arXiv:2301.06379v2 [math.GT] 5 Feb 2023

把手体结外部中的环带构型

YI-SHENG WANG

摘要。与经典结不同，亏格二把手体结的结型并不能由其外部确定，因此区分具有同胚外部的把手体结往往是一项具有挑战性的任务。本文考虑一种不变量（环带图），它通过 Johannson 特征子流形理论以及本质环带的 Koda-Ozawa 分类来定义，并展示了该不变量区分此类把手体结的能力；特别是，环带图能够区分 Motto 和 Lee-Lee 给出的把手体结族中的成员。

1. 引言

亏格g把手体结（$\mathbb{S}^3$，HK）是嵌入于定向三维球面 $\mathbb{S}^3$ 中的亏格g把手体 HK；若两个把手体结环境同痕，则称它们等价或具有相同的结型。虽然亏格一把手体结理论等价于经典结的研究，但高亏格把手体结的性质与经典结大不相同。例如，在经典结理论中，Gordon-Luecke 定理[7] 断言，一个结的结型由其外部的同胚类型确定，但这一结论在高亏格情形下并不成立。首个亏格$g \geq 3$反例由 Suzuki [16], 发现，之后 Motto [14]和 Lee-Lee [13]构造了若干具有同胚外部、彼此不等价的无限亏格二把手体结族。不过，某些亏格二把手体结的结型确实由其外部确定，例如，Ishii-Kishimoto-Moriuchi-Suzuki 结表 [9], 中的（$\mathbb{S}^3$，4_1）。本文聚焦于亏格二把手体结，以下简称把手体结。

通过扭转构造 [14] （见第 3.1 节）可以相当容易地生成一族外部同胚的把手体结，但真正的挑战在于确定如此构造的把手体结是否两两不等价；目前似乎还没有已知的计算不变量能够区分无穷多个这样的把手体结。 [1] 提出了一种计算不变量，它基于对结群[1], 上的同态进行计数，能够区分有限多个外部同胚的不等价把手体结，但无法处理这样一族无限多个把手体结。

[14]通过研究 Motto 的把手体结外部的映射类群，证明了它们彼此不等价；而为了区分 Lee-Lee 的把手体结，[13] 对其外部中的某些本质环带进行了详细分析。这两种情形都必不可少地利用了把手体结外部的环带构型。 [18]指出，把手体结外部中的环带构型可以编码为一种标记图，称为环带图，并对这类图进行了分类。

本文的一个目的，是计算 Motto 和 Lee-Lee 的把手体结的环带图，并证明它们的不等价性可以由环带图检测出来（定理 3.2、3.3 和 3.6）。环带图提供了一个通用框架，用于描述把手体结外部的环带构型如何

日期：2023年2月7日。2020 数学学科分类号。主要分类号：57K12、57K30；次要分类号：57K31。关键词和短语。把手体结、特征子流形、本质环带。作者谨此感谢 MoST（资助编号：110-2115-M-001-004-MY3）和台湾提供的支持。[1]把手体结外部的基本群。

在外部同胚的不等价把手体结之间有所不同，并且可应用于其他无限族；我们通过构造一个新的具有同胚外部的把手体结无限族，并利用环带图证明其中各结彼此不等价，来展示这一点（定理 3.5）。

第 2 节回顾环带图的定义，该定义建立在 Johannson 特征子流形理论和 Koda-Ozawa 对本质环带的分类之上；第 3 节在简要回顾生成这些环带图的扭转操作后，计算 Motto 和 Lee-Lee 的把手体结的环带图。

第 3 节描述把手体结外部无法确定把手体结的结型；第 4 节则着眼于正向情形，并讨论在什么条件下，把手体结外部确实能确定结型。我们证明，具有某些环带图的把手体结，其结型可由外部确定（定理 4.1、4.2）；特别地，作为定理 4.2 和 [18, 定理 1.5],的推论，我们得到：若把手体结外部包含三个彼此不同痕的非分离本质环带，且不含本质环面，那么它就能确定 $(\mathbb{S}^3, \mathrm{HK})$ 的结型。此类例子包括 [9] 的结表中的 $(\mathbb{S}^3, 4_1)$、$(\mathbb{S}^3, 6_{10})$。最后，我们构造一个不等价把手体结的无限族，表明一般而言，即使结合环带图，把手体结外部仍不足以确定把手体结。

2. 环带图

本文始终在分片线性范畴中进行讨论。设 X 是 3-流形 M 的一个子多面体，我们用 $\mathring{\mathrm{X}}$、N(X) 和 $\partial_M \mathrm{X}$ 分别表示 X 在 M 中的内部、正则邻域和前沿。我们将 X 在 M 中的外部 E(X) 定义为：若 X 的余维大于零，则为 $\mathrm{M} - \mathring{\mathrm{N}}(\mathrm{X})$ 的补集；否则为 $\mathrm{M} - \mathrm{X}$ 的闭包。除了一些显而易见的情形（此时子流形位于 M 的 ∂ 中）外，流形 M 的子流形均假定为真子流形，且处于一般位置。3- 流形 M 中既非圆盘也非球面的曲面，若不可压缩、 ∂-不可压缩且非边界平行，则称为本质的；M 中的本质圆盘是指不会从 M 中切下一个 3-球的圆盘。当 M 是把手体时，M 中的本质圆盘也称为子午圆盘。唯一是指在同痕意义下唯一。无环面 3-流形是指不含本质环面的 3-流形。一对 $(\mathbb{S}^3, \mathrm{X})$ 表示 X 到 $\mathbb{S}^3$ 中的一个嵌入；这里最值得关注的是 $\mathrm{X} = \mathrm{HK}$ 为亏格二把手体的情形。除非另有说明，所有把手体结 $(\mathbb{S}^3, \mathrm{HK})$ 均假定为无环面的，也就是说，它们的外部 E(HK) 是无环面的。根据 Thurston 双曲化定理，这种外部要么含有本质环带，要么是双曲的。

2.1. 特征图。给定一个无环面、不可约、 ∂-不可约、紧致、定向的 3-流形 M，若余维零子流形 $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}$ 满足以下任一条件，则称其为容许纤维化：$\mathrm{X} \cap \partial\mathrm{M}$ 是由若干纤维组成的塞弗特纤维化，或 $\mathrm{X} \cap \partial\mathrm{M}$ 是 I-丛的两个盖面而构成 I-纤维化；其中，I-丛 $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ 的盖面是闭包 $\partial\mathrm{X} - \pi^{-1}(\partial\mathrm{B})$ 的一个分支。若余维零子流形 $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}$ 中每个不与前沿 $\partial_M \mathrm{X}$ 相交的本质环带 $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ 都平行于一个环带分支 A′ of $\partial_M \mathrm{X}$，则称 $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}$ 为简单的——也就是说，A 截出 X 的一个子流形，该子流形具有 I-丛结构，其两个盖面分别为 A 和 A′。

根据 Johannson 特征子流形理论 [10], , 存在唯一的曲面$\mathrm{S} \subset M$，由本质环带组成，使得

（1）补集$M - \mathrm{S}$ 中每个分支的闭包要么是简单的，要么是可容许纤维化的；

（2）移除S的任一分支都会导致第一条条件不再成立。

S 的分支称为M的特征的环带，而特征图Λ_M 定义为如下图：对每个可容许纤维化（相应地，简单）

M–S 的分支指定一个实心（相应地，空心）节点；对S 的每个分支A 指定一条边，该边连接代表M–S 的分支的节点（或多个节点），这些分支的闭包包含A。例如，把手体结（$\mathbb{S}^3, 4_1$）外部的特征图为；反之，任何外部具有该特征图的把手体结都等（$\mathbb{S}^3, 4_1$） [18, 定理 1.5]。然而，与结不同，把手体结外部通常不足以区分不等价把手体结 [14], [13], [1]。

2.2. **本质环带的类型**。回顾一下， [11] 和 [6]将无环面把手体结外部中的本质环带分为六种类型：2型环带A 的特征是， ∂A 恰有一个分支在把手体结 HK 中围成一个圆盘 D ； 若A 是类型 2-1（分别是类型 2-2），则D 是非分离的 （分别是分离的）。对于类型 2-i 环带，我们记作$\mathbf{h}_i$ ，其中$i = 1、2$；这种环带也称为霍普夫型环带。A 为类型 3-2（分别是类型 3-3）环带的特征是， ∂A 的各分支在把手体结 HK 中不围成圆盘，且彼此平行 （分别是非平行）； 此外，在同痕意义下，存在唯一一个与 ∂A [13, 不相交的非分离（分别是分离的）圆盘D $\subset$ HK。引理 2.3], [6, 引理 2.1、2.3], [17, 引理 2.9]。

