arXiv:2301.06414v1 [math.CO] 16 Jan 2023

各维球面相切的条件界

Conrad Crowley 和 Marco Vitturi

Abstract. 我们运用多项式方法的技巧，对 $\mathbb{R}^n$ 中由 N 个球面构成的集合中的相切对数量给出上界，其中这些球面满足一个非退化条件，且 $n \geq 3$任意。该条件受 Zahl 关于 $n = 3$的研究启发，断言：在集合中的任一球面上，集中于该球面的任意低次子簇上的切点数都不能超过 B。对于满足此条件的集合，我们证明相切对的数量为 $O_\epsilon(B^{1/n-\epsilon}N^{2-1/n+\epsilon})$。

1. 引言

令 $n \geq 2$ ，并考虑 $\mathbb{R}^n$中一个有限的球面集合 $\mathscr{C}$，其中球面的半径和球心任意。令 N 为 $\mathscr{C}$的基数。组合学中的一个有趣问题是，计算集合 $\mathscr{C}$中的相切球面对数的最大值。总可以安排这些 N 个球面，使得它们两两都在同一点相切（见图1）；因此，若要得到一个渐近上优于 $O(N^2)$的相切对数量上界，就必须假设某些非退化条件。

当 $n = 2$ Wolff 首次研究这个问题时，以及 Ellenberg、Solymosi 和 Zahl 在 [2] 再次研究这个问题时（后者还考虑了次数有界的一般曲线，以及实数域以外的域）。他们施加了非退化条件： $\mathscr{C}$ 中没有三个圆能在同一点彼此相切；在这一条件下， [2] 证明相切对的数量为 $O(N^{3/2})$。[1] 在 [7]中可以找到同一上界的另一种证明。目前尚不清楚指数 $3/2$ 是否渐近最优——在即将发表的工作中，Pohoata 已证明相切对的数量至多为 $o(N^{3/2})$（私人通信）。另一方面，目前已知的最佳下界为 $\gtrsim N^{4/3}$ （通过反演从 $\mathbb{R}^2$ 中一组 $N/2$ 条直线和 $N/2$ 个点的构形得到；该构形是 Szemer´edi–Trotter 不等式的临界构形；见 [2]第 8.1 节）。 [2] 中的证明结合了提升过程与多项式方法：前者将相切问题转化为 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的关联几何问题，后者则类似于 Dvir 在 [1]中采用的方法。 [7]中的证明基于另一种提升过程，它将问题转化为点曲面关联问题，从而可以应用 [3]的一般关联界。

当 $n = 3$ Zahl 在 [11], 研究这个问题时，他讨论了带有有向半径的球面的更一般情形。有向半径可以区分内切和外切：若 c_1， c_2 是两个有向半径分别为 r_1，r_2的球面的球心，那么这两个球面相接触当且仅当 $\|c_1 - c_2\|^2 = (r_1 - r_2)^2$, ；更具体地说，若 r_1， r_2 同号，则它们内切；若不同号，则外切

[1] Wolff 则在 [10] 中得到了 $O_\epsilon(N^{3/2+\epsilon})$。

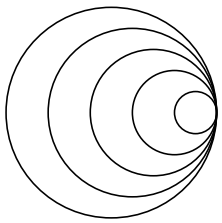


FIGURE 1. 所有球面两两相切的一个构型。

。在这一维数中，除了图1所示的情形外，还有其他需要排除的构型，才能得到非平凡的界。事实上，存在由两个子集合 $\mathscr{C}'$，$\mathscr{C}''$组成的球面集合，使得 $\mathscr{C}'$ 中的每个球面都与 $\mathscr{C}''$ 中的每个球面相切，反之亦然；因此，此类集合最多可包含 $\sim N^2$ 个相切对。这种构型在 [11] 中称为一对互补圆锥曲线，[2] 如图2所示。Zahl 证明了在这一维数中，这些基本上是唯一的问题构型；由他的结果可知，若集合 $\mathscr{C}$满足

(i) 任意三个球面不会在同一点彼此相切；(ii) 任意一对互补圆锥曲线至多包含 $N^{1/2}$ 个球面 ，

那么该集合至多包含 $O(N^{3/2})$ 对相切球面。证明依赖于一个称为李球线对应的优美事实，它可以将相切问题转化为关联几何问题，即嵌入 $\mathbb{C}^3$ 中的海森堡群副本中的复直线关联问题。指数 $3/2$ 是尖锐的，这可以通过取球心为 $(a,\ b,\ c)$、半径为 d 的一组球面来说明，其中 $a,\ b,\ c,\ d \in \{1,\dots,M\}$（见 [11] 的例1.17）。

