arXiv:2301.06419v1 [math.RT] 16 Jan 2023

带有 n 个奇点的 Feigin-Frenkel 定理

Luca Casarin

摘要

对于单李代数 $\mathfrak{g}$，我们考虑一种带有 n 个奇点的仿射代数 $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 的类比，它是从 n 点带标记圆盘上的函数环出发定义的。我们研究其完备包络代数的中心，并证明此情形下 Feigin-Frenkel 定理的一个类比。具体而言，我们首先通过给出显式的拓扑生成元，对中心作代数描述；随后将中心从几何上刻画为 n 点带标记圆盘上 ^{L}G-Opers 的空间的函数环。最后，我们证明该同构的一些因子化性质，从而确立我们的同构与通常的 Feigin-Frenkel 同构之间的关系。

目录

1 引言 **2**

1.1 主要特征与目标.2 1.2 证明概述.4 1.3 关于我们假设的必要性.7

2 代数预备知识 **8**

2.1 函数环上的矢量积.9 2.3 (φ)-阿代尔环与具有全局坐标的环.11 2.4 连续微分模.14 2.4.1 泰勒展开.16 2.4.2 链式法则与坐标.18 2.5 n-带标记圆盘上的函数环.19 2.5.1 拓扑基.20 2.6 自同构.22 2.7 李代数 Der R 与 Der K .23 2.8 李代数.23

3 分布空间 **24**

3.1 局部场、场的 n-乘积.27 3.2 分布与顶点代数.32 3.3 K-场的作用.35

4 场的空间 K_n **36**4.1 导子的作用.38 4.2 完备拓扑代数 $\tilde{U}_{K_n}(V)$ .39 4.3 中心元.41

5 中心的代数描述 42
5.1 R-喷射概形.42 5.2 卷积与正规序乘积.45 5.3 开浸入.48 5.4 基变换.50 5.5 不变量.51 5.6 中心的代数描述.55

6 与 Opers 空间上的函数代数的识别 **57**
6.1 Opers 概述.57 6.2 自同构的作用与李代数.59 6.3 n 奇点情形下的 Feigin-Frenkel 同构. 60

7 因子化性质 **61**
7.1 K_n 与 $\hat{\mathfrak{g}}_n$ 的因子化性质.61 7.2 场的因子化.63 7.3 因子化映射.67

1 引言

本文受到 Fortuna、Lombardo、Maffei 和 Melani 的工作启发 [Fortuna 等人 2020],，他们构造了两个交换代数之间的一个典范同构：

1. $(\mathfrak{sl}_2)_{k_c,2}$的完备包络代数的中心，即 $\mathfrak{sl}_2$ 在临界级的仿射代数的二奇点类比；2. 二标记圆盘上的 Opers 空间的函数代数。

本文的主要目标是将他们的结果推广到任意单李代数 $\mathfrak{g}$ 以及任意数量的奇点。

1.1 主要人物与目标

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的单有限维李代数。我们简要回顾仿射代数 $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 的构造。设 κ 是 $\mathfrak{g}$ 上的不变对称双线性型，它必为 Killing 型 $\kappa_\mathfrak{g}$ 的数乘。李代数 $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 是通过对环代数 $\mathfrak{g}((t)) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((t))$ 作一维中心扩张得到的。因此，作为向量空间，$\hat{\mathfrak{g}}_\kappa = \mathfrak{g}((t)) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是一个中心元，括号定义为

$$[Xf, Yg] = [X, Y]fg + \kappa(X, Y)\mathbf{1}\int(g\,df) \quad \text{for } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ and } f, g \in \mathbb{C}((t)),$$

其中 $\int : \Omega^1_{\mathbb{C}((t))/\mathbb{C}}{}^{\mathrm{cont}} = \mathbb{C}((t))dt \to \mathbb{C}$ 是留数映射。 $\mathbb{C}((t))$ 上的自然拓扑赋予 $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 拓扑李代数结构。可以利用这一拓扑构造 $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 的包络代数的完备化，进而对理想 $(\mathbf{1}-1)$ 取商后，记为 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$。

Feigin-Frenkel 定理 [Feigin 和 Frenkel, 1992]讨论的是临界层下 $\kappa_c = -\frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}$完备包络代数的中心的描述。

定理 1.1.1(Feigin-Frenkel 1992年)。 设 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ 如上所述。那么，若 $\kappa \neq \kappa_c$ 是 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ 的中心，则它由1张成。对于 $\kappa = \kappa_c$，存在一个规范的、Der $\mathbb{C}((t))$-等变同构

$$Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}})) = \mathbb{C}[\mathrm{Op}_{{}^L\mathfrak{g}}(D^*)]$$

$\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}})$ 的中心与带标记圆盘 $D^* =$ 谱 $\mathbb{C}((t))$上、相对于朗兰兹对偶李代数 ${}^L\mathfrak{g}$的 *Opers* 空间上的函数代数同构。

完备环 $\mathbb{C}((t))$ 是形式圆盘上的函数代数，这些函数仅在 $0 \in D$处有奇点。因此，自然会尝试寻找一种类似构造，使多个点 a_1、.....、 a_n处都允许有奇点，并且我们希望这些点能够“自由移动”。

形式化表述如下。我们用完备拓扑环替代 $\mathbb{C}((t))$

$$K_n = A_n[[t]]\left[\prod (t-a_i)^{-1}\right] \quad \text{where} \quad A_n = \mathbb{C}[[a_1,\dots,a_n]]$$

其拓扑由 A_n-线性子空间 $J_N = \left(\prod (t-a_i)\right)^N A_n[[t]]$ 给出。这是形式的 n 个带标记圆盘上的函数环最自然的提议。在 A_n-线性框架下工作，还能让我们“自由移动这些点”，例如通过对理想 $(a_i - a_j)$ 取商来声明其中两个点相等；反之，也可以通过求逆 $a_i - a_j$ 来声明它们互不相同。

n-奇点情形下的留数映射类似物

$$\int_n : K_n dt \to A_n$$

在稠密子环 $A_n[t]\left[\prod (t-a_i)^{-1}\right]$ 上，该映射定义为点 a_i 处留数之和，随后通过连续性延拓。借助这两个关键要素，我们可以在 n 个奇点的情形下构造 $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 的类似物：

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa,n} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} K_n \oplus A_n \mathbf{1},$$

这里同样，$\mathbf{1}$ 是一个中心元，括号的定义与之前相同：

$$[Xf, Yg] = [X,Y]fg + \kappa(X,Y)\mathbf{1}\int_n (gdf) \quad \text{with } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ and } f, g \in K_n.$$

K_n 的拓扑在 $\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\ n}$ 上诱导出拓扑李代数结构。我们可以如下构造其完备包络代数。令 $U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n) = U_{A_n}(\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa,n})/(\mathbf{1}-1)$，并将其完备化定义为： $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)$

$$\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n) = \varprojlim_N \frac{U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)}{U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)J_N}.$$

我们的目标是描述该完备结合代数在临界级处的中心，我们将其记作

$$Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) = Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)).$$

与 Feigin-Frenkel 定理类似，用于几何地描述中心的理想候选是相对于李代数 ${}^L\mathfrak{g}$、定义在带 n个标记点的形式圆盘 $D_n = \mathrm{Spec}\ K_n$ 上的 Opers 空间的函数代数。

相对于任意单李代数 $\mathfrak{g}$ 且定义在 D_n上，记作 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D_n)$ 的 Opers 空间，是 D_n上平凡 G-丛上的某类联络的分类空间，其中 G 是 $\mathfrak{g}$的伴随代数群。一般定义见 [Beilinson 和 Drinfeld, 2005]。

可以证明，它是定义在 A_n上的归纳仿射概形。我们将其函数代数记作 $A_n[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D_n)]$，它自然是一个完备拓扑环。

我们的主要目标是证明以下定理。

定理典范的 i **1.1.2.** 对于定义在 $\mathbb{C}$ 上的每个有限维单李代数 $\mathfrak{g}$ 以及每个正整数 n，存在 *a* 同构

$$Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) = A_n[\mathrm{Op}_{{}^L\mathfrak{g}}(D_n)],$$

其中 ${}^L\mathfrak{g}$ 是朗兹对偶李代数。该同构是导子 K_n-等变的，并且与两个空间上的因子化代数结构相容。

这是定理 6.3.2 与定理 7.3.1 的内容。关于因子化代数的概念，我们请读者参阅 [Beilinson 等人, 2004]。

1.2 证明思路

在第 2 章介绍了我们将要使用的主要代数工具之后，我们沿用 Feigin-Frenkel 定理的原始证明，并作了一些细微但在我们看来至关重要的修改。事实上，与上述定理的证明一样，首先要构造完备包络代数中的中心元，它们源自仿射顶点代数 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$中的中心元。在只有 1 个奇点的经典情形下，这是通过将形式级数

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n z^{-n-1} \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}\ \text{,where } X_n = X \otimes t^n \in \hat{\mathfrak{g}}_\kappa, \tag{1}$$

视为系数取自完备包络代数 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$的级数来实现的。随后可以验证，拼接的正规序乘积及其导数的公式在 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$中收敛。因此，对于顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 中的每个元素 A，都与一个形式级数

$$Y[A,z] \in \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})[[z^{\pm 1}]].$$

可以证明它们满足通常的对易关系：

$$\big[Y[A,z], Y[B,w]\big] = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{n!} Y[A_{(k)}B, w]\partial_w^k \delta(z-w).$$

由此恒等式可知，若 A 在 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 中是中心的，则 $Y[A,z]$ 的傅里叶系数在完备包络代数 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})[[z^{\pm 1}]]$ 中均为中心的。关于这一论证的详细内容，参见 [Frenkel 和 Ben-Zvi, 2004 年，第 4] 章。

如果我们想将类似的推理应用于具有 n 个奇点的情形，首要且最重要的一步是找到级数 $X(z)$ 的恰当类比。我们利用以下注记：

备注 **k 1.2.1.** 设 V 是一个 $\mathbb{C}$ 向量空间。存在一个 $\mathbb{C}[z,\partial_z]$-模的典范同构 es

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(V)[[z^{\pm 1}]] &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[z^{\pm 1}], \mathrm{End}(V)\right)\\ \varphi(z) &\mapsto \left(p(z) \mapsto \int p(z)\varphi(z)dz\right)\end{aligned}$$

在此同构下，场的子空间同构地映射到连续线性态射空间 $\mathrm{Hom\ cont}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[z^{\pm 1}], \mathrm{End}(V)\right)$ 的子空间，其中 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ 配备由子空间 $z^N\mathbb{C}[z]$ 给出的拓扑，V 配备离散拓扑，而 $\mathrm{End}(V)$ 配备逐点收敛拓扑。由于 $\mathrm{End}(V)$ 是完备的，我们有 $\mathrm{Hom\ cont}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[z^{\pm 1}], \mathrm{End}(V)\right) = \mathrm{Hom\ cont}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}((z)), \mathrm{End}(V)\right)$。因此：

$$\left\{\text{Fields on } V\right\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cont}}\left(\mathbb{C}((z)), \mathrm{End}(V)\right).$$

我们将右侧出现的空间称为取值于 $\mathrm{End}(V)$ 的 $\mathbb{C}((z))$ 上的 **分布空间**。

在第 3 节中，我们使用分布的语言重建顶点代数和场的基本理论。我们将在一般情形下讨论 U 值分布，其中 K 是任意诺特环 A 上带有全局坐标的（局部化）(φ)-进环（参见定义 2.3.1 和 2.3.4），而 U 是 A 上拓扑由左理想生成的完备拓扑代数。这里我们指出，上述 K 与 K_n 之间的主要区别在于后者带有留数；特别是，引理 2.5.2 是一项关键性质。本文中几乎所有仅针对 K_n 陈述的结果，都可以推广到任意带有全局坐标 z 的局部化 (φ)-进环，只要赋予 K 一个满足引理 2.5.2 和 $\int\circ\partial_z = 0$ 的留数。

当 $K = \mathbb{C}((z))$ 时，顶点代数中的场这一概念便是其特例。特别地，我们可以考虑取值于任意完备拓扑代数的场，其拓扑由左理想生成，如 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ 所示。我们希望，这一观点也能为通常的顶点代数理论带来一些新的启发，例如简化 [Frenkel 和 Ben-Zvi 2004] 中命题 4.2.2 所用的论证以及相关结果。

