arXiv:2301.06413v2 [math.FA] 6 Feb 2023

狄利克雷级数希尔伯特空间的乘子

Chaman Kumar Sahu

Abstract. 对于正实数序列 $\mathbf{w} = \{w_j\}_{j=2}^{\infty}$，考虑定义在某个右半平面 $\mathbb{H}_\rho$ 上、对应实数 ρ. 的正半定核 $\kappa_{\mathbf{w}}(s,u) = \sum_{j=2}^{\infty} w_j j^{-s-\overline{u}}$。设 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 表示与 $\kappa_{\mathbf{w}}$. 相关联的再生核希尔伯特空间。

$$\delta_{\mathbf{w}} = \inf\left\{\Re(s) : \sum_{\substack{j\geqslant 2\\ \mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n}} w_j j^{-s} < \infty \text{ for all } n \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

其中 $\{p_j\}_{j\geqslant 1}$ 是素数的递增枚举，$\mathrm{gpf}(n)$ 表示整数 $n \geqslant 2$. 的最大素因子。如果 $\mathbf{w}$ 满足

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) \geqslant 0, \quad n \geqslant 2,$$

其中 μ 是莫比乌斯函数，则 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 的乘子代数 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与定义在 $\mathbb{H}_{\underline{\delta_{\mathbf{w}}}}$ 上、由某个右半平面内收敛的狄利克雷$_2$级数表示的所有有界全纯函数所成的空间等距同构。因此，当 $\mathbf{w}$ 是满足 $\delta_{\mathbf{w}} \leqslant 0$ 和 的加性函数时，我们描述乘子代数 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$。

$$\frac{w_{p^{j-1}}}{w_{p^j}} \leqslant p^{-\delta_{\mathbf{w}}} \text{ for all integers } j \geqslant 2 \text{ and all prime numbers } p.$$

此外，当 $\mathbf{w}$ 为积性时，我们得到了 Stetler 关于 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 乘子的分类结果。主要结果的证明是对 Stetler 所用技巧的改进。

Contents

1. 预备知识 21.1. 再生核希尔伯特空间的乘子 32. 的乘子代数 3. 应用 9参考文献 11

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 30B50、46E22；次要分类号 11Z05。
Key words and phrases. 狄利克雷级数，再生核希尔伯特空间，乘子，M¨obius 函数，加性函数。

1. 预备知识

令 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}$分别表示正整数集和非负整数集。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{N}_k = \{m \in \mathbb{N} : m \leqslant k\}$. 用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$分别表示实数集和复数集。对于 $s \in \mathbb{C}$，令 $\Re(s)$ $|s|$、 $\overline{s}$和 $\arg(s)$分别表示 s的实部、模、复共轭和辐角。开单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 记作 $\mathbb{D}$. 对于 $\rho \in \mathbb{R}$，令 $\mathbb{H}_\rho$ 表示右半平面 $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \rho\}$.

这里我们将用到一些关于 $\mathbb{Z}_+$ 的已知算术函数，以备后文使用。素数欧米伽函数 ω 统计一个正整数的所有不同素因子的总数。约数函数 d 统计一个正整数的所有因数。莫比乌斯函数 $\mu : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if n = 1,} \\ (-1)^j & \text{if } n \text{ is a product of } j \text{ distinct primes,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

狄利克雷级数是如下形式的级数

$$f(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j^{-s},$$

其中 $a_j \in \mathbb{C}$. 若 $a_j = 1$ 对所有 $j \geqslant 1$，则得到黎曼ζ函数，记作 ζ.若 f 在 $s = s_0$处收敛，则它在角域 $\{s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| < \frac{\pi}{2} - \delta\}$ 内对每个正实数 $\delta < \frac{\pi}{2}$. 都一致收敛。因此， f 在 $\mathbb{H}_{\Re(s_0)}$ 上定义了一个全纯函数（参见 [13, 第 IX 章] ，了解狄利克雷级数的基本理论）。令 $\mathcal{D}$ 表示所有可在某个右半平面内表示为收敛狄利克雷级数的函数所构成的集合。

下面的命题描述了两个狄利克雷级数的乘积（参见 [10, 定理 4.3.1 以及定理 4.3.4] 之前的讨论）。

命题 1.1. 设 $f(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j^{-s}$和 $g(s) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j j^{-s}$是两个在 $\mathbb{H}_\rho$. 上收敛的狄利克雷级数。若 g 在 $\mathbb{H}_\rho$ 上绝对收敛，则

$$f(s)g(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{m|j} a_m b_{\frac{j}{m}} \Big) j^{-s},$$

它在 $\mathbb{H}_\rho$. 上收敛

对于整数 $n \geqslant 2$，令 gpf(n) 表示 n. 的最大素因子。对于非负实数序列 $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j \geqslant 2}$ ，令

$$\sigma_{\mathbf{x}} := \inf \Big\{ \Re(s) : \sum_{j=2}^{\infty} x_j j^{-s} < \infty \Big\},$$

$$\delta_{\mathbf{x}} := \inf\left\{\Re(s) : \sum_{\substack{j\geqslant 2\\ \mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n}} x_j j^{-s} < \infty \text{ for all } n\in\mathbb{Z}_+\right\}, \tag{2}$$

其中 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是素数的递增枚举。注意，$\delta_{\mathbf{x}} \leqslant \sigma_{\mathbf{x}}$.