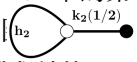
3-2型环带A 可进一步分为两个子类型：若A 在实心环面把手体结 –N(D) 的°外部中是本质的，则属于3-2i型；否则属于3-2ii型。此外，由于A 从E(HK)中切出一个实心环面V ，我们将A 的斜率 定义为A 的核相对于($\mathbb{S}^3$,V)的斜率，并将斜率为r的 3-2$*$ 型环带记为$\mathbf{k}_*(r)$； $* = 1,2$； A 的本质性意味着r 既不是整数，也不是 ∞。

类似地， 3-3 型环带A也有更细致的分类。设l_1,l_2 是 ∂A的分支。此时，唯一的分离圆盘D将把手体结HK切分为两个实心环面V_1,V_2 ，其中$l_i \subset \partial V_i$， $i = 1, 2$。于是将A的斜率对定义为无序对(r, s)，其中r、s分别是l_i相对于($\mathbb{S}^3$, V_i)的斜率， $i = 1, 2$。将斜率对为 (r, s) 的 3-3 型环带记为 l(r, s)。由 [17], 可知，(r, s) 要么为 (p q, q-p)，$pq \neq 0$，要么为(p q, pq)，$q \neq 0$，其中$p, q \in \mathbb{Z}$。

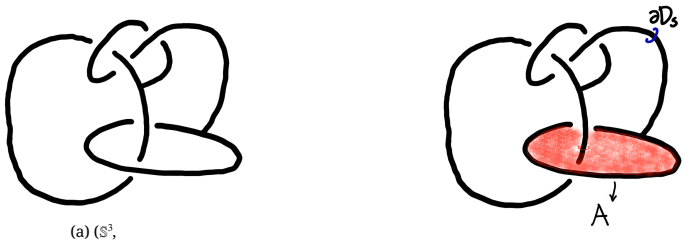
4 型1-型环带的特征是： ∂A 的各分支彼此平行，且不存在与 ∂A 不相交的把手体结中的本质圆盘。A 必定是分离的，并截出一个实心环面，其 $\mathbb{S}^3$ 核是一个 Eudave-Mu˜ñoz 结（参见定理 3.3] 的证明或引理 2.2 的证明）。

($\mathbb{S}^3$, 把手体结) 的环带图 Λ_{HK} 定义为把手体结补空间的特征图 Λ_{EXT}，并附加一种标记：根据每条边所表示的环带类型，分别标记为$\mathbf{h}_i$、$\mathbf{k}_i(r)$、$\mathbf{l}(r, s)$ 或 **em**，其中$i = 1、2$，且r、$s \in \mathbb{Q}$。

2.3. **示例**。首先考虑把手体结表[9, 中的把手体结 ($\mathbb{S}^3$, 5_1)，见图 2.1a 和 5.1a。它存在一个 2-1 型环带A （见图 2.1b），根据定理 1.4], , 这是E(5_1) 中唯一的环带，因此其环带图为 。

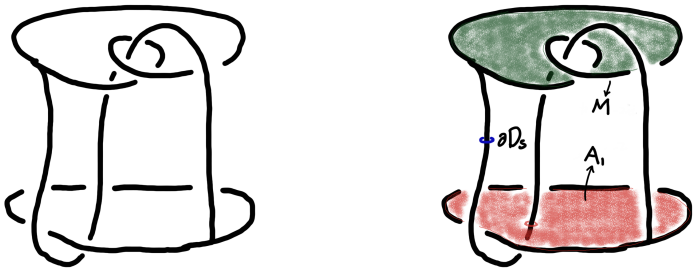
其次， 对于 [9, 表 1] 中的把手体结（$\mathbb{S}^3$， 6_1）（见图 2.1c 和 5.1b），我们观察到它包含一个 2-2 型环带 A_1, , 因此根据 [18, 定理 1.4], , 其环带图是图 2.2 中的某个图。注意， E(6_1) 还包含一个莫比乌斯带 M，如图 2.1d 所示。由于存在一个与 ∂M 不相交的分离圆盘 D_s ，并且把手体结 HK – N(D_s) 中包含 ∂M 的分支 V 的核是平凡纽结，因此， M 的正则邻域的前沿 A_2 是一个 3-2ii 型环带。因此，其环带图是图 2.2 中的第二个图。M 相对于（$\mathbb{S}^3$， V）的边界斜率为 2，因此（$\mathbb{S}^3$, 6_1）的环带[

现在，我们计算 [9] 中把手体结 ($\mathbb{S}^3$, 5_2) 的环带图（图 2.3a 和 5.1c）。注意，如图 2.3b 和 2.3c 所示，它包含一个 3-3 型环带A 和一个莫比乌斯带M 。在 E(HK) 中M 的正则邻域的前沿A_m 是一个



(a) ($\mathbb{S}^3$, 51</style)。

(b) $E(5_1)$中的环带。



(c) ($\mathbb{S}^3$, 61</style)。

(d) $E(6_1)$中的环带。

图 2.1. 结表 [9]中的把手体结。

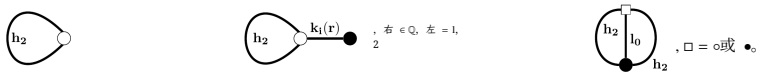
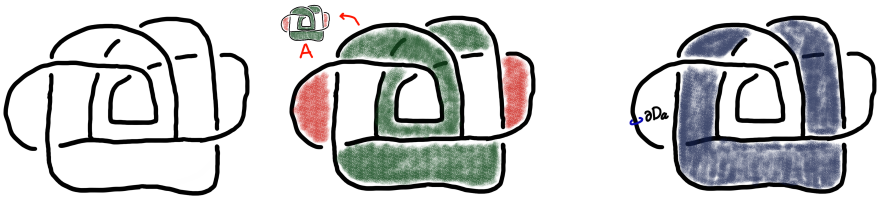


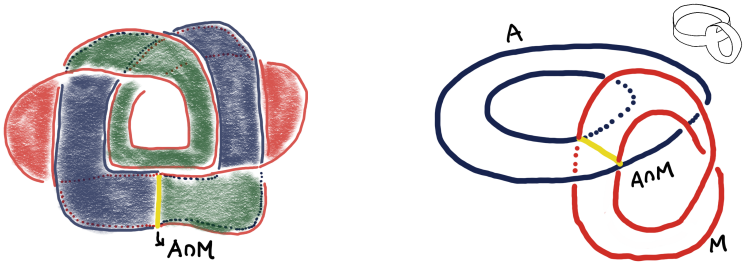
图 2.2. 环带图。



(a) ($\mathbb{S}^3$, 5_2)。

(b) $E(5_2)$ 中的 3-3 型环带。

(c) $E(5_2)$ 中的莫比乌斯带。



(d) A ∩ M.