我们不再考虑 (1) 中的级数 $X(z)$，而是考虑定义在 K_n 上、取值于 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 的分布：

$$\hat{X} \in \mathrm{Hom}_{A_n}^{\mathrm{cont}}\left(K_n, \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)\right), \qquad \hat{X}(f) = X \otimes f, \text{ for } X \in \mathfrak{g}, f \in K_n.$$

令 $a_i = 0$，即可得到与生成级数 $X(z)$ 相关联的分布。

我们可以对场分布求导数并取 n-乘积，以此模仿场的通常 n-乘积。因此，我们证明了 3.1.13 中 Dong 引理的类比。最后，我们在定理 3.2.3 中证明：包含单位元、对导数和 n-乘积封闭的互相局部连续分布子空间，自然构成一个真正的顶点代数。这应被视为 [Kac 1998] 中命题 3.2 的类比及其推论。

总之，上文引入的典范分布 $\hat{X}$（对应 $X \in \mathfrak{g}$）生成了一个顶点代数，我们称之为 $V^\kappa_{K_n}(\mathfrak{g})$。事实上，正如命题 4.0.5 所述，这个顶点代数与 $\mathfrak{g}$ 的层为 κ的泛仿射顶点代数典范地同构：

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) = V^\kappa_{K_n}(\mathfrak{g}). \tag{2}$$

这对我们而言是一个关键点：它使我们能够将每个中心元 $z \in \zeta\left(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})\right)$ 和任意函数 $f \in K_n$ 关联到完备包络代数 $z(f) \in \tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)$中的一个中心元。

为了更好地利用上述结果，我们引入一个新的对象：完备结合代数 $\tilde{U}_{K_n}(V^\kappa(\mathfrak{g}))$，现对其加以说明。在第4节中，我们定义了一个函子，它从由齐次向量有限生成（作为顶点代数）的拟共形顶点代数范畴映射到 A_n上的完备结合代数范畴

$$V \rightsquigarrow \tilde{U}_{K_n}(V).$$

$\tilde{U}_{K_n}(V)$ 的构造分为几个步骤：首先构造傅里叶系数李代数 $U(V)$ 的 K_n 类比形式（采用 [Frenkel 和 Ben-Zvi 的记号， 2004]），这里记作 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V)$；然后对其包络代数取自然完备化；最后除去一些源自顶点代数公理的自然关系。

(2) 中的同构给出一个李代数态射 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V^\kappa(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)$，它自然延拓为一个映射

$$\tilde{U}_{K_n}\left(V^\kappa(\mathfrak{g})\right) \to \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n),$$

我们将证明该映射是同构。最后，简单的说明表明，复合映射

$$\tilde{U}_{K_n}\left(\zeta(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))\right) \to \tilde{U}_{K_n}\left(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})\right) \to \tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)$$

经由中心 $Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$ 因子化：

$$\tilde{U}_{K_n}\left(\zeta(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))\right) \to Z_n(\hat{\mathfrak{g}}). \tag{3}$$

我们再分两步完成定理 1.2 的证明：首先，证明 (3) 中的映射是同构。这一步在第 5 节完成，其证明与 [Frenkel， 2007] 所给出的 Feigin-Frenkel 定理证明完全类似。这里的关键是，要在多奇点的背景下发展喷射概形的类比概念。我们对其加以定义，并证明一些基本性质。

其次，我们利用中间对象 $\tilde{U}_{K_n}\left(\zeta(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))\right)$。根据 Feigin-Frenkel 定理，我们知道 $\zeta(V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}))$ 与 $\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{{}^L\mathfrak{g}}(D)]$ 典范同构；后者是 ${}^L\mathfrak{g}$ 在 $D=$ 的 $\mathbb{C}[[t]]$ 谱上 Opers 空间的函数代数。要完成证明，只需证明存在一个典范同构

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D)]) = A_n[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D_n)]$$

对于任意单李代数 $\mathfrak{g}$。第 6 节通过对这两个空间的显式描述来证明这一点。

最后，我们在第 7 节讨论所谓的因子化性质。这些性质由以有限集为索引的代数 $\mathcal{A}_I$ 构成，并带有以下附加结构：对于每个满射$I \twoheadrightarrow J$ 和每个分解 $I = I_1 \cup I_2$，都有规定的方式分别将 $\mathcal{A}_I$ 与 $\mathcal{A}_J$ 及$\mathcal{A}_{I_1}$联系起来。一般定义请参见 [Beilinson 等人， 2004]。为了研究因子化代数，我们稍作记号调整：不再考虑整数 n，而是考虑有限集 I，并为其赋予完备包络代数 $Z_I(\hat{\mathfrak{g}})$ 的中心。

显然，代数 $A_I[\mathrm{Op}_{{}^L\mathfrak{g}}(D_I)]$ 和 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_I)$ 满足因子化性质。后者会导出自然的因子化映射

$$Z_I(\hat{\mathfrak{g}}) \to Z_J(\hat{\mathfrak{g}}),$$
$$Z_I(\hat{\mathfrak{g}}) \to Z_{I_1}(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\boxtimes} Z_{I_2}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

不过，我们事先并不知道这些是同构。最后一节的目标是证明我们构造的同构

$$A_I[\mathrm{Op}_{{}^L\mathfrak{g}}(D_I)] \to Z_I(\mathfrak{g})$$

与因子化映射相容，这很容易推出 $Z_I(\hat{\mathfrak{g}})$ 也是一个因子化代数。

首要难点是首先证明分布具有因子化性质。我们看到，从 $V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ 出发构造的 K_n 上的分布满足自然因子化性质；结合这些性质以及我们对同构的显式描述，我们证明了定理 7.3.1，从而完成了主定理 1.2 的证明。

1.3 关于我们的假设之必要性

这里我们想谈谈撰写本文时所作的一些选择，并对可能的后续发展提出一些思路。

- 我们对全局坐标的定义（参见定义 2.3.4）远比实际所需的条件强，但本文所关注的环（即 R_n、 K_n）在此意义下都存在全局坐标，因此为简化叙述，我们保留了这一较强的假设。我们对全局坐标的定义所允许的一般性有限；事实上，存在全局坐标的环与 $\mathbb{A}^1_A$ 的某个开集上的函数环相差不远，因此我们所处理的实际上是一个“平坦”情形。为了在更一般的曲线（或曲线族）上开展研究，我们认为更合适的一组假设如下：

  – 存在 $z \in K$ 使得微分模$\Omega^1_{K/A} = K\mathrm{d}z$。– 对角理想 $I \subset K \otimes K$ 是主理想。

  在这些假设下，我们的主要结果之一——定理 3.2.3——应以不同的方式表述。我们认为，在如此一般的情形下，闭的分布空间应自然地具有手征代数结构，而不是顶点代数结构。这将是未来工作的研究对象。

- 分布空间是本文的核心对象（参见定义 3.0.2），但直到第 7 节才真正不可或缺。事实上，我们不必先将形式级数空间 $V[[z^{\pm 1}]]$ 重新解释为分布空间，再考虑定义在 K_n上的分布；我们可以直接在具有 n 个奇点的情形下定义合适的形式级数空间。这种做法无疑会更加具体，但我们认为也会显得不必要地不自然，且记号繁琐。我们再次强调，使用形式幂级数的语言会使因子化性质的处理变得非常困难。最后，我们认为，分布这一语言有助于阐明顶点代数理论中场的连续性条件。

  最后，我们还想指出，分布的语言也可以应用于拓扑结构不那么具有代数性质的环，例如复平面上一点附近的亚纯函数芽环。

致谢。我谨向我的导师 Alberto De Sole 和 Andrea Maffei 致谢，感谢他们在撰写本文过程中给予的大力支持，以及使这项工作得以完成的众多讨论。

2 代数预备知识

这里简要概述本文后续部分所需的基本代数框架。我们主要研究完备拓扑代数对象，并在此定义一些相关构造，例如完备张量积和微分连续模。从第 2.4 节开始，我们将定义本文主要关注的一类环，称为**具有全局坐标的环**。最后，在本节末尾，我们将定义形式 n 个带标记圆盘上的函数环，并构造与之相关的仿射 Kac-Moody 代数 $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 的自然推广。

2.1 完备拓扑环

我们将在一个固定的交换代数 A 上工作，其中 $\mathbb{C}$ 为基环，并假设它是诺特的。所有模、代数和环（交换代数）都视为定义在 A上的；对于非交换的 A-代数，我们要求 A 是中心的。我们所考虑的所有结合代数和环都有单位元。

考虑这些代数对象上的拓扑时，我们总是假设拓扑是 A-线性的，并且在拓扑 A-代数的情形下，基环 A 继承离散拓扑。换言之，我们假设存在一个由开 A-子模 I_α 组成的 0 的基本邻域系，而拓扑基由 I_α的平移给出。我们写“设 I_α 是 R的基本邻域系”时，隐含假设这些都是开 A-子模。

如果存在一个由双边（分别为左、右）理想构成的 0 的开邻域基本系，我们就称该拓扑由双边（分别由左、右）理想生成。我们也会考虑并非由理想诱导的拓扑。后一类拓扑的典型例子是 Laurent 多项式环

$$\mathbb{C}[t^{\pm 1}] \text{ ,with the topology given by } t^n\,\mathbb{C}[t]\ n \geq 0,$$

及其完备化——形式 Laurent 级数环 $\mathbb{C}((t))$。

给定一个拓扑代数 (R,τ)，我们称 $\hat{R}^\tau$（或者在上下文中的拓扑明确时，简称 $\hat{R}$）为它的完备化；它具有自然的完备拓扑代数结构。注意，若 R 是一个带有两种不同拓扑 τ_1、τ_2 的代数，且 τ_2 比 τ_1更精细，则存在一个代数的典范态射 $\hat{R}^{\tau_2} \to \hat{R}^{\tau_1}$。

下面的构造将在后文中用到。

定义 2.1.1. 设 V 是一个拓扑 A-模，I_α 是 V 中 0 的一个基本邻域系。我们定义相对于 V 的**完备对称代数**，记作 $\mathrm{Sym}_A(V)$，它是将 $\mathrm{Sym}_A(V)$ 按由 I_α 生成的理想完备化所得。

$$\widetilde{\mathrm{Sym}}_A(V) = \varprojlim \frac{\mathrm{Sym}_A(V)}{(I_\alpha)}.$$

它满足以下泛性质。对于任意连续的 A-线性态射 $V \to S$，其中S 是一个拓扑由理想生成的完备拓扑环，存在唯一的连续交换环态射

$$\widetilde{\mathrm{Sym}}_A(V) \to S$$

扩张态射 $V \to S$。

2.2 张量积

没有一种规范的方法可以为两个拓扑代数的张量积赋予拓扑。这里我们将考察两个完备拓扑代数在 A 上的张量积 $S_1 \otimes S_2$ 的各种拓扑。设给定一个完备的拓扑 A-代数 U，以及两个连续的 A-线性态射 $\varphi_i : S_i \to U$，并考虑线性映射

$$\varphi_1\varphi_2 : S_1 \otimes S_2 \to U, \qquad f_1 \otimes f_2 \mapsto \varphi_1(f_1)\varphi_2(f_2).$$

我们将根据 U 上的拓扑是由左理想、右理想还是双边理想生成，考虑 $S_1 \otimes S_2$ 上的不同拓扑，以使映射 $\varphi_1\varphi_2$ 连续。下文中，I_α（分别为 J_β）表示 S_1（分别为 S_2）的基本邻域系。

- **"中间拓扑"** 定义 $S_1 \otimes S_2$ 上 0 的开邻域系为由以下 A-子模给出：

  $$I_\alpha \otimes J_\beta.$$

  此拓扑使 $S_1 \otimes S_2$ 中的乘积连续，因此沿此拓扑取完备化（记为 $S_1 \mathbin{\hat{\otimes}} S_2$），自然得到一个完备拓扑 A-代数。映射 $\varphi_1\varphi_2$ 关于中间拓扑总是连续的，因此诱导出一个连续映射

  $$\varphi_1\varphi_2 : S_1 \mathbin{\hat{\otimes}} S_2 \to U.$$

- **"左（分别为右）或 1（分别为 2）拓扑"** 在张量积 $S_1 \otimes S_2$ 上考虑如下拓扑：规定 0 的开邻域基本系由以下 A-子模给出：

  $$I_\alpha \otimes S_2 \quad \big(\text{resp. } S_1 \otimes J_\beta\big).$$

  这些拓扑使乘积连续，因此完备化自然具有完备拓扑 A-代数的结构。它们都比中间拓扑更粗。如果 U 具有由左（分别为右）理想生成的拓扑，那么映射 $\varphi_1\varphi_2$ 关于右（分别为左）拓扑是连续的。