1.1. 再生核希尔伯特空间的乘子。设 X 是 $\mathbb{C}$ 的一个非空开子集，并令 $H^\infty(X)$ 表示定义在 X 上、赋予上确界范数的有界全纯函数巴拿赫空间。设 $\mathcal{H}$ 是定义在 X. 上的复值全纯函数再生核希尔伯特空间。若函数 $\varphi\colon X\to\mathbb{C}$ 满足 $\varphi\cdot f\in\mathcal{H}$ 对每个 $f\in\mathcal{H}$. 都成立，则称其为 $\mathcal{H}$ 的乘子。显然，$\mathcal{M}(\mathcal{H})$ 是一个代数。用 $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$. 的所有乘子组成的集合。注意，若等于 1 的常函数属于 $\mathcal{H}$，那么根据 [9, 推论 5.22]，$\mathcal{M}(\mathcal{H})$ 契约包含于 $H^\infty(X)$。

对于正实数序列 $\mathrm{w}=\{w_j\}_{j=2}^{\infty}$，考虑形式狄利克雷级数的加权希尔伯特空间

$$\mathscr{H}_{\mathbf{w}} := \left\{f(s)=\sum_{j=2}^{\infty}\hat{f}(j)j^{-s} : \|f\|_{\mathbf{w}}^2 := \sum_{j=2}^{\infty}\frac{|\hat{f}(j)|^2}{w_j}<\infty\right\}$$

其赋予范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{w}}$。若 $\sigma_{\mathbf{w}}<+\infty$，则 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 是与 $\kappa_{\mathbf{w}}$ 相关联的再生核希尔伯特空间，其核由下式给出

$$\kappa_{\mathbf{w}}(s,u)=\sum_{j=2}^{\infty} w_j j^{-s-\overline{u}},\quad s,u\in\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}}{2}}. \tag{3}$$

对于每个 $s\in\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}}{2}}$, $\kappa_{\mathbf{w}}(\cdot,s)\in\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 并满足

$$\langle f,\,\kappa_{\mathbf{w}}(\cdot,s)\rangle = f(s),\quad f\in\mathscr{H}_{\mathbf{w}}. \tag{4}$$

注意，$\kappa_{\mathbf{w}}$ 在 $\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}}{2}}\times\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}2}}{2}}$ 上绝对收敛。 —

以下结论可由 [12, 定理 3.1] 以及 [12, 定理 2.7] 之前的讨论直接推出。

定理 1.2. $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})\subseteq H^\infty(\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}})\cap\mathcal{D}$ 并且

$$\|\varphi\|_{\infty,\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}}}\leqslant\|M_{\varphi,\mathbf{w}}\|_{\mathscr{H}_{\mathbf{w}}},\quad \varphi\in\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}}).$$

这引出了以下问题。

问题 1.1. 对于哪些序列 w，$\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 的 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$乘子代数等距同构于 $H^\infty(\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}})\cap\mathcal{D}$?

在以下情形中，问题1.1 得到肯定回答。

(i) 若 1 表示值恒为 1 的常数序列，则 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_1)$与 $H^\infty(\mathbb{H}_0)\cap\mathcal{D}$ 等距同构（参见 [5, 定理 3.1]）。

(ii) 若存在某个正拉东测度 η 定义在 $[0,\infty)$ 上，且满足 $0 \in \operatorname{supp}(\eta)$ 和 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{1}{w_j} = \int_0^\infty j^{-2\sigma} d\eta(\sigma), \quad j \geqslant n_0, \tag{5}$$

那么 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}_\eta})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0) \cap \mathcal{D}$ 等距同构（见 [6,定理 1。11]）。

(iii) 若 w 为 $\{\frac{1}{d_\beta n()}\}_{n=1}^\infty$, 其中 $\beta > 0$ 且 $d_\beta(n)$ 表示狄利克雷级数 ζ^β 的第 n 个系数；或者 w 为 $\{(\mathrm{d}(n))^\alpha\}_{n=1}^\infty$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$，则 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0)$ 等距同构 $\cap\, \mathcal{D}$ （见 [8, 第 8] 节）。

(iv) 若 $\mathbf{w} = \{w_n\}_{n=1}^\infty$ 是积性函数（即，对所有满足 $\gcd(m,n) = 1$ 的整数 m, $n \geqslant 1$，均有 $w_{mn} = w_m w_n$ ），且满足

$$\frac{w_{p^{j-1}}}{w_{p^j}} \leqslant p^{-\delta_{\mathbf{w}}} \text{ for all integers } j \geqslant 1 \text{ and prime numbers } p, \tag{6}$$

那么 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_{\underline{\delta_{\mathbf{w}}}})$ 等距同构 $\cap\, \mathcal{D}$ （见 [12,2推论 4.2]）。

