arXiv:2301.06370v1 [math.CA] 16 Jan 2023

On e零光滑度 Besov 空间嵌入 Lorent z 空间

Dmitriy Stolyarov*

2023年1月18日

谨以此文献给 *Besov* 教授，值此周年纪念之际

摘要

我们证明，零光滑度 Besov 空间 $B^{0}{}_{p}{}^{1}{}_{,q}$ 不能嵌入 Lorentz 空间 $L_{p,q}$，除非 $p=q$；此处 $p,q\in(1,\infty)$。这对 O. V. Besov 提出的问题给出了否定回答。

1 零光滑度 Besov 空间

Besov空间在分析学、偏微分方程、逼近理论以及数学的其他领域中发挥着重要作用。乍看之下，它们可以被视为 Sobolev 空间的精细化。Besov 空间于 [1] 中被引入，如今许多教科书都对其进行了介绍。例如，参见 [4], [12],或 [15]。近年来，人们一直对这一已经相当精细的尺度进行推广和具体化，兴趣不减。关于 Besov–Lorentz 空间，参见 [13], [15], [16], 和 [18]。关于所谓的对数 Besov 空间，参见 [5], [6], [7], [8], 和 [9]。后一类空间通常称为零光滑度 Besov 空间。关于广义光滑度 Besov 空间，例如参见 [10], [11], [14], ，关于这一主题的文献浩如烟海。O. V. Besov 于 [2] 和 [3]中提出了这一概念的另一种形式。其定义如下。设 $p,q,r\in[1,\infty)$ 为三个参数，并设 f 是 $\mathbb{R}^d$上的局部可积函数。定义半范数

$$\|f\|_{B^{0,r}_{p,q}}=\Big(\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(\delta_r[f;h](x)\big)^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{q}},\tag{1.1}$$

其中 $\delta_r[f;\,h]\colon\,\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$是“平均光滑模”，

$$\delta_r[f,h](x)=\Big(\fint\limits_{[-h,h]^d}\fint\limits_{[-h,h]^d}|f(x+y)-f(x+z)|^r\,dy\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}.\tag{1.2}$$

文献 [3] 证明了 $\delta_r[f;\,h]$ 等价于

$$\Big(\fint\limits_{[-h,h]^d}\Big|f(x+y)-\fint\limits_{[-h,h]^d}f(x+z)\,dz\Big|^r\,dy\Big)^{1/r}.\tag{1.3}$$

令 $B^{0}{}_{p}{}^{r}{}_{q}$ 为相应半范数下光滑紧支撑函数集合的完备化。空间 $B^{0}{}_{p}{}^{r}{}_{q}$ 曾用于 [2] 和 [3] 以获得尖锐嵌入定理。注意，

*本研究得到俄罗斯科学基金会项目 19-71-10023 资助。

这两篇论文中的定义略有不同，我们的定义也略有差异。对于我们将要研究的问题，这些差异并无实质影响。

回顾洛伦兹准范数的定义：

$$\|f\|_{L_{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \Big\| t|\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geqslant t\}|^{\frac{1}{p}} \Big\|_{L_q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})}, \tag{1.4}$$

其中，集合的绝对值表示其勒贝格测度。在 [3], O. V. Besov 提出，空间 $B^{0,p}{}^{1}{}_{,q}$ 是否连续嵌入 Lorentz 空间 $L_{p,q}$。他提到，A. I. Tyulenev 在 $1 < p = q < \infty$ 的情形下证明了上述嵌入。下面陈述我们的主要结果。从现在起，我们只考虑 $r = 1$ 这一情形；对其他情形的研究也很有意义。我们将分别考虑 $q < p$ 和 $p < q$ 这两种情形，因为这两种情形下的推理有所不同。

Pro命题 1. 设 $1 \leqslant q < p < \infty$。则空间 $B^{0,p}{}^{1}{}_{,q}$ 不能连续嵌入 $L_{p,\ q}$.

