时，$\omega(t^{\frac{1}{k+1}}) = o(\sigma(t))$。那么存在 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi \notin \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$。

证明。反设 $f \circ \psi \in \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ 对每个 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 都成立。于是，根据闭图定理，

$$C_\psi : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R}),\ f \mapsto f \circ \psi,$$

是一个连续算子。令 $\tilde{\omega}(t) = \omega(t^{\frac{1}{k+1}})$，并取 $L \in \mathbb{N}$ 使得 $\tilde{\omega}(et) \leq L(1 + \tilde{\omega}(t)$ $t \geq 0.$。由于 $\tilde{\omega} = o(\sigma)$，因此对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $s_n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\varphi^*_\sigma(s) \leq 2Ln\varphi^*_{\tilde{\omega}}(\frac{s}{2Ln}) \ \ \forall s \geq s_n.$$

我们选取

$$j_n := \max\left(2^n, s_{n+1}\right), n \in \mathbb{N}_0, \quad I_m := \{j \in \mathbb{N} :\ j_{m-1} < j \leq j_m\}, m \in \mathbb{N}.$$

现在，对于每个 $j \in I_m$、 $m \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\lambda_j := m, \quad a_j := \exp(\lambda_j \varphi^*_\omega(\frac{j}{\lambda_j})).$$

集合

$$\mathcal{C} := \{(a_j \delta_{j\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0} :\ j > j_0\}$$

在 $\mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 中有界，因此相对紧。由于博雷尔映射 $B : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\{0\})$ 是满射，我们可以应用 [18, 26.22]，找到一个相对紧集 $\mathcal{K} = \{g_j :\ j > j_0\} \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，使得 $\mathcal{C} = B(\mathcal{K})$。于是 $\mathcal{K}$ 是一个有界集，并且对于 $\ell = j$，有 $g_j^{(\ell)}(0) = a_j$；而对于 $\ell \neq j.$，有 $g_j^{(\ell)}(0) = 0$。现在，对每个 $j > j_0$，我们选取 $x_j > 0$，使得

$$kj \log x_j - \lambda_j \omega(x_j) = \lambda_j \varphi^*_\omega(\frac{kj}{\lambda_j}).$$

这种选取是可能的，因为 ω 的连续性以及 1.1(γ) 保证了 φ_ω^* 定义中出现的上确界实际上是最大值。由 C_ψ 的连续性和引理 3.2，我们得出

$$\left\{\exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right)C_\psi(T_{x_j}g_j):\ j>j_0\right\}$$

是 $\mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ 中的有界集。特别地，对于 $h_j := C_\psi(T_{x_j}g_j)$，我们有

$$\sup_{j>j_0}\sup_{y\in\mathbb{R}}\exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right)\left|h_j^{(j)}(y)\right|e^{-\varphi_\sigma^*(j)}<+\infty. \tag{3}$$

由于 $\lim_{s\to+\infty}\varphi_\omega^*(s)\,s=+\infty$，因此 $\lim_{j\to\infty}x_j=+\infty$，并且（当 j 足够大时，设为 $j\geq J$）存在 $y_j\in\mathbb{R}$，使得 $\psi(y_j)=x_j$.。由 (3) 可得

$$\sup_{j>J}\exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right)\left|h_j^{(j)}(y_j)\right|e^{-\varphi_\sigma^*(j)}<+\infty. \tag{4}$$

最后，我们将证明 (4) 不成立。事实上，根据假设和引理 2.1，对所有 j，我们有

$$h_j^{(j)}(y_j)=g_j^{(j)}(0)\left(\psi'(y_j)\right)^j\geq a_jx_j^{kj}=\exp\left(\lambda_j\varphi_\omega^*(\frac{j}{\lambda_j})+kj\log x_j\right).$$

由于 φ_ω^* 是凸函数，且 $\varphi_\omega^*((k+1)s)=\varphi_{\tilde{\omega}}^*(s)$，因此我们得到

$$\begin{aligned}\exp(-\lambda_j\omega(x_j))h_j^{(j)}(y_j)&\geq\exp\left(\lambda_j\varphi_\omega^*(\frac{j}{\lambda_j})+\lambda_j\varphi_\omega^*(\frac{kj}{\lambda_j})\right)\\&\geq\exp\left(2\lambda_j\varphi_\omega^*(\frac{(k+1)j}{2\lambda_j})\right)=\exp\left(2\lambda_j\varphi_{\tilde{\omega}}^*(\frac{j}{2\lambda_j})\right).\end{aligned}$$