在上述所有情形中， $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 的乘子都可以延拓到 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$中各函数的公共定义域之外。然而，这并非总是如此（见 [6,定理 3.6]）。

以下是本文的主定理，它推广了前述结果 (i) 和 (iv)。

定理 1.3. 假设

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) \geqslant 0, \quad n \geqslant 2, \tag{7}$$

其中 μ 和 $\delta_{\mathbf{w}}$ 分别由 (1) 和 (2)给出。则 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_{\underline{\delta_{\mathbf{w}}}}) \cap \mathcal{D}$.2等距同构

注 1.4. 这里我们作一些观察:

(a) 若 $\delta_{\mathbf{w}} = -\infty$，则 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$. 没有非恒定乘子。事实上，若 $\varphi \in \mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$, 则由定理 1.2可知， φ 是整函数且有界。因此，由刘维尔定理（见 [11, 推论 4.5]） φ 是常数。

(b) 若上述定理中的 $\mathbf{w} = \{w_j\}_{j=2}^\infty$被替换为 $\{w_j\}_{j=k}^\infty \subseteq (0,\infty)$，其中 $k \in \mathbb{Z}_+$ 为一个整数，且

$$\sum_{\substack{j\geqslant k\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) \geqslant 0, \quad n \geqslant k, \tag{8}$$

那么定理1.3 的结论将保持不变。

定理1.3 的以下推论讨论加性函数。

推论 1.5。设 w 为一个加性函数（即，对于所有整数 $m,n\geqslant 2$，若 gcd(m,n) $=1$，则 $w_{mn}=w_m+w_n$），且满足

$$\frac{w_{p^{j-1}}}{w_{p^j}}\leqslant p^{-\delta_{\mathbf{w}}} \text{ for all integers } j\geqslant 2 \text{ and all prime numbers } p. \tag{9}$$

如果 $\delta_{\mathbf{w}}\leqslant 0$，那么 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_{\underline{\delta_{\mathbf{w}}}})\cap\mathcal{D}$.$_2$等距同构

定理 1.3 和推论 1.5 的证明将在第 2 节给出。在第 3 节中，我们将讨论定理 1.3 的一些推论（见定理 3.1和命题 3.2）。特别地，我们重新得到 [12, 推论 4。2]。我们还将给出希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$ 的一些例子，以说明本文的结果。

$\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$的乘子代数

鉴于注 1.4 (a)，我们假设 $\delta_{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}$. 为了证明定理 1.3，我们需要若干引理。

第一个引理将条件（7）与核的半正定性联系起来。

引理 2.1. 设 $\tilde{\mathbf{w}}=\{n^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_n\}_{n=2}^\infty$，且 $\beta=\frac{1}{2}\max\{\sigma_{\mathbf{w}}-\delta_{\mathbf{w}},1\}.$，则核 $\eta:\mathbb{H}_\beta\times\mathbb{H}_\beta\to\mathbb{C}$ 定义为

$$\eta(s,u)=\frac{\kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(s,u)}{\kappa_{\mathbf{1}}(s,u)},\quad s,u\in\mathbb{H}_\beta \tag{10}$$

半正定当且仅当(7) 成立。

证明。由[1, 例 11.4.1],

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{j=1}^\infty \mu(j)j^{-s},\quad s\in\mathbb{H}_1.$$

结合命题1.1 和（3），可得

$$\begin{aligned}\eta(s,u) &= \Big(\sum_{j=2}^\infty j^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_j j^{-s-\overline{u}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^\infty \mu(j)j^{-s-\overline{u}}\Big)\\ &= \sum_{n=2}^\infty\Big(\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_j\mu\Big(\frac{n}{j}\Big)\Big)n^{-s-\overline{u}},\quad s,u\in\mathbb{H}_\beta.\end{aligned}$$

所需的等价关系现在可由 [7, 引理 20]立即得到。 □

以下引理将在定理1.3的证明中用到。

引理 2.2。对于 $t\in\mathbb{R}$，设 $\tilde{\mathbf{w}}=\{n^{-t}w_n\}_{n=2}^\infty$. 若 $\varphi\in\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$，则 $\tilde{\varphi}:\mathbb{H}_{\underline{\sigma_{\mathbf{w}}-t}}\to\mathbb{C}$ 定义为$_2$

$$\tilde{\varphi}(s)=\varphi\Big(s+\frac{t}{2}\Big),\quad s\in\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}-t}{2}}$$

是 $\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ (参见 (3))的乘子。

证明。设 $j:\mathscr{H}_{\mathbf{w}}\to\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ 是一个由下式定义的映射

$$j(f)(s)=f\Big(s+\frac{t}{2}\Big),\quad s\in\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}-t}{2}}.$$

由于 $\varphi\in\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$，对任意 $f\in\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$，

