arXiv:2301.06411v1 [math.CV] 16 Jan 2023

¨C² 中有限型伪凸域上准等距映射的双赫尔德延拓 $\mathbb{C}^2$

JI刘恩松[1,2] & 蒲星思[1,2] & 洪宇 WA NG[3]

Abstract. 本文证明，对于 $\mathbb{C}^2$ 中有限型光滑边界伪凸域，其恒等映射可延拓为欧几里得边界与格罗莫夫边界之间的双赫尔德映射。作为应用，我们证明了这些域之间准等距映射的双赫尔德边界延拓。此外，我们为具有 Dini 光滑边界的有界 m-凸域得到了更精确的 Gehring-Hayman 型定理指数。

1. 引言

双全纯映射的边界延拓问题，以及更一般的粗准等距映射的边界延拓问题，在单复变函数和多复变函数中都发挥着重要作用。在复平面 $\mathbb{C}$ 中，Jordan 域之间的每个双全纯映射都可以延拓为其闭包之间的同胚。在 $\mathbb{C}^n$，$n \geq 2$，边界延拓问题则更为复杂。例如，综述 [11, 定理 1.1]中给出了以下经典结论:

设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是具有C^2-光滑边界的有界伪凸域，并满足

$$\frac{1}{C}\delta_{\Omega_1}(z)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \delta_{\Omega_2}(f(z)) \leq C\delta_{\Omega_1}(z)^{\alpha}, \quad \forall\, z \in \Omega_1. \tag{1.1}$$

并且，对于任意 $z \in \Omega_i$，$v \in \mathbb{C}^n$，若存在常数 $\beta_1, \beta_2, C > 0$ 使得 Kobayashi 度量

$$k_{\Omega_i}(z, v) \geq \frac{C|v|}{\delta_{\Omega_i}(z)^{\beta_i}},$$

其中 $\delta_{\Omega_i}(z) := \inf\{|w - z| : w \in \partial\Omega_i\}, i = 1, 2$，那么每个双全纯映射$f : \Omega_1 \to \Omega_2$ 都是双 Hölder 映射。因此，它可以延拓为 Ω_1 上的双 Hölder 连续映射。特别地，该结果对严格伪凸域或有限型有界光滑伪凸域成立 [9, 推论 2]。此外，对于严格伪凸域，若以拟等距映射代替双全纯映射，该结果同样成立 [1, 推论 6.1]。

另一方面，Balogh 和 Bonk [1] 研究了赋予 Kobayashi 度量的 $\mathbb{C}^n$ 严格伪凸有界域的 Gromov 双曲性。他们还建立了欧几里得边界与 Gromov 边界之间的对应关系，可用于正常全纯映射或拟等距映射的边界延拓问题。

后来，Zimmer [22] 和 Fiacchi [10] 证明了 $\mathbb{C}^n$ 中的有界凸域以及 $\mathbb{C}^2$ 中具有光滑有限型边界的伪凸域具有 Gromov 双曲性。他们还证明，格罗莫夫边界与

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32F45，32F18。

欧几里得边界同胚，这一结果可用于证明拟等距映射的同胚延拓。此外，对于具有光滑有限型边界的有界凸域，对应关系和延拓结果都已改进为双H¨射（参见 [23, 命题 12。2] 或 [15, 命题 1。8]）。

本文证明，对于 $\mathbb{C}^2$ 中光滑、有界、有限型伪凸域，其恒等映射不仅可以延拓为欧几里得边界与格罗莫夫边界之间的同胚，而且还可以延拓为双 Hölder 映射。

主要定理如下:

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个具有光滑边界且 D'Angelo 型有限的有界伪凸域。那么，恒等映射 $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$ 可以延拓为双 Hölder 映射

$$id : (\partial\Omega, |\cdot|) \to \left(\partial_G^{d_K}\Omega, \rho_G^{d_K}\right)$$

使两个边界之间建立映射，其中 $\rho_G^{d_K}$ 是 $(\Omega\ d_K)$ 的格罗莫夫边界上的视觉度量。

利用上述定理，我们可以将关于双 Hölder 延拓的结果推广到 $\mathbb{C}^2$ 中具有光滑边界且有限型的伪凸域情形。

定理 1.2. 设 Ω_1,$\Omega_2 \subset \mathbb{C}^2$ 是具有光滑边界且 D'Angelo 型有限的有界伪凸域。若 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ 是关于 Kobayashi 度量的拟等距映射，则 f 存在一个同胚延拓 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$，使得诱导的边界映射 $f|_{\partial\Omega_1} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ 关于欧几里得度量是双 Hölder 连续的。

按照 Balogh 和 Bonk [1], 证明上述定理的方法，我们首先为满足某些条件的芬斯勒距离给出一个下界。

定理 1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是一个有界域，且 d_F 是完备的芬斯勒距离。假设存在常数 $C_1, C_2, \alpha > 0, 1 > \beta > 0$，使得对所有 $x, y \in \Omega$,

$$d_F(x,y) \geq \alpha \left|\log\left(\frac{\delta(x)}{\delta(y)}\right)\right| - C_1, \tag{1.2}$$

以及芬斯勒度量

$$F(z,X) \geq \frac{C_2\,|X|}{\delta(z)^\beta}, \quad \forall z \in \Omega,\ 0 \neq X \in \mathbb{C}^n. \tag{1.3}$$

那么，对于每个 $x, y \in \Omega$,

$$d_F(x,y) \geq 2\alpha \log\left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}} + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C \tag{1.4}$$

其中某个常数为 $C > 0$。

这里 $a \vee b := \max\{a, b\}$，而 $L([x,y])$ 表示连接 Ω 中 x 与 y 的芬斯勒测地线 $[x,y]$ 的欧几里得长度。

注意，如果度量不完备且这些条件在局部成立，我们可以用 $|x-y|$ 替换 $L(x,y)$。

对于有界的 m-凸域上的 Kobayashi 距离，我们有如下结果。

推论 1.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界的 m-凸域。那么存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$d_K(x,y) \geq \log\left(\frac{L([x,y])^m + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C$$

对于任意 $x, y \in \Omega$。

注 1.5. 对于边界上有限型点附近局部 $\mathbb{C}$-凸可化的任意有界光滑域，Nikolov 和 Thomas 在 [19, 定理 6] 中证明了 Kobayashi 距离的类似估计。此外，Wang 最近在 [21, 定理 1.1] 中为有限型有界凸域的 Kobayashi 距离得到了精确到一个有界加性项的估计。

结合引理 2.7 和推论1.4中的 Kobayashi 距离上界估计，我们可以在 [15] 中给出定理 1.2 的另一种证明。

定理 1.6. 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n, n \geq 2$ 是边界为 Dini-光滑的有界 m-凸域，并分别设 Ω_1,Ω_2 为它们的欧几里得紧化。若 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ 是关于 Kobayashi 度量的等距映射，则 f 存在同胚延拓 $f : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_2}$，使得诱导的边界映射 $f|_{\partial\Omega_1} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ 关于欧几里得度量是双 H ¨older 连续的。

当这些域同时是 Gromov 双曲的，我们便得到准等距映射的延拓结果。此外，我们在 [15,定理 1.5] 中得到了指标更精确的 Gehring-Hayman 型定理。更多细节请参阅 [18, 定理 14] 。

定理 1.7. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是一个具有 Dini-光滑边界的有界 m-凸域。那么存在常数 $C > 0$，使得

$$L([x,y]) \leq C|x-y|^{\frac{1}{m}}$$

对任意 $x, y \in \Omega$，其中 $[x,y]$ 表示连接 x 与 y的 Kobayashi 测地线。

此外，假设 $(\Omega\ d_K)$ 是 Gromov 双曲的，且 γ是连接 x 与 y 的 Kobayashi λ-拟测地线，其中 $\lambda \geq 1$。那么存在常数 $C' > 0$，使得

$$L(\gamma) \leq C'|x-y|^{\frac{1}{m}}.$$

注 1.8. 对于严格伪凸域，指标相应地变为 $1/2$ 。对于 $\mathbb{C}^2$中的有界光滑有限型伪凸域，由于它们是 Gromov 双曲的，且 Kobayashi 度量与 Catlin 度量双 Lipschitz 等价，我们也能得到相同的 Kobayashi 度量结果。

作为一项应用，我们得到了受 Nikolov 和 Thomas [20, 定理 1.1] 启发的局部与整体 Kobayashi距离之间的比较。

定理 1.9. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n, n \geq 2$ 是一个有界域。假设 $\Omega \cap U$ is$m$-凸，且 $\partial\Omega \cap U$ 在 $U\,\Omega$ 的一个邻域 $\xi \in \partial$ 内是 Dini-光滑的。那么存在一个邻域 V，其 ξ 满足 $V \subset\subset U$，以及一个常数 $C > 0$，使得对任意$x, y \in \Omega \cap V$,

$$d_{K_\Omega}(x,y) \leq d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y) \leq d_{K_\Omega}(x,y) + C|x-y|^{\frac{1}{m}}, \tag{1.5}$$

and

$$1 \leq \frac{d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y)}{d_{K_\Omega}(x,y)} \leq 1 + C\left(\delta_\Omega(x) \wedge \delta_\Omega(y) + |x-y|^{\frac{1}{m}}\right) \text{ for } x \neq y \in \Omega \cap V. \tag{1.6}$$