由引理 3.3 可得

$$2\lambda_j\varphi_{\tilde{\omega}}^*(\frac{j}{2\lambda_j})\geq 2L\lambda_j\varphi_{\tilde{\omega}}^*(\frac{j}{2L\lambda_j})+j-2\lambda_jL\geq\varphi_\sigma^*(j)+j-2\lambda_jL.$$

最后一个不等式源于以下事实：对于 $j\in I_m$，我们有 $\lambda_j=m$ 和 $j>s_m$.。因此

$$\exp\left(-\lambda_j\omega(x_j)\right)\left|h_j^{(j)}(y_j)\right|e^{-\varphi_\sigma^*(j)}\geq\exp(j-2\lambda_jL),$$

当 $j\to\infty$. 时趋于无穷大。这是因为，如果 $j\in I_m$，那么 $\log_2(j)>m-1$，因此对于所有 j，$\lambda_j<\log_2(j)+1$。这与 (4) 矛盾，证明完成。

□

推论 3.6. 设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$，且对于某个 $k > 0$ 以及所有充分大的 x，$\psi'(x) \geq (\psi(x))^k$。设 ω 是满足条件 (1) 的强权。则存在 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，使得$f \circ \psi \notin \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

证明。取 $s = k+1 > 1$.只需证明 $\omega(t^{\frac{1}{s}}) = o(\omega(t))$，因为 $t \to \infty$.事实上，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$2^j \omega(t) \leq \omega(H^j t) + H \sum_{k=0}^{j-1} 2^k, \quad t \geq 0.$$

对每个 $t \geq 1$，存在 $j \in \mathbb{N}_0$ 使得 $H^j \leq t^{s-1} < H^{j+1}$. 因此

$$\omega(t^s) \geq \omega(tH^j) \geq 2^j \omega(t) - (2^j - 1)H,$$

由此可得

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t^s)} \leq 2^{-j} + \frac{H}{\omega(t^s)}.$$

结论显然成立。 □

注 1. 若 ψ 满足 $\lim_{x\to+\infty} |\psi(x)| = +\infty$ 且 $|\psi'(x)| \geq c|\psi(x)|^k$，其中 $c > 0$ 和 $x > 0$ 足够大，则定理 3.5 的结论仍然成立。

事实上，举例来说，假设 $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = -\infty$. 那么，当 x 足够大时，$\psi'(x)$ 为负数。取 $a := c^{-1}$，并考虑 $\psi_a(x) := -\psi(ax)$。那么 $\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = +\infty$，且当 x 足够大时，$\psi_a'(x) = a|\psi'(ax)| \geq (\psi_a(x))^k$. 于是存在 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi_a \notin \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。由于 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 在伸缩变换和反射变换下不变，结论得证。 □

We recall that $\Sigma_d(\mathbb{R}) \subset \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$ whenever $1 < d < d'$.

推论 3.7。设 ψ 如注 1 所述。则对于每个 $d \leq d' < (k+1)d$，存在 $f \in \Sigma_d(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi \notin \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$。

以下结果量化了将 $\Sigma_d(\mathbb{R})$ 中的函数与次数大于一的多项式复合时正则性的损失。

推论 3.8. 设 ψ 是次数为 $N > 1.$ 的多项式。那么对每个$d \le d' < \frac{2N-1}{N}d$，存在 $f \in \Sigma_d(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi \notin \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$。特别地，对于任意次数大于一的多项式 ψ以及 $d \le d' < \frac{3}{2}d$，存在$f \in \Sigma_d(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi \notin \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$。

事实上，我们可以将推论 3.7 应用于 $k = \frac{N-1}{N}$. 注意到 $k+1 \ge \frac{3}{2}.$

注 2. Roumieu 型 Gelfand-Shilov 空间 $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ ($d > 1$) 是满足以下条件的所有光滑函数 f 的集合:

$$\sup\{\frac{|x^\ell f^{(j)}(x)|}{h^{\ell+j}(\ell!\, j!)^d} : x \in \mathbb{R}, \ell, j \in \mathbb{N}_0\}$$