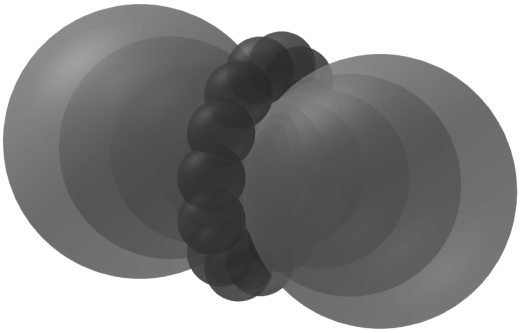


FIGURE 2. 所谓一对互补圆锥曲线，是指 [11], ，也就是说，该构型由两个子集组成，其中每个球面都与另一个子集中的所有其他球面相切。

在高于3维的维数中，若要对相切对的数量获得非平凡上界，似乎还需要排除其他构型；这类构型的数量也可能取决于维数。

[2]如果将球心为 $(x,\ y,\ z)$、半径为 r 的球面与坐标 $(x,\ y,\ z,\ r)$ 对应起来，那么此类构形中的球面确实对应于实数域上一对圆锥曲线上的点。

为避开这一问题，我们将引入一个在每个维数中形式都相同的非退化条件；这将使我们能够得到优于平凡的 $O(N^2)$ 上界（在依赖于某个参数的条件下）。为了说明即将引入的条件，注意到在图2所示构型中的任意给定球面上，切点都位于该球面与某个平面的交集上——也就是说，有 $\sim N$ 个切点集中在球面的一个低次数子簇上。受这一观察启发，我们作出如下定义。

定义1。设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有限球面集，并假设不存在三个球面在同一点彼此相切。对于 $B,\ D>0$，若对每个球面 $\sigma\in\mathscr{C}$ 及每个次数至多为 $2D$ 的子簇 $\Gamma\subset\sigma$，球面 Γ 上与 $\mathscr{C}$ 中另一个球面相切的点（即 σ 与其相切的点）不超过 B 个，则称 $\mathscr{C}$ 是 $(B,\ D)$-非退化的 。

从直观上看，这一条件可以理解为关于相切集合“代数复杂度”的一个陈述：在非退化集合中的任意一个球面上，切点不会聚集在低次数子簇上；换言之，若要同时插值许多切点，就需要一个高次数多项式。

对于满足此类条件的 N 个球面构成的集合，我们能够证明，相切对的数量渐近地小于 $O(N^2)$，前提是 B 远小于 N。特别地，我们的主要结果如下。

定理 1. 设 $n\geq 3$。对于任意 $\epsilon>0$，存在一个次数为 $D=D(\epsilon,n)$ 的多项式，使得下述结论成立。设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由 N 个球面组成的集合，并设 $B\leq N$。若 $\mathscr{C}$ 是(B,D)-非退化的，则有

$$|\{(\sigma,\sigma')\in\mathscr{C}\times\mathscr{C}:\sigma\neq\sigma'\ and\ \sigma,\sigma'\ are\ tangent\}|\lesssim_\epsilon B^{1/n-\epsilon}N^{2-1/n+\epsilon}.$$

据我们所知，该结果在维数 $n>3$ 下是新的。注意，当 $n=3$ 时，N 的指数为 $2-1/3=5/3$，这与最优指数 $3/2$ 不符；在任何维数下，指数 $2-1/n$ 渐近锐利的可能性都极低。

证明结合了不同论文中的技巧。我们采用 [2] 的提升技巧，将相切问题转化为较高维空间中关于簇的关联几何问题。为处理由此得到的关联问题，我们采用 Solymosi 和 Tao ([8]) 提出的、使用有界次数多项式的多项式划分论证；不过，我们不使用针对点的标准多项式划分引理，而是采用 Guth 在 [4] 中提出的针对簇的多项式划分。相切数量中的代数贡献通过递归论证来处理。

注1. 用于证明定理 1 的论证很容易改造，从而为非退化集合中的圆相切数量给出 $O(N^{3/2})$ 界的另一种证明。然而，由于该证明依赖多项式划分，因此无法推广到实数域以外的域。

定理 1 中界对外部参数 B 的条件依赖显然不理想，因此自然会寻求消除这种依赖的方法。在 [5] 的第 10.8 节中，给出了一种论证，可以在以下情形中消除这种依赖:

在 $\mathbb{R}^3$ 中，计算由 N 条直线构成的集合所产生的 r-富交点的数量。在这种情形下，参数 B 控制任意低次代数曲面所包含的直线数量。在我们的情形中，似乎无法重复 [5] 的论证，主要障碍在于，包含大量切点的低次簇是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，而我们使用的多项式方法是在提升过程之后于 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中进行的。尽管或许可以调整我们采用的非退化性概念来弥补这一点，但我们不打算这样做，因为由此得到的条件似乎有些不自然。