注 1.10. Nikolov 和 Thomas [20, 定理 1.1] 首先为边界上有限型点附近光滑且局部 $\mathbb{C}$-凸化的区域证明了上述局部化结果，而定理 1.9 实际上放宽了他们结果表述中的边界正则性。

回想一下，对于 $\mathbb{C}^n$ 中的有界光滑有限型伪凸域，Cho 已在 [9, 定理 1], 中证明了条件（1.3），但我们不知道当 $n \geq 3$ 时它们是否满足条件（1.2）。此外，Herbort [14, 定理 2.1] 利用 [8, 定理 1]中的结果，在 $n = 2$ 时得到了 Kobayashi 距离的一个估计。在这种情况下，我们可以得到条件（1.2），但 α 可能不等于1 2。因此，为了证明相应的延拓结果，我们必须考虑 Catlin 度量。

现在设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : r(z) < 0\}$ 是一个有界光滑的 D'Angelo 有限型伪凸域，且 $\xi \in \partial\Omega$ 是一个型为 m_ξ 的点。通过旋转典范坐标，我们可以安排使$\partial\Omega$ 在 ξ 处的法向方向由 $\Im z_1$-轴给出。假设 $\xi = 0$，并利用隐函数定理，我们得到形如 $r(z_1, z_2) = \Im z_2 - F(z_1, \Re z_2)$ 的局部定义函数，其中 F是一个光滑函数，且 $F(0) = 0$。由于 $\frac{\partial r}{\partial z_2}(\xi) \neq 0$，在 ξ 的一个邻域内，我们可以定义以下向量场

$$L_1 := \frac{\partial}{\partial z_1} - \left(\frac{\partial r}{\partial z_2}\right)^{-1} \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}, \text{ and } L_2 := \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

注意， $L_1 r \equiv 0$和 L_1, L_2 构成了 $T^{1,}{}_z{}^0$的一个基，对所有靠近 ξ的 z均成立。对于任意 $j, k > 0$, 令

$$\mathcal{L}_{j,k}(z) := \underbrace{L_1 \dots L_1}_{j-1 \text{ times}} \underbrace{\bar{L}_1 \dots \bar{L}_1}_{k-1 \text{ times}} \partial\bar{\partial} r(L_1, \bar{L}_1)(z).$$

由于 $\xi \in \partial\Omega$ 是一个类型为 m_ξ的点，根据 [4, 定理 2.4], 的结果可知，存在 j_0, k_0, 满足 $j_0 + k_0 = m_\xi$

$$\mathcal{L}_{j,k}(\xi) = 0 \quad j + k < m_\xi, \text{ and } \mathcal{L}_{j_0,k_0}(\xi) \neq 0.$$

记

$$C_l^\xi(z) = \max\left\{|\mathcal{L}_{j,k}(z)| : j + k = l\right\}.$$

设 $X = b_1 L_1 + b_2 L_2$ 是 z处的一个全纯切向量。现在定义 Catlin 度量

$$M_\xi(z, X) := \frac{|b_2|}{|r(z)|} + |b_1| \sum_{l=2}^{m_\xi} \left(\frac{C_l^\xi(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

根据 Catlin 的结果 [8, 定理 1], , Kobayashi 度量与 Catlin 度量局部双 Lipschitz 等价。

定理 1.11. 设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : r(z) < 0\}$ 是一个光滑边界伪凸域。若 $\xi \in \partial\Omega$ 是一个有限型 m_ξ点，则存在一个 ξ 的邻域 U和一个常数 $C \geq 1$，使得

$$\frac{1}{C} M_\xi(z, X) \leq K_\Omega(z, X) \leq C M_\xi(z, X)$$

对于每个 $z \in \Omega \cap U$ 和 $X \in \mathbb{C}^2$。

为方便起见，我们可以对 Catlin 度量的形式稍作调整。如果 X 是 z处的全纯切向量，则它具有唯一的正交分解 $X = X_H + X_N$，其方向分别由 $X_H \in H_{\pi(z)}\partial\Omega$ 和 $X_N \in N_{\pi(z)}\partial\Omega$ 张成（第 2.2节）。由于 L_2可能不与 X_N平行，我们令

$$\widetilde{M}_\xi(z,X) := \frac{|X_N|}{\delta(z)} + |X_H| \sum_{l=2}^{m_\xi} \left(\frac{C_l^\xi(z)}{\delta(z)} \right)^{\frac{1}{l}}.$$

~引理 2.2 因此可推出 $M_\xi(z,X) \asymp M_\xi(z,X)$ 在 U 的 ξ邻域内。

现在取 Ω 的一个开邻域 U_i， $\xi_i \in \partial$、 $1 \le i \le s$构成 Ω 的一个有限覆盖 ∂。存在一个足够小的 $\varepsilon > 0$，使得该邻域

$$N_\varepsilon(\partial\Omega) := \{z \in \Omega \| \delta_\Omega(z) | < \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{s} U_i.$$

记作 $I_z := \{i : z \in \overline{U}_i\}$，并令

$$\widetilde{M}(z,X) := \max_{i \in I_z} \{\widetilde{M}_{\xi_i}(z,X)\} \text{ for } z \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega).$$

由于它是上半连续的，我们可以在 Ω 上定义一个全局芬斯勒度量:

$$\widetilde{K}(z,X) := K(z,X)S(z,X)$$

~ ~，其中正函数 $S(z,X) \asymp 1$，且 $K(z,X) = M(z,X)$ 对于 $z \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$，~这意味着 $K(z,X) \asymp K(z,X)$。

记 $m = \max\{m_{\xi_i}\}$，对于 $z \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 和 $X \in \mathbb{C}^2$，于是可得

$$\frac{|X_N|}{\delta(z)} + \frac{1}{C}\frac{|X_H|}{\delta(z)^{\frac{1}{m}}} \le \widetilde{K}(z,X) \le \frac{|X_N|}{\delta(z)} + C\frac{|X_H|}{\delta(z)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.7}$$

对于某个常数 $C > 0$。我们可以称其为 Catlin 型度量，并将与该度量相关的距离记为 $d_{\widetilde{K}}$。

利用 Forstneric 和 Rosay 的技巧[12, 命题 2。5] 和定理1.3，我们得到以下估计。

定理 1.12。假设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个有限型光滑边界伪凸域 m。那么存在一个常数 $C \ge 1$，使得

$$g_m(x,y) - C \le d_{\widetilde{K}}(x,y) \le g_1(x,y) + C$$

对于每个 x， $y \in \Omega$。

这里， $g_k : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ 定义为

$$g_k(x,y) = 2\log\left(\frac{|x-y|^k + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}} \right),$$

并且 $|x-y|$ 是标准欧几里得距离。

根据 Gromov双曲的性质和上述估计，我们推得此类域之间准等距映射的边界延拓是双 H¨older 连续的。

本文结构安排如下。第2节将回顾一些定义和预备结果。第3节给出定理1.3的证明。在第

4节将介绍映射的边界延拓的一些应用。最后，我们将给出定理1.2的证明。

2. Preliminaries

2.1. 记号。 (1) 对于 $z \in \mathbb{C}^n$，令 $|\cdot|$ 表示标准欧几里得范数，并令 $|z_1 - z_2|$ 表示 z_1、$z_2 \in \mathbb{C}^n$ 的标准欧几里得距离。

(2) 给定开集 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n, x \in \Omega$ 和 $v \in \mathbb{C}^n$，记为

$$\delta(x) \text{ or } \delta_\Omega(x) = \inf\{|x - \xi| : \xi \in \partial\Omega\}$$

and

$$\delta_\Omega(x, v) = \inf\{|x - \xi| : \xi \in \partial\Omega \cap (x + \mathbb{C}v)\}.$$

(3) 回顾一下，对于实数 a、b、$a \vee b := \max\{a, b\}$ 和 $a \wedge b := \min\{a, b\}$。

(4) 对任意曲线 γ，分别用 $L(\gamma)$ 和 $L_K(\gamma)$ 表示其欧几里得长度和 Kobayashi 长度。

(5) 对于函数 f、g，若存在 $C > 0$ 使得 $f \le Cg$，则记作 $f \lesssim g$，并记作

$$f \asymp g \text{ if } f \lesssim g \text{ and } g \lesssim f.$$

2.2. 曲线的边界投影。我们首先给出一个点与其边界投影之间的关系。注意，该结果对 $\mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 中的域同样成立，其证明可见 [1, 引理 2.1]。

引理 2.1. 设 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) < 0\}, n \ge 2$ 是一个具有 C^2 光滑边界的有界域。则存在 $\delta_0 > 0$ 使得

(a). 对于每个点 $x \in N_{\delta_0}(\partial\Omega) = \{z \in \Omega \| \delta_\Omega(z) | < \delta_0\}$，存在唯一的点 $\pi(x) \in \partial\Omega$，使得 $|x - \pi(x)| = \delta_\Omega(x)$。

(b). 有符号距离函数 $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$

$$\rho(x) = \begin{cases} -\delta(x) & for \quad x \in \Omega \\ \delta(x) & for \quad x \in \mathbb{C}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

在 $N_{\delta_0}(\partial\Omega)$ 中是 C^2-光滑的。

(c). 对于映射 $\pi : N_{\delta_0}(\partial\Omega) \to \partial\Omega$ 的纤维，有

$$\pi^{-1}(p) = (p - \delta_0 \vec{n}(p),\ p + \delta_0 \vec{n}(p)),$$

其中，$\vec{n}(p)$ 是 $\partial\Omega$ 在 $p \in \partial\Omega$ 处的外单位法向量。

(d). 定义函数 ρ 的梯度满足

$$\nabla\rho(x) = \vec{n}(\pi(x))$$

对所有 $x \in N_{\delta_0}(\partial\Omega_\circ)$

(e). the projection map $\pi : N_{\delta_0}(\partial\Omega) \to \partial\Omega$ is C^1-smooth.