(e) I 束结构。

图 2.3。 （$\mathbb{S}^3$,5_2）和 A，M $\subset E$（5_2）。

3-2 型环带，因为存在一个与 ∂M不相交的非分离圆盘D $\subset 5_2$。由于实心环面$V :=$ HK – N(D) 的核在 $\mathbb{S}^3$ 中是一个平凡纽结，A$_m$ 属于 3-2ii 型。

注意，A与M相交于一条弧（图 2.3d）。设U是A ∪M在$E(5_2)$中的一个正则邻域。于是存在一个可容许的 I-丛结构$U \to B$，其中B是一个去掉一个圆盘的克莱因瓶

（图 2.3e）。特别地，这意味着$E(5_2)$的特征图为 ，其中特征环带A_c 是U 在$E(5_2)$中的前沿。要确定A_c的类型，我们需要几个引理。

引理 2.1. 设A 是($\mathbb{S}^3$,把手体结)外部中的一个 *3-2ii* 型本质环带，且 $U \subset E$(把手体结) 是由A与把手体结 中被∂A切出的非环带分支围成的 *3*-流形。那么，诱导同态 $H_1(A) \to H_1(U)$的像是一个生成元。

证明。 设D $\subset$ 把手体结是与 ∂A不相交的唯一非分离圆盘；令$W :=$ 把手体结 $-\mathring{}$ N(D)。由于A 在$E(W)$中是 ∂-可压缩的，它与W 中的一个环带共同围成$U' \subset E(W)$中的一个实心环面，且诱导同态$H_1(A_c) \to H_1(U')$是同构。特别地，U 是通过在U'中挖掘一条隧道得到的，更确切地说，$U' = U \cup$N(D)。结论由短正合列得出：

$$0 \to H_2(U', U) \to H_1(U) \to H_1(U') \to 0.$$

□

引理 2.2. 若($\mathbb{S}^3$,把手体结) 含有一个4-1 型本质环带A，则每个与A 不相交的本质环带都是分离的。

证明。 设E(把手体结)被A 截出的实心环面为V，并设E(把手体结) – V的闭包为W。记把手体结被 ∂A 截出的环带为A′ 。根据 4-1 型环带的定义，把手体结 –A′的闭包 T 是一个挖去两个开圆盘的环面，且在$E(V)$中是本质的。

现在，由于不存在与 A 不相交的把手体结中的本质圆盘，A′ 在 E(W) 中是本质的。由 A′的本质性可知，若存在一个非平凡的 ∂-压缩圆盘，则存在一个与 A′不相交的 E(W) 的非平凡 ∂-压缩圆盘，但这与 T 在 E(V) 中是本质的相矛盾。因此，E(W) 是 ∂-不可约的。这意味着 W 是 ∂-可约的，因此 W 的压缩体前沿为空、是一个环面或是两个环面。由于 ($\mathbb{S}^3$, 把手体结) 无环面，后两种情况不可能。因此 W 是一个二属把手体。应用 [15, 定理 1。4], T 在通过沿 A 的边界对 V 进行德恩手术得到的 3-流形 $\hat{M}$ 中诱导出一个不可压缩环面 $\hat{T}$。由于 A 在 E(HK) 中是本质的，A 相对于 ($\mathbb{S}^3$, V) 的边界斜率是非整数。因此，由 [11,引理 3。14], V 的核是一个双曲结，故而是一个 Eudave-Mu˜noz 结。根据[8], 特别地，存在一个不可压缩环面 T_0 ，它将 $\hat{M}$ 分成两个以圆盘为底、各有两个例外纤维的塞弗特纤维空间 [4], [5]。注意，$\hat{M}$ 本身并非塞弗特纤维化，因为它是通过对 ($\mathbb{S}^3$, V) 进行非整数德恩手术得到的 [3], 。将 T_0 同痕，使 $\hat{T} \cap T_0$ 中的分支数最少。若 $\hat{T} \cap T_0 \neq \emptyset$，则 $T - T_0$ 中相邻两个分支在 M_1, M_2, 中的闭包 A_1,A_2 分别是本质环带。由垂直—水平定理 [10, 推论 5。7], ，可以将 M_1, M_2 上的纤维化同痕，使 A_1,A_2 为垂直环带，但这意味着 $\hat{M}$ 是塞弗特纤维化的，矛盾。因此 $T \cap T_0 = \emptyset$，由此可推得 T 与 T_0同痕。因此可以假设 $\hat{T} = T_0$；设 M_1 为包含 W 的分支。

假设E(把手体结)中存在一个非分离本质环带 $\bar{A}$ 与A不相交。那么 $\bar{A}$ 在M_1 中也是非分离的；此外，由于M_1, 是 ∂-不可约的，它在M_1 中还是本质的。然而，这与以下事实矛盾：在底空间为圆盘且带有两个例外纤维的塞弗特纤维空间中，不存在本质非分离环带。□

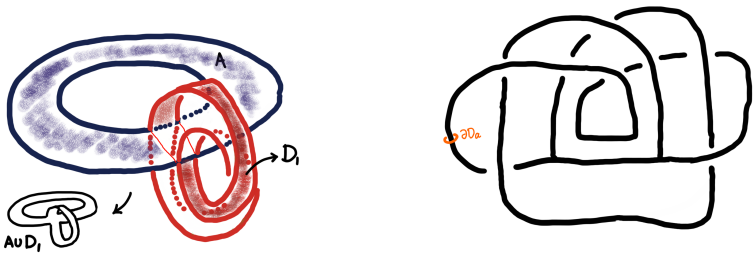
引理 2.3。 若($\mathbb{S}^3$,把手体结) 的外部 E(把手体结)的特征图为 ，则其环带图为 ，其$k_1(r)$在非整数 $r \in \mathbb{Q}$。

证明。 设A 是E(HK)的特征环带，且$V \subset E$(HK)是由A切出的实心环面。令$U :=$ E(HK) – $\mathring{V}$，由 [18, 命题 2.12v], ，存在一个 I-丛结构 $\pi : U \to B$ ，其中B是去掉一个开圆盘后的克莱因瓶B。根据引理 2.2，A不可能是 4-1 型，因为U 因而E(HK)都含有非分离本质环带。

由于 B 是去掉一个开圆盘后的克莱因瓶，存在两条简单闭曲线 l,l′ ⊂ B，其中 l ∩ l′ 一点，$\pi^{-1}(l)$ 是环带 $A_l \subset E(HK)$，而 $\pi^{-1}(l')$ 是莫比乌斯带 M¨obius band $M'_l \subset E(HK)$，使得 U 是 $A_l \cap M'_l$ 的正则邻域。特别地，A_l和 M'_l 的核的同调类 u_a、u_m 分别生成 $H_1(U)$。A 是 U 在 E(HK) 中的前沿，这意味着 $H_1(A)$ 的一个生成元在同态 $H_1(A) \to H_1(U)$ 下的像为 $2u_a$，因此根据引理 2.1，A 必须是 3-2i型。□

回到例子（$\mathbb{S}^3, 5_2$）；由引理 2.3，特征环带 $A_c \subset E(5_2)$ 属于 3-2i 型。为确定 A_c 的斜率，我们回想：若 $D_c \subset 5_2$ 是一个与 ∂A_c 不相交的非分离的°圆盘，则 A_c 是实心环面 $W := 5_2 - N(D_c)$ 在 $\mathbb{S}^3$ 中的缠绕环带。因此，要计算 A_c 的斜率，只需确定 $(\mathbb{S}^3, W)$ 的结型。为确定 $(\mathbb{S}^3, W)$ 的结型，我们寻找一个与 ∂A_c 不相交的本质分离圆盘 $D_s \subset 5_2$，因为这样的 D_s 会将 5_2 切成两部分，其中一部分同痕于 $\mathbb{S}^3$ 中的 W。令 $A^\flat$ 为环带 $N(M) \cap 5_2$。注意，∂A 与 $A^\flat$ 相交于两条弧，这两条弧将 $A^\flat$ 切成两个圆盘 D_1, D_2（见图 2.4a）。由于 A_c 是 $A \cup M$ 的正则邻域的前沿，环路 $l := \partial(A \cup D_1)$ 与 ∂A_c 的分支平行。

现在考虑由图 2.4b 所示子午线围成的圆盘 D_a。由于$D_a \cap \partial A$是一个点，且 $D_a \cap \partial M = \emptyset$，所以$D_a \cap l$是一个点。因此，$D_s$的正则邻域的前沿$D_a \cup l \subset 5_2$ 是一个与 ∂A_c不相交的分离圆盘。



(a)A 和 $D_1 \subset A^\flat$.　　(b) 子午圆盘D_a。

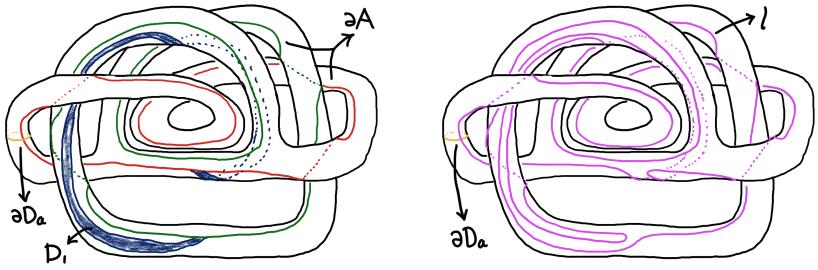
图 2.4。 $\partial A_c \parallel \partial(A \cup D_1)$ 和 D_a。