  我们还将考虑多重张量积上这些拓扑的类似形式。我们将 j 拓扑定义为 $S_1 \otimes \cdots \otimes S_n$ 上的一种拓扑，其开邻域基本系由 $S_1 \otimes \cdots \otimes I_\alpha \otimes \cdots \otimes S_n$ 给出，其中 I_α 是 S_j中 0 的一个基本邻域系。同样，在此拓扑下乘积是连续的，因此我们可以考虑完备化

  $$\widehat{S_1 \otimes \cdots \otimes S_n}^{\,j}$$

  关于此拓扑进行完备化后，自然得到一个完备拓扑 A-代数。

  注意，即使 S_1 没有预先给定的拓扑，这种拓扑也有意义。特别地，从任意一个 A 上的环 B 出发，我们都可以构造完备张量积

  $$B(S) \overset{\text{def}}{=} \widehat{B \otimes S}^{\,2}.$$

  我们称 $B(S)$ **沿映射 的基变换** 为 S。

- **“理想和拓扑”**假设 S_1（分别为 S_2）上的拓扑是某个双边理想 $I \subset S_1$、$J \subset S_2$ 所定义的 I-进（分别为 J-进）拓扑。我们称 $S_1 \otimes S_2$ 关于 $(I \otimes S_2 + S_1 \otimes J)$-进拓扑的完备化

$$\widehat{S_1 \otimes S_2}.$$

该拓扑比前面列出的拓扑更粗；若 U 上的拓扑由双边理想给出，则映射 $\varphi_1\varphi_2$ 关于理想和拓扑是连续的。此外，注意到这两个典范态射

$$\iota_i : S_i \to \widehat{S_1 \otimes S_2}$$

$\widehat{\ }$是连续的，并且 $S_1 \otimes S_2$ 是拓扑由双边理想生成的完备拓扑A-代数范畴中的余积。

- **“朴素和拓扑”** 定义 $S_1 \otimes S_2$ 的 0 的开邻域系为以下 A 子模

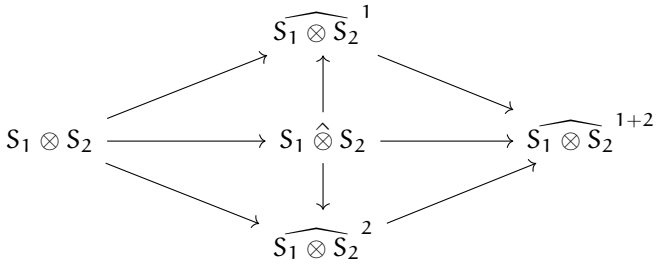
$$S_1 \otimes I_\alpha + J_\beta \otimes S_2.$$

对左拓扑和右拓扑都连续的映射，对朴素和拓扑也连续。$S_1 \otimes S_2$ 上的乘积在此拓扑下不一定连续，因此完备化 $\widehat{S_1 \otimes S_2}^{1+2}$ 不具有自然的代数结构。

引理 2.2.1。 和拓扑（分别为左拓扑、右拓扑）使线性映射

$$\varphi_1\varphi_2 : S_1 \otimes S_2 \to U$$

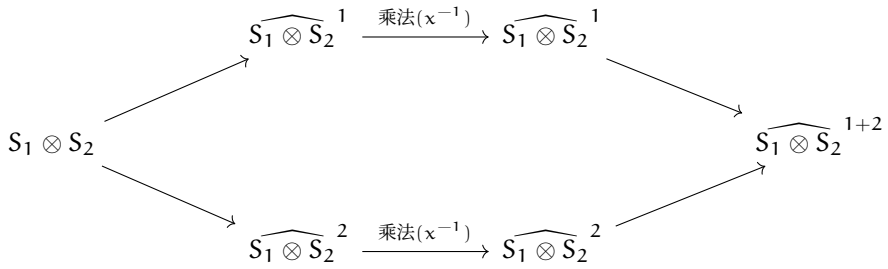
连续，前提是 U 上的拓扑由双边（分别为右、左）理想生成；而对于 U 上的拓扑，不需要任何额外假设，态射 $\varphi_1\varphi_2$ 关于中间拓扑总是连续的。此外，存在自然映射，使下图交换：



证明。显然。 □

注记 2.2.2. 考虑这样的情形：取一个元素 $x \in S_1 \otimes S_2$，它在 $\widehat{S_1 \otimes S_2}^{i}$ 中均可逆，但在 $S_1 \mathbin{\hat{\otimes}} S_2$ 中不可逆。此时没有理由认为以下两个

复合相同:



2.3 (φ)-阿代尔环与具有全局坐标的环

我们将考虑由主形式邻域的函数环构成的环。

定义 2.3.1. 设 R 是一个在 A 上的环，$\varphi \in R$ 是一个不可逆元。若 R 相对于由主真理想 $I = (\varphi)$诱导的拓扑完备，则称其为 (φ)-**阿代尔** 环。我们还要求 φ 不是零因子，且 R/I 作为 A-模是有限自由的。

称基环 A 上的完备拓扑环 K 为**局部化的** (φ)-**阿代尔** 环，若它是某个 (φ)-阿代尔环 R的局部化 $K = R_\varphi$。

记号。从现在起，记 R 为一个 (φ)-进环，记 $K = R_\varphi$ 为其对应的局部化 (φ)-进环。

我们感兴趣的主要例子如下:

- 设 $A = \mathbb{C}$，并考虑 R 多项式 $= \mathbb{C}[t]$。我们可以沿由 $t \in \mathbb{C}[t]$ 生成的理想取完备化 $R = \mathbb{C}[[t]]$，然后也考虑 $K = \mathbb{C}((t))$，即将 R 对 t 局部化。
- 设 $A_n = \mathbb{C}[[a_1, \ldots, a_n]]$ 和 R 多项式$_n = A_n[t]$，并考虑多项式 $\varphi_n = \prod(t - a_i)$。然后考虑 R，即按照由理想 $I = (\varphi_n)$ 生成的拓扑对 R 多项式取完备化。注意，由于 φ_n 是次数为 n 的首一多项式，我们有 R 多项式$/(\varphi) = \oplus_{k=0}^{n-1} A t^k$。可以证明 $R_n \simeq A_n[[t]]$ 是一个完备拓扑环，其拓扑由理想$\big(\prod(t - a_i)\big)^N A_n[[t]]$给出。最后我们考虑 K_n，即将 R_n 中的元素 φ_n 求逆所得的局部化。

备注 2.3.2. 我们感兴趣的环，本质上就是上面列出的那些环及其基变换 $B(R_n), B(K_n)$，其中固定一个 A_n-代数 B。在第4节之前，我们所证明的一切都适用于配有全局坐标的（局部化）(φ)-阿代尔环这一一般情形（参见定义 2.3.4）。

这里列出一些关于 (φ)-阿代尔环的简单结果。

Prop命题 2.3.3. 设 R, R_1, R_2 是定义在同一基环 A 上的 (φ)-阿代尔环。以下结论成立:

1. 设 $e_1, \ldots, e_n \in R$ 是一些元素，它们的类构成 R/I 的一个 A-线性基（我们回顾一下，根据假设，R/I 是一个自由且有限的 A-模）。那么，对于 $k \geq 0$，元素 $e_i \varphi^k$ 构成一个

R 的拓扑基，这意味着 $x \in R$ 中的每个元素都能唯一地写成一个无穷和

$$x = \sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \varphi^k \quad \text{with } a_{i,k} \in A$$

且每个这样的和都定义了 R 中的一个元素。

2. 上述结论可推广到局部化 $K = R_\varphi$。元素 $e_i\varphi^k$with $k \in \mathbb{Z}$ 构成 K 的拓扑基，这意味着每个元素 $x \in K$ 都可以唯一地写成一个无穷和

$$x = \sum_{k\geq -N}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \varphi^k \quad \text{with } a_{i,k} \in A$$

且每个这样的和都定义了 K 中的一个元素。

3. 给定 B，一个定义在 A 上的环，考虑基变换 $B(R)$ 和 $\varphi = 1 \otimes \varphi \in B(S)$。那么 $B(S)$ 是一个 (φ)-adic 环，其局部化 $B(S)_\varphi$ 与 $B(K)$ 典范同构，其中一如既往地有 $K = R_\varphi$。

4. 存在一个自然映射

$$R_1 \hat{\otimes} R_2 \to \widehat{R_1 \otimes R_2}$$

事实证明该映射是双射，因此它是一个代数同构，但不一定是双连续的。利用上文引入的拓扑基可以显式地证明这一点。

5. 令 $K_1 = (R_1)_{\varphi_1}$ 和 $K_2 = (R_2)_{\varphi_2}$，可以验证自然映射

$$(R_1 \hat{\otimes} R_2)_{\varphi_1 \otimes \varphi_2} \to K_1 \hat{\otimes} K_2$$

是一个同构。

定义 2.3.4. 设 S 是 A 上的一个环（分别地，一个完备拓扑环），且 $\Omega^1_{S/A}$（分别地，$\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{S/A}$）是有限生成投射模。若函数 $z \in S$ 使乘法态射 $S \otimes S \to S$ 诱导出一个同构，则称 $z \in S$ 为 S 上的一个**全局坐标**

$$\frac{S \otimes S}{(z-w)} \simeq S \quad \left(\text{resp. } \frac{S \hat{\otimes} S}{(z-w)} \simeq S\right),$$

其中，稍微滥用一下符号（本文中我们将一直如此），$z = z\otimes 1$ 和 $w = 1\otimes z$。当 S 是一个完备拓扑环时，$(z-w)$ 实际上是一个闭理想，因为它是一个连续映射的核。

谈到具有全局坐标的环时，我们总是假设微分模（分别地，连续微分模）有限生成且投射。这主要是因为以下命题。

引理 2.3.5. 设 R^{pol} 是复数域 A 上的有限生成环，并设 $\varphi \in R^{pol}$ 是一个非可逆的非 0 除子元素，使得 $R^{pol}/(\varphi)$ 作为 A-模是有限自由的。考虑 R 沿理想 (φ) 的完备化。那么 R 是一个 (φ)-进环；若 $z \in R^{pol}$ 是一个全局坐标，则它也是 R 的全局坐标。

证明. 回顾一下，存在自然同构

$$R \hat{\otimes} R \simeq \widehat{R \otimes R} \simeq \widehat{R^{pol} \otimes R^{pol}}$$

其中， $R^{pol} \otimes R^{pol}$ 的完备化是沿着 $J = (I \otimes R^{pol} + R^{pol} \otimes I)$-进拓扑取的。根据假设，存在一个正合列

$$R^{pol} \otimes R^{pol} \xrightarrow{\cdot(z-w)} R^{pol} \otimes R^{pol} \xrightarrow{\mu} R^{pol} \longrightarrow 0$$

我们以自然的方式将上述正合列中的对象视为 $R^{pol} \otimes R^{pol}$模。众所周知（例如参见 Stacks Project Authors，2018，标签 0BNH] 中的引理 10.97.1 []），沿理想 J 取完备化是一个正合运算。因此

$$R \hat{\otimes} R \xrightarrow{\cdot(z-w)} R \hat{\otimes} R \xrightarrow{\mu} R \longrightarrow 0$$

同样是正合的，这就证明了 z 也是 R 的全局坐标。 □

引理 2.3.6。设 R 是一个 (φ)-进环， $K = R_\varphi$ 是它的局部化。若 $z \in R$ 是 R 的全局坐标，则它也是 K的全局坐标。

证明。回忆一下 $K \hat{\otimes} K = (R \hat{\otimes} R)_{\varphi \otimes \varphi}$。结论可由关于 $\varphi \otimes \varphi$ 的局部化的正合性轻易推出。

□

推论 2.3.7. 函数 $z \in R_n = A_n[[z]]$ 是 R_n 和 $K_n = A_n[[z]][\varphi^{-n}$的全局坐标 $^{1}]$.