现在我们开始考虑复空间中的域。自然地，可以将 $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 视为 $(\mathrm{Re}\ z_1, \mathrm{Im}\ z_1, \ldots, \mathrm{Re}\ z_n, \mathrm{Im}\, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$。回顾一下，对于任意$p \in \partial\Omega$，实切空间 $T_p\partial\Omega$ 由下式给出:

$$T_p\partial\Omega = \left\{X \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\langle\bar{\partial}r(p), X\rangle = 0\right\},$$

且其复切空间为

$$H_p\partial\Omega = \left\{X \in \mathbb{C}^n : \langle\bar{\partial}r(p), X\rangle = 0\right\},$$

其中

$$\bar{\partial} r(p)=\left(\frac{\partial r}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_n}(p)\right).$$

这里， $\mathbb{C}^n$ 中的标准厄米内积为 $\langle X,Y\rangle=\sum_{k=1}^n X_k\overline{Y}_k$。因此，对任意向量 $0\neq X\in\mathbb{C}^n$，它都有唯一的正交分解 $X=X_H+X_N$，其中 $X_H\in H_p\partial\Omega$且 $X_N\in N_p\partial\Omega$。

2.3. Kobayashi 度量。给定区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n, n\geq 2$，$\Omega$ 上的芬斯勒度量是一个上半连续映射 $F\colon \Omega\times\mathbb{C}^n\to[0,\infty)$，满足对于任意 $z\in\Omega$ $t\in\mathbb{C}$ 和 $X\in\mathbb{C}^n$，有 $F(z;\ tX)=|t|F(z;\ X)$。与 F 相关联的距离函数 d_F 定义为

$$d_F(x,y)=\inf\{F\text{-length}(\gamma):\gamma:[0,1]\to\Omega \text{ is a piecewise } C^1\text{-smooth curve with } \gamma(0)=x,\gamma(1)=y\},$$

其中

$$F\text{-length}(\gamma)=\int_0^1 F(\gamma(t);\dot{\gamma}(t))dt.$$

多个复变函数中的一个非常重要的芬斯勒度量是 Kobayashi 度量。对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n(n\geq 2)$，(无穷小) Kobayashi 度量$K_\Omega(x;v)$ $x\in\Omega$ $v\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$定义为

$$K_\Omega(x;v)=\inf\left\{|\xi|:f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\Omega),\text{ with } f(0)=x,d(f)_0(\xi)=v\right\}.$$

为方便起见，我们用 d_{K_Ω} 表示与 Kobayashi 度量 K_Ω对应的 Kobayashi 距离，有时也省略下标 Ω。Kobayashi 距离的主要性质是它在全纯映射下会收缩。也就是说，若 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 是一个全纯映射，则

$$\forall z,w\in\Omega_1\quad d_{K_{\Omega_2}}(f(z),f(w))\leqslant d_{K_{\Omega_1}}(z,w).$$

特别地，Kobayashi 距离在双全纯映射下保持不变，并且在包含关系下递减；也就是说，若 $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\mathbb{C}^n$ 是两个有界域，则对所有 $z,w\in\Omega_1$，有 $d_{K_{\Omega_2}}(z,w)\leq d_{K_{\Omega_1}}(z,w)$。

$\widetilde{\ }$现在我们证明度量 M_ξ 和 M_ξ 是双 Lipschitz 等价的。

引理 2.2. 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ 是一个光滑边界伪凸域。假设 $\xi\in\partial\Omega$ 是一个有限型 m_ξ边界点，则存在 U 的一个邻域ξ 以及一个常数 $C\geq 1$，使得对每个 $z\in\Omega\cap U$和 $X\in\mathbb{C}^2$,

$$\frac{1}{C}M_\xi(z,X)\leq\widetilde{M}_\xi(z,X)\leq CM_\xi(z,X).$$

Proof. 取 ξ 的一个邻域 U。通过对标准坐标进行仿射变换，不失一般性，我们可以假设 $\xi=0$ 和 $\Omega\cap U=\{z\in\mathbb{C}^2:\ r(z_1,z_2)=\Im z_2-F(z_1,\Re z_2)<0\}$，其中 F 是一个光滑函数，满足 $F(0)=0$ 且 $\nabla F(0)=0$。因此 $\frac{\partial r}{\partial z_1}(\xi)=0$，并且 $\frac{\partial r}{\partial z_2}(\xi)\neq 0$。

若 U 是选定的一个充分小的邻域，则我们可以定义一个函数$s:=(\frac{\partial r}{\partial z_2})^{-1}\frac{\partial r}{\partial z_1}$，并且在 U上有不等式 $0\leq|s|\leq\frac{1}{2}$。注意到向量场

$$L_1=\frac{\partial}{\partial z_1}-s\frac{\partial}{\partial z_2},\text{ and } L_2=\frac{\partial}{\partial z_2}$$

构成了 $T^{1,}{}_z{}^0$的一个基，对所有靠近 ξ的 z均成立，因此任意 $X \in T^{1,}{}_z{}^0 \cong \mathbb{C}^2$都可以写成$X = b_1L_1 + b_2L_2 = X_H + X_N$，其中 $X_H \in H_{\pi(z)}(\partial\Omega)$ 且 $X_N \in N_{\pi(z)}(\partial\Omega)$。

$L_1 r \equiv 0$ 意味着 L_1 与 X_H平行。注意到 L_2 可能与 X_H不正交，我们记

$$L_1^{\perp} := s\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2},$$

它与 X_N平行。因此，

$$\begin{aligned} b_1L_1 + b_2L_2 &= b_1L_1 + b_2\left(L_1^{\perp} - sL_1\right)\frac{1}{1+s^2} \\ &= \left(b_1 - \frac{b_2 s}{1+s^2}\right)L_1 + \frac{b_2}{1+s^2}L_1^{\perp}, \end{aligned}$$

这意味着

$$X_H = \left(b_1 - \frac{b_2 s}{1+s^2}\right)L_1, \quad X_N = \frac{b_2}{1+s^2}L_1^{\perp}$$

and

$$|X_H| = \left|b_1 - \frac{b_2 s}{1+s^2}\right|\sqrt{1+|s|^2}, \quad |X_N| = |b_2|\,\frac{\sqrt{1+|s|^2}}{|1+s^2|}.$$

对于任意 $z \in \Omega \cap U$，记 $\omega = \pi(z) \in \partial\Omega \cap U$，则 $\Im\omega_2 = F(\omega_1, \Re\omega_2)$。根据定义函数的选取，我们有

$$|r(z)| \asymp \delta(z).$$

那么，根据上述等式可得

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{\xi}(z,X) &= \frac{|X_N|}{\delta(z)} + |X_H|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{\delta(z)}\right)^{\frac{1}{l}} \asymp \frac{|X_N|}{|r(z)|} + |X_H|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}} \\ &\asymp \frac{|b_2|}{|r(z)|} + \left|b_1 + b_1 s^2 - b_2 s\right|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}} \\ &\asymp \frac{|b_2|}{|r(z)|} + |b_1|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}} \pm |b_2|\,|s|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}} \\ &\asymp M_{\xi}(z,X). \end{aligned}$$

最后一个不等式成立是因为

$$\frac{1}{|r(z)|} \pm |s|\sum_{l=2}^{m_\xi}\left(\frac{C_l^{\xi}(z)}{|r(z)|}\right)^{\frac{1}{l}} \asymp \frac{1}{|r(z)|}.$$

□

现在我们给出 $\mathbb{C}^2$ 中有限型伪凸域上的 Catlin 型距离的一些估计。

引理 2.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个有限型m光滑边界伪凸域。则存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $C \geq 1$，使得对于任意 $x, y \in \Omega \cap N_{\varepsilon}(\partial\Omega)$,

$$d_{\widetilde{K}}(x,y) \geq \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|.$$

此外，当 $\pi(x) = \pi(y)$ 时，我们有

$$d_{\widetilde{K}}(x,y) = \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|.$$

Proof。设 $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ 是一条分段 C^1-光滑曲线，端点为$x = \gamma(0)$ 和 $y = \gamma(1)$。若 $\gamma \subset N_\varepsilon(\partial\Omega)$，根据引理 2.1 的结论 (d)，可得 $2\partial\delta(\gamma(t)) = \nabla\rho(\gamma(t)) = \vec{n}(\pi(\gamma(t)))$。于是，对于那些$\dot\gamma(t)$ 存在的 $t \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}\delta(\gamma(t))\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \dot\gamma(t)\frac{\partial}{\partial z_k}\delta(\gamma(t)) + \sum_{k=1}^n \overline{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial \bar z_k}\delta(\gamma(t))\right| \\ &= 2\left|\mathrm{Re}\left\langle \bar\partial\delta\left(\gamma(t)\right), \dot\gamma(t)\right\rangle\right| = \left|\mathrm{Re}\left\langle \vec{n}(\pi(\gamma(t))), \dot\gamma(t)\right\rangle\right| \\ &\le \left|\dot\gamma_N(t)\right|.\end{aligned}$$