记号。我们用 $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ 表示具有 m 个变量和实系数的多项式环；对于该环中的 P，用 $Z(P)$ 表示 P的（实）零点集，即 $Z(P) := \{x \in \mathbb{R}^m \colon P(x) = 0\}$。而 P的复零点集则记为 $Z_{\mathbb{C}}(P) := \{z \in \mathbb{C}^m \colon P(z) = 0\}$。给定多项式 P_1、.....、P_k，我们记$Z(P_1$、.....、 $P_k) = \bigcap_{j=1}^{k} Z(P_j)$。

2. Lifting and geometric preliminaries

以下是 [2]中提升过程的直接推广。为简洁起见，我们用 X 表示 $(X_1, \ldots, X_n)$，用 Y表示 $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$。对于 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，用 $r > 0$ 表示 $S_{x,r}$ 这个多项式

$$S_{x,r}(X) := r^2 - \sum_{j=1}^{n} (X_j - x_j)^2,$$

使得 $Z(S_{x,\ r})$ 是半径为 r 、圆心位于 x 的球面。此外，对于上述的 x ，我们定义多项式 $Q_{x,\ j} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ 如下:

$$Q_{x,j}(X, Y) := (X_n - x_n) Y_j - (X_j - x_j),$$

其中 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$。给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球面 σ，记其圆心为 x^σ，半径为 r_σ; 于是我们引入 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中的代数簇 $\beta[\sigma]$ ，其定义如下:

$$\beta[\sigma] := Z(S_{x^\sigma, r_\sigma}, Q_{x^\sigma,1}, \ldots, Q_{x^\sigma,n-1})$$

（这里稍微滥用一下记号，将 S_{x^σ}、$_{r_\sigma}$ 视为关于（X， Y）的多项式）。代数簇 $\beta[\sigma]$ 是两个互不相交的不可约分支之并，其中一个是由方程 $X = x^\sigma$ 给出的代数簇（一个“垂直”子空间）。我们用 $\beta^*[\sigma]$ 表示另一个不可约分支[3] ；这就是我们对 σ 的 “ 提升 ”。注意，在投影（ x， y ） $\mapsto x$ 下，该分支映入 σ 去掉赤道 $X_n = x_n^\sigma$ 后的部分（也就是说，必须有 $x_n \neq x_n^\sigma$）。提升的几何意义如下：若（x， y） $\in \beta^*[\sigma]$, 则 $\mathbb{R}^n$ 在点 x 处与 σ 相切的超平面由方程（y, $\mathbf{1}$） $\cdot$（$X - x$） $= 0$ 给出。事实上， $x_n \neq x_n^\sigma$, 因此 $Q_{x^\sigma,\ j}$（x， y） $= 0$ 推出 $y_j =$（$x_j - x_j^\sigma$）/（$x_n - x_n^\sigma$）；由初等几何即可得证。

将整个集合 $\mathscr{C}$ 稍微旋转后，我们可以假设：只要两个球面 σ_1, σ_2 在 x 处相切，就有 $x_n \neq x_n^{\sigma_1}, x_n^{\sigma_2}$。因此，如果 σ_1, σ_2在点 x处相切，那么交集 $\beta^*[\sigma_1] \cap \beta^*[\sigma_2]$ 包含点 (x, y)，其中 y满足 $(y, \mathbf{1}) \cdot (X - x) = 0$ 是公共切超平面的方程。反过来，如果 $\beta^*[\sigma_1] \cap \beta^*[\sigma_2]$ 包含点 (x, y)，那么我们看到（通过投影到前 n 个分量） x 包含于 $\sigma_1 \cap \sigma_2$,

[3]例如，该不可约分支由多项式 $r_\sigma^2 - (X_n - x_n^\sigma)^2 \sum_{j=1}^{n-1} Y_j^2$ 截出。

此外， σ_1 在点 x 处的切超平面与 σ_2在点 x 处的切超平面重合（因为它由 $(y, 1)$ 确定）；因此， σ_1 和σ_2 实际上在 x处彼此相切。这尤其表明，两个簇 $\beta^*[\sigma_1]$, $\beta^*[\sigma_2]$ 至多在一个点相交（因此它们满足伪直线型公理）。由于我们已规定，任意三个球面不能在同一点彼此相切，因此 $\mathscr{C}$中的相切对数量等于提升球面集合中的关联簇数量：令 $\beta^*[\mathscr{C}] := \{\beta^*[\sigma] : \sigma \in \mathscr{C}\}$ 表示这个集合，

$$\begin{aligned} &|\{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C} : \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ and } \sigma_1, \sigma_2 \text{ are tangent}\}| \\ &\qquad = |\{(\beta_1, \beta_2) \in \beta^*[\mathscr{C}] : \beta_1 \neq \beta_2 \text{ and } \beta_1 \cap \beta_2 \neq \varnothing\}|. \end{aligned} \tag{1}$$