证明。显然， $z \in R_n^{pol} = A_n[z]$ 是 R_n^{pol}的全局坐标。因此，由引理 2.3.5 $z \in R_n$ 是全局坐标；由引理 2.3.6，它也是 K_n的全局坐标。 □

最后我们作一条对我们至关重要的评论。

引理 2.3.8. 设 K 是一个 (φ)-*adic* 环的局部化，且 z 是 K的全局坐标。那么函数 $z - w \in K \hat{\otimes} K$ 在完备化 $\widehat{K \otimes K}^{1}$ 和 $\widehat{K \otimes K}^{2}$ 中可逆。

n证明。由对称性，只需证明关于 $K \otimes K$ 的情形。由于 z 是 K 的全局坐标，存在一个函数 $h \in K \hat{\otimes} K$ 使得

$$\varphi \otimes 1 - 1 \otimes \varphi = (z - w)h$$

whe 如往常一样， $z = z \otimes 1$ 和 $w = 1 \otimes z$。那么下面的级数在 $K \otimes K$中收敛 ^{1}

$$-h \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi^n \otimes 1}{1 \otimes \varphi^{n+1}}$$

并且很容易验证它是 $z - w$ 的逆。 □

2.4 连续微分模

定义 2.4.1 (导子与微分模)。 给定一个完备的拓扑 J-进环 S，我们可以考虑完备拓扑 J-进 S-模的范畴（即满足自然映射 $M \to \varprojlim M/J^n M$ 是同构的 S-模）。

- 一个 A-线性导子 是 A-模之间的同态 $d : S \to M$，满足对任意 f、$g \in S$

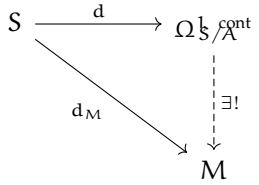
$$d(fg) = fd(g) + gd(f).$$

注意，由于 $d(J^{n+1}) \subset J^n M$，这样的导子 d 相对于 J-进拓扑自动连续。

- 我们称 $\Omega^{1,\,cont}_{S/A}$ 为连续微分模，它是一个带有导子的完备 J-进 S-模

$$d : S \to \Omega^{1,cont}_{S/A}$$

它满足以下泛性质：给定一个带有导子 $d_M : R \to M$ 的完备拓扑 J-进 S-模M，存在唯一的连续 S-线性映射 $\Omega^{1,\,cont}_{S/A} \to M$，使下图交换



命题 2.4.2. 设 S 是 A 上的完备拓扑 J-进环。以下结论成立：

- 存在一个自然同构

$$\Omega^{1,cont}_{S/A} = \varprojlim \frac{\Omega^1_{S/A}}{J^n \Omega^1_{S/A}}.$$

- 设 S 同构于环 *Spol* 在由理想 J 生成的拓扑下的完备化，且 $\Omega^1_{S\,pol/A}$ 有限生成。那么 $\Omega^{1,\,cont}_{S/A}$，连续微分模同构于

$$\Omega^{1,cont}_{S/A} \simeq \varprojlim \frac{\Omega^1_{S^{pol}/A}}{J^n \Omega^1_{S^{pol}/A}}.$$

- 设 $\widehat{S \otimes S}$ 为 $S \otimes S$ 关于理想和拓扑的完备化。则存在一个自然同构 *m*

$$\Omega^{1,cont}_{S/A} = \frac{I}{I^2}, \quad where \quad I = \ker(\widehat{S \otimes S} \to S).$$

现在我们将注意力限制在配备全局坐标的环以及（局部化的）(φ)-阿代尔环上。

命题 2.4.3。以下结论成立：

1. 设 S 是 A 上的环，且 $z \in S$ 是一个全局坐标（即 $(z-w) = \ker(S \otimes S \to S)$）。那么 $\Omega^1_{S/A} = S\mathrm{d}z$；

2. 设 S 是一个 (φ)-进环，且 $z \in S$ 是一个全局坐标（即 $(z-w) = \ker(S \hat{\otimes} S \to S)$），那么 $\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{S/A} = S\mathrm{d}z$。

证明。对于非拓扑的 S，该结论显然成立，因为 $\mathrm{d}z$ 是 $\Omega^1_{S/A}$ 的生成元，而 $\Omega^1_{S/A}$ 是投射的。对于 S 这一 (φ)-进环，我们使用同构 $S \hat{\otimes} S = \widehat{S \otimes S}$。结论随即由以下事实得出：

$$\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{S/A} = \frac{I}{I^2} \quad \text{where } I = \ker(\widehat{S \otimes S} \to S)$$

并由命题 2.3.3 (4)，$S \hat{\otimes} S = \widehat{S \otimes S}$，因此 $I = (z-w)$。 □

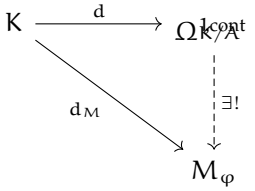
定义 2.4.4。设 R 是一个 (φ)-进环，且 $K = R_\varphi$ 是其局部化。我们将 K 的连续微分模定义为

$$\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A} \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{R/A}\right)_\varphi.$$

这是一个关于由子空间 $\mathrm{Im}\left(\varphi^n \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{R/A} \to \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A}\right)$ 给出的拓扑的完备拓扑模。它配备了一个导子

$$\mathrm{d} : K \to \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A}, \qquad \frac{x}{\varphi^n} \mapsto \frac{\mathrm{d}(x)}{\varphi^n} - n\frac{x\mathrm{d}(\varphi)}{\varphi^{n+1}}$$

它满足以下泛性质：给定一个完备的 (φ)-进 R-模 M 和一个导子 $\mathrm{d}_M : K \to M_\varphi$，存在唯一的连续 K-线性态射，使下图交换



命题 2.4.5. 设 K 是一个 (φ)-进环 R 的局部化，且令 $I_K = \ker(K \hat{\otimes} K \to K)$ 为乘法态射的核。那么存在一个自然同构

$$\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A} = \frac{I_K}{I_K^2}.$$

证明。令 $I_R = \ker(R \hat{\otimes} R \to R)$ 为 R 的乘法态射的核。由典范同构 $R \hat{\otimes} R = \widehat{R \otimes R}$ 可得 $\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{R/A} = I_R/I_R^2$。现在考虑正合列

$$0 \longrightarrow I_R \longrightarrow R \hat{\otimes} R \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

并考虑其关于 $\varphi\otimes\varphi$ 的局部化。由局部化的正合性和自然同构 $(R\hat{\otimes}R)_{\varphi\otimes\varphi}=K\hat{\otimes}K$ 可得 $I_K=(I_R)_{\varphi\otimes\varphi}$。同样，由局部化的正合性可得

$$\frac{I_K}{I_K^2}=\left(\frac{I_R}{I_R^2}\right)_{\varphi\otimes\varphi}=\left(\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{R/A}\right)_{\varphi}.$$

□

2.4.1 泰勒展开

本节的目标是证明以下命题。

命题 2.4.6（泰勒展开）。设 S 是 A上的一个环（分别是一个（局部化的）(φ)-进环），假设 $z\in S$ 满足 $\Omega^1_{S/A}=Sdz$（分别满足 $\Omega^{1cont}_{S/A}=Sdz$），并令 $\partial=\partial_z$ 为满足$\partial\cdot z=1$的唯一导子。照例，记 $z=z\otimes 1$ 和 $w=1\otimes z$ 为 $S\otimes S$中的元素。那么，对每个 $f\in S$，都有

$$f\otimes 1=1\otimes f+(z-w)1\otimes\partial_z f+\frac{(z-w)^2}{2}1\otimes\partial_z^2 f+\cdots+\frac{(z-w)^n}{n!}1\otimes\partial_z^n f\quad mod\ (z-w)^{n+1}$$

或者，更直观地说

$$f(z)=f(w)+(z-w)\partial_w f(w)+\frac{(z-w)^2}{2}\partial_w^2 f(w)+\cdots+\frac{(z-w)^n}{n!}\partial_w^n f(w)\quad mod\ (z-w)^{n+1}$$

我们需要以下引理

引理 2.4.7。设 M 是一个 $\mathbb{C}[[t]][\partial_t]$-模。假设 M 作为 $\mathbb{C}[[t]]$-模是完备的。那么映射

$$M\to\frac{M}{tM}[[\tau]],\qquad m\mapsto\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{n!}\partial_t^n m\right]\tau^n \tag{4}$$

是一个 $\mathbb{C}[[t]][\partial_t]$-模的同构，其中 t 在右侧的作用是乘以 τ 而 ∂_t 的作用为 ∂_τ。证明。为方便起见，记 $\overline{M}=\frac{M}{tM}[[\tau]]$，并以显然的方式将 $\frac{\tau^n\overline{M}}{\tau^{n+1}\overline{M}}$ 与 $\frac{M}{tM}$ 等同。上面定义的映射 $M\to\overline{M}$ 显然是 $\mathbb{C}[[t]][\partial_t]$-模的。关键观察是，$\partial_t$ 诱导出一个同构

$$\frac{\partial_t}{n+1}:\frac{t^{n+1}M}{t^{n+2}M}\to\frac{t^nM}{t^{n+1}M}.$$

事实上，容易验证其逆映射是乘以 t。特别是，映射 p

$$\frac{\partial_t^n}{n!}:\frac{t^nM}{t^{n+1}M}\to\frac{M}{tM}$$

是一个同构。现在，引理可由以下观察得出。首先注意到，我们只需证明映射 **(4)** 模 t^n 是一个同构。然后，对于每个 n，我们可以考虑这些滤子

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{M}{t^{n+1}M} & \supset & \frac{tM}{t^{n+1}M} & \supset & \cdots & \supset & \frac{t^nM}{t^{n+1}M} & \supset & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow\\
\frac{\overline{M}}{\tau^{n+1}\overline{M}} & \supset & \frac{\tau\overline{M}}{\tau^{n+1}\overline{M}} & \supset & \cdots & \supset & \frac{\tau^n\overline{M}}{\tau^{n+1}\overline{M}} & \supset & 0
\end{array}$$

要证明最左侧垂直映射是一个同构，只需证明连续商之间的所有映射都是同构；而容易验证，这些映射分别对应于这些同构

$$\frac{\partial_t^k}{k!} : \frac{t^k M}{t^{k+1} M} \to \frac{M}{tM} = \frac{\tau^k \overline{M}}{\tau^{k+1} \overline{M}}.$$

□

推论 2.4.8。 若 M 是一个作为 $\mathbb{C}[[t]]$-模分离的 $\mathbb{C}[[t]][\partial_t]$-模，那么任意两个满足以下条件的元素$m$，$m' \in M$

$$\partial_t^n m = \partial_t^n m' \quad mod\ tM$$

对所有 n （分别地，对所有 $n \leq N$）都成立，则它们相等（分别地，模 $t^{N+1}M$ 同余）。

我们将此推论应用于 M 是极限的情形

$$\varprojlim \frac{S \hat{\otimes} S}{I^n}$$

其中 I 是乘法态射 $S \hat{\otimes} S \to S$ 的核。我们将其赋予一个 $\mathbb{C}[[t]][\partial_t]$-模结构，使 t 以乘以 $z - w$ 的方式作用，而 ∂_t 则像导子 $\partial_{z-w} = (\partial_z \otimes 1 - 1 \otimes \partial_z)/2$ 那样作用。

命题 *2.4.6* 的证明。 首先，我们需要确认所考虑的模确实是一个完备的 $\mathbb{C}[[t]]$-模。我们断言映射

$$\frac{S[t]}{(t^{N+1})} \to \frac{S \hat{\otimes} S}{I^{N+1}}, \qquad \sum_{k=0}^{N} s_k t^k \mapsto \sum_{k=0}^{N} (z-w)^k s_k \otimes 1 \tag{5}$$