则（1.7）意味着

$$\widetilde{K}\text{-length }(\gamma) \ge \int_0^1 \frac{|\dot\gamma_N(t)|}{\delta(\gamma(t))}dt \ge \left|\int_0^1 \frac{d(\delta(\gamma(t)))}{\delta(\gamma(t))}\right| \ge \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|.$$

若 γ 不属于 $N_\varepsilon(\partial\Omega)$，则不妨设 $\delta(x) \le \delta(y)$，并令

$$t_0 := \min\{t \in [0,1] : \gamma(t) \notin N_\varepsilon(\partial\Omega)\}.$$

于是 $\gamma_0 := \gamma|_{[0,t_0]} \subset N_\varepsilon(\partial\Omega)$，这意味着

$$\widetilde{K}\text{-length }(\gamma) \ge \widetilde{K}\text{-length }(\gamma_0) \ge \log\left(\frac{\varepsilon}{\delta(x)}\right) \ge \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right).$$

由于 γ 是任意的，我们推出

$$d_{\widetilde{K}}(x,y) \ge \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|.$$

设 $\pi(x) = \pi(y) = p \in \partial\Omega$。由于 $\gamma\colon [0,1] \to \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ $t \mapsto x + t(y-x)$ 是包含在纤维 $\pi^{-1}(p)$ 中的一条直线段，因此由引理2.1 可得

$$\dot\gamma(t) \equiv \pm|x-y|\vec{n}(p), \quad \vec{n}(\pi(\gamma(t))) = \vec{n}(p), \quad \forall t \in [0,1].$$

因此 $\frac{d}{dt}\delta(\gamma(t)) = \pm|x-y| = \pm\left|\dot\gamma_N(t)\right|$，且 $\dot\gamma_H(t) \equiv 0$。类似的计算可得

$$\widetilde{K}\text{-length }(\gamma) = \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|,$$

这意味着

$$d_{\widetilde{K}}(x,y) = \left|\log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)\right|.$$

在这种情况下，我们知道直线段是一条测地线。 □

2.4. m-凸域。我们首先回顾 m-凸的定义。该定义可见于 [16]。

定义 2.4. 有界凸域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n, n \ge 2$，若存在某个 $C > 0$ 和 $m > 1$，则称其为 m-凸

$$\delta_\Omega(z;v) \le C\delta_\Omega(z)^{\frac{1}{m}}, \quad z \in \Omega, v \in \mathbb{C}^n.$$

对于凸域，Kobayashi 度量满足以下估计。

引理 2。**5** [13, 定理 5]。 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界凸域。那么 Kobayashi 度量满足

$$\frac{|v|}{2\delta_\Omega(p;v)} \leq K_\Omega(p;v) \leq \frac{|v|}{\delta_\Omega(p;v)}, \quad \textit{for any } p \in \Omega,\ v \in \mathbb{C}^n.$$

引理 2.**6** [16, 命题 2.4]. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为有界凸域。则 Kobayashi 距离

$$d_K(x,y) \geq \frac{1}{2}\left|\log \frac{\delta_\Omega(x)}{\delta_\Omega(y)}\right|, \quad \textit{for any } x,y \in \Omega.$$

回顾一下，区域 Ω 在 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 C^1-光滑边界点 p 若其外单位法向量 $\vec{n}$ 在 $\partial\Omega$ 的 p 附近是 Dini连续函数，则称该点为 Dini光滑点。这意味着存在一个邻域 U，使得 p

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}dt < +\infty,$$

其中

$$\omega(t) = \omega(\vec{n}, \partial\Omega \cap U, t) := \sup\{|\vec{n}(x) - \vec{n}(y)| : |x-y| < t,\ x,y \in \partial\Omega \cap U\}$$

分别表示连续模。注意，Dini-光滑是比 $C^{1,\epsilon}$-光滑更弱的条件。这里，Dini光滑域是指 Ω 的每个边界点都是 Dini光滑点。

于是我们得到 Kobayashi 距离的如下上界。

引理 2.**7** [17, 推论 8]. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 Dini光滑有界域，且$x, y \in \Omega$。则存在一个常数 $A > 1 + \sqrt{2}/2$，使得

$$d_K(x,y) \leq \log\left(1 + \frac{A|x-y|}{\sqrt{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}}\right).$$

2.5. Gromov双曲。在本节中，我们将给出有关格罗莫夫双曲性的一些定义和结果。有关更多详细信息，请参阅[7] 。

设（X， d）为一个度量空间。相对于基点 $\omega \in X$，两点 x、 $y \in X$ 的 *Gromov product* 定义为

$$(x|y)_\omega := \frac{1}{2}\left(d(x,\omega) + d(y,\omega) - d(x,y)\right).$$

回顾一下，度量空间（X， d）是一个 *geodesic* 空间，当且仅当任意两个不同的点x、 $y \in X$ 都可以由一条测地线段连接，即某个等距映射γ： $[0, d(x, y)] \to X$ 的像，其中 γ**(0)** $= x$ 且 $\gamma(d(x, y)) = y$。特别地，如果 γ是一个（λ， k）-拟等距，则称其为（λ， k）-拟测地线。并且当 $k = 0$时，我们称其为λ-拟测地线。

如果度量空间（X， d）中的每个闭球都是紧的，则称其为 *proper*。如果存在一个常数 $\delta \geq 0$，使得对于任意 x、 y、 z、 $\omega \in X$，则称完备的测地度量空间 X 为 *Gromov hyperbolic*,

$$(x|y)_\omega \geq \min\{(x|z)_\omega, (z|y)_\omega\} - \delta.$$

然后我们回顾格罗莫夫边界。

定义 2.8。（**1**）若序列 $\{x_i\}$ 属于 X，且当 i 趋于 $j \to \infty$ 时，$(x_i|x_j)_\omega \to \infty$，则称该序列为 *Gromov sequence*。

（2）若当 $i \to \infty$ 时，$(x_i|y_i)_\omega \to \infty$，则称这两个序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_j\}$ 为 $equivalent$。

（3）将 $Gromov\ boundary\ \partial_G X$ X 定义为所有Gromov序列的等价类所组成的集合，并称 $\overline{X}^G = X \cup \partial_G X$ 为 $Gromov\ closure\ X$的 $Gromov\ closure$。

（4）对于 $a \in X$ 和 $b \in \partial_G X$， a 与 b 的Gromov积（$a|b$）$_\omega$ 定义为

$$(a|b)_\omega = \inf\left\{\liminf_{i\to\infty}(a|b_i)_\omega : \{b_i\} \in b\right\}.$$

（5）对于 a、 $b \in \partial_G X$， a 与 b 的Gromov积（$a|b$）$_\omega$ 定义为

$$(a|b)_\omega = \inf\left\{\liminf_{i\to\infty}(a_i|b_i)_\omega : \{a_i\} \in a \text{ and } \{b_i\} \in b\right\}.$$

对于Gromov双曲空间 X，可以通过扩展Gromov积在$\partial_G X$ 上定义一类视觉度量。对于该类中的任意度量 ρ_G ，存在参数 $\epsilon > 0$ 和基点 $\omega \in X$ ，使得

$$\rho_G(a,b) \asymp \exp\left(-\epsilon(a|b)_w\right), \quad \text{for } a,b \in \partial_G X.$$

现在我们如下回顾粗准等距映射的定义。

定义2.9。设 f： $X \to Y$是度量空间 X 与 Y之间的映射。

(1) 若对所有 x、 $y \in X$，都存在常数 $\lambda \geq 1$、 $k \geq 0$，使得

$$\lambda^{-1} d_X(x,y) - k \leq d_Y(f(x),f(y)) \leq \lambda d_X(x,y) + k,$$

则称 f 为（λ， k）-拟等距。特别地，当 $\lambda = 1$ 且 $k = 0$ 时，称 f 为等距映射。

(2) 对于双射 f 及所有 x、 $y \in X$，若存在常数 $\lambda \geq 1$、 $1 > \alpha > 0$，使得

$$\lambda^{-1} d_X(x,y)^{\frac{1}{\alpha}} \leq d_Y(f(x),f(y)) \leq \lambda d_X(x,y)^{\alpha}$$

则 f 是 α-双 Hölder 映射。

因此，由 [5], 中的命题5.5，我们得到如下延拓结果：

命题 2.10. 设 X 和 Y 是 Gromov双曲度量空间。若 f: $X \to \tilde{Y}$ 是拟等距，则 f 诱导出一个双 Hölder 映射 f: $\partial_G X \to \partial_G Y$。

根据拟测地线的稳定性，我们可以推得 Gromov双曲性在拟等距下保持不变。

定理 2.11 [7, Prat III：定理 1.7]。假设 (X,d) 是一个具有 $\delta > 0$ 的 δ-Gromov双曲测地空间。再假设 γ 是 X 中的一条 (λ,ε)-拟测地线，而 $[p,q]$ 是一条连接 γ 的端点的相应测地线段。那么存在一个常数 $R = R(\delta,\lambda,\varepsilon)$，使得 $[p,q]$ 与 γ 的像之间的豪斯多夫距离小于 R。