为了了解 D_s 如何嵌入 5_2,，我们首先注意到，A 和 D_1 的边界分支如图 2.5a 所示嵌入在 $\partial 5_2$ 中；因此，l 是图 2.5b 所示的 $\partial 5_2$ 中的环路。设 D_a^+、D_a^- 是 5_2 中 $N(D_a)$ 前沿的分支。那么可以假设圆盘 D_s 是 $K_l := D_a^+ \cup D_a^- \cup l'$ 的正则邻域前沿的一个分支，它不与 $D_a^\pm$ 平行，其中 $l' := l - \mathring{N}(D_a)$。对 K_l 作同痕变换，使其呈现为图 2.5c 所示的形状。K_l 与 5_2 之间的关系如图 2.5d 所示。根据 l′ 绕 5_2 的缠绕方式，对 5_2 在 $\mathbb{S}^3$ 中作同痕变换。经过图 2.6a、2.6b和2.6c 所示的一系列同痕变换后，我们得到图 2.6d 中的把手体结，其中 D_s 的表达式更简单。因此，$(\mathbb{S}^3, 52)$ 可视为 (4, 3)-环面结 $K_{4,3}$ 的正则邻域，并附着了图 2.6e和2.6f 中突出显示的一个 1-把手，所以 A_c 的斜率为 4 3，故有以下结论。

定理2.4. ($\mathbb{S}^3$，5_2) 的环带图为。 

注意，根据 [18, 定理 1.1]，($\mathbb{S}^3$,HK)的环带图为，当且仅当其[illegible]E(HK)含有无限多个本质环带。此时，除一个以外的所有本质环带都是分离的，而唯一的非分离环带必为3-3 型，这是由[18, 定理 1.4], 得出的；除一个以外的所有本质环带都是非特征的，而特征环带为3-2i型，这是由引理 2.3得出的。对于这样的($\mathbb{S}^3$,HK)，接下来考虑以下问题很有意思。

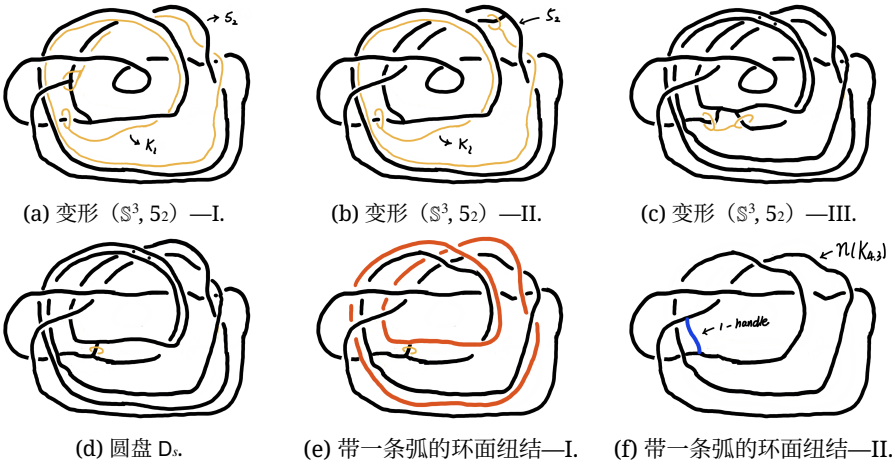
问题2.1. E(把手体结)中的非分离、非特征环带有哪些类型?



(a) ∂A、D_1 在 5_2 中。 (b) l 在 $\partial 5_2$中。

(c) $D_a^{\pm}$和l'。 (d) K_l 在 $(\mathbb{S}^3, 5_2)$ 中。

图 2.5。识别 ∂A、D_1,l 和 K_l 在 $\partial 5_2$ 中。



(a) 变形（$\mathbb{S}^3$, 5_2）—I. (b) 变形（$\mathbb{S}^3$, 5_2）—II. (c) 变形（$\mathbb{S}^3$, 5_2）—III.

(d) 圆盘 D_s. (e) 带一条弧的环面纽结—I. (f) 带一条弧的环面纽结—II.

图 2.6. 对K_l、D_s进行变形。

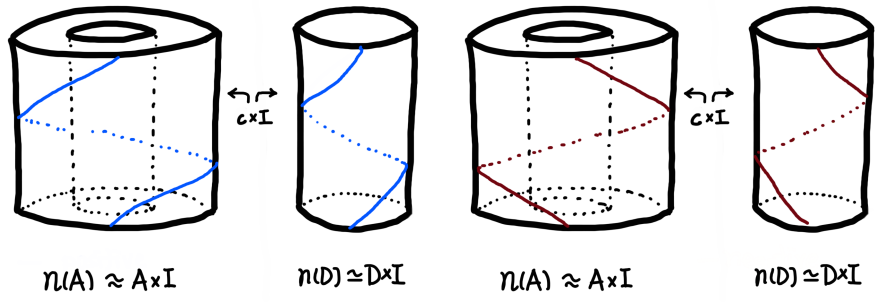
问题2.2. E(把手体结)中的非分离环带的斜率对或特征环带的斜率是否受到任何限制?

3. 把手体结族的环带图

3.1. **把手体结族**。为了构造一个外部同胚的无限把手体结族，我们考虑以下扭转操作。

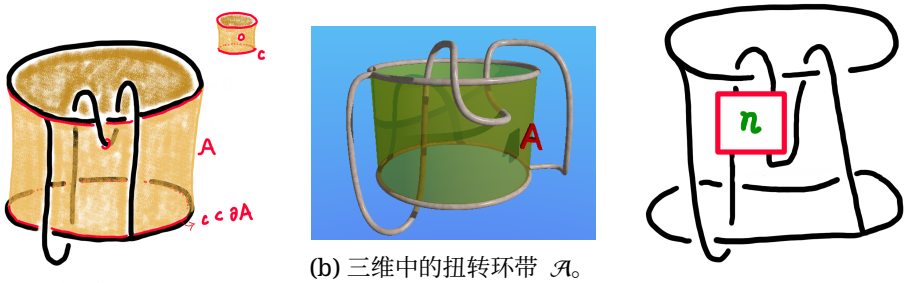
定义 3.1。把手体结（$\mathbb{S}^3$,HK）的切割曲面是一个二元组（$\mathcal{S}$,c），其中 $\mathcal{S}$ 是E(HK)中的平面曲面，至多有两个分支 $\partial\mathcal{S}$ 不围成HK中的圆盘，而c是其中一个这样的分支。

令 $c_1, \ldots, c_n$为 $\partial\mathcal{S}$ 的分支，它们在 HK 中围成圆盘；令 $D_i \subset$HK、i =1, . . . , n 为由它们围成的圆盘。则 $\mathcal{F} := \mathcal{S} \bigcup_{i=1}^{n} D_i$要么是环带 $\mathcal{A}$，要么是圆盘



(a)（+）-扭转。 (b)（−）-扭转。

图3.1. 扭转的符号。



(a) 扭转环带 $\mathcal{A}$。 (b) 三维中的扭转环带 $\mathcal{A}$。 (c) $(\mathbb{S}^3,\mathbf{M}_n)$。

图3.2. $(\mathbb{S}^3,6_1)$ 的扭转环带 $\mathcal{A}$。

$\mathcal{D}$，称为（$\mathbb{S}^3$，HK）的扭转环带或圆盘。现在考虑 M'，它是 E(HK) 与 $\mathbf{D} := \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{D}_i \subset \mathrm{HK}$ 的一个正则邻域的并；并选取 $\mathcal{F} \subset M'$ 的一个正则邻域 N($\mathcal{F}$)，使得 $\mathcal{F} \cap \mathrm{HK}$ 是 $\mathbf{D} \subset \mathrm{HK}$ 的一个正则邻域。令 M 为E(HK) 与 N($\mathcal{F}$) 的并。随后通过以下复合映射对把手体结外部E(HK)进行重新嵌入，这就是扭转操作

$$T_n : E(\mathrm{HK}) \subset M \xrightarrow{t_n} M \subset \mathbb{S}^3, \tag{3.1}$$

其中，t_n 是沿 $\mathcal{F}$ 按图3.1中的符号约定扭转n 次所得；注意，该约定取决于所选的分支 $c \subset \partial S$。设 $M_n := T_n(E(\text{把手体结})) \subset \mathbb{S}^3$。