对每个 N都是同构。这显然意味着该极限作为一个 $\mathbb{C}[[t]]$-模是完备的。要验证映射 (5) 是同构，只需考察两个空间上的自然滤子，并注意到它们在我们的态射下保持不变：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{S\hat{\otimes}S}{I^{N+1}} & \supset & \frac{I}{I^{n+1}} & \supset & \cdots & \supset & \frac{I^N}{I^{N+1}} & \supset & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\frac{S[t]}{t^{N+1}S[t]} & \supset & \frac{tS[t]}{t^{N+1}S[t]} & \supset & \cdots & \supset & \frac{t^N S[t]}{t^{N+1}S[t]} & \supset & 0
\end{array}$$

要证明最左侧垂直映射是同构，只需证明连续商上的诱导映射都是同构。因此，我们的论断归结为证明对每个 $k \geq 0$

$$\frac{I^k}{I^{k+1}} = S[(z-w)^k],$$

其中 $[(z-w)^k]$ 是 $(z-w)^k \in I^k/I^{k+1}$的类。显然，由于根据假设，$(z-w)$ 是 I/I^2的自由生成元，因此 I^k/I^{k+1}由 $(z-w)^k$作为 S-模生成。最后容易验证，乘以 $(z-w)$ 可视为映射 $I^k/I^{k+1} \to I^{k+1}/I^{k+2}$，且该映射是双射

其逆为 ∂_{z-w}，这显然意味着 I^k/I^{k+1} 作为 S-模由 $(z-w)^k$ 自由生成。

为完 成证明，我们现在可以应用推论 2.4.8：我们需要验证，对于任意 $k \leq N$

$$\partial_{z-w}^k f \otimes 1 = \partial_{z-w}^k \Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{(z-w)^n}{n!} 1 \otimes \partial_z^n f \Big) \mod I.$$

这是一个直接的计算，其中我们需要利用以下事实：对于任意 $g \in S$

$$g \otimes 1 = 1 \otimes g \mod I,$$

这一点成立，因为 z 是 S中的一个坐标。 □

2.4.2 链式法则与坐标

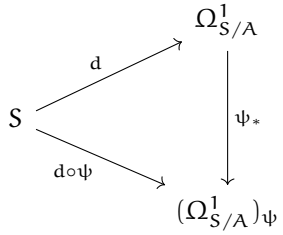
命题 2.4.9 (链式法则)。 设 S 是一个在 A 上的环（分别为完备拓扑环），并假设$z \in S$ 满足

$$\Omega^1_{S/A} = S dz \qquad \big(\textit{resp. } \Omega^{1,cont}_{S/A} = S dz \big)$$

（例如，当 z 是 S 的全局坐标时，这一条件成立）。那么，对于任意 A-同态（分别地，连续同态）$\psi : S \to S$ 以及任意 $f \in S$，我们有

$$d(\psi(f)) = \psi(\partial_z f)\partial_z(\psi(z))dz$$

证明。 我们仅陈述非完备情形下的证明，另一种情形的证明完全类似。考虑 S-模 $(\Omega^1_{S/A})_\psi$，它与 $\Omega^1_{S/A}$ 相同，但 S 的作用由 $f \cdot \omega = \psi(f)\omega$ 给出。容易看出，映射 $d \circ \psi : S \to (\Omega^1_{S/A})_\psi$ 是一个 A-导子。因此，我们得到一个 S-线性态射 $\psi_* : \Omega^1_{S/A} \to (\Omega^1_{S/A})_\psi$，使得下图交换:



根据定义，有 $\psi_*(dz) = d(\psi(z)) = \partial_z\psi(z)dz$。那么，由于 ψ_* 的 S-线性性

$$d(\psi(f)) = \psi_*(df) = \psi_*(\partial_z f dz) = \psi(\partial_z f)\psi_*(dz) = \psi(\partial_z f)\partial_z\psi(z)dz.$$

□

推论 2.4.10. 当 ψ 是自同构（分别地，连续自同构）时，映射 ψ_* 是同构，其逆为 $(\psi^{-1})_*$。在这种情况下， $\partial_z\psi(z) \in S^*$。

2.5 带 n 个标记圆盘上的函数环

令 $A_n = \mathbb{C}[[a_1, \dots, a_n]]$、$\varphi_n = \prod(z - a_i) \in A_n[z]$ 和

$$R_n^{\mathrm{pol}} \overset{\mathrm{def}}{=} A_n[z], \qquad K_n^{\mathrm{pol}} \overset{\mathrm{def}}{=} A_n[z]\left[\frac{1}{\varphi_n}\right], \qquad R_n \overset{\mathrm{def}}{=} A_n[[z]], \qquad K_n \overset{\mathrm{def}}{=} A_n[[z]]\left[\frac{1}{\varphi_n}\right].$$

完备拓扑环 K_n 应视为形式 n 带标记圆盘上的函数环。我们已经指出，z 是上面列出的所有环的全局坐标（参见推论 2.3.7），R_n 是一个 (φ_n)-进环，而 K_n 是其关于 φ_n 的局部化。

环 $\mathbb{C}((t)) = (K_1)_{a_1=0}$ 的一个关键特征是留数映射 $\int : \Omega^{1,\,\mathrm{cont}}_{\mathbb{C}((t))/\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$，它取出 z^{-1} 的系数。现在我们为这些环 K_n 定义一个类似的留数。回想一下，$\Omega^{1,\,\mathrm{cont}}_{K_n/A} = K_n\,dz$ 因此我们可以将 $\Omega^{1,\,\mathrm{cont}}_{K_n/A}$ 和 K_n 上的连续线性泛函视为同一个对象。

定义 2.5.1。我们定义如下 A_n-线性映射

$$\int : \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K_n/A_n} \to A_n$$

它等于绕点 a_i 的留数之和。

$$\int = \sum_i \int_{a_i}$$

形式上，我们先将 $K_n^{\mathrm{pol}}\,dz$ 的元素视为仿射直线上的亚纯 1-形式，以此定义该映射，再通过连续性将其延拓；一如既往，A_n 赋予离散拓扑。应当验证此映射的取值落在 A_n 中。事实上，点 a_i 处的留数自然取值于 $Q_n = \mathrm{Frac}(A_n)$，但它们的和实际上取值于 A_n；这一点不难看出。

这里列出留数的一些基本性质：

1. 选定全局坐标 $z \in R_n$ 后，我们可以写作 $\Omega^{1,\,\mathrm{cont}}_{K_n/A} = K_n\,dz$，并将留数视为一个 A_n 线性映射 $\int : K_n \to A_n$。

2. 留数在正则函数上取值为 0：$\int(R_n) = 0$。

3. 设 ∂_z 是满足 $\partial_z z = 1$ 的唯一连续导子。那么对每个 $g \in K_n$

$$\int(\partial_z g) = 0.$$

等价地，我们也可以说，复合映射 $\int \circ d$（其中 $d : K_n \to \Omega^{1,\,\mathrm{cont}}_{K_n/A_n}$ 是典范导子）为零。

4. 给出 n 在环 B 上 A_n，存在将留数自然延拓到基变换 $B(K_n$ 的方法 $)$

$$\int : B(K_n) \to B.$$

5. When n 我们取 $B = K_n$，还可以进行另一种构造。考虑映射

$$\int_w : K_n \otimes K_n \to K_n \qquad g \otimes f \mapsto g \int f.$$

注意，除了关于右拓扑连续之外，上面的映射显然也关于 $K_n \otimes K_n$ 上的左拓扑以及 K_n上的通常 (φ_n) 拓扑连续。因此，它诱导出一个映射

$$\int_w : \widehat{K_n \otimes K_n}^1 \to K_n.$$

6. 类似地，我们有 $\int_z : \widehat{K_n \otimes K_n}^2 \to K_n$。这两个映射都可通过基变换自然延拓

$$\int_w : \widehat{B(K_n) \otimes B(K_n)}^1 \to B(K_n), \qquad \int_z : \widehat{B(K_n) \otimes B(K_n)}^2 \to B(K_n).$$

引理 2.5.2. 设 $\int_z$ 为上文定义的线性映射。对于 $r \in R_n$ 和 $g \in K_n$，我们有

$$\int_z \frac{r \otimes g}{z - w} dz = rg.$$

证明。因子 g $g = 1$ $h \in$ 由线性性提出，因此只需考虑这种情形。此外，令.....使得.....，我们有 $R_n \hat{\otimes} R_n$ $(z-w)h = r \otimes 1 - 1 \otimes r$

$$\int_z \frac{r \otimes 1}{z - w} = \int_z h + \int_z \frac{1 \otimes r}{z - w}$$

于是 $\int_z h = 0$，因为 $h \in R_n \hat{\otimes} R_n$，并且因子 r 再次由线性性提出。我们归结为证明 $r = 1$、$g = 1$ 这种情形。最后，为了验证

$$\int_z \frac{1}{z - w} = 1$$

利用引理 2.3.8 的证明中所述的 $(z-w)^{-1}$ 展开，可以进行直接计算。

□

推论 2.5.3. 设 $b \in B(R_n)$ 且 $g \in B(K_n)$，我们有

$$\int_z \frac{b \otimes g}{z - w} dz = bg.$$

2.5.1 拓扑基

我们在此为 K_n 引入一个拓扑基。如前所述，$R_n/(\varphi_n)$ 是 A_n 上的自由模，任取次数分别为 $0, \ldots, n-1$ 的首一多项式 $e_1, \ldots, e_n$，都会导出 $R_n/(\varphi_n)$ 的一个 A_n-线性基。我们选择一种特别对称的取法。

注 2.5.4. 令 e_i 为项 $(z-a_j)$ 的第 $(i-1)$ 个初等对称多项式，其中 j 从 1 到 n。因此 $e_1=1$, $e_2=\sum_{j=1}^{n}(z-a_j)$，直到 $e_{n+1}=\varphi_n$。那么这些多项式

$$e_{i,k}\overset{\text{def}}{=}e_i(e_{n+1})^k,\quad i\in\{1\dots n\},k\in\mathbb{Z}$$

构成 K_n 的拓扑基，也就是说，$g\in K_n$ 中的每个元素都可以唯一地表示为一个无穷和

$$g=\sum_{k\geq -N}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}e_{i,k}\quad \text{with } a_{i,k}\in A_n$$

而且这种形式的每个和都定义了 K_n 中的一个元素。

这可以推广到完备拓扑环 $B(K_n)$：元素 $e_{i,k}=1\otimes e_{i,k}$ 构成 $B(K_n)$ 的一个拓扑 B-基，也就是说，每个元素 $b\in B(K_n)$ 都可以唯一地表示为一个无穷和

$$b=\sum_{k\geq -N}\sum_{i=1}^{n}b_{i,k}e_{i,k}\quad \text{with } b_{i,k}\in B$$

反过来，这种形式的任意无穷和都定义了 $B(K_n)$ 中的一个元素。

选定一个坐标后，留数配对诱导出一个配对

$$K_n\times K_n\to A_n\qquad (f,g)\mapsto\int fg\,dz.$$

我们希望描述关于此配对的 $e_{i,k}$ 的对偶基。

命题 2.5.5. 存在元素 $\lambda_{ij}\in A_n$，令 $\epsilon_{i,\ k}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e_{j,\ k}$，则下式成立

$$\int\epsilon_{j,k}e_{i,l}\,dz=\delta_{k,-l-1}\delta_{i,j}.$$

证明. 通过计算无穷远点处的留数，很容易看出

$$\int e_{j,k}e_{i,l}\,dz=0\quad \text{if } k\neq -l-1.$$

此外，对于任意 k，随着 l 变化，元素 $\int e_{j,\ -l-1}e_{i,\ l}\,dz$ 均等于 $\int e_ie_j(e_{n+1})^{-1}\,dz$。要证明的结论归结为证明对称矩阵 $S=(s_{ij})_{i,\ j=1,\dots,n}$ 满足

$$s_{ij}=\int e_ie_j(e_{n+1})^{-1}\,dz$$

在 $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A_n)$ 中可逆（其逆为 (λ_{ij})）。为此，我们通过计算无穷远点处的留数来计算各项 s_{ij}。容易看出

$$a_{i,j}=0\quad \text{if } j+i\leq n\qquad a_{i,j}\in\mathbb{C}^*\quad \text{if } j+i=n+1$$