命题 2.12 [7, Prat III：定理 1.9]。设 X 和 Y 为测地度量空间，且设 f: $X \to Y$ 是一个拟等距嵌入。如果 Y 是 Gromov双曲的，那么 X 也是 Gromov双曲的。

给定一个有限型光滑有界伪凸域 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ m，若 ε 足够小且 $\omega \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 固定，则引理 2.3 表明，距离$d_{\widetilde{K}}(\omega,x) \to \infty$ 在 $x \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 趋于 $\partial\Omega$ 时趋于零。这说明度量 d_K 和$d_{\widetilde{K}}$ 均为完备度量。

霍普夫-里诺定理（见 [7, Prat I：命题 3.7]）告诉我们，Ω 中任意两点都可以通过一条 Kobayashi 测地线或卡特林型测地线连接。特别地，赋予 Kobayashi 度量的有界凸域也是测地空间 [2]。根据 Fiacchi [10,定理 1.1]，Ω 在 Kobayashi 度量下是 Gromov双曲。

鉴于命题2.10 和2.12，我们得到以下关键结果。

命题 2.13. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个边界光滑且为有限型的有界伪凸域。则恒等映射 id : $\Omega \to \Omega$ 可以延拓为一个双 Hölder 映射

$$id : \left(\partial_G^{d_{\widetilde{K}}}\Omega, \rho_G^{d_{\widetilde{K}}}\right) \to \left(\partial_G^{d_K}\Omega, \rho_G^{d_K}\right)$$

在边界之间，其中 $\rho_G^{d_{\widetilde{K}}}$ 和 $\rho_G^{d_K}$ 分别是 $(\Omega\ d_{\widetilde{K}})$ 和 $(\Omega\ d_K)$ 的格罗莫夫边界上的视觉度量。

3. Estimate of the Finsler metric

本节首先证明定理1.3。为方便起见，我们将其重述如下。

定理 3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是一个有界域，且 d_F 是一个完备的 Finsler 距离。假设存在常数 $C_1, C_2, \alpha > 0, 1 > \beta > 0$，使得

$$d_F(x,y) \geq \alpha \left|\log\left(\frac{\delta(x)}{\delta(y)}\right)\right| - C_1, \quad for\ any\ x, y \in \Omega \tag{3.1}$$

以及芬斯勒度量

$$F(z,X) \geq \frac{C_2\,|X|}{\delta(z)^\beta}, \quad for\ any\ z \in \Omega,\ 0 \neq X \in \mathbb{C}^n. \tag{3.2}$$

于是，对每个 $x, y \in \Omega$，可得

$$d_F(x,y) \geq 2\alpha \log\left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}} + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C, \tag{3.3}$$

对于某个常数 $C > 0$。这里，$L([x,y])$ 表示连接 Ω 中 x 与 y 的芬斯勒测地线 $[x,y]$ 的欧几里得长度。

Proof。对于任意 x，$y \in \Omega$，假设 (3.1) 蕴含

$$d_F(x,y) \geq 2\alpha \log\left(\frac{\delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C.$$

因此，我们只需验证

$$d_F(x,y) \geq 2\alpha \log\left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C.$$

现在，对于任意一条芬斯勒测地线 $\gamma : [0,1] \to \Omega$，若 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$，我们知道 γ 是绝对连续的。令 $L([x,y])$ 表示$\gamma = [x,y]$的欧几里得长度。定义 $H := \max_{z\in\gamma} \delta(z)$。存在 $t_0 \in [0,1]$，使得 $H = \delta(\gamma(t_0))$。考虑子曲线 $\gamma_1 = \gamma|_{[0,t_0]}$ 和 $\gamma_2 = \gamma|_{[t_0,1]}$，有两种可能：

如果 $H \geq L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}$，由（3.1）可知

$$F\text{-length }(\gamma_1) \geq \alpha \log\left(\frac{H}{\delta(x)}\right),$$

and

$$F\text{- length}\,(\gamma_2) \geq \alpha \log\left(\frac{H}{\delta(y)}\right).$$

Thus

$$F\text{-length }(\gamma) \geq 2\alpha \log\left(\frac{H}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) \geq 2\alpha \log\left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right),$$

由此完成证明。

另一种可能是 $H < L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}$。由于 $\delta(x) \leq H$，存在 $k \in \mathbb{N}_+$使得

$$2^{-\frac{k}{\beta}} H < \delta(x) \leq 2^{-\frac{k-1}{\beta}} H.$$

考虑曲线 γ_1，并如下定义 $0 = s_0 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq t_0$，

$$s_j = \min\left\{ s \in [0,t_0] : \delta(\gamma(s)) = \frac{H}{2^{\frac{k-j}{\beta}}} \right\}, \quad j = 1,\ldots,k.$$

记 $x_j = \gamma(s_j) \quad j = 0,\ldots,k$，则有

$$1 \leq \frac{\delta\left(x_j\right)}{\delta\left(x_{j-1}\right)} \leq 2^{\frac{1}{\beta}}.$$

接下来我们考虑以下两种备选方案：

(a). 第一种情形下，我们假设存在一个指标 $l \in \{1,\ldots,k\}$，使得

$$L([x_{l-1},x_l]) > \frac{1}{8} 2^{-(k-l)} L([x,y]).$$

为方便起见，此处 $[x_{l-1},x_l]$ 表示 $\gamma|_{[s_{l-1},s_l]}$。于是，对于 $t \in [s_{l-1},s_l]$，有

$$\delta(\gamma(t)) \leq 2^{-\frac{k-l}{\beta}} H,$$

这意味着

$$\begin{aligned} F\text{- length}\left(\gamma|_{[s_{l-1},s_l]}\right) &\gtrsim \int_{s_{l-1}}^{s_l} \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\delta(\gamma(t))^{\beta}} dt \geq \frac{2^{k-l}}{H^{\beta}} \int_{s_{l-1}}^{s_l} |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \frac{2^{k-l} L([x_{l-1},x_l])}{H^{\beta}} \gtrsim \frac{L([x,y])}{H^{\beta}}. \end{aligned}$$

令 $t_1 := s_k \leq t_0$。由（3.1）可得

$$\begin{aligned} F\text{-length }\left(\gamma|_{[0,t_1]}\right) &= F\text{-length }\left(\gamma|_{[0,s_{l-1}]}\right) + F\text{-length }\left(\gamma|_{[s_{l-1},s_l]}\right) \\ &\quad + F\text{-length }\left(\gamma|_{[s_l,s_k]}\right) \\ &\geq \alpha \log\left(\frac{\delta\left(x_{l-1}\right)}{\delta\left(x_0\right)}\right) + C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}} + \alpha \log\left(\frac{\delta\left(x_k\right)}{\delta\left(x_l\right)}\right) \\ &\geq \alpha \log\left(\frac{\delta\left(x_k\right)}{\delta\left(x_0\right)}\right) + C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta}\log 2 \\ &= \alpha \log\left(\frac{H}{\delta(x)}\right) + C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}} - C. \end{aligned}$$

（b）。第二种备选方案是

$$L([x_{j-1},x_j])\le\frac{1}{8}2^{-(k-j)}L([x,y]),\quad j=1,\dots,k.$$

Then

$$L([x,\gamma(t_1)])=\sum_{j=1}^{k}L([x_{j-1},x_j])\le\frac{1}{4}L([x,y]).$$

如下。另一方面，再次利用（3.1），由此我们证明了

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[0,t_1]}\right)\ge\alpha\log\left(\frac{H}{\delta(x)}\right).$$

总结上述讨论，我们得到以下两种可能性

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[0,t_1]}\right)\ge\alpha\log\left(\frac{H}{\delta(x)}\right)+C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}}-C, \tag{3.4}$$

or

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[0,t_1]}\right)\ge\alpha\log\left(\frac{H}{\delta(x)}\right),\ \text{and}\ L([x,\gamma(t_1)])\le\frac{1}{4}L([x,y]), \tag{3.5}$$

其中 $t_1\in[0,t_0]$。

对曲线 γ_2 进行类似的考察，以代替 γ_1，我们可以找到 $t_2\in[t_0,1]$，使得以下备选方案之一成立

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_2,1]}\right)\ge\alpha\log\left(\frac{H}{\delta(y)}\right)+C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}}-C, \tag{3.6}$$

or

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_2,1]}\right)\ge\alpha\log\left(\frac{H}{\delta(y)}\right),\ \text{and}\ L([y,\gamma(t_2)])\le\frac{1}{4}L([x,y]). \tag{3.7}$$

结合（3.5）与（3.7），不等式

$$L([\gamma(t_1),\gamma(t_2)])=L([x,y])-L([x,\gamma(t_1)])-L([y,\gamma(t_2)])\ge\frac{1}{2}L([x,y]),$$

随之得到。这与第一种备选方案中的估计类似。因此，我们现在得到

$$F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_1,t_2]}\right)\ge C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}F\text{-length}\ (\gamma)&=F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[0,t_1]}\right)+F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_1,t_2]}\right)\\&\quad+F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_2,1]}\right)\ge2\alpha\log\left(\frac{H}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right)+C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}}-C.\end{aligned}$$

如果（3.4）和（3.6）或（3.4）和（3.7），或者（3.5）和（3.6）同时成立，则该不等式也成立。更明确地说，

$$\begin{aligned}F\text{-length}\ (\gamma)&\ge F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[0,t_1]}\right)+F\text{-length}\ \left(\gamma|_{[t_2,1]}\right)\\&\ge2\alpha\log\left(\frac{H}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right)+C\frac{L([x,y])}{H^{\beta}}-C,\end{aligned}$$