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(s)j(f)(s) &= \varphi\Big(s+\frac{t}{2}\Big)f\Big(s+\frac{t}{2}\Big)\\ &= (\varphi\cdot f)\Big(s+\frac{t}{2}\Big)=j(\varphi\cdot f)(s),\ s\in\mathbb{H}_{\frac{\sigma_{\mathbf{w}}-t}{2}}.\end{aligned}$$

由于 j是满射，因此对于每个 $g\in\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}}$。证毕。 □

以下事实表明，包含映射 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})\hookrightarrow H^\infty(\mathbb{H}_{\delta_{\mathbf{w}}})\cap\mathcal{D}$是满射（参见 [12, 定理 4。5]）。

引理 2.3。若 (7) 成立，则 $H^\infty(\mathbb{H}_{\delta_{\mathbf{w}}})\cap\mathcal{D}=\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$（作为集合）。

证明。假设（7）成立。根据定理 1.2，只需验证 $H^\infty(\mathbb{H}_{\delta_{\mathbf{w}}})\cap\mathcal{D}\subseteq\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$。为此，设 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{H}_{\delta_{\mathbf{w}}})\cap\mathcal{D}$.那么，由 $\tilde{\varphi}(s)=\varphi(s+\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2})$ $s\in\mathbb{H}_0$ 定义的 $\tilde{\varphi}:\mathbb{H}_0\to\mathbb{C}$ 属于 $H^\infty(\mathbb{H}_0)\cap\mathcal{D}$.。因此，根据 [5, 定理 3.1]，$\tilde{\varphi}$ 是 $\mathscr{H}_{\mathbf{1}}$. 的一个乘子。因此，根据 [9, 定理 5.21]，存在 $c\geqslant 0$ 使得

$$(c^2-\tilde{\varphi}(s)\overline{\tilde{\varphi}(u)})\kappa_{\mathbf{1}}(s,u)\geqslant 0.$$

令 $\tilde{\mathbf{w}}=\{n^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_n\}_{n=2}^\infty$. 那么，由引理 2.1 和 [9, 定理 4。8]，

$$(c^2-\tilde{\varphi}(s)\overline{\tilde{\varphi}(u)})\kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(s,u)\geqslant 0.$$

因此，由 [9, 定理 5。21]，$\tilde{\varphi}\in\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}})$。应用引理 2.2 即可完成证明。 □

定理 1.3 的证明。由引理 2.3，

$$H^\infty(\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}})\cap\mathcal{D}=\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})\ \text{(as a set)}.\tag{11}$$

因此，鉴于定理 1.2，只需验证

$$\|M_{\varphi,\mathbf{w}}\|_{\mathscr{H}_{\mathbf{w}}}\leqslant\|\varphi\|_{\infty,\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}}},\quad \varphi\in H^\infty(\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}})\cap\mathcal{D}.$$

为得到上述估计，令 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{H}_{\delta_{\mathbf{w}}})\cap\mathcal{D}$. 注意到 $\tilde{\varphi}:\mathbb{H}_0\to\mathbb{C}$,由 $\tilde{\varphi}(s)=\varphi(s+\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2})$ $s\in\mathbb{H}_0$ 定义，属于 $H^\infty(\mathbb{H}_0)\cap\mathcal{D}$. 因此，应用 [5, 定理 3.1]，

乘法算子 $M_{\tilde{\varphi}},\ \mathbf{1}$ 在 $\mathscr{H}_{\mathbf{1}}$. 上有界

特别地，$M^*_{\tilde{\varphi}},\ \mathbf{1}$的希尔伯特空间伴随 $M_{\tilde{\varphi}},\ \mathbf{1}$是定义良好的有界线性算子。

注意，引理 2.1 结合（7）可得，由（ η 定义的核（10）在 $\mathbb{H}_\beta\times\mathbb{H}_\beta$ 上是半正定的，其中 $\beta=\frac{1}{2}\max\{\sigma_{\mathbf{w}}-\delta_{\mathbf{w}},1\}$.

因此，根据 [9, 定理 2.14], ，存在一个再生核希尔伯特空间$\mathcal{H}(\eta)$，与 η. 相关。因此，根据（4），对于任意 s， $u \in \mathbb{H}_\beta$,

$$\langle \kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(\cdot, u), \kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(\cdot, s)\rangle_{\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}}} = \langle \kappa_{\mathbf{1}}(\cdot, u) \otimes \eta(\cdot, u), \kappa_{\mathbf{1}}(\cdot, s) \otimes \eta(\cdot, s)\rangle_{\mathscr{H}_{\mathbf{1}} \otimes \mathcal{H}(\eta)}.$$

应用隐匿等距引理（见 [2, 引理 2.18]），可得一个线性等距映射 V: $\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}} \to \mathscr{H}_{\mathbf{1}} \otimes \mathcal{H}(\eta)$，使得

$$V(\kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(\cdot, u)) = \kappa_{\mathbf{1}}(\cdot, u) \otimes \eta(\cdot, u), \quad u \in \mathbb{H}_\beta. \tag{12}$$