下一节中我们还需要一个重要的几何事实，它是 [2] 中类似事实的高维类比。当两个簇 $\beta_1, \beta_2 \in \beta^*[\mathscr{C}]$ 在一点相交时，它们的切空间张成的空间将包含所有形如 $(0, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的“竖直”方向，其中 $v \neq 0$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的任意元素。事实上，首先注意到 $\beta = \beta^*[\sigma]$ 中的所有点都是光滑的，因为与该簇关联的雅可比矩阵的秩为 n；因此，每一点处的切空间都有定义。现在假设球面 σ_1, σ_2 在 x 处彼此相切，并令 y 满足 $\{(x, y)\} = \beta^*[\sigma_1] \cap \beta^*[\sigma_2]$。记作$x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$（等价地， $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$）。根据假设$x_n \neq x_n^{\sigma_i}$，存在 σ_i在 x 附近的局部参数化，其形式为

$$(\tilde{x} + t,\, x_n + \varphi_i(t)), \qquad |t| < \delta$$

对于 $i \in \{1, 2\}$ 和某个 $\delta > 0$，其中 $\varphi_i(0) = 0$；于是我们看到 $y = -\nabla\varphi_i(0)$，此外还可将这些 $\beta^*[\sigma_i]$的局部参数化写为

$$(\tilde{x} + t,\, x_n + \varphi_i(t),\, -\nabla\varphi_i(t)).$$

切空间 $T_{(x,y)}\beta^*[\sigma_i]$由以下向量张成

$$\boldsymbol{v}_j^{(i)} := (e_j,\, \partial_j\varphi_i(0),\, -\nabla\partial_j\varphi_i(0))$$

对于 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$。我们可以手动计算这些二阶导数：对定义球面 σ_i的方程 $S_{x^{\sigma_i},\ r_{\sigma_i}} = 0$ 求导，经过简单计算可得

$$\partial_j\partial_k\varphi_i(0) = -\frac{\delta_{jk}(x_n - x_n^{\sigma_i})^2 + (x_j - x_j^{\sigma_i})(x_k - x_k^{\sigma_i})}{(x_n - x_n^{\sigma_i})^3},$$

其中 δ_{jk} 表示克罗内克δ；因此

$$-\nabla\partial_j\varphi_i(0) = \frac{1}{x_n - x_n^{\sigma_i}}\, e_j + \frac{x_j - x_j^{\sigma_i}}{(x_n - x_n^{\sigma_i})^3}\, (\tilde{x} - \tilde{x}^{\sigma_i}).$$

注意，对于某个 $\lambda \notin \{0, 1\}$，我们有

$$x - x^{\sigma_2} = \lambda(x - x^{\sigma_1}),$$

因为从 x 到球心的线段彼此平行。子空间

$$\operatorname{Span}(T_{(x,y)}\beta^*[\sigma_1], T_{(x,y)}\beta^*[\sigma_2])$$

包含向量 $\boldsymbol{v}_j^{(1)} - \boldsymbol{v}_j^{(2)}$，根据上述观察，这些向量等于

$$(1 - \lambda^{-1})\Big(0,\, 0,\, \frac{1}{x_n - x_n^{\sigma_1}}\, e_j + \frac{x_j - x_j^{\sigma_1}}{(x_n - x_n^{\sigma_1})^3}\, (\tilde{x} - \tilde{x}^{\sigma_1})\Big).$$

因此，要证明我们的论断，只需证明上述最后几个分量中的向量彼此线性无关；等价地，令 $z := (x_n - x_n^{\sigma_1})^{-1}(\tilde{x} - \tilde{x}^{\sigma_1})$（一个列向量），则以所讨论的向量为列组成的矩阵为 $(x_n - x_n^{\sigma_1})^{-1}(I + zz^\top)$，因此只需证明行列式

$$\det(I + zz^\top)$$

不为零。然而，后者就是 $1 + \|z\|^2 \neq 0$，因为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -z^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & z \\ 0 & 1 + \|z\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ z^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + zz^\top & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此我们已经证明

$$\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathrm{Span}(T_{(x,y)}\beta^*[\sigma_1], T_{(x,y)}\beta^*[\sigma_2]), \tag{2}$$

如所声称的那样。

3. 定理 1 的证明

下文中，我们将固定 $\epsilon > 0$，并令 $\mathscr{C}$ 为一个满足定理 1 叙述的球面集合。次数 $D = D(\epsilon, n)$ 将始终视为固定值，但具体取值将在最后确定。为简便起见，我们还假设它是偶数。

3.1. 多项式划分论证。 正如预期，我们将采用 [8] 的归纳多项式划分论证，来控制 $\mathscr{C}$ 中相切对的数量。不过，我们将使用针对簇的多项式划分结果，而不是 [8]中针对点的结果。我们要使用的结果出自 Guth，内容如下。