通过直接计算可得。因此，矩阵 $S=(s_{i,j})$ 是可逆的，正如所声称的那样。 □

2.6 自同构

我们将研究 (φ)-进环 R 的连续自同构，这些自同构可延拓为其局部化 K的连续自同构。一如既往，所有态射都将是 A-线性的。连续自同构是指双射且双连续的映射。

命题 2.6.1。 任意连续自同构 $\psi : R \to R$ 都唯一延拓为连续自同构 $\psi : K \to K$。特别地，存在一个自然的群单射态射

$$\mathrm{Aut}_A^{cont}(R) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_A^{cont}(K). \tag{6}$$

证明。 令 φ为 I的生成函数，即定义 R上拓扑的理想，并令 ψ 为 R的一个连续自同构。我们断言，存在 $a \in R$ 以及一个正整数 n，使得

$$\psi(\varphi)a = \varphi^n.$$

事实上，如果 ψ^{-1} 是 ψ的逆元，则由 ψ^{-1} 的连续性可知，存在一个整数 m和一个元素 $b \in R$，使得

$$\psi^{-1}(\varphi^m) = b\varphi,$$

现在只需考虑 $n = m$ 和 $a = \psi(b)$。

因此， φ 在 ψ 下的像在 K中是可逆的。因此 $\psi : R \to R$ 延拓为 K的一个连续自同构。

□

注 2.6.2。 (6) 中的浸入不必是满射。一个简单的反例是$A = \mathbb{C}[\epsilon]$，其中 $\epsilon^2 = 0$、 $R = \mathbb{C}[\epsilon][[t]]$ 和 $K = \mathbb{C}[\epsilon]((t))$: 可以验证， $t \mapsto t + \epsilon/t$ 诱导了 K 的一个自同构，但该自同构不能限制为 R的自同构。

我们还可以考察 $B(R)$、 $B(K)$的连续自同构，其中它们分别是 R 和 K的基变换，并将它们汇集成一个唯一的对象：群函子 $\mathrm{Aut}(R)$ 和 $\mathrm{Aut}(K)$。

定义 2.6.3。 群函子 $\mathrm{Aut}(R)$ 和 $\mathrm{Aut}(K)$ 定义如下。给定 B 一个 A-交换代数，

$$\underline{\mathrm{Aut}}(R)(B) = \mathrm{Aut}_B^{\mathrm{cont}}(B(R)), \qquad \underline{\mathrm{Aut}}(K)(B) = \mathrm{Aut}_B^{\mathrm{cont}}(B(K)).$$

由于 $B(R)$ 仍然是一个 (φ)-进环，而 $B(K)$ 是其局部化，根据命题 2.6.1可知，存在群函子之间的自然单射态射

$$\underline{\mathrm{Aut}}(R) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(K).$$

将自同构 $\mathrm{Aut}\ \mathrm{cont}_A\ (R)$ 和 $\mathrm{Aut}_A^{\mathrm{cont}}(K)$ 组织为群函子，使我们能够计算它们的李代数。根据定义，给定一个从交换的A-代数范畴到 A的群函子 G，其李代数（更准确地说，其 A-点集）定义为

$$\mathrm{Lie}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker\big(G(A[\epsilon]) \to G(A)\big).$$

它具有自然的 A-模结构，以及自然的 A-线性李代数结构。

引理 2.6.4. 设 $A = A_n$，并考虑 (φ_n)-进环 $R = R_n$ 及其局部化 K_n。则有以下结论

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}(R_n)) = \mathrm{Der}\ R_n, \qquad \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}(R_n)) = \mathrm{Der}\ K_n.$$

其中$\mathrm{Der}\ R_n$ 和$\mathrm{Der}\ K_n$ 分别是 R_n 和 K_n 的连续导子李代数，定义见下一节。

2.7 李代数 Der R 和Der K

给定一个 (φ)-进环 R，并固定一个全局坐标 $z \in R$，我们在此引入李代数 Der R 和 Der K。回顾一下，连续微分模是自由的，其生成元为 dz。

定义 2.7.1. 我们将 Der R（分别是 Der K）定义为从 R 到自身（分别是从 K 到自身）的连续导子所构成的李代数。

$$\mathrm{Der}\ R = \mathrm{Der}_A^{\mathrm{cont}}(R), \qquad \mathrm{Der}\ K = \mathrm{Der}_A^{\mathrm{cont}}(K).$$

由这些同构

$$\Omega^{1,\mathrm{cont}}_{R/A} = R\mathrm{d}z, \qquad \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A} = K\mathrm{d}z,$$

我们得到同构

$$\mathrm{Der}\ R = R\partial_z, \qquad \mathrm{Der}\ K = K\partial_z.$$

容易验证，括号由通常的公式给出

$$[f\partial_z, g\partial_z] = \big(f\partial_z g\big)\partial_z - \big(g\partial_z f\big)\partial_z.$$

2.8 李代数

我们将仿射 Kac-Moody 代数 $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 的构造稍作推广，使其适用于带有留数的其他环。以下如无特别说明，R 表示一个定义在 A 上的 (φ)-进环，而 $K = R_\varphi$ 表示其局部化。

定义 2.8.1. 设 K 是定义在 A上的局部化 (φ)-进环。考虑带有离散拓扑的 A。K 上的一个**留数**是指一个连续的 A 线性映射

$$\int : \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{K/A} \to A$$

满足

$$\int \mathrm{d}f = 0 \quad \text{for all } f \in K \quad \text{and} \quad \int_{|R\mathrm{d}z} = 0.$$

备注 2.8.2. 我们在定义 2.5.1 中为 K_n 定义的留数映射确实是一个留数。

定义 2.8.3. 给定复数域 A上的一个有限维李代数 $\mathfrak{g}$、一个不变的 A-双线性对称不变形式 $\kappa \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{g}\otimes_A \mathfrak{g}, A)$，以及 K 上的一个留数 $\int$，我们将李代数 $\hat{\mathfrak{g}}_{K,\kappa}$ 定义为

$$\hat{\mathfrak{g}}_{K,\kappa} = \mathfrak{g}\otimes_A K \oplus A\mathbf{1},$$

其中$\mathbf{1}$是一个中心元，而对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$和 $f, g \in R$，括号 $[Xf, Yg]$ 定义为

$$[Xf, Yg] = [X, Y]fg + \kappa(X, Y)\mathbf{1}\int g\mathrm{d}f.$$

容易验证，这是一个定义良好的 A-双线性括号。我们常常会在以下情形中考虑前面的定义：$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'\otimes A$ 是 $\mathbb{C}$上的有限维李代数，且 κ 是定义在 $\mathfrak{g}'$上的双线性对称不变形式的 A-线性延拓。以下命题将有助于构造包络代数的完备化。

命题 2.8.4。 设 I_α 是 K的<*sty-le id='4'>0* 的基本邻域系。那么，对任意 I_α 和任意$f \in K$，存在一个 $I_\beta \subset I_\alpha$ 使得

$$[\mathfrak{g} \otimes I_\beta + A\mathbf{1}, \mathfrak{g} \otimes f + A\mathbf{1}] \subset \mathfrak{g} \otimes I_\alpha.$$

证明。 只需找到一个 I_β 使得

$$I_\beta f \subset I_\alpha \quad \text{and} \quad f d(I_\beta) \subset \ker \int.$$

这是可行的，因为乘法映射和 $d : R \to \Omega^1_{R/A}$ 都是连续的。 □

我们将考虑 A上的包络代数 $U(\hat{\mathfrak{g}}_{K,\kappa})$。我们希望将中心元 $\mathbf{1}$ 视为单位元，因此考虑

$$U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U(\hat{\mathfrak{g}}_{K,\kappa})}{(\mathbf{1}-1)}.$$

推论 2.8.5。 若 I_α 是 K 的基本邻域系，则 $U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K)$ 上的乘积相对于由以下左理想生成的拓扑是连续的

$$U'_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K)\big(\mathfrak{g} \otimes I_\alpha\big).$$

特别地，关于此拓扑的完备化 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K)$ 自然具有一个在 A上的结合完备拓扑代数结构。

注 2.8.6。 李代数 Der K 通过导子自然作用于 $\hat{\mathfrak{g}}_{K,\kappa}$，如下所示:

$$(f\partial_z) \cdot X \otimes g = X \otimes (f\partial_z g), \qquad (f\partial_z)\mathbf{1} = 0.$$

容易验证，这个作用是连续的，因此在$\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K)$上诱导出一个导子作用。

3 分布空间

形式级数空间 $V[[z^{\pm 1}]]$ 在顶点代数理论中起着关键作用。本章将用定义在任意局部化的 (φ)-进环 $K = R_\varphi$ 上的分布来重新表述形式级数理论，其中该环配备全局坐标 $z \in R$；通过考虑 $K = \mathbb{C}((z))$, 可以重构通常的形式级数情形。在本章中， R 表示一个固定的、配备固定全局坐标 z 的 (φ)-进环，而 K 表示其局部化 $K = R_{\varphi 。}$ W

e start by elaborati^ng on the followi^ng remar k.

注记 3.0.1. 设 $K^{pol} = \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$，并设 V是 $\mathbb{C}$上的一个向量空间。那么， $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][\partial_z]$ 模

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K^{pol}, V) \quad \text{and} \quad V[[z^{\pm 1}]]$$

通过该态射同构

$$\varphi \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(z^n) z^{-n-1}$$

其逆映射通过留数态射 $\int : V[[z^{\pm 1}]] \to V$ 获得，该态射提取 z^{-1} 系数。

$$v(z) \mapsto \big(p(z) \mapsto \int (v(z)p(z))\big).$$

容易验证，这些映射与导数 ∂_z 的作用可交换，其中对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K^{pol}, V)$， ∂_z 的作用由下式给出

$$(\partial_z \cdot \varphi)(g) = \varphi(-\partial_z g).$$

最后请注意，通过这一对应，留数映射 $\int : V[[z^{\pm 1}]] \to V$ 对应于限制态射 $\mathrm{Rest} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K^{pol}, V)$，后者在 $1 \in K^{pol}$ 上取线性泛函的值。

我们将研究空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K^{pol}, V)$，并称之为**分布空间**。我们将用分布这一替代语言重新表述顶点代数的基本理论。这对我们的目的至关重要，因为这一观点使我们能够将分布的定义扩展到环 K_n。

在转向 (φ)-进情形之前，我们先为一般的交换 A-代数 S 给出一些定义。

定义 3.0.2. 给定交换的 A-代数 S 和一个 A-模 V，我们将 V 值分布的空间定义为如下 S-模

$$D_A^1(S, V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_A(S, V).$$

对于 $n \geq 1$， S 上的 V值 n分布空间为

$$D_A^n(S, V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_A(S^{\otimes n}, V).$$

一如既往，张量积均理解为在 A 上取。

若 $z \in S$，我们记 $z_i = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes z \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$，其中 z 置于第 i 个位置。在 $n = 2$ 的情形下，我们通常写作 $z = z_1$ 和 $w = z_2$。

若 S 配备导子 ∂，我们令 $\partial_i = 1 \otimes \cdots \otimes \partial \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$，其中 ∂ 置于第 i 个位置，并将空间 $D_A^n(S, V)$ 视为 $S^{\otimes n}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ 上的模，其中 ∂_i 的作用由下式给出

$$(\partial_{z_i} \cdot X)(g) = X(-\partial_i g).$$

定义 3.0.3。 存在 $S^{\otimes n}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ 模的限制态射

$$\mathrm{Rest}_i : D_A^{n+1}(S, V) \to D_A^n(S, V),$$

它们与这些映射对偶

$$\iota_i : S^{\otimes n} \to S^{\otimes n+1}, \qquad s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \mapsto s_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes s_n,$$

其中 1 位于第 i 个位置。

记号。 一如既往， $K = R_\varphi$ 表示一个固定的 (φ)-进环，其定义在 A 上并配有一个选定的坐标 $z \in R$。我们将用 $\partial = \partial_z$ 表示 K 的唯一连续导子，它满足 $\partial_z z = 1$。从现在起，我们将处理取值于 U 中的 K-分布（即 $D_A^1(K, U)$中的元素）；我们假设 U 是一个完备拓扑 A-代数，其拓扑由左理想生成。对我们而言，此类代数的主要例子如下。

- 设 V 是一个 A-模，并将其视为带有离散拓扑的拓扑 A-模。考虑 A-代数 $U = \mathrm{End}_A(V)$，它由 A-线性端同态组成。我们赋予它逐点收敛拓扑；该拓扑由形如 I_v 且满足 $v \in V$的左理想之交生成。

$$I_v \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathrm{End}_A(V) : f(v) = 0\}, \quad v \in V.$$