对于某个 $h > 0.$，其值有限。赋予自然的归纳拓扑后，它是一个 DFS 空间。显然，只要 $d < d'.$，就有 $\mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \subset \Sigma_{d'}(\mathbb{R})$，且为连续嵌入。因此，作为推论 3.8 的直接应用，与次数大于一的多项式复合不会保持 Roumieu 型 Gelfand-Shilov 空间不变。事实上，若 ψ 是次数为 $N > 1$ 的多项式，且 $d \le d' < \frac{2N-1}{N}d$，则存在 $f \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$，使得 $f \circ \psi \notin \mathcal{S}_{d'}(\mathbb{R})$。

Roumieu 型 Gelfand-Shilov 空间上的复合算子的行为将在后续论文中分析。

对于 Gevrey 型权函数，推论 3.6 可以得到改进。

定理 3.9. 设给定 $d > 1$ 和 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $C_\psi(\Sigma_d) \subset \Sigma_d$，则 ψ' 有界。

Pr证明。回顾一下，对于 $\omega(t)$， $\Sigma_d = \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) = t^{\frac{1}{d}}.$。简单计算可得

$$\varphi^*_\omega(x) = xd \log\left(\frac{xd}{e}\right).$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$和 $j \in \mathbb{N}_0$，我们令 $x_{m,j} = \left(\frac{jd}{m}\right)^d$. 反证，假设 ψ' 无界。那么我们可以找到一个序列 $(y_m)_m$，使得 $\lim_{m\to\infty} |y_m| = +\infty$ 且 $|\psi'(y_m)| \ge 2^{md}.$ 不失一般性，我们可以假设 $\psi(y_m) > 0.$ 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们令 $x_m := \psi(y_m)$ 并选取$j(m) \in \mathbb{N}$，使得

$$x_{m,j(m)} \le x_m < x_{m,j(m)+1},$$

或者等价地，$j(m) \le \frac{m}{d}\psi(y_m)^{\frac{1}{d}} < j(m)+1$，由此可得 $\lim_{m\to\infty} j(m) = +\infty$.仿照定理 3.5，我们可以找到一个有界序列 $(g_m)_m$，属于 Σ_d，使得

$$g_m^{(j(m))}(0) = \exp\left(m\varphi_\omega^*(\frac{j(m)}{m})\right)$$

而 $g_m^{(\ell)}(0) = 0$ 对任意 $\ell \neq j(m)$。由 C_ψ 的连续性以及引理 3.2，我们得出

$$\{\exp\left(-m\omega(x_m)\right) C_\psi(T_{x_m} g_m) : \ m \in \mathbb{N}\}$$

是 Σ_d. 中的一个有界集。特别地，对于 $h_m := C_\psi(T_{x_m} g_m)$，我们有

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \exp\left(-m\omega(x_m)\right) \left|h_m^{(j(m))}(y_m)\right| e^{-\varphi_\omega^*(j(m))} < +\infty. \tag{5}$$

由引理 2.1，我们得到

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} 2^{mj(m)d} \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j(m)}{m}) - m\omega(x_{m,j(m)+1}) - \varphi_\omega^*(j(m))) < +\infty.$$

也就是说,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{2^m}{me}\right)^{j(m)d} < +\infty,$$

这显然是一个矛盾。 □

我们的下一个结果是前一个结果与刘维尔定理的直接推论，可以视为 Beurling-Helson 定理的一个版本（例如参见 [19]）。

推论 3.10. 设 ψ 是一个满足 $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. 的整函数。如果 $C_\psi(\Sigma_d) \subset \Sigma_d$，那么 ψ 是一个次数为 1 的多项式。

下一个结果表明，命题 4.1 中的条件 (a) 是合理的。其证明遵循 [14,定理 2.3]的步骤，归功于 [1]。

命题 3.11. 给定两个权函数 σ, ω 和 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $C_\psi(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$，则存在 C，使得对每个 $x \in \mathbb{R}.$，都有 $\sigma(x) \le C(1 + \omega(\psi(x)))$

证明。只需证明当 x 足够大时， $\sigma(x) \leq C\omega(\psi(x))$。反设结论不成立，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 x_n，使得 $\sigma(x_n) > n\omega(\psi(x_n))$。如有必要，取一个子序列后，我们可以假设 $|\psi(x_n)|+1 < |\psi(x_{n+1})|$.。取一个支集包含于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 且满足 $\rho(0) = 1$ 的 $\rho \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，并定义

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(x - \psi(x_n))}{\exp(n\omega((\psi(x_n)))}.$$