命题 2. 设 $1 < p < q < \infty$。则空间 $B^{0,p}{}^{1}{}_{,q}$ 不能连续嵌入 $L_{p,q}$。

[2] 中的定理 2 表明，$B^{0,\ p}{}^{1}{}_{,\ q}$ 连续嵌入经典 Besov 空间 $B^{0}_{p,\ q}$（后者按照 [15] 中的方法，通过傅里叶分析分解定义）。众所周知，$B^{0}_{p,\ q}$ 不能嵌入 $L_{p,\ q}$。上述命题似乎比这一众所周知的事实更难证明。

本文的安排如下：本节最后给出半范数 (1.1) 的一种实用离散化，并介绍命题 1 和命题 2 证明背后的一些启发式思路；第 2 节和第 3 节证明这两个命题；最后的第 4 节专门讨论 Tyulenev 的推理。

我们只考虑边平行于坐标轴的立方体。对于一个立方体 Q，令 c_Q 为其中心，并令 $\ell(Q)$ 为其边长。令 $\mathbb{D}_n$ 为第 n 代二进立方体的集合：

$$\mathbb{D}_n = \Big\{ \prod_{j=1}^{d} [2^{-n}k_j, 2^{-n}(k_j+1)) \,\Big|\, k \in \mathbb{Z}^d \Big\}. \tag{1.5}$$

引理 3。 半范数

$$\|f\|_* = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big)^{1/q} \tag{1.6}$$

与 (1.1)等价。

(1.6) 中的 0.6 可以替换为任何大于 0.5 的数（计算振荡所用的立方体应当相交）。为了便于后续推理，该数小于 1 会更方便。引理 3 是标准结果，我们略去其证明。

2 情形 $q < p$

设 φ 是一个支集包含于单位立方体 $[-1/2, 1/2]^d$ 且积分为零的光滑函数。设 N 是一个较大的自然数。我们在集合 $[1\,..\,2^{dN}]$ 上赋予计数测度，并考虑有限序列的 Lorentz 空间 $\ell^{2^{dN}}_{p\ q\ ,}$。此处及下文中，记号 $[a\,..\,b]$ 表示整数区间 $\{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$。设 $\mathfrak{A}^N = \{a_j\}_{j=1}^{2^{dN}}$ 是一个正数序列，使得

$$\|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_{p,q}} \gtrsim N^{1/q-1/p} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_{p}}. \tag{2.1}$$

在此处及下文中，记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 C，它与某个参数无关，且满足 $A \leqslant CB$；该参数以及一致性的具体含义通常可从

上下文中看出。例如，上述不等式中的常数不应依赖于 N 。在 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$的情况下，我们也记作 $A \asymp B$ 。作为序列 $\mathfrak{A}^N$的一个例子，我们可以考虑

$$a_j = 2^{-dn/p}, \quad \text{when} \quad j \in [2^{dn} \,..\, 2^{d(n+1)}), \tag{2.2}$$

此处 $n = 0, 1, \dots, N-1$。

将 φ 调整为立方体 Q 的函数 φ_Q 由以下公式给出

$$\varphi_Q(x) = \varphi\Big(\frac{x - c_Q}{\ell(Q)}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.3}$$

设 n 是另一个远大于 N 的自然数（具体的依赖关系稍后给出）。设 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2^{dN}}$是 $\mathbb{D}_N$中位于 $[0,1]^d$内的立方体。设 C_j是 $\mathbb{D}_n$中的立方体，使得对每个 $j \in [1 \,..\, 2^{dN}]$，立方体 C_j都包含 c_{Q_j}。现在我们可以定义函数 $f_{N,\,n}$，它将用于证明命题1:

$$f_{N,n} = 2^{\frac{dn}{p}} \sum_{j=1}^{2^{dN}} a_j \varphi_{C_j}. \tag{2.4}$$

简单的恒等式

$$\|f_{N,n}\|_{L_{p,q}} \asymp \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_{p,q}^{2^{dN}}} \tag{2.5}$$

这意味着只要得到以下引理，就能证明命题1。

引理4。若 $1 \leqslant q < p < \infty$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f_{N,n}\|_{B_{p,q}^{0,1}} \lesssim \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}. \tag{2.6}$$

证明。 为简便起见，我们将用 f 表示$f_{N,\,n}$。为证明所需的上界，我们使用引理 3，将 (2.6) 左侧提升至 q 次方，得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \tag{2.7}$$