定理 2（ [4]中的定理 0.3）。 设 Γ 是由 N 个互不相同的k维簇组成的集合，它们位于 $\mathbb{R}^d$中，且每个簇都由至多 m 个次数不超过 e的多项式方程定义。对于任意 $D \geq 1$，都存在一个次数至多为 D 的多项式 $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d]$，使得 $\mathbb{R}^d \setminus Z(P)$ 的每个连通分支至多与 Γ 中的 $C_1 N/D^{d-k}$ 个簇相交（其中 $C_1 = C_1(d, e, m)$ 是一个常数）。

为将上述陈述置于具体背景中，我们指出，$\mathbb{R}^d \setminus Z(P)$的连通分支数（其中 P的次数至多为 D）有上界$C_2 D^d$，这里 $C_2 = C_2(d)$是一个仅依赖于维数的常数（见 [6] 和 [9]）。

我们首先建立归纳论证。根据 (1)，只需研究提升球面之间的关联：对于任意球面集合 $\mathscr{D}$，定义提升集合之间的关联集合为

$$I(\mathscr{D}) := \{(\beta_1, \beta_2) \in \beta^*[\mathscr{D}] \times \beta^*[\mathscr{D}] : \beta_1 \neq \beta_2 \text{ and } \beta_1 \cap \beta_2 \neq \varnothing\}.$$

为了进行清晰的归纳论证，我们引入如下量

$$\Theta(B, N) := \sup |I(\mathscr{C})|,$$

其中，上确界取遍所有由 $\mathscr{C}$ 个球面组成的集合，这些球面是 (B, D)-非退化的。我们的目标是证明，对于所有 $B \leq N$，均有 $\Theta(B, N) \lesssim_\epsilon B^{1/n-\epsilon} N^{2-1/n+\epsilon}$，由 (1) 即可证明定理 1。

令 $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ 为定理 2 针对集合 $\Gamma = \beta^*[\mathscr{C}]$ 得到的次数至多为 $D/2$ 的多项式（从而 $d = 2n-1$、$k = n-1$）；因此，$\mathbb{R}^{2n-1} \setminus Z(P)$的每个连通分支至多与 $\beta^*[\mathscr{C}]$ 中的 $C_1 2^n N/D^n$ 个簇相交（且连通分支的数量至多为 $C_2(D/2)^{2n-1}$）。我们将

关联集合分成两类，依据关联是否发生在 $Z(P)$ 中。为此，给定一个球面集合 $\mathscr{D}$ 和一个多项式 $R \in \mathbb{R}[X, Y]$，定义$I_{Z(R)}(\mathscr{D})$为发生在 $Z(R)$中的关联集合，即

$$I_{Z(R)}(\mathscr{D}) := \{(\beta, \beta') \in I(\mathscr{D}) : \beta \cap \beta' \in Z(R)\};$$

于是，我们的划分可写为 $I(\mathscr{C}) = I_1 \cup I_2$，其中

$$I_1 := I(\mathscr{C}) \setminus I_{Z(P)}(\mathscr{C}),$$
$$I_2 := I_{Z(P)}(\mathscr{C}).$$

我们先尝试归纳地给 $|I_1|$ 一个界。由于 I_1 中的所有关联都发生在 $Z(P)$ 之外，根据鸽巢原理，必定存在 $\mathbb{R}^{2n-1} \setminus Z(P)$ 的一个连通分支 O_*，使得

$$|\{(\beta, \beta') \in I(\mathscr{C}) : \beta \cap \beta' \in O_*\}| \geq \frac{|I_1|}{C_2(D/2)^{2n-1}}.$$

令 $\mathscr{C}_{O_*}$ 为球面 $\sigma \in \mathscr{C}$ 的子集合，其中 $\beta^*[\sigma]$ 与 O_* 相交；该集合的基数至多为 $C_1 2^n N/D^n$ （根据构造），且是 $(B,\ D)$-非退化的，因此我们有

$$|\{(\beta, \beta') \in I(\mathscr{C}) : \beta \cap \beta' \in O_*\}| \leq |I(\mathscr{C}_{O_*})| \leq \Theta(B, C_1 2^n N/D^n),$$

因此

$$|I_1| \leq C_2(D/2)^{2n-1}\Theta(B, C_1 2^n N/D^n).$$

现在考虑 I_2。在这种情况下，我们将根据关联簇本身是否包含在 $Z(P)$ 中来区分这些关联。于是，对于给定的球面集合 $\mathscr{D}$ 和多项式 $R \in \mathbb{R}[X, Y]$，定义子集合

$$\mathscr{D}_{Z(R)} := \{\sigma \in \mathscr{D} : \beta^*[\sigma] \subset Z(R)\};$$

采用这一记号，所需的划分 $I_2 = I_3 \cup I_4$ 为

$$I_3 := I_{Z(P)}(\mathscr{C}) \setminus I(\mathscr{C}_{Z(P)}),$$
$$I_4 := I(\mathscr{C}_{Z(P)})$$