此外，由于 $\varphi \in \mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$（见（11））， 根据引理 2.2， $\tilde{\varphi} \in \mathcal{M}(\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}})$。这意味着乘法算子 $M_{\tilde{\varphi},\ \tilde{}\mathbf{w}}$ 在 $\mathscr{H}_{\tilde{}\mathbf{w}}$ 上有界，因此，根据 [9, 推论 5.22],

$$\begin{aligned} V^*(M^*_{\tilde{\varphi},\mathbf{1}} \otimes I)V(\kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(\cdot, u)) &\overset{(12)}{=} V^*(M^*_{\tilde{\varphi},\mathbf{1}} \otimes I)(\kappa_{\mathbf{1}}(\cdot, u) \otimes \eta(\cdot, u)) \\ &= \overline{\tilde{\varphi}(u)} V^*(\kappa_{\mathbf{1}}(\cdot, u) \otimes \eta(\cdot, u)) \\ &= M^*_{\tilde{\varphi},\tilde{\mathbf{w}}}(\kappa_{\tilde{\mathbf{w}}}(\cdot, u)), \quad u \in \mathbb{H}_\beta. \end{aligned}$$

由于 $V^*(M^*_{\tilde{\varphi},\ \mathbf{1}} \otimes I)V$ 和 $M^*_{\tilde{\varphi},\ \tilde{}\mathbf{w}}$ 是 $\mathscr{H}_{\tilde{}\mathbf{w}}$ 上的有界线性算子，

$$V^*(M^*_{\tilde{\varphi},\mathbf{1}} \otimes I)V = M^*_{\tilde{\varphi},\tilde{\mathbf{w}}}.$$

由于 V 是等距映射，我们得到

$$\|M_{\tilde{\varphi},\tilde{\mathbf{w}}}\|_{\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}}} \leqslant \|V^*\|\|M^*_{\tilde{\varphi},\mathbf{1}}\|\|V\| \leqslant \|\tilde{\varphi}\|_{\infty,\mathbb{H}_0} = \|\varphi\|_{\infty,\mathbb{H}_{\frac{\delta_{\mathbf{w}}}{2}}},$$

由此完成证明。 □

注 2.4。令 κ由下式给出

$$\kappa(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \overline{w}^j.$$

假设 κ 在 $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. 若 $\mathbf{a}$ 是一个非负实数递增序列，则 $\mathcal{M}(\mathscr{H}(\kappa))$ 的乘子代数与 $\mathscr{H}(\kappa)$ 等距同构。 利用定理 1.3 证明中的论证即可证明这一点，关键变化是将 $\kappa_{\mathbf{1}}$ 替换为 Szeg¨o 核 S： $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 其定义为

$$S(z, w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

$\omega(n)$推论 1.5 的证明。 取一个整数 $n \geqslant 2$， 令 $\prod\limits_{m=1} p_{i_m}^{r_m}$， $r_m \in \mathbb{Z}_+$，为 n. 的素因数分解。若 $j \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $j|n$，则

$$j = \prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{s_{m,j}}, \quad (s_{m,j})_{m=1}^{\omega(n)} \in \prod_{m=1}^{\omega(n)} \mathbb{N}_{r_m}. \tag{13}$$

$\omega(n)$因此，存在一个双射 $\psi\colon \{j \in \mathbb{Z}_+\colon j|n,\ j \geqslant 2\} \to \prod\ \mathbb{N}_{r_m} - \{\mathbf{0}\}_{m=1}$ 定义为 $\psi(j) = (s_{m,j})_{m=1}^{\omega(n)}$. 因此，由（13），

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big)$$

$$= \sum_{(s_m)_{m=1}^{\omega(n)}\in \mathrm{Im}(\psi)} \Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\Big)\big(w_{\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{s_m}}\big)\mu\Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{r_m-s_m}\Big). \quad (14)$$

令 $\tilde{\mathbf{w}}$ 为 $\mathbf{w}$ 在 $\mathbb{Z}_+$ 上的延拓，其中令 $w_1 = 0$. 由于 $\mathbf{w}$ 是可加的，$\tilde{\mathbf{w}}$ 是可加的。结合（14）以及 μ 的乘法性，得到

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) = \sum_{(s_m)_{m=1}^{\omega(n)}\in \mathrm{Im}(\psi)} \sum_{t=1}^{\omega(n)} \left(w_{p_{i_t}^{s_t}} \Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\Big)\mu\Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{r_m-s_m}\Big)\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{\omega(n)} \sum_{(s_m)_{m=1}^{\omega(n)}\in \mathrm{Im}(\psi)} \Big(w_{p_{i_t}^{s_t}} \Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\Big)\Big(\prod_{m=1}^{\omega(n)} \mu(p_{i_m}^{r_m-s_m})\Big)\Big)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{t=1}^{\omega(n)} \sum_{(s_m)_{m=1}^{\omega(n)}\in \mathcal{U}_n} \Big(w_{p_{i_t}^{s_t}} \prod_{m=1}^{\omega(n)} \Big(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\mu(p_{i_m}^{r_m-s_m})\Big)\Big),$$