这意味着上述估计在任何情况下都成立。

Let

$$f(t) := 2\alpha \log \frac{t}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}} + C\frac{L([x,y])}{t^{\beta}}.$$

通过简单计算可知，函数 f 在.....时取得最小值

$$t = \left(\frac{\beta C}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}$$

这给出了下界

$$F\text{-length }(\gamma) \geq 2\alpha \log \left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C.$$

由于 γ 是一条芬斯勒测地线，因此

$$d_F(x,y) \geq 2\alpha \log \left(\frac{L([x,y])^{\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C,$$

由此完成证明。 □

接着利用引理 2.5 和引理 2.6 第 2.4 节中的结果，可得以下结论。

推论 3.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界 m-凸区域。存在常数 $C > 0$，使得 Kobayashi 距离

$$d_K(x,y) \geq \log \left(\frac{L([x,y])^m + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C$$

对每个 $x, y \in \Omega$。

注意，引理 2.7 推出了有界 m- 凸域上的 Gehring-Hayman 定理。

定理 3.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是具有 Dini 光滑边界的有界 m-凸域。则存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 x、$y \in \Omega$,

$$L([x,y]) \leq C|x-y|^{\frac{1}{m}}$$

其中 $[x,y]$ 是连接 x 与 y 的 Kobayashi 测地线。

此外，若 $(\Omega\ d_K)$ 是 Gromov双曲的，且 γ 是连接 x 与 y 且满足 $\lambda \geq 1$ 的 Kobayashi λ-拟测地线，则存在一个满足下式的常数 $C' > 0$

$$L(\gamma) \leq C'|x-y|^{\frac{1}{m}}.$$

Proof。对于 x, $y \in \Omega$，根据引理 2.7和推论 3.2，可得

$$L([x,y])^m \lesssim |x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}.$$

因此，若 $\sqrt{\delta(x)\delta(y)} \leq |x-y|$，我们得到所需的估计 $L([x,y]) \circ |x-y|^{\frac{1}{m}}$。

当 $\sqrt{\delta(x)\delta(y)} > |x-y|$，将曲线记为 $\alpha = [x,y]$ 并令 $H :=$最大值$_{z\in\alpha}\, \delta(z)$，由引理 2.6 可得

$$\log \left(\frac{H}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) \leq d_K(x,y) \leq \log \left(1 + \frac{A|x-y|}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right),$$

这意味着 $H \lesssim |x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}$。由于

$$\begin{aligned}\frac{L([x,y])}{H^{\frac{1}{m}}} &\leq \int_0^1 \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\delta(\alpha(t))^{\frac{1}{m}}} dt \lesssim \int_0^1 K(\alpha(t),\dot{\alpha}(t))dt = d_K(x,y) \\ &\leq \log\left(1 + \frac{A|x-y|}{\sqrt{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}}\right) \lesssim \frac{|x-y|}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}},\end{aligned}$$

我们得到

$$L([x,y]) \lesssim \frac{\left(|x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}\right)^{\frac{1}{m}} |x-y|}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}} \lesssim |x-y|^{\frac{1}{m}}.$$

若 (Ω, d_K) 是具有 $\delta > 0$ 的 Gromov双曲空间，则由定理 2.11 可知，存在常数 $R = R(\delta, \lambda)$，使得 $[p,q]$ 与 γ 的像之间的豪斯多夫距离小于 R。记 $H_\gamma := \max_{\omega\in\gamma} \delta(\omega) = \delta(\omega_0)$，则存在一点 $z_0 \in [x,y]$，满足 $d_K(\omega_0, z_0) \leq R$。

由引理 2.6，我们有 $\delta(\omega_0) \asymp \delta(z_0)$, 这意味着

$$H_\gamma \lesssim \delta(z_0) \leq H \lesssim |x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}.$$

由推论 3.2 以及 $d_K(\omega_0, z_0) \leq R$ 可知

$$L([w_0,z_0])^m \lesssim \sqrt{\delta(w_0)\delta(z_0)} \lesssim H \lesssim |x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}.$$

因此，若 $\sqrt{\delta(x)\delta(y)} \leq |x-y|$，则我们得到 $L([w_0,z_0]) \lesssim |x-y|^{\frac{1}{m}}$ 并且

$$L(\gamma) \leq L([x,y]) + 2L([w_0,z_0]) \lesssim |x-y|^{\frac{1}{m}}.$$

并且，当 $\sqrt{\delta(x)\delta(y)} > |x-y|$ 时，类似于测地线的情形，我们有

$$L(\gamma) \leq \lambda H_\gamma^{\frac{1}{m}} d_K(x,y) \lesssim \frac{\left(|x-y| + \sqrt{\delta(x)\delta(y)}\right)^{\frac{1}{m}} |x-y|}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}} \lesssim |x-y|^{\frac{1}{m}},$$

由此完成证明。 □

定理 3.4. *(=*定理 *1.9)* 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 是一个有界域。假设 $\Omega \cap U$ 是 m-凸的，并且 $\partial\Omega \cap U$ 在 U 的一个邻域内 $\xi \in \partial\Omega$ 上 Dini-光滑。那么存在 V 的一个邻域 ξ，满足 $V \subset\subset U$，以及一个常数 $C > 0$，满足

$$d_{K_\Omega}(x,y) \leq d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y) \leq d_{K_\Omega}(x,y) + C|x-y|^{\frac{1}{m}} \text{ for } x,y \in \Omega \cap V, \tag{3.8}$$

且对于任意 $x \neq y \in \Omega \cap V$,

$$1 \leq \frac{d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y)}{d_{K_\Omega}(x,y)} \leq 1 + C\left(\delta_\Omega(x) \wedge \delta_\Omega(y) + |x-y|^{\frac{1}{m}}\right). \tag{3.9}$$

Proof。由 [6, 推论 6.14], 可知，存在 V_0 的一个邻域 ξ，满足 $V_0 \subset\subset U$，以及一个常数 $C > 0$，使得对于 $z \in \Omega \cap V_0$ 和 $X \in \mathbb{C}^n$,

$$K_\Omega(z,X) \leq K_{\Omega\cap U}(z,X) \leq (1 + C\delta_\Omega(z))\, K_\Omega(z,X). \tag{3.10}$$

那么我们只需检验不等式（3.8）和（3.9）的右侧。应用 [3, 命题 4。4] 和 [22, 引理 16。5], 我们可以选取一个邻域V，使得 ξ 满足 $V \subset V_0$，从而对任意 x, $y \in \Omega \cap V$和 $\varepsilon > 0$, 存在一条（1, ε）-拟测地线 γ_ε，其 d_{K_Ω} 连接 x 与 y，且位于 $\Omega \cap V_0$内。

于是由（3.10）以及第 2.4 节中的引理可推出， d_{K_Ω} 满足（1.2）和（1.3），其中 $\alpha=\frac{1}{2}$， $\beta=\frac{1}{m}$ 位于 $\Omega\cap V$ 内。利用定理 1.3 的证明以及引理 2.7 的局部版本（见 [17, 定理 7]），可得 $L(\gamma_\varepsilon)\lesssim|x-y|^{\frac{1}{m}}+\varepsilon$。

对于 $z\in\Omega\cap V$ 和 $X\in\mathbb{C}^n$，当 $K_\Omega(z,X)\leq\frac{|X|}{\delta_\Omega(z)}$ 时，则

$$K_{\Omega\cap U}(z,X)\leq K_\Omega(z,X)+C|X|.$$

于是，对于 $x,y\in\Omega\cap V$，通过考虑 $(1,\varepsilon)$-拟测地线 γ_ε，我们得到

$$d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y)\leq L_K(\gamma_\varepsilon)+CL(\gamma_\varepsilon)\leq L_K(\gamma_\varepsilon)+C\left(|x-y|^{\frac{1}{m}}+\varepsilon\right).$$

特别地，当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们得到

$$d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y)\leq d_{K_\Omega}(x,y)+C|x-y|^{\frac{1}{m}}.$$

此外，对于 $z\in\gamma_\varepsilon$，可得

$$\delta_\Omega(z)\leq\delta_\Omega(x)\wedge\delta_\Omega(y)+L(\gamma_\varepsilon)\lesssim\delta_\Omega(x)\wedge\delta_\Omega(y)+|x-y|^{\frac{1}{m}}+\varepsilon.$$

因此，对于 $x\neq y\in\Omega\cap V$，我们推得

$$\frac{d_{K_{\Omega\cap U}}(x,y)}{d_{K_\Omega}(x,y)}\leq 1+C\left(\delta_\Omega(x)\wedge\delta_\Omega(y)+|x-y|^{\frac{1}{m}}\right),$$

证明至此完成。 □

现在我们利用定理 $d_{\widetilde{K}}$ 1.3以及命题2 [12, 中的技巧，给出 Catlin 型距离的估计5]。

定理3.5. 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ 是一个具有有限型 m 的光滑边界伪凸域。那么存在一个常数 $C\geq 1$，使得

$$g_m(x,y)-C\leq d_{\widetilde{K}}(x,y)\leq g_1(x,y)+C$$

对于每个 x， $y\in\Omega$。

Proof。首先，我们估计 $d_{\widetilde{K}}$ 的上界。注意，只需考虑 x， $y\in\Omega\cap U$ 的情形，其中点 $\xi\in\partial\Omega$ 的一个小邻域为 U。记 $p=\pi(x)$ 和 $q=\pi(y)$ 分别为 x 和 y 在边界上的投影，并记 $x'=x-|x-y|\vec{n}(p)$ $y'=y-|x-y|\vec{n}(q)$。