（注意，$I(\mathscr{C}_{Z(P)}) \subset I_{Z(P)}(\mathscr{C})$ 确实如此）。

为了估计 $|I_3|$，我们将利用 (B, D)-非退化性的假设。注意，我们有

$$\begin{aligned} |I_3| &= |\{(\beta, \beta') \in I(\mathscr{C}) : \beta \cap \beta' \in Z(P),\ \beta \text{ or } \beta' \in \beta^*[\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_{Z(P)}]\}| \\ &= 2 \sum_{\sigma \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_Z} |\{\beta' \in \beta[\mathscr{C}] : \beta' \neq \beta^*[\sigma] \text{ and } \beta^*[\sigma] \cap \beta' \in Z(P)\}|, \end{aligned} \tag{3}$$

并且对每个 $\sigma \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_{Z(P)}$，上述求和项中出现的关联与形如 (σ, σ') 的相切对一一对应：更确切地说，我们有

$$\begin{aligned} &|\{\beta' \in \beta[\mathscr{C}] : \beta' \neq \beta^*[\sigma] \text{ and } \beta^*[\sigma] \cap \beta' \in Z(P)\}| \\ &\qquad = |\{\sigma' \in \mathscr{C} : \sigma, \sigma' \text{ are tangent and } \beta^*[\sigma] \cap \beta^*[\sigma'] \in Z(P)\}|. \end{aligned}$$

对于固定的 σ，相切对 (σ, σ')（根据假设）还与相应的切点 $\sigma \cap \sigma'$ 一一对应；因此，我们来考察这些点必须满足的方程。固定 $\sigma \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_{Z(P)}$，并令 $\sigma' \in \mathscr{C}$ 满足 $\beta^*[\sigma] \cap \beta^*[\sigma'] = \{(x, y)\} \in Z(P)$；也就是说，$P(x, y) = 0$。根据构造，我们有

即 $x_n \neq x_n^\sigma$，因此，由于 $Q_{x^\sigma,j}(x,y) = 0$，我们有 $y_j = (x_j - x_j^\sigma)/(x_n - x_n^\sigma)$。若引入由下式给出的多项式 $P_\sigma \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$

$$\tilde{P}_\sigma(X) := P\left(X_1, \dots, X_n, \frac{X_1 - x_1^\sigma}{X_n - x_n^\sigma}, \dots, \frac{X_{n-1} - x_{n-1}^\sigma}{X_n - x_n^\sigma}\right)(X_n - x_n^\sigma)^{\deg P},$$

于是我们看到 $P_\sigma(x) = 0$（因为 $P(x,y) = 0$）。换言之， σ、 σ' 彼此相切的点位于 $Z(P_\sigma)$ 中。注意，我们有 $\sigma \not\subset Z(P_\sigma)$：事实上，根据假设，我们有 $\beta^*[\sigma] \not\subset Z(P)$，因此存在一点 $(x', y') \in \beta^*[\sigma]$，使得 $P(x', y') \neq 0$；但由于 $x'_n \neq x_n^\sigma$，我们再次有 $y'_j = (x'_j - x_j^\sigma)/(x'_n - x_n^\sigma)$，从而 $\tilde{P}_\sigma(x') = P(x', y')(x'_n - x_n^\sigma)^{\deg P} \neq 0$。由于 σ 是不可约的，交集 $\sigma \cap Z(P_\sigma) = Z(S_{x^\sigma, r_\sigma}, P_\sigma)$ 因此是 σ 的一个真子簇，并且包含所有上述 σ 与某个 σ' 相切的点；特别是，

$$\begin{aligned}&|\{\sigma' \in \mathscr{C} : \sigma, \sigma' \text{ are tangent and } \beta^*[\sigma] \cap \beta^*[\sigma'] \in Z(P)\}| \\ &\qquad = |\{x \in \sigma \cap Z(\tilde{P}_\sigma) : \sigma \text{ is tangent to } \sigma' \text{ at } x, \text{ for some } \sigma' \in \mathscr{C}\}|.\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{C}$ 是 (B, D)-非退化的，且 $\deg P_\sigma \leq D$，最后一项至多为 $B\tilde{}$（注意，$Z(S_{x^\sigma, r_\sigma}, P_\sigma)$ 的次数确实至多为 $2D$），因此由 (3) 可得

$$|I_3| \leq 2B|\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_{Z(P)}|.$$