- 在推论 2.8.5 中引入的、带有留数的完备拓扑环 K 上的完备拓扑 A-代数 $\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_K)$。

在处理拓扑环或完备拓扑环时，我们可以对分布施加的一个自然条件是连续性。

定义 3.0.4. 我们将取值于带有由左理想生成的拓扑的完备拓扑 A-代数 U 的、定义在 K 上的**场** 空间定义为连续分布的子空间：

$$F_A(K, U) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(K, U) \subset D_A^1(K, U).$$

由于 ∂_z 和乘法都是连续的，因此这是 $D_A^1(K, U)$ 的一个 $K[\partial_z]$-子模。

若存在另一个环 K^{pol}，其完备化为 K（如 $K = K_n$ 的情形），则限制映射给出一个同构

$$F_A(K, U) \xrightarrow{\simeq} F_A(K^{\mathrm{pol}}, U).$$

这是因为我们假设 U 是完备的。

例 1. 当 $A = \mathbb{C}$, $K^{\mathrm{pol}} = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$, $K = \mathbb{C}((t))$ 和 $U = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ 对于一个向量空间 V时，刚刚引入的场概念与通常的场概念一致。事实上，分布 $X : \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$的连续性条件恰好是：对于任意 $v \in V$

$$X_n = X(t^n) \in I_v \text{ for } n \gg 0,$$

这可以改写为

$$X_n(v) = 0 \text{ for } n \gg 0.$$

注 3.0.5. 如果 U_α 是 U 中由左理想构成的 0 的基本邻域系，那么在 U/U_α上工作通常会很有用。注意存在一个自然映射

$$D_A^1(K, U) \to D_A^1(K, U/U_\alpha)$$

并且，元素 $X \in D_A^1(K, U)$ 是场，当且仅当它在 $D_A^1(K, U/U_\alpha)$ 中的像对于每个 α都是场，其中 U/U_α 取离散拓扑。

处理取值于代数 U 的分布时，考虑场的乘积是有意义的。特别地，存在一个自然映射

$$D_A^1(K, U) \otimes_A D_A^1(K, U) \to D_A^2(K, U) \qquad (X, Y) \mapsto XY$$

其中 XY 是由下式定义的 2-分布

$$XY(f \otimes g) = X(f)Y(g).$$

特别是，当 U 不是交换的时，考虑由 X 和 Y的括号定义的 2-分布 $[X,Y] \in D_A^2(K,U)$ 很有意思

$$[X,Y](f\otimes g) = X(f)Y(g) - Y(g)X(f).$$

令 σ 为 $K\otimes K$ 的自同构，它交换两个因子。采用上述记号，我们有

$$[X,Y] = XY - YX\circ\sigma.$$

注 3.0.6. 设 X、$Y \in F_A(K,U)$ 为任意场。则乘积 $XY : K\otimes K \to U$ 关于中间拓扑是连续的。特别地，由引理 2.2.1，它可延拓为

$$XY : K\hat{\otimes} K \to U.$$

定义 3.0.7. 我们将 **2-场** $F_A^2(K,U)$ 的空间定义为

$$F_A^2(K,U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_A^{\text{cont}}(K\hat{\otimes} K, U).$$

由上面的注记，U 中的乘法诱导出一个自然的双线性映射

$$F_A(K,U)\otimes_A F_A(K,U) \to F_A^2(K,U).$$

3.1 局部场，n-场的乘积

这里我们继续构建理论，研究来自任意配备全局坐标的 (φ)-进环的场所对应的顶点代数。

定义 3.1.1. 两个场 X 和 Y 是**互相局部**的，当且仅当存在一个非负整数 N使得

$$(z-w)^N[X,Y] = 0.$$

定义 3.1.2. 设 X 和 Y 是两个互相局部的 K-场，且 $n \geq 0$ 是一个整数。我们将 X 和 Y的n-乘积记作 $X_{(n)}Y$，定义为

$$X_{(n)}Y = \mathrm{Rest}_1 (z-w)^n [X,Y],$$

或者等价地

$$(X_{(n)}Y)(g) = (z-w)^n [X,Y](1\otimes g).$$

这显然是连续的，因此是一个场。

命题 3.1.3. 设 X和 Y是两个满足 $(z-w)^{N+1}[X,Y] = 0$ 的场。那么对于任意 f，$g \in K$，下列泰勒公式成立

$$[X,Y](f\otimes g) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(X_{(n)}Y)(g\partial_z^n f).$$

证明. 由于 z 是 K的一个坐标，根据命题 2.4.6，下列公式成立

$$f \otimes g = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(z-w)^n 1 \otimes (g\partial_z^n f) \mod (z-w)^{N+1} K \hat{\otimes} K.$$

现在回想一下， $[X, Y]$ 自然属于 $F_A^2(K, U)$，并且根据假设，它属于映射的像

$$\mathrm{Hom}_A\left(\frac{K \hat{\otimes} K}{(z-w)^{N+1} K \hat{\otimes} K}, U\right) \to \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}(K \hat{\otimes} K, U).$$

结论很容易得出。 □

注记 3.1.4. 对于 $K = \mathbb{C}((z))$，我们可以通过注记 3.0.1 中所述的识别，将分布的语言转换为形式幂级数的语言。在此情形下，通常的 δ-函数 $\delta(z-w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n$ 对应于 2-分布 $\delta(f \otimes g) = \int f g dz$，而乘积 $X(w)\delta(z-w)$ 对应于 2-分布 $(X\delta)(f \otimes g) = X(fg)$。同样，形式幂级数 $X(w)\partial_w^n \delta(z-w)$ 对应于 2-分布 $(X\partial_w^n \delta)(f \otimes g) = X(g\partial^n f)$。因此，上述泰勒公式恰好将通常的算符乘积展开

$$[X(z), Y(w)] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(X_{(n)}Y)(w)\partial_w^n \delta(z-w).$$

命题 3.1.3 还有一个逆命题。

P命题 3.1.5。 设 $Z \in F_A^2(K, U)$ 是一个 2-场，并假设存在场 γ_n 使得 t *hat*

$$Z(f \otimes g) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\gamma_n(g\partial_z^n f),$$

那么 $(z-w)^{N+1} Z = 0$，且对于每个 $n \in \{0, \ldots, N\}$

$$\gamma_n = \mathrm{Rest}_1\left((z-w)^n Z\right).$$

证明。 我们对 N使用归纳法来证明该断言。令 $N = 0$，根据假设我们有

$$Z(f \otimes g) = \gamma(fg),$$

特别地

$$Z\big((z-w)f \otimes g\big) = \gamma(zfg) - \gamma(zfg) = 0$$

因此 $(z-w)Z = 0$。陈述 $\mathrm{Rest}_1 Z = \gamma$ 显然成立。现在假设该结果对所有不超过 N 的整数都成立，并证明它对 $N+1$成立。我们有

$$Z(f \otimes g) = \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{n!}\gamma_n(g\partial_z^n f).$$

显然，$\mathrm{Rest}_1 Z = Z(1 \otimes _) = \gamma_0$，并且通过简单的计算可以证明，若令 $Z' = (z-w)Z$,

$$Z'(f \otimes g) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\gamma_{n+1}(g\partial_z^n f).$$

由此，根据归纳假设，我们可得 $0=(z-w)^{N+1}Z'=(z-w)^{N+2}Z$，并且对于 $n\geq 1$，有 $\gamma_n=\mathrm{Rest}_1(z-w)^{n-1}Z'=\mathrm{Rest}_1(z-w)^nZ$。 □

我们的下一个目标是定义负 n 的 n 乘积。注意，由于 U 的拓扑由左理想生成，分布 XY 和 $YX\circ\sigma$ 分别关于右拓扑和左拓扑连续。因此，它们诱导出连续态射

$$XY:\widehat{K\otimes K}^2\to U\quad\text{and}\quad YX\circ\sigma:\widehat{K\otimes K}^1\to U.$$

注释 2.3.8 的一个推论如下。

推论 3.1.6. 对于任意 $n\in\mathbb{Z}$ 以及场 X，Y，我们有

$$(z-w)^nXY\in\mathrm{Hom}_A^{cont}(\widehat{K\otimes K}^2,U)\quad and\quad (z-w)^nYX\circ\sigma\in\mathrm{Hom}_A^{cont}(\widehat{K\otimes K}^1,U).$$

因此，将 $(z-w)^nXY$ 和 $(z-w)^nYX\circ\sigma$ 限制到 $K\hat{\otimes}K$ 后，对每个 $n\in\mathbb{Z}$，它们都定义了 $F_A^2(K,U)$ 中的元素。

定义 3.1.7. 设 X 和 Y 是两个场，n 是一个负整数，我们定义

$$X_{(n)}Y=\mathrm{Rest}_1\Big((z-w)^nXY-(z-w)^nYX\circ\sigma\Big).$$

注意，当 $n\geq 0$ 时，此公式化简为定义 3.1.2 中的公式；而当 $n<0$ 时，我们需要将两项分别写出，因为乘以 $(z-w)^n$ 是在两个不同的空间中进行的：第一项在 $\mathrm{Hom\,cont}_A(\widehat{K\otimes K}^2,U)$ 中，第二项在 $\mathrm{Hom\,cont}_A(\widehat{K\otimes K}^1,U)$ 中。

命题 3.1.8. 设 $X,Y\in F_A(K,U)$ 为场，且设 $n\in\mathbb{Z}$。那么

$$\begin{aligned}(\partial X)_{(n)}Y&=-nX_{(n-1)}Y,\\ \partial\cdot(X_{(n)}Y)&=(\partial X)_{(n)}Y+X_{(n)}(\partial Y).\end{aligned}$$

证明. 我们证明上述关于 $n\geq 0$ 的公式。对于 $n<0$，证明相同，但我们需要将这两项分开，并注意到导数 ∂_z、∂_w 可扩展到完备化 $K\otimes K$。下面证明第一个公式

$$\begin{aligned}\big((\partial X)_{(n)}Y\big)(f)=[\partial X,Y]\big((z-w)^n1\otimes f\big)&=[X,Y]\big(-\partial_z(z-w)^n1\otimes f\big)\\&=[X,Y]\big(-n(z-w)^{n-1}1\otimes f\big)=-nX_{(n-1)}Y(f).\end{aligned}$$

那么第二个结论可通过类似的论证得出

$$\begin{aligned}\partial\cdot\big(X_{(n)}Y\big)(f)=X_{(n)}Y(-\partial f)&=[X,Y]\big((z-w)^n1\otimes(-\partial f)\big)\\&=[X,Y]\big((-\partial_z-\partial_w)((z-w)^n1\otimes f)\big)\\&=\big((\partial_z+\partial_w)\cdot[X,Y]\big)\big((z-w)^n1\otimes f\big)\\&=\big(([\partial X,Y]+[X,\partial Y]\big)\big((z-w)^n1\otimes f\big)\\&=\big((\partial X)_{(n)}Y\big)(f)+\big(X_{(n)}(\partial Y)\big)(f)\end{aligned}$$

□

引理 3.1.9。 给定两个场 X， Y和 $n \in \mathbb{Z}$， n-乘积 $X_{(n)}Y$仍然是一个场。

证明。我们只 需证明负的 n 的情形。我们将证明这两个 1-分布 s

$$\mathrm{Rest}_1 (z-w)^{-1} XY \quad \text{and} \quad \mathrm{Rest}_1 (z-w)^{-1} YX \circ \sigma$$

是场。任意 n 的情形可由命题 3.1.8 得出。

对第h一个，只需注意到它是以下连续映射的复合 s

maps

$$K \xrightarrow{g \mapsto 1 \otimes g} K \otimes K \to \widehat{K \otimes K}^2 \xrightarrow{(z-w)^n \cdot} \widehat{K \otimes K}^2 \xrightarrow{XY} U.$$

对于第二个，考虑一个左理想 U_α，它是 U 中 0 的一个邻域。于是存在 $N \geq 0$ 使得

$$X(\varphi^n) = 0 \bmod U_\alpha \qquad \forall n \geq N+1.$$

照常， φ 表示理想 $I \subset R$ 的一个生成元，该理想给出 K上的拓扑。利用引理 2.3.8 中出现的显式表达式，容易验证

$$\frac{1}{z-w} YX \circ \sigma(1 \otimes g) = \sum_{n=0}^{N} -hY(g\varphi^{-n-1})X(\varphi^n) \in U/U_\alpha.$$