于是由引理2.3 可得

$$d_{\widetilde{K}}(x,x')=\log\left(\frac{\delta(x')}{\delta(x)}\right)=\log\left(1+\frac{|x-y|}{\delta(x)}\right),$$

and

$$d_{\widetilde{K}}(y,y')=\log\left(\frac{\delta(y')}{\delta(y)}\right)=\log\left(1+\frac{|x-y|}{\delta(y)}\right).$$

剩下的任务是求 $d_{\widetilde{K}}(x',y')$ 的一个上界。由引理2.1，对于足够小的邻域 U，可得 $|\vec{n}(p)-\vec{n}(q)|\leq\varepsilon<1$，当 p， $q\in\partial\Omega\cap U$时。因此

$$|x'-y'|\leq(1+|\vec{n}(p)-\vec{n}(q)|)|x-y|\leq(1+\varepsilon)|x-y|<2|x-y|,$$

and

$$\delta(x')\wedge\delta(y')\geq\delta(x)\wedge\delta(y)+|x-y|>|x-y|.$$

考虑由 $\Phi(\xi)=x'+\xi(y'-x')$ 定义的映射 $\Phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$。然后，记

$$D:=\left\{\xi\in\mathbb{C}:\min\{|\xi|,|\xi-1|\}<\frac{1}{1+\varepsilon}\right\},$$

我们有 $\Phi(D) \subset \Omega \cap U$，其中 $x' = \Phi(0)$ $y' = \Phi(1)$。于是

$$d_{\widetilde{K}}(x', y') \lesssim d_{K_\Omega}(x', y') \leq d_{K_D}(0, 1) \leq C.$$

作为推论，

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{K}}(x, y) &\leq d_{\widetilde{K}}(x, x') + d_{\widetilde{K}}(x', y') + d_{\widetilde{K}}(y, y') \\ &\leq \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\delta(x)}\right) + \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\delta(y)}\right) + C \\ &\leq \log\left(\frac{(\delta(x) + |x-y|)(\delta(y) + |x-y|)}{\delta(x)\delta(y)}\right) + C \\ &\leq 2\log\left(\frac{|x-y| + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) + C \\ &\leq g_1(x, y) + C, \end{aligned}$$

这就证明了该情形下的结论。

现在我们利用定理 $d_{\widetilde{K}}$ 估计 1.3给出的下界。取充分小的 ε，使得我们可以使用引理 2.3和不等式（1.7）于 $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 上。我们只需证明 x、$y \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 的情形。

引理 2.3 意味着 $d_{\widetilde{K}}$ 满足（1.2），其中 $\alpha = 1$。此外，由不等式（1.7），对于 $z \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 以及 $X \in \mathbb{C}^2$，可得

$$\widetilde{K}(z, X) \geq \frac{|X_N|}{\delta(z)} + \frac{1}{C}\frac{|X|}{\delta(z)^{\frac{1}{m}}} \gtrsim \frac{|X|}{\delta(z)^{\frac{1}{m}}},$$

其满足（1.3）。设 $\gamma\colon\ [0,1] \to \Omega$ 是一条分段 C^1光滑曲线，端点为 $x = \gamma(0)$ 和 $y = \gamma(1)$。若 $\gamma \subset N_\varepsilon(\partial\Omega)$，则根据定理 1.3证明中的论证，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{K}\text{-length}(\gamma) &\geq 2\log\left(\frac{L(\gamma)^m + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C \\ &\geq 2\log\left(\frac{|x-y|^m + \delta(x) \vee \delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C. \end{aligned}$$

如果 γ 不在 $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 中，则设

$$t_0 := \min\{t \in [0,1] : \gamma(t) \notin N_\varepsilon(\partial\Omega)\},$$

and

$$t_1 := \max\{t \in [0,1] : \gamma(t) \notin N_\varepsilon(\partial\Omega)\}.$$

则 $\gamma_0 :\ = \gamma|_{[0,t_0]}$ 以及 $\gamma_1 :\ = \gamma|_{[t_1,1]}$ 在 $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ 中。引理 2.3 表明

$$\widetilde{K}\text{-length}(\gamma_0) \geq \log\left(\frac{\varepsilon}{\delta(x)}\right) \text{ and } \widetilde{K}\text{-length}(\gamma_0) \geq \log\left(\frac{\varepsilon}{\delta(y)}\right).$$

由于存在一个常数 $M > 0$，使得对于所有 $x, y \in \Omega$ 都有 $|x-y|^m \leq M\varepsilon$，因此我们现在得到

$$\widetilde{K}\text{-length}(\gamma) \geq 2\log\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) \geq 2\log\left(\frac{|x-y|^m}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right) - C.$$

由于 γ 是任意的，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{K}}(x,y) &\geq 2\log\left(\frac{|x-y|^m+\delta(x)\vee\delta(y)}{\sqrt{\delta(x)\delta(y)}}\right)-C \\ &\geq g_m(x,y)-C, \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

4. Boundary Extensions of Mappings

现在我们可以证明定理 1.6。为方便读者，现将其重述如下:

定理 4.1. 设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{C}^n(n\geq 2)$ 是具有 Dini-光滑边界的有界 m-凸域，且 Ω_1,Ω_2 分别是它们的欧几里得紧化。若 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 关于 Kobayashi 度量是等距映射，则 f^- 存在同胚延拓 $f:\Omega_1\to\Omega_2$，使得诱导的边界映射 $f|_{\partial\Omega_1}:\partial\Omega_1\to\partial\Omega_2$ 关于欧几里得度量是双 Hölder 连续的。

Proof。由引理 2.6 和引理 2.7，可知存在常数 M，使得对所有 $x,\ y\in\Omega_1$,

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{\delta_{\Omega_1}(y)}{\delta_{\Omega_1}(x)}\right)\leq d_{K_{\Omega_1}}(x,y)\leq\frac{1}{2}\log\left(\frac{M}{\delta_{\Omega_1}(x)\delta_{\Omega_1}(y)}\right),$$

and

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{\delta_{\Omega_2}(f(y))}{\delta_{\Omega_2}(f(x))}\right)\leq d_{K_{\Omega_2}}(f(x),f(y))\leq\frac{1}{2}\log\left(\frac{M}{\delta_{\Omega_2}(f(x))\delta_{\Omega_2}(f(y))}\right).$$

注意到 f 是一个等距映射，则

$$\frac{1}{M}\delta_{\Omega_2}(f(y))\delta_{\Omega_1}(y)\delta_{\Omega_1}(x)\leq\delta_{\Omega_2}(f(x))\leq\frac{M\delta_{\Omega_2}(f(y))}{\delta_{\Omega_1}(y)}\delta_{\Omega_1}(x),$$

固定 $y=y_0$，由此可得 $\delta_{\Omega_2}(f(x))\asymp\delta_{\Omega_1}(x)$。

现在由推论 1.4 可知，存在一个常数 $C>0$ 使得，对于所有 $x,\ y\in\Omega_1$,

$$|x-y|^m\lesssim|f(x)-f(y)|+\sqrt{\delta_{\Omega_2}(f(x))\delta_{\Omega_2}(f(y))},$$

and

$$|f(x)-f(y)|^m\lesssim|x-y|+\sqrt{\delta_{\Omega_1}(x)\delta_{\Omega_1}(y)}.$$

取 Ω_1 中的两个序列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$，使得 $x_k\to a\in\partial\Omega_1$ 且 $y_k\to b\in\partial\Omega_1$。注意到 $\sqrt{\delta_{\Omega_1}(x_k)\delta_{\Omega_1}(y_k)}\to 0$，且 $\sqrt{\delta_{\Omega_2}(f(x_k))\delta_{\Omega_2}(f(y_k))}\to 0$，容易看出，如果 $a=b$，则 $|f(x_k)-f(y_k)|\to 0$，这意味着 f 可连续延拓到边界。

此外，对于 $a,b\in\partial\Omega_1,$，因此我们得到以下不等式

$$|a-b|^m\lesssim|f(a)-f(b)|\ \text{ and }\ |f(a)-f(b)|^m\lesssim|a-b|,$$

由此可得以下双 Hölder 估计

$$|a-b|^m\lesssim|f(a)-f(b)|\lesssim|a-b|^{\frac{1}{m}}.$$

这意味着，f 不仅可以延拓为 Ω_1 上的同胚，而且在 $\partial\Omega_1$上还是双向 H¨older 连续的。证明至此完成。□

现在我们可以证明，对于 $\mathbb{C}^2$ 中的有限型光滑有界伪凸域，其恒等映射可以延拓为欧几里得边界与格罗莫夫边界之间的双向 H¨older 映射。

定理 4.2. 假设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个边界光滑且具有有限 D'Angelo 型 m的有界伪凸域。那么恒等映射 id : Ω →Ω 可以延拓为一个双 Hölder 映射

$$id : (\partial\Omega, |\cdot|) \to \left(\partial_G^{d_K}\Omega, \rho_G^{d_K}\right)$$