3.2. 代数贡献。 为了完成对 $|I_2|$ 的界的证明，还需估计 $|I_4|$，或者等价地估计 $|I(\mathscr{C}_{Z(P)})|$——我们将迭代地进行此估计。若 $\sigma, \sigma' \in \mathscr{C}_{Z(P)}$ 满足 $\beta^*[\sigma] \cap \beta^*[\sigma'] = \{(x, y)\}$，注意到由 (2) 以及 $\beta^*[\sigma], \beta^*[\sigma'] \subset Z(P)$ 这一事实可得

$$\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset T_{(x,y)} Z(P);$$

因此，我们得到

$$(x, y) \in Z(\partial_{Y_j} P)$$

对每个 $j \in \{1, \dots, n-1\}$，换言之，对每个 j

$$I(\mathscr{C}_{Z(P)}) = I_{Z(\partial_{Y_j} P)}(\mathscr{C}_{Z(P)}).$$

假设对于某个 j_1，多项式 $\partial_{Y_{j_1}} P$ 不恒为零，上述事实意味着 I_4 是与 I_2 类似的一项，因此我们可以通过类似的分解来处理它。为描述迭代过程，定义

$$\mathscr{C}_1 := \mathscr{C}_{Z(P)}, \qquad P_1 := \partial_{Y_{j_1}} P,$$

（因此上述内容可改写为 $I(\mathscr{C}_1) = I_{Z(P_1)}(\mathscr{C}_1)$），并递归地定义

$$\mathscr{C}_{k+1} := (\mathscr{C}_k)_{Z(P_k)}$$

（也就是说， $\mathscr{C}_{k+1}$ 是满足 $\beta^*[\sigma] \subset Z(P_k)$ 的 $\sigma \in \mathscr{C}_k$ 的集合），并且

$$P_{k+1} := \partial_{Y_{j_{k+1}}} P_k,$$

其中， $j_{k+1} \in \{1, \dots, n-1\}$ 满足： $\partial_{Y_{j_{k+1}}} P_k$ 不恒为零（如果存在这样的 j_{k+1}）。注意， $\mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k$，且 $\deg P_{k+1} < \deg P_k$，并且通过使用（2）重复上述论证，我们对每个 k都有

$$I(\mathscr{C}_k) = I_{Z(P_k)}(\mathscr{C}_k).$$

因此，我们可以写成

$$|I(\mathscr{C}_k)| = |I(\mathscr{C}_k) \setminus I(\mathscr{C}_{k+1})| + |I(\mathscr{C}_{k+1})|$$

并且由于 $I(\mathscr{C}_k) \setminus I(\mathscr{C}_{k+1}) = I_{Z(P_k)}(\mathscr{C}_k) \setminus I((\mathscr{C}_k)_{Z(P_k)})$，我们有

$$|I(\mathscr{C}_k) \setminus I(\mathscr{C}_{k+1})| \leq 2B|\mathscr{C}_{k+1} \setminus \mathscr{C}_{k+1}|$$

重复使用针对 $|I_3|$ 给出的论证。迭代在达到某个 k 时停止，此时 $\partial_{Y_j} P_k$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 都恒等于零（这至多经过 $\deg P$ 步后必然会发生），在这种情况下， P_k 实际上与变量 Y 无关，也就是说

$$P_k(X, Y) = R(X)$$

其中 $R \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 是某个非零多项式。在这种情况下注意，当 $\sigma \in \mathscr{C}_{k+1}$ （也就是说， σ 满足 $\beta^*[\sigma] \subset Z(P_k)$）时，实际上有 $\sigma \subset Z(R)$，这是通过投影到 $\mathbb{R}^n$ 得到的。然而，由于 $\sigma = Z(S_{x^\sigma, r_\sigma})$ 且 S_{x^σ, r_σ} 不可约，根据希尔伯特零点定理[4]，多项式 S_{x^σ, r_σ} 整除 R，因此$|\mathscr{C}_{k+1}| \leq (\deg R)/2 \leq D$。利用平凡上界，我们于是得到

$$|I(\mathscr{C}_{k+1})| \leq D^2,$$

因此，将所有得到的贡献汇总起来，我们得到

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2B|\mathscr{C}_1 \setminus \mathscr{C}_2| + \ldots + 2B|\mathscr{C}_k \setminus \mathscr{C}_{k+1}| + D^2 \\ &\leq 2B|\mathscr{C}_1| + D^2. \end{aligned}$$

3.3. 结论。 将针对 $|I_1|, |I_3|, |I_4|$ 得到的界相加，我们证明了，对于基数为 $\leq N$ 的 (B, D)-非退化集合 $\mathscr{C}$，有

$$|I(\mathscr{C})| \leq C_2(D/2)^{2n-1}\Theta(B, C_1 2^n N/D^n) + 2BN + D^2;$$

对所有此类集合 $\mathscr{C}$ 取上确界后，左边便替换为$\Theta(B, N)$。为简洁起见，我们用 $\Theta(N)$ 代替 $\Theta(B, N)$，并定义$C_3 := 2^n C_1$, $C_4 := 2^{1-2n} C_2$；于是得到不等式

$$\Theta(N) \leq C_4 D^{2n-1}\Theta(C_3 D^{-n} N) + 2BN + D^2.$$

只要将 $D = D(\epsilon, n)$ 选得足够大，使得 $C_3 D^{-n} < 1$，就可以递归地使用该不等式：经过 k 次递归后，我们得到

$$\begin{aligned} \Theta(N) &\leq (C_4 D^{2n-1})^k \Theta((C_3 D^{-n})^k N) \\ &\quad + 2BN(1 + (C_3 C_4 D^{n-1}) + \ldots + (C_3 C_4 D^{n-1})^{k-1}) \\ &\quad + D^2(1 + (C_4 D^{2n-1}) + \ldots + (C_4 D^{2n-1})^{k-1}) \\ &\leq (C_4 D^{2n-1})^k \Theta((C_3 D^{-n})^k N) + 2BN(C_3 C_4 D^{n-1})^k + D^2(C_4 D^{2n-1})^k. \quad (4) \end{aligned}$$