引理 3.1. M_n 是某个把手体结的外部。

证明。 由于 t_n 是 M 的自同胚，$t_n(M) = M \subset \mathbb{S}^3$，因此 $t_n(M)$ 是若干个 3-球 B 与一个二分支链环或结 L 并的外部。另一方面，E(把手体结) 是 M 中若干条弧 γ 的外部，因此 M_n 是把手体$B \cup \mathrm{N}(L) \cup \mathrm{N}(t_n(\gamma))$ 的外部，其边界必然是亏格2。□

所得把手体结称为沿 $\mathcal{F}$ n 次对 $(\mathbb{S}^3,\mathrm{HK})$ 进行扭转而得到。其外部与 E(HK) 同胚，因为 M_n 与 E(HK) 同胚。

Motto 的把手体结族。考虑把手体结 $(\mathbb{S}^3, 6_1)$ 以及图 3.2a 和图 3.2b 中所示的扭转环带 $\mathcal{A}$。沿 $\mathcal{A}$ 对 $(\mathbb{S}^3, 6_1)$ 扭转 n 次，我们得到 Motto 的把手体结族 $\{(\mathbb{S}^3,\mathbf{M}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$，其中 [14]（见图 3.2c）。

LeeLee 把手体结族 I。类似地，第一个 Lee-Lee 把手体结族$\{(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^\circ)\}_{n\in\mathbb{Z}}$（见图 3.4 b）可在 [13] 中通过沿图 3.4a 所示的扭转圆盘 $\mathcal{D}$ 对把手体结（$\mathbb{S}^3$，5_1）进行n 次扭转来构造。

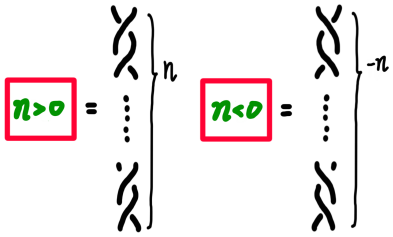
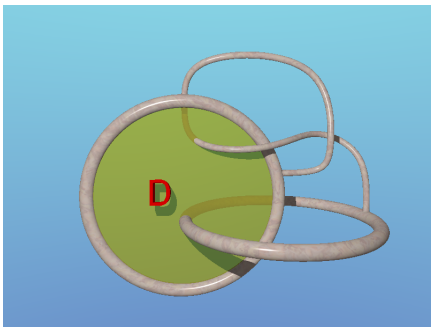
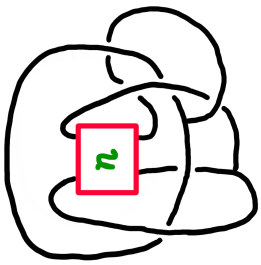


图 3.3. 符号约定。

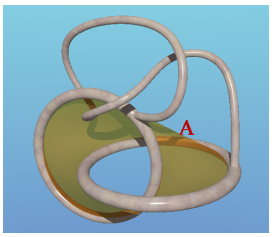


(a) 扭转圆盘 $\mathcal{D}$ （$\mathbb{S}^3, 5_1$）。

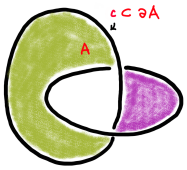


(b)（$\mathbb{S}^3$,$\mathbf{L}_n^\circ$）。

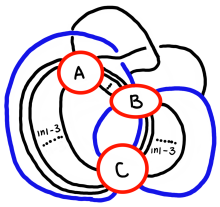
图 3.4. 扭转圆盘 $\mathcal{D}$ 和（$\mathbb{S}^3$,$\mathbf{L}_n^\circ$）。



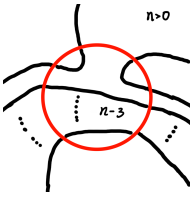
(a) 扭转环带 $\mathcal{A}$。



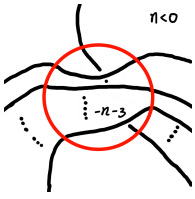
(b) 标记分支$C \subset \partial\mathcal{A}$。



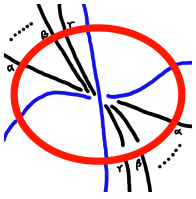
(c) ($\mathbb{S}^3$, $\mathbf{L}_n^\circ$)。



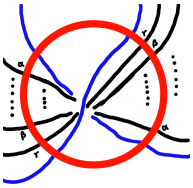
(d) 缠结A，$n > 0$。



(e) 缠结A，$n < 0$。



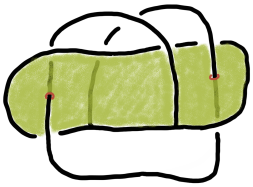
(f) 缠结B。



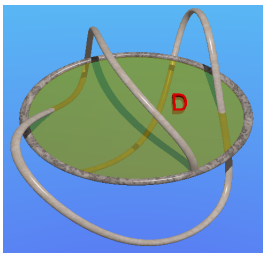
(g) 缠结C。

图 3.5。扭转环带 $\mathcal{A}$和（$\mathbb{S}^3$，$\mathbf{L}_n^\circ$）。

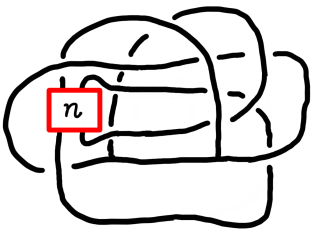
一个变体。注意，（$\mathbb{S}^3$，5_1）也有一个如图 3.5a、3.5b 所示的扭转环带 $\mathcal{A}$，我们将沿 $\mathcal{A}$进行n次扭转（见图 3.5c–3.5g）得到的把手体结族记作 $\left\{(\mathbb{S}^3,\ \mathbf{L}_n^\circ)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$。特别地，对于每个$n$，（$\mathbb{S}^3$，$\mathbf{L}_n^\circ$）和（$\mathbb{S}^3$，$\mathbf{L}_n^\circ$）的外部都与$E(5_1)$同胚。



(a) 扭转圆盘 $\mathcal{D}$。



(b) 三维中的扭转圆盘 $\mathcal{D}$。



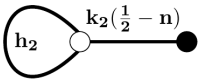
(c) $(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^-)$。

图 3.6. 扭转圆盘 $\mathcal{D}$ 和 $(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^-)$。

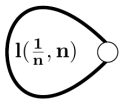
LeeLee 的把手体结族 *II*。 最后，我们考察图 3.6a–3.6b 所示的 $(\mathbb{S}^3, 5_2)$ 的扭转圆盘 $\mathcal{D}$。沿 $\mathcal{D}$ n 次扭转 $(\mathbb{S}^3, 5_2)$，得到第二个把手体结族 $\left\{(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^-)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$，位于 [13] 中（见图 3.6c）。

3.2. **环带图**。 这里我们计算第 3.1 节中各把手体结族的环带图。

定理 3.2. $(\mathbb{S}^3, \mathbf{M}_n)$ 的环带图为。



证明。首先注意，扭转环带 $\mathcal{A}$ 的内部与把手体结 HK 相交于一个分离圆盘 $D_s \subset$ HK，而 HK $-$ N(D_s) 由两个实心环面 V、V′ 组成。因此，扭转映射 t_n 的作用是在外部 M: $=$ E(V∪V′) 中重新嵌入连接 ∂V、∂V′ 的 1-把手 N(D_s)。记 A、A′ $\subset$ E(6_1) 分别为 3-2 型和 2-2 型的特征本质环带，记 A_n、A'_n 分别为环带 T_n(A)、T_n(A′) $\subset$ E(M_n)。我们可以假设 ∂A $\subset$ V；这意味着 ∂A′ $\cap$ V′ $\neq \emptyset$。现在，由于 $\mathcal{A} \cap$ A′ $= \emptyset$，$A'_n \subset$ E(M_n) 属于 2-2 型；而 $(\mathbb{S}^3, V)$ 是 $\mathbb{S}^3$ 中的平凡实心环面结，因此 $A_n \subset$ E(M_n) 属于 3-2ii 型。另一方面，$\partial\mathcal{A} \cap \partial$A $\neq \emptyset$，分支 l_a $=$ V $\cap \mathcal{A}$ 与 A 的一个分支 l 的交如图 3.7a 所示，由此可推得 T_n(l) $\subset$ V 相对于 $(\mathbb{S}^3, V)$ 的斜率为 $\frac{2}{1-2}$n，从而得证。□

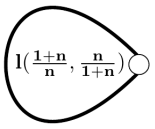
定理 3.3。 $\mathbb{S}^3$ $(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^\circ)$ 的环带图，其中 $n \neq 0$，为 

.