我们将分别估计和式中满足 $k < 0$、 $k \in [0 \,..\, N-1]$、 $k \in [N \,..\, n]$和 $k > n$ 的部分。

对 $k < 0$ 的估计。 固定 k ，先从以下估计开始

$$\begin{aligned} \delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q) &\lesssim \fint_{1.2Q} \Big| f(x) - \fint_{1.2Q} f(y)\, dy \Big| dx \\ &\leqslant 2 \fint_{1.2Q} |f(x)|\, dx \lesssim 2^{dk} \|f\|_{L_1} \leqslant 2^{dk} \|f\|_{L_p} \lesssim 2^{dk} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}, \qquad Q \in \mathbb{D}_k. \end{aligned} \tag{2.8}$$

注意到 至多有 3^d 个二进立方体 Q 满足 f 的支集与 $1.2Q$ 相交。因此，我们得到上界 d

$$\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \lesssim 2^{d(p-1)k} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}^p. \tag{2.9}$$

因此,

$$\sum_{k\leqslant 0} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \lesssim \sum_{k\leqslant 0} 2^{\frac{dq(p-1)}{p} k} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}^q \lesssim \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}^q \tag{2.10}$$

因为 $p > 1$。

对 $k \in [0\,..\,N-1]$**的估计**。 我们首先给出估计

$$\sup_{Q\in\mathbb{D}_N} \fint_Q |f(x)| \lesssim 2^{dN} d^{-\frac{d(p-1)}{p} n} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_\infty}, \tag{2.11}$$

这由 (2.4) 以及每个立方体 $Q \in \mathbb{D}_N$ 至多包含一个 C_j 立即可得。由于取平均不会增加函数的 L_∞ 范数，我们得到

$$\sup_{Q\in\mathbb{D}_k} \fint_Q |f(x)| \lesssim 2^{dN} d^{-\frac{d(p-1)}{p} n} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_\infty} \tag{2.12}$$

对任意 $k \leqslant N$ 均成立。因此，

$$\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \lesssim 2^{dpN} d^{-d(p-1)n} \|\mathfrak{A}^N\|^p_{\ell^{2^{dN}}_\infty}, \qquad k \leqslant N, \tag{2.13}$$

and

$$\sum_{0\leqslant k<N} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \lesssim N 2^{dqN} d^{-\frac{dq(p-1)}{p} n} \|\mathfrak{A}^N\|^q_{\ell^{2^{dN}}_\infty}. \tag{2.14}$$

当 $n \to \infty$ 趋于零且 N 固定时，该量趋于零。

对 $k \in [N\,..\,n]$ **的估计**。 只需证明以下上界

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{1/p} \lesssim 2^{\frac{d(p-1)}{p}(k-n)} \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_p}, \qquad k \in [N\,..\,n]. \tag{2.15}$$

固定 k，并将 K_j 记为 $\mathbb{D}_k$ 中满足 $1.2K_j$ 包含 C_j 的一个立方体。注意，对任意固定的 j，这样的立方体至多有 3^d 个；不同的 j 对应不同的立方体（因为立方体 C_j 包含不同的第 N 代二进立方体的中心）。由 (1.3),

$$\delta[f; 0.6\ell(K_j)](c_{K_j}) \leqslant 2 \fint_{1.2K_j} |f(x)|\,dx = 2^{dk} \int_{C_j} |f(x)|\,dx \lesssim 2^{d(k-n)+\frac{d}{p}n} a_j. \tag{2.16}$$

利用上文给出的关于立方体 K_j 的信息，我们估计

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{1/p} \lesssim \Big(\sum_{j=1}^{2^{dN}} 2^{dp(k-n)+dn-dk} a_j^p \Big)^{1/p}, \tag{2.17}$$

由此得到 (2.15)。因此，

$$\sum_{N\leqslant k<n} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \lesssim \sum_{k\leqslant n} 2^{\frac{dq(p-1)}{p}(k-n)} \|\mathfrak{A}^N\|^q_{\ell^{2^{dN}}_p} \lesssim \|\mathfrak{A}^N\|^q_{\ell^{2^{dN}}_p}. \tag{2.18}$$

关于 $k > n$**的估计**。 固定 k。在这种情况下，

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[f; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{1/p} &\lesssim \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_p} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k} |Q| \big(\delta[2^{\frac{d}{p}n}\varphi_{C_1}; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{1/p} \\ &= \|\mathfrak{A}^N\|_{\ell^{2^{dN}}_p} \Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_{k-n}} |Q| \big(\delta[\varphi; 0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p \Big)^{1/p} \end{aligned} \tag{2.19}$$