令 k 满足

$$(C_3 D^{-n})^{k+1} N < B \leq (C_3 D^{-n})^k N; \quad (5)$$

然后根据平凡界 $\Theta(M) \leq M^2$我们可知

$$(C_4 D^{2n-1})^k \Theta((C_3 D^{-n})^k N) \leq (C_4 D^{2n-1})^k C_3^{-2} D^{2n} B^2.$$

[4]事实上， σ 在 $Z_{\mathbb{C}}(S_{x^\sigma, r_\sigma})$ 中扎里斯基稠密，因为它包含一个光滑点；因此 $Z_{\mathbb{C}}(S_{x^\sigma, r_\sigma}) \subset Z_{\mathbb{C}}(R)$ 也成立。

由（5）我们进一步看到 $D^{nk} \leq C_3^k N B^{-1}$ 并且（$C_3^{1/n} D^{-1}$）$^k \leq C_3^{-1/n} D B^{1/n} N^{-1/n}$，因此

$$\begin{aligned}(C_4 D^{2n-1})^k C_3^{-2} D^{2n} B^2 &\leq C_3^{-2} D^{-2n} (C_3^2 C_4 D^{-1})^k N^2 \\ &\leq C_3^{-2-1/n} D^{1-2n} (C_4 C_3^{2-1/n})^k B^{1/n} N^{2-1/n}.\end{aligned}$$

选取 D 足够大，使得 $C_4 C_3^{2-1/n} \leq C_3^{-\epsilon} D^{n\epsilon}$，由 (5) 再次得到 ($C_4 C_3^{2-1/n}$) $^k \leq B^{-\epsilon} N^{\epsilon}$，因此

$$(C_4 D^{2n-1})^k \Theta((C_3 D^{-n})^k N) \lesssim_{\epsilon,n} B^{1/n-\epsilon} N^{2-1/n+\epsilon}.$$

类似的论证表明，(4) 中剩下的两项也被$O_{\epsilon,\ n}$($B^{1/n-\epsilon} N^{2-1/n+\epsilon}$)所控制，因此定理 1 的证明得以完成。

致谢。 作者感谢 Andrei Mustata 在代数几何方面提供的有益咨询，感谢 Marina Iliopoulou 将圆相切问题介绍给他们，并感谢 CosminPohoata 就该领域的最新进展提供有益咨询。

References

[1] Z. Dvir. 关于有限域中 Kakeya 集的大小。 *J. Amer. Math. Soc.* 22 4 1093 1097, , ( ): – 2009 .[2] J. S. Ellenberg 、 J. Solymosi 和 J. Zahl. 曲线相切与正交关系的新界。*Discrete Anal.*, 2016. 论文编号 18， 22.[3] J. Fox、J. Pach、A. Sheffer、A. Suk 和 J. Zahl. Zarankiewicz 问题的半代数版本。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(6):1785–1810, 2017. [4] L. Guth. 对一组簇进行多项式划分。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 159 3 459 469, 2015 ( ): – . [5] L. Guth. *Polynomial methods in combinatorics*, *University Lecture Series*第 64 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016. [6] J. Milnor. 关于实代数簇的贝蒂数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15:275–280, 1964. [7] M. Sharir、S. Smorodinsky、C. Valculescu 和 F. de Zeeuw. 点与直线之间的不同距离。 *Comput. Geom.*, 69:2–15, 2018.[8] J. Solymosi 和 T. Tao. 高维关联定理。 *Discrete Comput. Geom.*, 48 2 255( ): –280, 2012. [9] R. Thom. 关于实代数簇的同调。载于 , 页码 – 。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1965.[10] T. Wolff. 与 Kakeya 问题相关的近期工作。载于 *Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996)* 129 162 1999 , 页码 – 。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。[11] J. Zahl. 球面相切、直线关联与 Lie 直线—球面对应。 *Cambridge Philos. Soc.* 172 2 401 421, 2022 *Math. Proc.* , ( ): – .

(C. Crowley) School of Mathematical Sciences, University College Cork, Western Gateway Building, Western Road, Cork, Ireland*Email address*: conradcrowley@gmail.com (M. Vitturi) School of Mathematical Sciences, University College Cork, Western Gateway Building, Western Road, Cork, Ireland*Email address*: marco.vitturi@ucc.ie