其中 $\mathcal{U}_n = \prod_{m=1}^{\omega(n)} \{r_m - 1, r_m\}$. 对于任意正整数 $t \leqslant \omega(n)$，令

$$T_t = \sum_{(s_m)_{m=1}^{\omega(n)}\in \mathcal{U}_n} \Big(w_{p_{i_t}^{s_t}} \prod_{m=1}^{\omega(n)} \Big(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\mu(p_{i_m}^{r_m-s_m})\Big)\Big).$$

Then

$$T_t = \sum_{s_1=r_1-1}^{r_1} \sum_{s_2=r_2-1}^{r_2} \cdots \sum_{s_{\omega(n)}=r_{\omega(n)}-1}^{r_{\omega(n)}} \Big(w_{p_{i_t}^{s_t}} \prod_{m=1}^{\omega(n)} \Big(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\mu(p_{i_m}^{r_m-s_m})\Big)\Big)$$

$$= \Big(\sum_{s_t=r_t-1}^{r_t} p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_t} w_{p_{i_t}^{s_t}} \mu(p_{i_t}^{r_t-s_t})\Big) \prod_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{\omega(n)} \Big(\sum_{s_m=r_m-1}^{r_m} p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m}\mu(p_{i_m}^{r_m-s_m})\Big)$$

$$= \big(p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}}(r_t-1)} w_{p_{i_t}^{r_t-1}}\mu(p_{i_t}) + p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}} r_t} w_{p_{i_t}^{r_t}}\mu(1)\big)$$

$$\prod_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{\omega(n)} \big(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}(r_m-1)}\mu(p_{i_m}) + p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} r_m}\mu(1)\big)$$

$$\overset{(1)}{=} \quad p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}}(r_t-1)}(p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_{p_{i_t}^{r_t}} - w_{p_{i_t}^{r_t-1}}) \prod_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{\omega(n)} \left(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}(r_m-1)}(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}}-1)\right).$$

结合假设 $\delta_{\mathbf{w}} \leqslant 0$ 和 (9)（这意味着$p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}} \geqslant 1$ 以及 $p_{i_t}^{-\delta_{\mathbf{w}}}w_{p_{i_t}^{r_t}} \geqslant w_{p_{i_t}^{r_t-1}}$），可知 $T_t \geqslant 0$对每个正整数 $t \leqslant \omega(n)$均成立。 由于 n 是任意的，(7) 对所有整数 $n \geqslant 2$. 成立。应用定理1.3 即可完成证明。 □

我们给出一个例子来说明推论 1.5。

例 2.5. 设 $\mathbf{w} = \omega$. 注意到 ω 是可加的，并且满足

$$\omega(p^j) = 1 \text{ for every prime } p \text{ and integer } j \geqslant 1. \tag{15}$$

由 [13, 第一章，等式 (1.6.1) 和 (1.6.2)],

$$\sum_{j=2}^{\infty} \omega(j)j^{-s} = \zeta(s)\sum_{j=1}^{\infty} p_j^{-s}, \quad s \in \mathbb{H}_1. \tag{16}$$

由 (15)、(16) 以及 [1, 定理 1。13] 可知 $\sigma_\omega = 1$. 为了计算δ_ω，任取一个 $\epsilon > 0$ 和一个整数 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n} \omega(j)j^{-\epsilon} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j=1\\ i_s\neq i_t,\ s\neq t}}^{n} \left(\sum_{m_{i_1},\ldots,m_{i_j}=1}^{\infty} j(p_{i_1}^{m_{i_1}}p_{i_2}^{m_{i_2}}\ldots p_{i_j}^{m_{i_j}})^{-\epsilon}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j=1\\ i_s\neq i_t,\ s\neq t}}^{n} \left(j\prod_{r=1}^{j}\sum_{m_{i_r}=1}^{\infty} p_{i_r}^{-\epsilon m_{i_r}}\right)\right) < \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

鉴于 (15)，$\sum_{\mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n}\omega(j)$ 对所有 $n \geqslant 1$. 均发散。将此与 (17) 结合可得 $\delta_\omega = 0$，因此 (9) 成立。因此，由推论 1.5，$\mathcal{M}(\mathscr{H}_\omega)$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0) \cap \mathcal{D}$. 此外,

$$\omega(pq) = 2 \overset{(15)}{\neq} \omega(p)\omega(q) \text{ for distinct primes } p \text{ and } q.$$

因此， ω 不是积性的。此外，由于 ω 不是单调的，(5) 不成立。

3. 应用

本节将讨论定理1.3的一些应用。第一个应用推导出 [12, 推论 4。2]。

定理 3.1。 设 $\mathbf{w} = \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是满足以下条件的积性函数(6)。那么 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_{\underline{\delta_{\mathbf{w}}}}) \cap \mathcal{D}$.2等距同构