通过伸缩变换。只需证明

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_m}|Q|\big(\delta[\varphi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{1/p}\lesssim 2^{-m},\qquad m\geqslant 0, \tag{2.20}$$

这由该估计得出

$$\Big\|\delta[\varphi;0.6\cdot 2^{-m}](\cdot)\Big\|_{L_\infty}\lesssim 2^{-m}\|\nabla\varphi\|_{L_\infty}. \tag{2.21}$$

因此，

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k}|Q|\big(\delta[f;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{1/p}\lesssim 2^{-(k-n)}\|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}},\qquad k>n, \tag{2.22}$$

and

$$\sum_{k>n}\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k}|Q|\big(\delta[f;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\lesssim\sum_{k>n}2^{-(k-n)q}\|\mathfrak{A}^N\|^q_{\ell_p^{2^{dN}}}\lesssim\|\mathfrak{A}^N\|^q_{\ell_p^{2^{dN}}}. \tag{2.23}$$

结论。 我们汇总估计式 (2.10)、(2.14)、(2.18) 和 (2.23)。我们取足够大的 n ，使得 (2.14) 右端不超过 (2.6) 右端，从而完成该引理的证明。

□

3 情形 $q>p$

我们将形如 $\sum_j\varphi_{Q_j}$ 的函数称为基本构件，其中 $\sum_j|Q_j|=1$ ，且立方体 Q_j 是二进的、互不相交并且边长相同。为了证明命题 2，只需对任意 T 构造函数 $\Phi=\sum_{k=1}^T\Phi_k$，其中 Φ_k 是支集互不相交的基本构件，且 $\|\Phi\|_*\lesssim T^{1/q}$。于是，根据引理 3， $\|\Phi\|_{B^{0,\ p^{\ 1},\ q}}\lesssim T^{1/q}$，而 $\|\Phi\|_{L_{p,\ q}}\gtrsim T^{1/p}$ （因为所有基本构件具有相同的分布函数）。这就证明了命题 2，因为 T 可以任意大。

函数 Φ 可以通过连续应用以下引理轻松构造。

引理 5. 存在一个常数 C ，使得对于任意光滑紧支撑函数 f 和任意 $\varepsilon>0$，都存在一个基本构件 Ψ ，使得

$$\|f+\Psi\|_*\leqslant(1+\varepsilon)\big(\|f\|_*+C\big)^{1/q} \tag{3.1}$$

且 f 和 Ψ 的支撑集互不相交。

我们先给出一个简单的观察。设 $a=\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是两个 ℓ_q 序列。如果序列 a和 b 的支撑集互不相交，则 $\|a+b\|^q_{\ell_q}=\|a\|^q_{\ell_q}+\|b\|^q_{\ell_q}$。我们断言，如果序列 a和 b的支集几乎互不相交，那么这个恒等式也几乎成立。以下引理的证明从略。

引理 6. 设 a 和 b 是两个 ℓ_q 序列，其中 $q\in[1,\infty)$ 是一个固定参数。对于任意 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得如果

$$\sum_{k\in I}|a_k|^q\geqslant(1-\delta)\|a\|^q_{\ell_q}; \tag{3.2}$$

$$\sum_{k\in J}|b_k|^q\geqslant(1-\delta)\|b\|^q_{\ell_q} \tag{3.3}$$

对于某些不相交集合 I， $J\subset\mathbb{Z}$，则

$$\|a+b\|^q_{\ell_q}\leqslant(1+\varepsilon)\Big(\|a\|^q_{\ell_q}+\|b\|^q_{\ell_q}\Big). \tag{3.4}$$

在证明引理 5 时，我们可以假设 f 是一个支集包含在单位立方体内的光滑函数。对于这类函数，我们有如下估计

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k}|Q|\big(\delta[f;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{\frac{dq(p-1)}{p}k}\|f\|_{L_p}^q,\qquad k\leqslant 0; \tag{3.5}$$

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k}|Q|\big(\delta[f;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{-qk}\|\nabla f\|_{L_\infty}^q,\qquad k\geqslant 0, \tag{3.6}$$