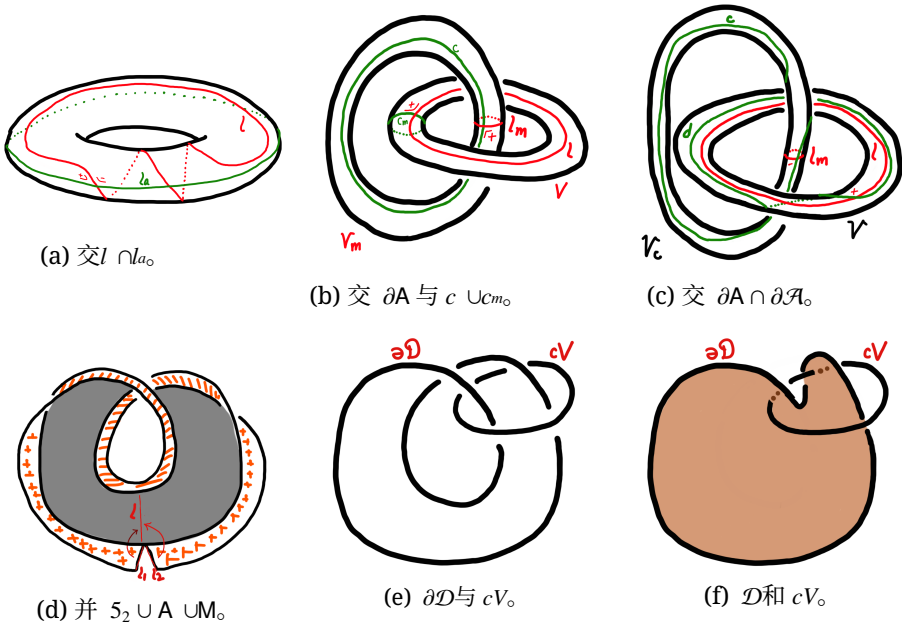
证明。设 A 是 E(5_1) 中的 2-1 型环带，记 l_m 为 ∂A 的分支，它在 5_1 中界定一个圆盘；记另一分支为 l。设 D_s 为 HK 在 HK $\cap \mathcal{D}$中的分离圆盘。则 D_s 将 HK 分成两个实心环面 V、V_m，其中 $l_m \subset \partial V_m$，l $\subset \partial$V。记 c_m 为 $\mathcal{D} \cap \partial$V 中的交圈，记 c $= \partial\mathcal{D}$；l $\cup$ l_m 与 c $\cup$ c_m 的交如图 3.7b) 所示，由此可见，$T_n(l_m)$ 关于 $(\mathbb{S}^3, V_m)$ 的斜率为 ^{1}n，而 T_n(l) 关于 $(\mathbb{S}^3, V)$ 的斜率为 n，因此 A_n 是 3-3 型，其斜率对为 (^{1}n, m)。□

注 3.4. 环带A 恰好是环带A_0 在 [13], 中，而 [13] 利用$T_n(\partial A_0)$ 是一个 (2, 2n)-环面链环这一事实，来区分 $\left\{(\mathbb{S}^3 \text{ 中的成员}, \mathbf{L}_n^\circ)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$。

定理 3.5. $(\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^\odot)$ 的环带图，$n \neq 0$，为 。



证明。 令A、 ∂A $= l \cup l_m$ 如前一个证明中所述。图 3.5a 中扭转环带$\mathcal{A}$ 的内部与 5_1 相交于一个分离圆盘D_s。令V、$V_c \subset 5_1$ 为被切出的实心环面

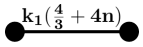


(a) 交$l \cap l_{a}$。 (b) 交 ∂A 与 $c \cup c_{m}$。 (c) 交 ∂A $\cap \partial\mathcal{A}$。

(d) 并 $5_2 \cup$ A $\cup$M。 (e) $\partial\mathcal{D}$与 cV。 (f) $\mathcal{D}$和 cV。

图 3.7. 环带图计算。

圆盘D$_s$ 以及其中含有选定分支$c \subset \partial\mathcal{A}$ 的 ∂V_c。由图 3.7c 所示的交$\partial\mathcal{A} \cap \partial$A 可知，其中$d$ 是 $\partial\mathcal{A}$的另一分支；相对于($\mathbb{S}^3$, V)，$T_n(l)$的斜率为$n\ n{+}1$；相对于($\mathbb{S}^3$, V_c)，T_n (l_m)的斜率为$n{+}1\ n$。定理由此得证。□

定理 3.6. ($\mathbb{S}^3, \mathbf{L}_n^-$) 的环带图为 。 

证明。设 A$_c$ 是 E(5$_2$) 的特征环带，A、M 分别是图 2.3d 中的 3-3 型环带和莫比乌斯带。用 V $\subset$ E(5$_2$) 表示被 A$_c$截出的实心环面。于是，E(V) 是 5$_2$ 与 E(5$_2$) 中 A $\cup$ M 的正则邻域之并。由于 A $\cup$M $\cup$ 5$_2$ 可通过将 l$_1$,l$_2$ 与图 3.7d 中的 l $\subset$ M 粘合得到，其中一个来自下方，另一个来自上方，因此 E(V) 是一个实心环面；特别地，V 的核是 $\mathbb{S}^3$中的一个平凡纽结。现在注意到，$\mathbb{S}^3$ 中的扭转圆盘 $\mathcal{D}$ 与 cV 的边界是 Rolfsen 链环表中的链环 L4a1（见图 3.7e），所以它们的链接数为 $\pm$2。这与定理2.4一起表明，A$_{c,n}$:= T$_n$ (A$_c$) 的核相对于 ($\mathbb{S}^3$V$_n$) 的斜率为 $\frac{4}{3} + 4$n，其中 V$_n$ 是从 E(L$_n^-$) 中被 A$_{c,n}$ 截出的实心环面。

□

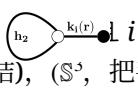
注 3.7。 由图 3.7f 可知，V_n 的核是一个 $(2n + 1, 2)$-环面纽结。

注 3.8。 [13] 利用$E(\mathbf{L}_n^-)$ 中唯一的非分离的 环带来区分把手体结，而我们采用的是特征的环带。

4. 分类问题

这里我们讨论环带图和把手体结外部在多大程度上决定把手体结的结型。设 Λ_{HK}、 $\Lambda_{\mathrm{HK}'}$ 分别是把手体结 ($\mathbb{S}^3$, HK)、($\mathbb{S}^3$,HK′) 的环带图。

4.1. Gordon-Luecke 型定理。

定理 4.1. 若 Λ_{HK}, $\Lambda_{\mathrm{HK}'}$ 均为，其中 

L i = 1 或 2，并且 E(把手体结), E(把手体结′) 同胚，则 ($\mathbb{S}^3$，把手体结)，($\mathbb{S}^3$，把手体结′) 等价。

证明. 根据假设，存在一个同胚 $f : E$(把手体结) $\to E$(把手体结′)。令 A_1（分别为 A_1'）表示与环带图的边相对应的 2-2 型环带，令 A_2 （分别为 A_2'）表示 3-2型环带。由于它们是E(把手体结) 中唯一的 2-2 型和 3-2型环带，因此E(把手体结′)。不妨设 $f(A_i) = A_i'$，$i = 1, 2$。

设$D_s \subset$ 把手体结是由 ∂A_1的一个分支围成的圆盘；对D_s 作同痕，使其与$A_1 \cup A_2$不相交。于是 D_s 将把手体结切成两个实心环面V_1, V_2，其中 $\partial A_2 \subset V_2$ 且 $\partial A_1 \subset V_1$。记D_s' 为由像$f(\partial D_s)$围成且与 $A_1' \cup A_2'$不相交的圆盘。