显然 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$。我们看到 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。由于 f 在区间并集 $[\psi(x_n) - \frac{1}{2}, \psi(x_n) + \frac{1}{2}]$之外为零，我们固定 $m, \ell \in \mathbb{N}$并取 $x \in [\psi(x_n) - \frac{1}{2}, \psi(x_n) + \frac{1}{2}]$，其中 $n > Km$, K如 1.1(α) 中所述。于是

$$\begin{aligned} |f^{(j)}(x)|e^{m\omega(x)-\ell\varphi_\omega^*(\frac{j}{\ell})} &\leq \frac{|\rho^{(j)}(x-\psi(x_n))|e^{Km\omega(x-\psi(x_n))-\ell\varphi_\omega^*(\frac{j}{\ell})}}{e^{n\omega(\psi(x_n))}} e^{Km(1+\omega(\psi(x_n)))} \\ &\leq \pi_{\ell,Km}(\rho)e^{Km}e^{(Km-n)\omega(\psi(x_n))} \\ &\leq \pi_{\ell,Km}(\rho)e^{Km}. \end{aligned}$$

另一方面，

$$(f \circ \psi)(x_n)e^{m\sigma(x_n)} = e^{m\sigma(x_n)-n\omega(\psi(x_n))} > e^{(m-1)\sigma(x_n)}$$

由于 $\lim_n |x_n| = \infty$.，它无界 □

推论 3.12。给定 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，并假设 $C_\psi(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

(a) 若 ω 满足条件 (1)，则对于某个 $C > 0$.，有 $|x| \leq C(1 + |\psi(x)|)$

(b) 若 $\omega(t) = \max(0, \log^s x)$，$s > 1$，则存在 $C, a > 0$ 使得$|x| \leq C(1 + |\psi(x)|)^a$.

证明。只有 (a) 需要证明。我们已经知道 $\lim_{|x|\to\infty} |\psi(x)| = +\infty$.此外，存在 K，使得 $\omega(x) \leq K\omega(\psi(x))$，对于 $|x| > K$.。于是，由 (1)，存在 $C > 0$，满足 $K\omega(\psi(x)) \leq \omega(C\psi(x))$，对于 $|x| > C$，这意味着$|x| \leq C|\psi(x)|$，对于 $|x| > C$.

□

4 一些充分条件

我们给出关于 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ω 和 σ 的一些条件，足以保证

$$C_\psi : \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R}), f \mapsto f \circ \psi,$$

是定义良好的算子，因此连续。

命题 4.1. 设 ω 是一个次可加权函数， $a \geq 1$，且 $\sigma(t) = \omega(t^{\frac{1}{a}})$。我们假设

(a) 对每个 $x \in \mathbb{R}$., $|x| \leq C_0(1 + |\psi(x)|)^a$

(b) 对每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $C_m > 0$ 使得

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq C_m \exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j}{m}))(1 + \psi(x)|)^p \ \forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R},$$

where $p = a - 1$.

那么 $C_\psi \left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$。

证明。由于 Gevrey 权是次可加的，因此 σ 也具有次可加性。此外， $\varphi_\sigma^*(s) = \varphi_\omega^*(as)$ $s \geq 0$. 按照 [12, 第 403], 页中的方法，对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $B_m > 0$，使得

$$\prod_{\ell=1}^{j} \left| \frac{\psi^{(\ell)}(x)}{\ell!} \right|^{k_\ell} \leq G_m(j,k,x) := B_m^k \left(1 + |\psi(x)|\right)^{kp} \frac{\exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j-k}{m}))}{(j-k)!},$$

且 $k = \sum_{\ell=1}^{j} k_\ell$ 其中 $\sum_{\ell=1}^{j} \ell k_\ell = j$

与往常一样，我们记 $I := \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_j) : \sum_{\ell=1}^{j} \ell k_\ell = j \right\}$。现在固定 $m \in \mathbb{N}$，并取满足以下条件的 $M \in \mathbb{N}$ 和 $D > 0$：

$$C_0^q B_m^k \exp(M\varphi_\sigma^*(\frac{k+q}{M})) \leq D \exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{k+q}{m}))$$