它们分别以与 (2.10) 和 (2.20) 相同的方式得到。

引理 *5* 的证明。假设 f 的支集包含在单位立方体中。根据引理 6 以及上界 (3.5)、(3.6)，只需对某个足够大的 $M\in\mathbb{N}$构造一个基本构件 Φ，使得 $\|\Phi\|_*\gtrsim 1$，并且

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Phi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{-\nu|l-M|},\qquad l\in\mathbb{Z}, \tag{3.7}$$

其中 ν 是一个固定的正数，与 M 无关（不等式中的乘法常数~也与 M无关）。为此，我们选取某个 N、$n\geqslant 3N$，并按照与 (2.4) 类似的方式构造函数 Ψ，即

$$\tilde\Psi=2^{\frac{dn}{p}}\sum_{j=1}^{2^{dN}}2^{-\frac{dN}{p}}\varphi_{C_j}. \tag{3.8}$$

换言之，我们将 $\mathfrak{A}^N=\{2^{-dN/p}\}_{j=1}^{2^{dN}}$ 代入 (2.4)。注意，$\|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_p^{2^{dN}}}=1$。于是，函数 Ψ 定义为 $\tilde\Psi$ 的 2^{n-N}-伸缩，同时保持 L_p 范数不变，即

$$\Psi=\sum_{j=1}^{2^{dN}}\varphi_{2^{n-N}C_j}. \tag{3.9}$$

这确实是一个基本构件，因为 $\sum_{j=1}^{2^{dN}}|2^{n-N}C_j|=1$。显然，

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_N}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\gtrsim 1. \tag{3.10}$$

因此，$\|\Psi\|_*\gtrsim 1$，接下来只需证明 (3.7)。令 $N=M$。我们将使用第 2 节中得到的上界。我们将分别分析 $l\leqslant N-n$、$l\in[N-n\,..\,2N-n]$、$l\in[2N-n\,..\,N]$和 $l\geqslant N$ 这些情形下的不等式 (3.7)。

情形 $l\leqslant N-n$。我们通过直接计算 L_1-范数来细化估计 (2.8)：

$$\begin{aligned}\fint_{1.2Q}\Big|\tilde\Psi(x)-\fint_{1.2Q}\tilde\Psi(y)\,dy\Big|\,dx&\\ \leqslant 2\fint_{1.2Q}|\tilde\Psi(x)|\,dx\lesssim 2^{dk}\|\tilde\Psi\|_{L_1}&\lesssim 2^{dk-\frac{p-1}{p}(n-N)},\qquad Q\in\mathbb{D}_k,k\leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，(2.9) 得到了改进，成为

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_k}|Q|\big(\delta[\tilde\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{\frac{dq(p-1)}{p}(k-n+N)},\qquad k\leqslant 0. \tag{3.12}$$

因此，

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{\frac{dq(p-1)}{p}l},\qquad l\leqslant N-n. \tag{3.13}$$

注意　到它受 $2^{\frac{1}{2}dq(1-1/p)^l}$ 上界的限制，前提是 $n\geqslant 2N$，并且我们在此情形下验证了 (3.7)　　.

情形 $l\in[N-n\,..\,2N-n]$. 我们使用 (2.13)：

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}&=\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_{l-N+n}}|Q|\big(\delta[\tilde{\Psi};0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\\&\lesssim 2^{dqN}2^{-\frac{dq(p-1)}{p}n}\|\mathfrak{A}^N\|_{\ell_\infty^{2^{dN}}}^q=2^{\frac{dq(p-1)}{p}(N-n)},\quad l\in[N-n\,..\,2N-n].\end{aligned} \tag{3.14}$$

若 $2N<n$，则，

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{\frac{dq(p-1)}{2p}(l-N)},\quad l\in[N-n\,..\,2N-n]. \tag{3.15}$$

情形 $l\in[2N-n\,..\,N]$. 我们使用 (2.15)：

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\\&\qquad=\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_{l-N+n}}|Q|\big(\delta[\tilde{\Psi};0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{\frac{dpq}{p-1}(l-N)},\quad l\in[2N-n\,..\,N].\end{aligned} \tag{3.16}$$

情形 $l\geqslant N$. 上界 (2.19) 和 (2.20) 推出

$$\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_l}|Q|\big(\delta[\Psi;0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}=\Big(\sum_{Q\in\mathbb{D}_{l-N+n}}|Q|\big(\delta[\tilde{\Psi};0.6\ell(Q)](c_Q)\big)^p\Big)^{q/p}\lesssim 2^{-(l-N)q},\quad l\geqslant N. \tag{3.17}$$