证明。固定一个整数 $n \geqslant 2$，令 $\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{r_m}$, $r_m \in \mathbb{Z}_+$, 为 n. 的素因数分解。由于 n 的任一因数都可表示为 $\prod_{m=1}^{\omega(n)} p_{i_m}^{s_m}$, $s_m \in \mathbb{N}_{r_m}$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j|n}} j^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) &= \prod_{m=1}^{\omega(n)} \sum_{s_m=0}^{r_m} p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}} s_m} w_{p_{i_m}^{s_m}} \mu(p_{i_m}^{r_m-s_m}) \\ &\overset{(1)}{=} \prod_{m=1}^{\omega(n)} (p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}(r_m-1)})(p_{i_m}^{-\delta_{\mathbf{w}}} w_{p_{i_m}^{r_m}} - w_{p_{i_m}^{r_m-1}}) \overset{(6)}{\geqslant} 0.\end{aligned}$$

因此，(8) 对所有整数 $n \geqslant 2$ 均成立，并且对 $n = 1$. 显然成立。因此，根据定理 1.3 和注 1.4(b)，结论便得证。□

作为前一定理的推论，我们得到 [3, 定理 3]。事实上，对于任意 $\alpha > 0$，考虑 $\mathsf{w}_\alpha = \{(\mathsf{d}(j))^\alpha\}_{j=1}^\infty$. 。由于对每个 $\epsilon > 0$ ，$\mathsf{d}(n) = o(n^\epsilon)$（见 [1, 公式 (31)]），$\sigma_{\mathbf{w}_\alpha} = 1$ 且$\delta_{\mathbf{w}_\alpha} = 0$. 。对于任意素数 p和整数 $j \in \mathbb{Z}_+$，$\mathsf{d}(p^j) = j + 1$.。因此，(9) 成立，进而根据定理 3.1， $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}_\alpha})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0) \cap \mathcal{D}$.等距同构

下面的命题给出了一族希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathbf{w}}$，用以说明主要结果。

命题 3.2. 设 $\mathsf{w} = \{w_j\}_{j=1}^\infty$ 是一个满足以下条件的积性函数

(*i*) $w_j = \mathcal{O}(j^\delta)$ 对每个 $\delta > 0$ 都成立，(*ii*)

对每个素数 p 都成立， $\{w_{p^j}\}_{j=0}^\infty$ 是递增的。

若 $\tilde{\mathsf{w}} = \{1+w_j\}_{j=1}^\infty$，则 $\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\tilde{\mathbf{w}}})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0)\cap\mathcal{D}$. 等距同构

证明. 对于实数 $r > 1$，取正数 δ 使得$r > \delta + 1$. 于是由 (*i*) 可得，

$$\sum_{j=2}^{\infty}(1+w_j)j^{-r} \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} j^{-r} + C_\delta \sum_{j=2}^{\infty} j^{-(r-\delta)} < \infty, \tag{18}$$

从而得到 $\sigma_{\tilde{\mathbf{w}}} \leqslant 1$. 此外，由于 $\sum_{j=2}^\infty j^{-1}$ 发散，$\sigma_{\tilde{\mathbf{w}}} = 1$. 利用 (*i*)，还可得到 $\delta_{\tilde{\mathbf{w}}} = 0$. 对于任意 $\sigma > 0$，取 δ 使得 $0 < \delta < \sigma$.于是，[12, 引理 3.2] 结合 (*i*) 可得

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ \mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n}} w_j j^{-\sigma} \leqslant \sum_{\substack{j\geqslant 2\\ \mathbf{gpf}(j)\leqslant p_n}} j^{-(\sigma-\delta)} < \infty, \quad n \geqslant 1. \tag{19}$$

由（*ii*）可知，级数 $\sum_{j=0}^\infty w_{2^j}$ 发散。结合（19）可得$\delta_{\mathbf{w}} = 0$. 因此，由（*ii*）可知，（9）成立。于是，按照定理3.1证明中的步骤，我们得到

$$\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j|n}} w_j \mu\Big(\frac{n}{j}\Big) \geqslant 0, \quad n \geqslant 1.$$

将此与 [1, 定理 2.1] 结合可得

$$\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j|n}}(1+w_j)\mu\Big(\frac{n}{j}\Big)\geqslant 0,\quad n\geqslant 1.$$

所需结论现可直接由定理 1.3 及备注 1.4(b) 得出。□

注意到 ˜上面定义的 w 从不具有积性。此外，命题 3.2 适用于 $\mathbf{w}=\{\mathbf{d}(j)\}_{j=1}^{\infty}$. 我们通过揭示定理 1.3 还可对某些特殊序列推出 [6, 定理 1。11] 来结束本文。

例 3.3。设 $\mathbf{w}$ 由（5）给出。由 [6, 方程 (1.4)]，$\sigma_{\mathbf{w}}\leqslant 1$。由于$\mathbf{w}$ 是一个递增序列，$\sigma_{\mathbf{w}}=1$. 因此，$\kappa_{\mathbf{w}}$ 在 $\mathbb{H}_{1/2}\times\mathbb{H}_{1/2}$. 上绝对收敛。对于一个整数 $\alpha>0$，考虑序列 $\mathbf{w}_\alpha=\{(\log(j))^\alpha\}_{j=2}^{\infty}$. 根据 [6, 第 1]，

$$(\log(j))^{-\alpha}=\int_{[0,\infty)}j^{-2\sigma}\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sigma^{-1+\alpha}d\sigma,\quad j\geq 2,$$