对每个 $k, q \in \mathbb{N}_0$ （引理 3.3）。于是

$$\begin{aligned}
|x^q (f\circ\psi)^{(j)}(x)| &\le C_0^q \,(1+|\psi(x)|)^{aq} \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\dots k_j!} |f^{(k)}(\psi(x))| G_M(j,k,x) \\
&\le C_0^q B_m^k \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\dots k_j!} \exp(M\varphi_\omega^*(\frac{a(k+q)}{M})) \cdot \frac{\exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j-k}{m}))}{(j-k)!} \\
&\le \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\dots k_j!} \frac{\exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j+q}{m}))}{(j-k)!} \\
&\le 4^j \exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j+q}{m})).
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了这一事实：

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{k!}{k_1!\dots k_j!} = 2^{j-1}, \tag{6}$$

例如，取 $h(x)$ 后，根据 Fa`a di Bruno 公式 (2) 计算 $(h\circ h)^{(j)}(0)$，即可得到如下结果。再应用一次引理 3.3，得到

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{q,j\in\mathbb{N}_0} |x^q (f\circ\psi)^{(j)}(x)| \exp(-m\varphi_\sigma^*(\frac{j+q}{m})) < +\infty$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$. □

推论 4.2. 设 ω 是一个次可加权，并假设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

(a) $|x| \le C_0(1+|\psi(x)|)$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$. 都成立

(b) 对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $C_m > 0$ 使得

$$|\psi^{(j)}(x)| \le C_m \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m})) \ \forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

那么 $C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

条件 (b) 与以下内容相关。

定义 4.1（[2]）。设 ω 为一个权函数。那么 $\mathcal{B}_{\infty,\omega}$ 由满足以下条件的函数 f 组成：对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个 C_m 使得

$$|f^{(j)}(x)| \leq C_m \exp(m\varphi_\sigma^*(\frac{j}{m}))$$

对所有 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $x \in \mathbb{R}$。

注 3. 若在命题 4.1 中不要求 ψ 满足不等式 (a)，那么我们仍可得出 $C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{B}_{\infty,\ \sigma}$.

以下结果表明，类 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 在与恒等映射的倍数的适当扰动函数复合后仍保持稳定。

推论 4.3. 设 ω 是一个次可加权，并假设对于某些 $A \neq 0$ 和 $\lambda \in \mathcal{B}_{\infty,\ \omega}$. 有 $\psi(x) = Ax + \lambda(x)$。那么 $C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

推论 3.8 表明，定理 4.4 在某种意义上是最优的。

定理 4.4. 设 ω 是一个次可加权，$\sigma(t) = \omega(t^{\frac{1}{2}})$，且 ψ 是一个非常数多项式。那么对于每个 $f \in \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，都有 $f \circ \psi \in \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$。

证明。令 N 为多项式 ψ. 的次数。若 $N = 1$，则结论显然成立，因此我们假设 $N \geq 2$. 。此时命题 4.1 中的条件 (b) 在 $p = \frac{N-1}{N}$ 下成立，因此只需取 $a = \frac{2N-1}{N} < 2$.。 □

注 4。给定一个权函数 ω（不一定是次可加的），当 $\sigma(t) = \omega(t^{\frac{1}{3}})$ 且 ψ 为非恒定多项式时，包含关系 $C_\psi(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ 成立。事实上，我们可以按照命题 4.1 中的方法进行，但不应用 [12, Page 403] 和 (6)，而是使用恒等映射

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1! \ldots k_j!} = \sum_{k=1}^{j} \binom{j-1}{k-1} \frac{j!}{k!},$$

这由 [10] 中的主定理推出。

对于权函数 $\omega(t) = \max(0, \log^s t)$ $(s > 1)$，在适当的假设下，包含关系 $C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 成立。

推论 4.5. 令 $\omega(t) := \max(0, \log^s t)$ $(s > 1)$，并假设$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$满足

(a) 对每个 $x \in \mathbb{R}$., $|x| \leq C_0(1+|\psi(x)|)^{a_1}$

(b) 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $C_m > 0$，使得

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq C_m \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m}))(1+|\psi(x)|)^{a_2} \ \forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R},$$

对于某个 a_1、 $a_2 > 0.$。于是， $C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

证明。取 $a := \max(a_1, a_2+1)$，且 $\sigma(t) = \omega(t^{\frac{1}{a}})$。由于 $\varphi_\omega^*(s) = \varphi_\sigma^*(\frac{s}{a})$，于是$\psi$满足命题 4.1 中的 (a) 和 (b)，因此，由于 ω 等价于一个次可加权函数，$C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$。但是，由于 $\sigma(t) = \frac{1}{a^s}\omega(t)$，所以 $\mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。□