我们终于验证了所有情形下的 (3.7)，并完成了证明。 □

4 情形 $p=q$

本节内容经 A. I. Tyulenev 许可发表。在情形 $p=q$ 下， $B^0{}_{,p}{}^1{}_{,q}$半范数等于

$$\Big(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\big(\delta_r[f;h](x)\big)^p\,dx\,\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

回忆尖锐极大函数 $f^\#$ （见 [17]），并注意到

$$\big(f^\#(x)\big)^p\lesssim\sup_{h>0}\big(\delta[f;h](x)\big)^p\lesssim\int_0^\infty\big(\delta_r[f;h](x)\big)^p\frac{dh}{h}. \tag{4.2}$$

因此，若 $p>1$，且 f 是有界紧支撑函数，则

$$\|f\|_{L_p}\lesssim\|f^\#\|_{L_p}\lesssim\|f\|_{B^{0,1}_{p,p}}. \tag{4.3}$$

这证明了嵌入 $B^0{}_{,p}{}^1{}_{,p}\hookrightarrow L_p$，其中 $p\in(1,\infty)$。

参考文献

[1] O. V. Besov，关于与嵌入定理和延拓定理相关的一类函数空间的研究，特鲁德数学研究所论文集 60 (1961)，42–81。[2] ———, 关于零光滑度函数空间，数学文集 203 (2012)，第 8 期，3–16。[3] ———, 关于极限指数的索伯列夫嵌入定理，斯捷克洛夫数学研究所论文集 284 (2014)，第 1 期，81–96；俄文版发表于斯捷克洛夫数学研究所论文集 284 (2014)，89–104。[4] O. V. Besov、V. P. Il'in 和 S. M. Nikol'skii，函数的积分表示与嵌入定理，第 1、2 卷，V. H. Winston & Sons，华盛顿哥伦比亚特区；Halsted Press [John Wiley & Sons],1978、1979。[5] A. Caetano、A. Gogatishvili 和 B. Opic，仅涉及对数光滑性的 Besov 空间的锐嵌入，逼近理论杂志 152 (2008)，第 2 期，188–214。[6] ———,仅涉及缓变光滑性的 Besov 空间的嵌入及其增长包络，逼近理论杂志 163 (2011)，第 10 期，1373–1399。[7] F. Cobos 和 Ó. Domínguez，逼近空间、极限插值与 Besov 空间，逼近理论杂志 189 (2015)，43–66。[8] ———, 对数光滑度的 Besov 空间与 Lipschitz空间，数学分析与应用杂志 425 (2015)，第 1 期，71–84。[9] O. Domínguez 和 S. Tikhonov，对数光滑度函数空间：嵌入与刻画，https://arxiv.org/abs/1811.06399，即将在《美国数学会回忆录》发表。[10] M. L. Goldman，广义 Nikolskii–Besov空间嵌入 Lorentz 空间，斯捷克洛夫数学研究所论文集 172 (1987)，143–154。[11] ———，广义 Besov、Sobolev 和 Calderon空间的重排不变包络，当代数学 424 (2007)，53–81。[12] L. Grafakos，《现代傅里叶分析》，Springer，2009。[13] F. Hernandez、B. Raiţă 和 D. Spector，Hodge系统的端点 L_1 估计，数学年刊，即将发表。[14] Yu. Netrusov，Besov空间嵌入理想空间的定理，列宁格勒数学研究所科学研讨会纪要 159 (1987)，69–82。[15] J. Peetre，《关于 Besov 空间的新思考》，数学系，杜克大学，1976。[16] A. Seeger 和 W. Trebels，Lorentz-Sobolev型空间的嵌入，数学年刊 373 (2019)，第 3–4 期，1017–1056。[17]E. M. Stein，《调和分析：实变方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿大学出版社，1993。[18] D. Stolyarov，$p = 1$的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，数学文集 213 (2022)，第 6 期，125–174。Dmitriy Stolyarov，圣彼得堡国立大学，俄罗斯圣彼得堡瓦西里岛第 14 线 29B。d.m.stolyarov@spbu.ru。