其中 Γ 表示伽马函数，因此 $\sigma_{\mathbf{w}_\alpha}=1$. 此外，将[6, 方程 (1.4)] 与 [12, 引理 2] 结合可得 $\delta_{\mathbf{w}_\alpha}=0$. 另外，根据[4, 方程 (3.16)]，，我们得到广义冯·曼戈尔特函数的非负性：

$$\sum_{\substack{j\geqslant 2\\ j|n}}(\log(j))^\alpha\mu\Big(\frac{n}{j}\Big)\geqslant 0. \tag{20}$$

定理1.3 的一个应用现在表明，$\mathcal{M}(\mathscr{H}_{\mathbf{w}_\alpha})$ 与 $H^\infty(\mathbb{H}_0)$ 等距同构。$\cap\,\mathcal{D}$.

前面的例子表明，对于任意整数 $\alpha>0$，$\mathbf{w}\alpha$ 满足（20）。一般而言，我们不知道$\mathbf{w}$ 满足（5）是否能保证

$$\sum_{\substack{j\geqslant n_0\\ j|n}}w_j\mu\Big(\frac{n}{j}\Big)\geqslant 0,\quad n\geqslant n_0.$$

致谢。我感谢 Sameer Chavan 提议研究这一主题。不言而喻，如果没有他的持续支持，本文不可能形成如今的样貌。我也感谢匿名审稿人提出的几条宝贵意见，改进了本文的呈现方式。

参考文献

[1] Apostol, Tom M. 解析数论导论。 *Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York-Heidelberg* 1976 +338 , , （）, xii页。

MR0434929, Zbl 0335.10001。[2] Agler, J., McCarthy, J. E., Young, N.复分析中的算子分析——希尔伯特空间方法。 *Cambridge Tracts in Mathematics Cambridge University* , , *Press Cambridge* **219** 2020 +375 4411370, 1498 47001 , 。xv 页。MR Zbl 。。

[3] Bailleul, M., Brevig, O. F. 狄利克雷级数的 Bohr-Bergman 空间上的复合算子。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **41**（2016年），129-142。MR3467701，Zbl 1359.47017，doi: 10.5186/aasfm.2016.4104。[4] Friedlander, J., Iwaniec *American Mathematical Society*, H. Opera de *Colloquium Publications Providence RI* **57** 2010 +527 2647984, cribro。，，，（）。xx页。MR Zbl 1226.11099，doi: http://dx.doi.org/10.1090/coll/057。[5] Hedenmalm, H., Lindqvist, P., Seip, K. 狄利克雷级数的一个希尔伯特空间及 $L^2(0,1)$. *Duke Math. J.* **86**（1997年），1-37。MR1427844，Zbl 0887.46008，doi: 10.1215/S0012-7094-97-08601-4。[6] McCarthy J. E. 狄利克雷级数的希尔伯特空间及其乘子。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **356**（2004年），881-893。MR1984460，Zbl 1039.30001，doi: 10.1090/S0002-9947-03-03452-4。[7] McCarthy J. E., Shalit, O. M. 具有完全 Pick 性质的狄利克雷级数空间 *Israel J. Math.* **220**（2017年），509-530。MR3666434，Zbl 1482.46030，doi: 10.1007/s11856-017-1527-6。[8] Olsen, J.-F. *J. Funct. Anal.* 狄利克雷级数希 **261** 2011 2669 2696 2826411, 1236 46022, 10 1016 2011 07 007 尔伯特空间的局部性质（），-。MR Zbl。doi: 。/j.jfa.。。[9] Paulsen, V. I. and Raghupathi, M. 再生核希尔伯特空间理论导论。剑桥高等数学研究丛书，第152卷。 *Cambridge University Press, Cambridge*，2016年。x+182 页。MR3526117，Zbl 1364.46004，doi: 10.1017/CBO9781316219232。[10] Queffelec H., Queffelec, M. 丢番图逼近与狄利克雷级数。 *Second edition. Texts and Readings in Mathematics, Hindustan Book Agency, New Delhi; Springer Singapore* **80** 2020 287 4241378, 1478 11002, , （）。页。 MR Zbl。doi: 10.1007/978-981-15-9351-2。[11] Stein, E. M. Shakarchi R. *Princeton Lectures in Analysis.*，复分析。，，，。 *Princeton University Press Princeton NJ* 2003 +379 1976398, xviii页。MR Zbl 1020.30001。[12] Stetler, E. 狄利克雷级数希尔伯特空间上的乘法算子。 博士论文 - 佛罗里达大学，2014年。 https://www.proquest.com/docview/1645427826?pq-origsite=gscholar&fromo

[13] Titchmarsh, E. C. 黎曼ζ函数理论，第二版。*Oxford University Press, New York*, 1986。x+412 页。MR0882550，Zbl0601.10026。

笔视图=真.

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology Kanpur, Indiachamanks@iitk.ac.in