注意，f 将（$\mathbb{S}^3, V_1$）的优选经度映到（$\mathbb{S}^3, V_1'$）的优选经度，因为 $f(A_1) = A_1'$；并将 V_1 的子午线映到 $\partial V_1'$ 中的一条曲线，该曲线相对于（$\mathbb{S}^3, V_1'$）的斜率为 $^1 n$，$n^- \in \mathbb{Z}$。设 $t : E(HK') \to E(HK')$ 是沿 A_1' 扭转一次所给出的同胚。那么复合映射 $f_1 := t^{-n} \circ f : E(HK) \to E(HK')$ 将 V_1 的子午线映到 V_1'的子午线，因此 f_1 可延拓为从 $E(V_2)$ 到 $E(V_2')$ 的同胚 f_2。

基于同调学原因，f_2 将（$\mathbb{S}^3, V_2$）的优选经度映射到（$\mathbb{S}^3, V_2'$）的优选经度，并且在子午线和优选经度的基下，f_{2*} 在第一同调群上诱导的同态由矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

令 $r = p\,q, p, q \in \mathbb{Z}$。注意，由于 A_2, A_2' 的本质性，$pq \neq 0$，并且当 A_2 （分别为 A_2'）为 3-2i型时，∂A_2 （分别为 $\partial A_2'$）的分支相对于（$\mathbb{S}^3, V_2$）（分别为（$\mathbb{S}^3, V_2'$））的斜率为 pq；否则，其斜率为 $q\,p$。由于 $f(\partial A_2) = f(\partial A_2')$，根据 (4.1)，或者 $pq + k = pq$，或者 $q + kp = q$。这意味着 $k = 0$，因此 f_2 可以扩展为从（$\mathbb{S}^3$, 把手体结）到（$\mathbb{S}^3$, 把手体结′）的同胚。□

定理 4.2. 若 $\Lambda_{HK}, \Lambda_{HK'}$ 均为 , 其中  或 ∘，且 E(HK),E(HK′) 同胚，则 ($\mathbb{S}^3$, HK), ($\mathbb{S}^3$,HK′) 等价。

证明。设 f 是从 E(HK) 到 E(HK′) 的同胚，A、A_1,A_2（分别地，A′、A_1'、A_2'）分别是 E(HK)（分别地，E(HK′)）中的 3-3 型环带和两个 2-2 型环带。由于 $A \cup A_1 \cup A_2$ 是 E(HK) 的特征曲面，可以假设 $f(A \cup A_1 \cup A_2) = A' \cup A_1' \cup A_2'$。此外，$A_i$ （分别地，A_i'）的一个边界分支在 ∂E(HK) 中是分离的，$i = 1, 2$，而 A（分别地，A′）的边界分支均不分离，因此我们还可以假设 $f(A) = A'$，$f(A_i) = A_i'$，$i = 1, 2$。设 D_1, D_2（分别地，D_1', D_2'）是分别由 A_1,A_2（分别地，A_1'、A_2'）的边界分支围成的互不相交的圆盘。于是 D_1,D_2（分别地，D_1'、D_2'）彼此平行，因此在 HK（分别地，在 HK′）中围成一个 3-球 B（分别地，B′），它将 HK（分别地，HK′）分割为两个实心环面 V、W（分别地，V′、W′）。由于 $f(A_i) = A_i'$，$i = 1, 2$，可将 f 延拓为一个同胚 $f_1 : (E(V \cup W), B) \to (E(V' \cup W'), B')$。

注意，f_1 将 V 的优选经度（分别地，W 的优选经度）映射到 V′（分别地，W′）的优选经度，并将 V 的子午线（分别地，W 的子午线）映射到 V′（分别地，W′）中斜率为 $\lrcorner k_v$（分别地，斜率为$\llcorner^1 k_w$）的曲线。令 t_v、t_w 为以下同胚：(E(V′ ∪ W′)、B′) → (E(V′ ∪ W′)、B′)，它们分别由沿圆盘 $A_1' \cup D_1'$ 和 $A_2' \cup D_2'$ 扭转得到。于是复合映射 $t^{-k_v}v \circ t^{-k_w}w \circ f_1$ 将 V 的子午线（分别地，W 的子午线）映射到 V′（分别地，W′）的子午线，因此可以延拓为 ($\mathbb{S}^3$, 把手体结) 与 ($\mathbb{S}^3$, 把手体结′) 之间的同胚。□

推论 4.3. 如果（$\mathbb{S}^3$，把手体结）的外部包含三个彼此不同痕的非分离环带，那么该外部就确定了（$\mathbb{S}^3$，把手体结）的结型。

证明。 根据 [18, 定理 1.5], , 其环带图为 □ = ● 或  □

4.2. **非完备性**。 环带图和把手体结外部并非完备不变量，尤其是在外部存在唯一的本质环带时。

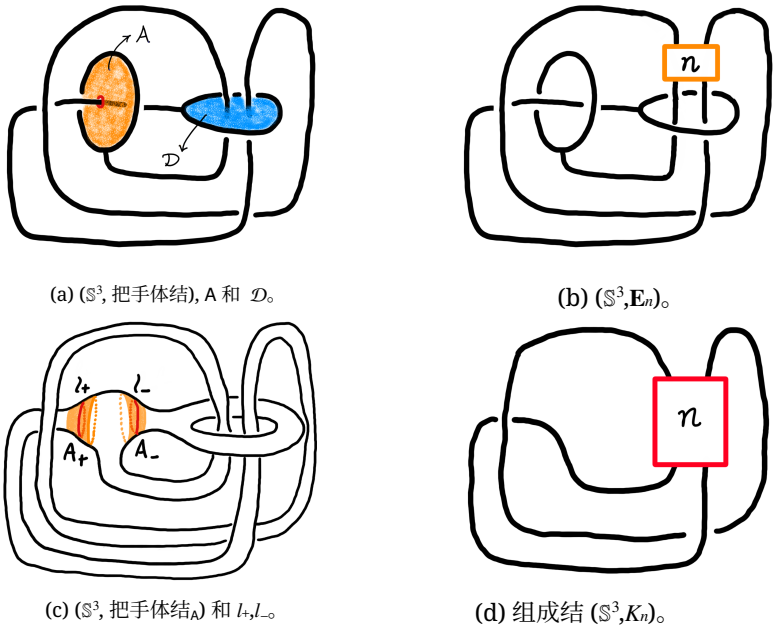
定理 4.4。 存在无穷多个彼此不等价的无环面把手体结，它们的外部彼此同胚，且具有图示环带图。 

证明。 考虑图 4.1a 中的把手体结 $(\mathbb{S}^3, \mathrm{HK})$，它包含一个 2-2 型环带 A 和一个扭转圆盘 $\mathcal{D}$。沿 $\mathcal{D}$ 扭转 $\mathbb{S}^3, \mathrm{HK}$ 共 $\mathcal{D}$ n 次，可得到把手体结无限族 $\mathcal{E} := \{(\mathbb{S}^3, \mathbf{E}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$，其中 $(\mathbb{S}^3,\mathbf{E}_0) = (\mathbb{S}^3, \mathrm{HK})$（见图 4.1b）。记$\mathrm{A}_n \subset E(\mathbf{E}_n)$为A 在 (3.1) 中的扭转映射 T_n 作用下的像；注意，对每个n，A_n 都是 2-2 型。

为证明 $\mathcal{E}$ 中的成员是无环面的，我们注意到A 是一个解结环带；也就是说，$(\mathbb{S}^3, \mathrm{HK_A})$ 是一个平凡把手体结，其中 $\mathrm{HK_A}$ 是 HK 与A 在E(HK)中的正则邻域 N(A) 的并。N(A) 的前沿由两个环带$\mathrm{A_+}$、$\mathrm{A_-}$组成，它们平行于A，其中一个（记作$\mathrm{A_-}$）将 $\partial\mathrm{HK_A}$ 分隔开（图 4.1c）。由于$\mathrm{A_-}$ 的核l_- 不在$E(\mathrm{HK_A})$ 中围成圆盘——它在 $\pi_1(E(\mathrm{HK_A}))$ 中确定一个非平凡共轭类。根据[18, 命题 5.10], , $(\mathbb{S}^3, \mathrm{HK})$ 是无环面的，且A 是本质的。由于（本质性）无环面性是把手体结外部中（曲面的一种）性质，因此对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，$(\mathbb{S}^3,\mathbf{E}_n)$ 都是无环面的，且A_n是本质的。