定义在两个边界之间，其中 $\rho_G^{d_K}$是 (Ω d_K) 的格罗莫夫边界上的视觉度量。

Proof. 固定一个基点 $\omega \in \Omega$。对于任意 x， $y \in \Omega$，由定理 1.12可知存在常数 C_1, $C_2 > 0$ 满足

$$\log \frac{C_1}{|x-y| + \delta(x) \vee \delta(y)} \leq (x|y)_\omega^{d_{\widetilde{K}}} \leq \log \frac{C_2}{|x-y|^m + \delta(x) \vee \delta(y)}. \tag{4.1}$$

那么，对于任意两个格罗莫夫序列 $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \Omega$，若 $(x_k|y_k)_\omega^{d_{\widetilde{K}}} \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时，利用 (4.1) 的右侧可得 x_k, y_k 趋向边界，且当 $k \to \infty$时 $|x_k - y_k|$ →趋于 0。另一方面，对于每个点 $a \in \partial\Omega$，取序列$\{x_k\}, \{y_k\} \subset \Omega$，使得 $x_k \to a$ 且当 $k \to \infty$时 $y_k \to a$ 。根据 (4.1) 的左侧可得，当 $k \to \infty$时 $(x_k|y_k)_\omega^{d_{\widetilde{K}}} \to \infty$ 。这意味着，Ω 中的一个序列是满足$d_{\widetilde{K}}$ 的格罗莫夫序列，当且仅当它在欧几里得度量下收敛到某个边界点。因此，恒等映射可以延拓为 Ω 的欧几里得边界与空间 $(\Omega d_{\widetilde{K}})$ 的格罗莫夫边界之间的双射。

此外，当 a， $b \in \partial\Omega$ 趋于 x 且 y 分别趋于 a 和 b 时，在（4.1）中，我们现在得到

$$|a-b|^m \lesssim \exp\left(-(a|b)_\omega^{d_{\widetilde{K}}}\right) \lesssim |a-b|.$$

注意，对于 Ω 上的视觉度量 $\rho_G^{d_{\widetilde{K}}}$ $\partial_G^{d_{\widetilde{K}}}$，存在一个参数 $\epsilon > 0$ ，使得

$$\rho_G^{d_{\widetilde{K}}}(a,b) \asymp \exp\left(-\epsilon(a|b)_\omega^{d_{\widetilde{K}}}\right), \text{ for } a, b \in \partial_G^{d_{\widetilde{K}}}\Omega.$$

这意味着边界映射 $id : (\partial\Omega\ |\cdot|) \to \left(\partial_G^{d_{\widetilde{K}}}\Omega\ \rho_G^{d_{\widetilde{K}}}\right)$ 是双霍¨尔德连续的。因此，利用命题 2.13，我们完成了证明。□

最后，我们通过证明定理 1.2来结束本节。为方便读者，现将其重述如下:

定理 4.3. 设 Ω_1,$\Omega_2 \subset \mathbb{C}^2$ 是有限 D'Angelo 型且具有光滑边界的有界光滑伪凸域，并令 Ω_1,Ω_2 为其欧几里得紧化。若 $f : \Omega_1 \to \overline{\Omega_2}$ 是关于 Kobayashi 度量的拟等距映射，¯则 f 存在一个同胚延拓 $f : \Omega_1 \rightrightarrows \Omega_2$ ，使得其诱导的边界映射 $f|_{\partial\Omega_1}$: $\partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ 关于欧几里得度量是双霍尔德连续的。

Proof. 注意到，赋予 Kobayashi 度量的 Ω 具有 Gromov 双曲性$_1, \Omega_2$。根据命题2.10，拟等距映射 f 诱导出一个双¨Hölder 映射$\tilde{f}$: $\partial_G^{d_{K_1}}\Omega_1 \to \partial_G^{d_{K_2}}\Omega_2,$，其中格罗莫夫边界 $\partial_G^{d_{K_i}}\Omega_i$ （Ω_i， d_{K_i}） $i = 1$，2 上均赋有各自的视觉度量。

回忆一下， $\rho_G^{d_{K_i}}$是（Ω 的格罗莫夫边界上的视觉度量$_i$， d_{K_i}）。由定理 1.1 可知，恒等映射 $id_i : \Omega_i \to \Omega_i$， $i = 1$，2 诱导出一个双 H¨older 映射

$$id_i : (\partial\Omega_i, |\cdot|) \to \left(\partial_G^{d_{K_i}}\Omega_i, \rho_G^{d_{K_i}}\right).$$

因此，

$$\bar{f} = id_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ id_1 : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2.$$

是一个定义良好的边界映射。

¯注意到， f 是双 Hölder 映射的复合，因此它也是双 Hölder 映射。证明至此完成。□

资助。刘劲松受到国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1003100）、国家自然科学基金委员会（项目编号：11925107 和 12226334）以及中国科学院前沿科学重点研究计划（项目编号：ZDBS-LY-7002）的资助。王宏宇受到中央高校基本科研业务费（500422379）的资助。

致谢。作者感谢审稿人细致审阅本文并提出宝贵意见。

References

[1] Z. M. Balogh 和 M. Bonk. 严格伪凸域上的 Gromov双曲性与 Kobayashi 度量. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 75(3):504–533, 2000. [2] T. J. Barth. 凸域与 Kobayashi 双曲性. *Proceedings of the American Mathematical Society* 79 4 556 558, 1980 , ( ): – .

[3] G. Bharali 和 A. Zimmer. Goldilocks 域、可见性的一种弱概念及其应用. *Advances in Mathematics*, 310(2):377–425, 2017年. [4] T. Bloom 和 I. Graham. 实子流形 $\mathbb{C}^n$上 m 型点的几何刻画. *Journal of Differential Geometry*, 12(2):171–182, 1977. [5] M. Bonk 和 O. Schramm. Gromov双曲空间的嵌入. *Geometric and Functional Analysis* 10 266 306, 2000 , : – .[6] F. Bracci 、 N. Nikolov 和 P. J. Thomas. 凸域中 Kobayashi 测地线的可见性及相关性质 . *Mathematische Zeitschrift*, 301(2):2011–2035, 2022年. [7] M. R. Bridson 和 A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, *Fundamental Principles of Mathematical Sciences*第319卷. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. [8] D. W. Catlin. 二维伪凸域上不变度量的估计. *Mathematische Zeitschrift*, 200(3):429–466, 1989. [9] S. Cho. $\mathbb{C}^n$ *Journal of* 中有限型 *Geometric Analysis* 2 4 317 325, 1992 点附近 Kobayashi 度量的下界. , ( ): – . [10] M. Fiacchi. $\mathbb{C}^2$ *Mathematische* 中伪凸有 *Annalen* 382 1 37 限型域的 Gromov双曲性. , ( ): –68, 2022年. [11] F. Forstneriˇc. 正常全纯映射：综述. Several Complex Variables（斯德哥尔摩，1987/1988）. *Mathematical Notes*, 38:297–363, 1993. [12] F. Forstneriˇc 和 J. P. Rosay. Kobayashi 度量的局部化与正常全纯映射的边界连续性. *Mathematische Annalen*, 279(2):239–252, 1987. [13] I. Graham. Koebe 定理的最佳常数及凸域上内在度量估计的最佳常数. Several Complex Variables and Complex Geometry, Part 2（加利福尼亚州圣克鲁兹，1989）. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 52:233–238, 1991. [14] G. Herbort. 二维有限型伪凸域上不变距离的估计. *Mathematische Zeitschrift*, 251(3):673–703, 2005. [15] J. Liu、H. Wang 和 Q. Zhou. 复域上准等距映射的双赫尔德延拓. *The Journal of Geometric Analysis*, 32(2):38, 2022年. [16] P. R. Mercer. $\mathbb{C}^n$中凸域上的复测地线与全纯映射的迭代. *Transactions of the American Mathematical Society*, 338(1):201–211, 1993.

[17] N. Nikolov 和 L. Andreev. Kobayashi 距离与拟双曲距离的估计.
Annali di Matematica Pura ed Applicata, 196(1):43–50, 2017年.[18] N. Nikolov 和 A. Y. ¨Okten. 强 Goldilocks 域、定量可见性及其应用 . *arXiv: 2206. 08344*, 2022 年 . [19] N. Nikolov 和 P. J. T homas. 实格林函数与复格林函数的比较，以及 Kobayashi 距离的精确估计.
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. , ( ): – *Classe di Scienze* 18 3 1125 1143, 2018
. [20] N. Nikolov 和 P. J. Thomas. $\mathbb{C}^n$ 中区域不变距离的定量局部化与比较 .
The Journal of Geometric Analysis, 33(1):35, 2023年. [21] H. Wang. 有限型凸域上的 Kobayashi 度量估计与 Gromov双曲性. *arXiv: 2211. 10662*, 2022年.[22] A. Zimmer. 有限型凸域上的 Gromov双曲性与 Kobayashi 度量. *Mathematische Annalen*, 365(3-4):1425–1498, 2016年. [23] A. Zimmer. 由 Gromov双曲性导出的次椭圆估计. *Advances in Mathematics*, 402 94 108334, 2022 ( ): .
1. HLM, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences,Beijing, 100190, China2. School of Mathematical Sciences,
University of Chinese Academy of Sciences,Beijing, 100049, China
3. School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*Email address*: liujsong@math.ac.cn, puxs@amss.ac.cn, wanghyu@bupt.edu.cn