推论 4.6。令 $\omega(t) := \max(0, \log^s t)$ $(s > 1)$，且 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足：对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $C_m > 0$，使得

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq C_m \exp(m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m}))(1+|\psi(x)|) \ \forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

如果对于某个 $d > 0$, $\phi(x) := \exp(\psi(x)) \geq |x|^d$，那么 $C_\phi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

证明。我们只需验证前一个结果中的条件 (b)。由 $\psi(x) \geq 0$ for $|x| \geq 1$ 这一事实，我们可以找到 $C > 0$ such that $|\psi(x)| \leq C + \psi(x)$ for all $x \in \mathbb{R}.$。根据 Fa`a di Bruno 公式、 [5, 引理 A.1 (viii)]，并仿照命题 4.1 的证明，我们得到：对每个 $m \in \mathbb{N}$，存在一个常数$B_m > 0$，使得对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\phi^{(j)}(x)| &\leq \phi(x) e^{m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m})} B_m^j \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\ldots k_j!} \frac{(C+\psi(x))^k}{(j-k)!} \\
&\leq \phi(x) B_m^j e^{m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m})} \exp(C+\psi(x)) \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\ldots k_j!} \frac{k!}{(j-k)!} \\
&\leq \phi^2(x) e^{m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m})} e^C j! B_m^j \sum_{\boldsymbol{k}\in I} \frac{j!}{k_1!\ldots k_j!} \frac{1}{(j-k)!} \\
&\leq \phi^2(x) e^{m\varphi_\omega^*(\frac{j}{m})} e^C (4B_m)^j j! \leq D_m \phi^2(x) e^{m\varphi_\sigma^*(\frac{j}{m})}
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}$for some $D_m > 0$ and for $\sigma(t) = \omega(t^{1/2})$，其中，按惯例，$k = \sum k_\ell$ and$_{\ell=1}I := \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_j) : \sum_{\ell=1}^{j} \ell k_\ell = j \right\}$. 现在，由于 $\mathcal{S}_{(\sigma)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$，结论即得。

□

例 2. 取 $\psi(x) = x^2$，可得当 $\omega(x) = \max(0, \log^s t)$ $(s > 1)$ 时，$\phi(x) = e^{x^2}$ 在 $\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ 上定义一个连续复合算子。

为给出满足推论 4.2 和 4.5 条件的函数 ψ 的例子，下面两个结果很有用。

推论 4.7. 设 ψ 是定义在包含锥 $C = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| \leq L|Rez|\}$. 的开集上的全纯函数。假设 $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$，并且存在 $A > 0$ 使得

(a) 对每个 $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq A(1 + |\psi(x)|)$,

(b) 对每个 $z \in C.$, $|\psi(z)| \leq A(1 + |z|)$

那么，对每个次可加权 ω, $C_\psi \left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

证明。存在 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $|x| \geq 1$ 的 $x \in \mathbb{R}$，以 x 为中心、半径为 r_x 的球: $= \delta|x|$ 包含于 $C.$ 中。由柯西不等式

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq j! \frac{1 + |x| + r_x}{r_x^j},$$

对于每个 $j \in \mathbb{N}.$。于是，存在一个常数 $C > 0$，使得只要 $|x| \geq 1$，就有

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq Cj! \left(\frac{1}{\delta}\right)^{j-1}.$$

由于 ψ 在 $[-1, 1]$ 中是实解析的，我们得出存在 $B > 0$，使得

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq j! B^{j+1} \text{ for each } x \in \mathbb{R}.$$

因此，利用 [5, 引理 A.1 (viii)]，我们得出 ψ 满足推论 4.2 中的 (b)。

□

推论 4.8。设 $\omega(t) := \max(0, \log^s t)$ $(s > 1)$，并假设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 在带状区域 $H := \{z \in \mathbb{C} : |Imz| < L\}$ 中具有全纯延拓，其中 $L > 0$ 为某个值，并且对于某个 a_1、$a_2 > 0$,