断言：A $\subset$ E(HK) 是唯一的 2-2 型环带。假设还存在另一个 2-2 型环带 $\mathrm{A}' \subset \mathrm{E(HK)}$，由 [11, 推论 3.18], [18,引理 5.4]可知，它必然是本质的。令 $\mathcal{S}$ 为切割曲面，即 $\mathcal{D}$–HK $\subset$ E(HK) 的闭包。由 [18,引理 3.10], 可知，A' 中不围成 HK 内圆盘的分支 l_∂与 $\partial\mathcal{D}$同痕，而另一分支 $\mathrm{l}_m \subset \partial\mathrm{A}'$ 与 $\partial\mathcal{S} - \partial\mathcal{D}$的分支同痕。特别地，可以对 A' 作同痕，使得 $\partial\mathrm{A}' \cap \partial\mathcal{S} = \emptyset$。选取 $\mathrm{A}', \mathcal{S}$，使 $\#\{\mathrm{A}' \cap \mathcal{S} \mid \partial\mathrm{A}' \cap \partial\mathcal{S} = \emptyset\}$ 在它们的同痕类中取最小值。

假设 $\mathrm{A}' \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$。那么存在一个环带 $\mathrm{A}'' \subset \mathrm{A}'$，包含 l_m，使得 $\mathrm{c} := \mathrm{A}'' \cap \mathcal{S} = \partial\mathrm{A}'' - \mathrm{l}_m$。由于 $\mathcal{S}$ 是一个去掉两个开圆盘的圆盘，c 将一个环带 A_s 从 $\mathcal{S}$中截出。或者 $\partial\mathcal{D} \subset \mathrm{A}_s$，或者 $\partial\mathcal{D} \cap \mathrm{A}_s = \emptyset$。在前一种情况下，$\mathrm{A} \cup \mathrm{A}''$ 诱导出一个 ˆ ˆ 2-2 环带 A，它与 $\mathcal{S}$ 的交少于 A'。由于 ∂A 平行于 $\partial\mathrm{A}'$，根据[18, 引理 3.10], , 二者同痕，这与极小性矛盾。若 $\partial\mathcal{D} \cap \mathrm{A}_s = \emptyset$，则 $\mathrm{A}_s \cup \mathrm{A}''$ 和 ∂把手体结共同围成一个实心环面，其中 A'' 的核是经线；因此可以



(a) $(\mathbb{S}^3$, 把手体结), A 和 $\mathcal{D}$。 (b) $(\mathbb{S}^3,\mathbf{E}_n)$。

(c) $(\mathbb{S}^3$, 把手体结$_\mathrm{A})$ 和 l_+,l_-。 (d) 组成结 $(\mathbb{S}^3,K_n)$。

图 4.1. 把手体结族 $\{(\mathbb{S}^3,\mathbf{E}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$。

对 $\mathcal{S}$ 进行同痕，以减少 $A' \cap \mathcal{S}$中的分支数，这与极小性矛盾。因此 $A' \cap \mathcal{S} = \emptyset$。令 $A^\flat$ 为由 $l \subset \partial A'$ 和 $\partial\mathcal{D}$截出的环带。则 $A^\flat \cup A' \cup \mathcal{S}$是裤形曲面 $P \subset E$(把手体结)，它将 E(把手体结)分隔开，这是不可能的，因为 ∂P中的分支在 ∂把手体结中彼此平行。这就证明了该断言。

现在注意到l_- 界定了 HK_A 中的一个分离圆盘，因此诱导出 HK_A 的一个手铐骨架，其组成链环记作（$\mathbb{S}^3$,L_0）。令K_0 为L_0 中与由A_+的核l_+ 所界定的子午圆盘对偶的分支。同样，2-2 型环带$A_n \subset E(\mathbf{E}_n)$诱导出一个平凡把手体结 （$\mathbb{S}^3$，$HK_{A_n}$），其中 $HK^{A_n} := \mathbf{E}_n \cup N(A_n)$，而$A_{n+} \subset \partial HK^{A_n}$ 在 $E(\mathbf{E}_n)$中作为 $N(A_n)$前沿的非分离分支诱导出一个结（$\mathbb{S}^3$,K_n）（见图4.1d）。

现在，若（$\mathbb{S}^3$, E_n）与（$\mathbb{S}^3$, E_m）等价，则由 A_n、A_m 的唯一性可知，存在同胚 $f : (\mathbb{S}^3, E_n) \to (\mathbb{S}^3, E_m)$，将 $(N(A_n)、A_{n+})$映至 $(N(A_m)、A_{m+})$，因此 f 诱导出（$\mathbb{S}^3$, K_n）与（$\mathbb{S}^3$, K_m）之间的等价。另一方面，当 $n > 0$时，图4.1d中的图解既约且交替，因此根据泰特猜想（见 [12, 第 5]章），（$\mathbb{S}^3$, K_n）的交叉数为 $n + 2$。这意味着$\{(\mathbb{S}^3, E_n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ 中的成员彼此不等价。由此，根据 [18, 定理 1.4] 和定理 4.1可知，对每个 n，（$\mathbb{S}^3$, E_n）的环带图为 ,。□ 

5. 附录：等价



(a) ($\mathbb{S}^3$, 51)。 (b) ($\mathbb{S}^3$, 61)。 (c) ($\mathbb{S}^3$, 52)。

图 5.1。图 2.1a、2.1c、2.3a 中的结图与 [9] 中的结图。

参考文献

[1] G. Bellettini, M. Paolini, Y.-S. Wang：三维球面中连通曲面的完备不变量，《结理论及其影响》29 (2020), 1950091. [2] F. Bonahon：三维流形的几何结构，载于：《几何拓扑手册》，R.J. Daverman 和 R.B. Sher（编），爱思唯尔 (2001), 93–164.[3] S. Boyer, X. Zhang：关于 Culler-Shalen 半范数与德恩填充，《数学年刊》，148(3) (1998), 737–801. [4] M. Eudave-Mu˜noz：对双曲结进行德恩手术得到的非双曲流形，载于：W. Kazez（编），1993 年佐治亚拓扑会议论文集，《美国数学学会/高等数学研究所高等数学研究丛书》，第 2 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997, 第 35–61 页。 [5] M. Eudave-Mu˜noz：具有塞弗特纤维化德恩手术的双曲结，《拓扑学及其应用》，121 (2002), 119–141.[6] K. Funayoshi, Y. Koda：将亏格二曲面的自同构延拓至三维球面，Q. J. Math. 71 (2020), 175–196.[7] C. Gordon, J. Luecke：结由其补空间确定，《美国数学会杂志》2 (1989), 371–415.[8] C. McA. Gordon, J. Luecke，非整数环面德恩手术，《分析与几何通讯》12(2) (2004), 471–485.[9] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi, M. Suzuki：至多六个交叉的二亏格把手体结表，《结理论及其影响》21(4), (2012) 1250035. [10] K. Johannson：《带边界三维流形的同伦等价》，《数学讲义》761，施普林格，柏林，海德堡，1979. [11] Y. Koda, M. Ozawa，附录作者：C. Gordon：二亏格把手体外部中欧拉示性数非负的本质曲面，《美国数学会会刊》367 (2015), 第 4 期, 2875–2904. [12] W. B. R. Lickorish：《结理论导论》，《数学研究生教材》175 (1997)，施普林格出版社，纽约，32–40. [13] J. H. Lee, S. Lee：具有同胚补空间的不等价把手体结，《代数与几何拓扑》12 (2012), 1059–1079.[14] M. Motto：S^3 中具有同胚补空间的不等价亏格二把手体，《拓扑学及其应用》36, (1990), 283–290.[15] J. H. Przytycki：德恩手术后曲面的不可压缩性，《密歇根数学杂志》30(3) (1983), 289–308.

[16] S. Suzuki：三维球面中的曲面：素分解，《北海道数学杂志》**4**，(1975), 179–195. [17] Y.-S. Wang：圆柱形把手体结的刚性与对称性，《大阪数学杂志》**60** (2023). [18] Y.-S. Wang：把手体结的 *JSJ* 分解，arXiv:2205.03547v2 [math.GT]。

国立中山大学，台湾高雄 804电子邮件地址:
yisheng@mail.nsysu.edu.tw