(a) 对每个 $x \in \mathbb{R}.$, $|x| \leq C_0(1+|\psi(x)|)^{a_1}$

(b) 对每个 $m \in \mathbb{N}$，存在 $C_m > 0$，使得

$$|\psi(z)| \leq C(1+|z|)^{a_2} \ \forall z \in H.$$

那么，$C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。

证明。只需利用柯西不等式验证推论 4.5 适用即可。

□

例 3. (a) 设 $\psi(x) = \sqrt{1+x^2}.$ 那么，对每个次可加权 $\omega.$，$C_\psi\left(\mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{S}_{(\omega)}(\mathbb{R})$。事实上，若 $\log_0$ 表示虚部取值于 $(-\pi,\pi)$ 的对数分支，则 $\psi(z) := \exp(\frac{1}{2}\log_0(1+z^2))$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |Imz| \leq |Rez|\}$ 的某个邻域内全纯，并且显然满足推论 4.7 中的条件 (a) 和 (b)。(b) 函数 $\psi(x) = (1+x^2)^a$，$a > 0$ 或 $\psi(x) = {}^{P}(x)\, {}_{Q}(x)$，$P$ 以及 Q 次数大于 Q 的非常数多项式，若 $Q(x) \neq 0$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 和 P 都成立，则满足推论 4.8 的假设。

致谢。此项研究部分得到了项目 MCIN PID2020-119457GBI00/AEI/10.13039/501100011033 和 GV Prometeu/2021/070 的资助。

参考文献

[1] V. Asensio，个人通信。

[2] J.J. Betancor, C. Fern´andez, A. Galbis, Beurling 超分布的L_p-增长. J. Math. Anal. Appl. 279 (2003), no. 1, 246–265.[3] C. Boiti, D.Jornet, A. Oliaro, 超可微空间中偏微分算子的正则性及 Wigner 型变换. J. Math. Anal. Appl., 446, 920–944 (2017).[4] C. Boiti, D. Jornet, A. Oliaro, 关于) 的核性及 $S_{(\omega)}$.《微局部与时频分析进展》，121–129, Appl. Nu- mer. Harmon. Anal., Birkh¨auser/Springer, Cham, 2020.

[5] C. Boiti, D. Jornet, A. Oliaro, 超可微函数空间中的实 Paley-Wiener 定理.《函数分析杂志》278 (2020), no. 4, 108348, 45 pp.
[6] J. Bonet, R. Meise, S. Melikhov, 定义超可微函数类的两种不同方式之比较.《比利时数学学会 Simon Stevin 通报》14 (2007), no. 3, 425–444.
[7] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, 超可微函数与傅里叶分析.《数学成果》17, 206–237 (1990).[8]M. Cappiello, J. Toft, Joachim Gelfand-Shilov 框架中的伪微分算子.《数学新闻》290 (2017), no. 5-6, 738–755.[9] E. Cordero, S. Pilipovi´c, L. Rodino, N. Teofanov, 拟解析 Gelfand-Shilov 空间及其在局部化算子中的应用.《落基山数学杂志》40 (2010), no. 4, 1123–1147.[10] S. Daboul, J. Mangaldan, M. Z. Spivey y P. J. Taylor, Lah 数与 exp($1/x$) 的 n 阶导数.《数学杂志》86:1, 39-47.
[11] A. Debrouwere, L. Neyt, J. Vindas, Gelfand-Shilov 空间的核性与核定理.《数学集刊》72 (2021), no. 1, 203–227.[12] C. Fern´andez, A. Galbis, 超可微函数类中的叠加.《数学科学研究所刊物》42 (2006), no. 2, 399–419.[13] C. Fern´andez, A. Galbis, J. Toft, Gelfand-Shilov 子空间上的 Bargmann 变换与谐振子幂.《伊比利亚美洲数学杂志》111 (2017), no. 1, 1–13.[14] A. Galbis, E. Jord´a, Schwartz 空间上的复合算子.《伊比利亚美洲数学杂志》34 (2018), no. 1, 397–412.[15] H. Komatsu, 超分布 I: 结构定理与一种刻画.《东京大学理学部学报 IA 数学》20 (1973), 25–105.[16] S. Krantz, H. Parks, 实解析函数入门. Birkh¨auser, 巴塞尔 (1992).[17] R. Meise, B.A. Taylor, Beurling 型超可微函数的 Whitney 延拓定理.《数学档案》26 (1988), no. 2, 265–287.

[18] R.Meise, D. Vogt，《泛函分析导论》。由 M. S. Ramanujan 从德文翻译，并由作者修订。牛津数学研究生教材，第 2 卷。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1997 年。[19] K. Okoudjou，调制空间的一个 Beurling-Helson 型定理。《函数空间与应用》7（2009），33–41。[20] H.J. Petzsche，关于 E. Borel 定理。《数学年刊》282（1988），第 2 期，299–313。