显然，对于 $g \in I^m$，当 m 充分大时，这个和在商 U/U_α中将为 0。这证明了连续性。

□

注记 3.1.10. 当交换子 $[X,Y] = 0$ 时，我们得到 XY 和 $YX \circ \sigma$ 都关于和拓扑连续，并且乘积 $X_{(n)}Y$ 显然为 0。另一方面，尽管 $XY = YX \circ \sigma$ 关于朴素和拓扑连续，但对于 $n < 0$， $X_{(n)}Y$ 不一定为 0，因为 $K \otimes K$ 关于和拓扑的完备化并不是一个环（见注记 2.2.2。

引理 3.1.11. 若 $[X,Y] = 0$ 则 $X_{(-1)}Y = Y_{(-1)}X$。

证明。 注意， $XY = YX \circ \sigma$ 在 $K \otimes K$的和拓扑下是连续的。由于我们需要乘以 $(z-w)^{-1}$，为了强调我们是在计算它对 $\widehat{K \otimes K}^1$ （分别对 $\widehat{K \otimes K}^2$）的作用，我们将乘法分别记作 $E_1(z-w)^{-1}XY$ （分别记作 $E_2(z-w)^{-1}XY$），特别是

$$X_{(-1)}Y(g) = E_2(z-w)^{-1}XY(1 \otimes g) - E_1(z-w)^{-1}YX \circ \sigma(1 \otimes g).$$

我们将证明，对于 $g \in K$

$$\big(X_{(-1)}Y\big)(g) = \big(Y_{(-1)}X\big)(g).$$

根据 $z \in K$ 是一个坐标这一假设可知，存在一个元素 $h \in K \hat{\otimes} K$使得 $(z-w)h = g \otimes 1 - 1 \otimes g$。利用 $XY = YX \circ \sigma$，我们很容易得到

$$E_2(z-w)^{-1}XY(1 \otimes g) - E_2(z-w)^{-1}YX(1 \otimes g) = -XY(h),$$

类似地

$$E_1(z-w)^{-1}YX \circ \sigma(1 \otimes g) - E_1(z-w)^{-1}XY \circ \sigma(1 \otimes g) = -YX \circ \sigma(h).$$

由此可得

$$\big(X_{(-1)}Y()g) - \big(Y_{(-1)}X\big)(g) = XY(h) - YX \circ \sigma(h) = 0,$$

其中最后一个等式由 $[X,Y] = 0$ 得出。 □

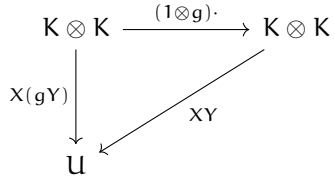
回顾一下，场的空间 $F_A(K,U)$ 自然是一个 K 模。

引理 3.1.12。 (-1)-乘积关于第二个因子是 K-线性的。

证明。 回顾一下，对于任意 $g \in K$ 以及任意场 Y，乘积 gY 是由公式$(gY)(h) = Y(gh)$定义的场。我们需要证明，对于任意给定的场 X，以下等式成立。

$$\big(X_{(-1)}(gY)\big)(h) = \big(X_{(-1)}Y\big)(gh) = \big(g(X_{(-1)}Y)\big)(h).$$

从某种意义上说，这显然成立。考虑交换图



所有映射在右拓扑下都是连续的，因此我们得到：

$$\left(\frac{1}{z-w}X(gY)\right)(1\otimes h) = \big(X(gY)\big)\left(\frac{1\otimes h}{z-w}\right) = (XY)\left(\frac{1\otimes gh}{z-w}\right) = \left(\frac{1}{z-w}XY\right)(1\otimes gh).$$

交换性　上述交换图对于第二个等式是必要的。类似地，我们得到

$$\left(\frac{1}{z-w}(gY)X\right)(h\otimes 1) = \left(\frac{1}{z-w}XY\right)(hg\otimes 1).$$

现在只需根据 (-1)-乘积的定义即可轻松得出结论。 □

在接下来的内容中，我们将以与涉及级数空间的经典理论完全类似的方式，发展分布和场的理论。我们首先在这一形式体系中证明 Dong引理，并进一步证明，互局域场的闭族构成一个顶点代数。

引理 3.1.13 （分布的董氏引理）。 设 X、 Y、 Z 是互局域场，则

1. $\partial_z X$ 和 Y 仍然互局域；
2. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，场 $X_{(n)}Y$ 和 Z 互局域。

证明。 要证明 (1)，只需注意到

$$(z-w)^n[\partial X, Y] = (z-w)^n\partial_z[X,Y] = -n(z-w)^{n-1}[X,Y] + \partial_z\big((z-w)^n[X,Y]\big),$$

因此，如果 $(z-w)^N[X,Y]=0$ 我们有 $(z-w)^{N+1}[\partial X, Y]=0$。

在 (2) 的证明中，我们将仅限于 $n \geq -1$的情形。其他情形则可通过(1) 和命题 3.1.8得到。考虑以下 3-分布

$$\Phi_1 : f\otimes g\otimes h \mapsto X(f)Y(g)Z(h) - Z(h)X(f)Y(g)$$
$$\Phi_2 : f\otimes g\otimes h \mapsto Y(g)X(f)Z(h) - Z(h)Y(g)X(f)$$

选择 N 使得 $(z-w)^N[X,Y]=(z-w)^N[X,Z]=(z-w)^N[Y,Z]=0$。我们首先证明

$$(z_2-z_3)^{3N}\Phi_1=(z_2-z_3)^{3N}\Phi_2.$$

写

$$(z_2-z_3)^{3N}=\sum_{s=0}^{2N}\binom{2N}{s}(z_2-z_1)^{2N-s}(z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N.$$

对于 $s\in[0,N]$，我们有

$$(z_2-z_1)^{2N-s}\Phi_1=(z_2-z_1)^{2N-s}\Phi_2 \tag{7}$$

因为我们可以将 X 与 Y 交换。而对于 $s>N$，我们有

$$(z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N\Phi_1=0=(z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N\Phi_2 \tag{8}$$

因为我们可以将 X 与 Z 交换，也可以将 Y 与 Z 交换。固定 $n\geq 0$。由于乘以 $(z_2-z_3)^{3N}$ 与取限制 Rest_1 可交换，我们得到

$$(z_2-z_3)^{3N}[X_{(n)}Y,Z]=(z_2-z_3)^{3N}\mathrm{Res}_1\big((z_1-z_2)^n(\Phi_1-\Phi_2)\big)=0.$$

为了证明关于 $n=-1$ 的结论，固定 h。与前一种情况一样，我们分别处理 $s>N$ 和 $s\leq N$ 的情形。先考虑 $s>N$ 的情形。注意，Φ_1 关于右拓扑是连续的，而 Φ_2 关于左拓扑是连续的。由此可知，$\frac{1}{z_1-z_2}\Phi_i$ 虽然位于不同的空间中，但定义良好。对于 $(z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N\Phi_i$，同样的连续性条件也成立。特别地，我们得到

$$(z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N\big(\frac{1}{z_1-z_2}\Phi_i\big)=\frac{1}{z_1-z_2}\big((z_1-z_3)^s(z_2-z_3)^N\Phi_i\big)=0$$

根据方程 (8)。现在考虑 $s\leq N$ 的情形。我们有

$$(z_1-z_2)^{2N+1-s}\big(\frac{1}{z_1-z_2}\Phi_1\big)=(z_1-z_2)^{2N-s}\Phi_1,$$

根据方程 (7)，这与将 Φ_1 替换为 Φ_2 后得到的同一表达式一致。将所有项相加并取限制 Rest_1，，我们得到

$$(z_2-z_3)^{3N+1}[X_{(-1)}Y,Z](g\otimes h)=0$$

正如所需。 □

3.2 分布与顶点代数

定义 3.2.1. 若对任意 X、$Y\in\mathcal{F}$、$n\in\mathbb{Z}$，场 $X_{(n)}Y$ 和 ∂X 均属于 $\mathcal{F}$，则称 $\mathbb{C}$-线性子空间 $\mathcal{F}\subset F_A^1(K,U)$ 为**闭的**。我们将子空间 $\mathcal{F}\subset F_A^1(K,U)$ 的**闭包** $\overline{\mathcal{F}}$ 定义为包含 $\mathcal{F}$ 的 $F_A^1(K,U)$ 的最小闭子空间。

Dong引理有如下基本推论。

命题 3.2.2。设 $\mathcal{F}\subset F_A^1(K,U)$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性子空间。如果 $\mathcal{F}$ 由互相局部的场组成，那么 $\overline{\mathcal{F}}$ 也由互相局部的场组成。

证明。 考虑以下子空间链。设 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$，并归纳地定义 $\mathcal{F}_{n+1}$ 为所有属于 $\mathcal{F}$ 的场、它们随 n 变化的所有 n 乘积以及它们的所有导数的 $\mathbb{C}$-线性张成。那么显然 $\overline{\mathcal{F}} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$，并且根据引理 3.1.13，显然每个 $\mathcal{F}_n$ 都由互相局部的场组成。 □

我们终于可以陈述并证明本节的主定理了。可以将其视为 [Kac, 1998, 命题 3.2] 的类似结果。

定理 3.2.3. 设 $\mathcal{F}$ 是由互局域场构成的一个闭 $\mathbb{C}$-线性子空间，并设 $\mathbf{1} : K \to U$ 是一个场，使得对于每个 $g \in K$，$\mathbf{1}(g) \in U$ 都是中心的，且满足 $\partial\mathbf{1} = 0$，并且对于所有 $X \in \mathcal{F}$，都有 $\mathbf{1}_{(-1)}X = X$。

那么，赋予 $\mathcal{F} + \mathbb{C}\mathbf{1}$ n-乘积和导子 $T = \partial$ 后，它成为一个以 $\mathbf{1}$ 为真空向量的顶点代数。

证明。 由于对于每个 $g \in K$，$\mathbf{1}(g) \in U$ 都是中心的，因此有 $[X, \mathbf{1}] = 0$。所以，对于所有 $X \in \mathcal{F}$ 和 $n \geq 0$，我们有

$$X_{(n)}\mathbf{1} = \mathbf{1}_{(n)}X = 0.$$

由于 $\partial\mathbf{1} = 0$所有乘积 $\mathbf{1}_{(n)}X$ 均为 $n \leq -2$ 零，而 $\mathbf{1}_{(-1)}X = X_{(-1)}\mathbf{1} = X$ 由假设成立。因此，顶点代数真空公理成立。此外，根据命题 3.1.8，平移协变公理成立。接下来只需证明局域性公理。

态场对应 $\mathcal{Y} : \mathcal{F} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})[[x^{\pm 1}]]$ 定义为

$$\mathcal{Y}(X, x)Z \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_{(n)}Zx^{-n-1}.$$

注意，$\mathcal{Y}(X, x)$ 确实是关于 x 的一个场，因为我们假设$\mathcal{F}$中的所有元素互相局部。我们断言，若 $(z-w)^N[X, Y] = 0$，则

$$(x-y)^N[\mathcal{Y}(X, x), \mathcal{Y}(Y, y)] = 0.$$

在取展开式时，我们将写出如下表达式

$$z_{12}^n XY \quad \text{or} \quad z_{21}^n YX,$$

这意味着我们分别考虑场 $f \otimes g \mapsto XY((z_1 - z_2)^n f \otimes g)$，其中参数$\overbrace{\quad}^{2}(z_1-z_2)^n f\otimes g$被视为 $K \otimes K$的一个元素；以及场 $f\otimes g \mapsto YX((z_2-z_1)^n g\otimes f)$，其中参数被视为 $\overbrace{K\otimes K}^{1}$的一个元素。这里我们注意到，$(z_1-z_2)z_{12}^n XY = z_{12}^{n+1}XY$且 $(z_1 - z_2)z_{21}^n YX = z_{21}^{n+1}YX$。

使用上述记号，我们写作

$$X_{(n)}(Y_{(m)}Z)(h) = \Big(z_{13}^n X\big(z_{23}^m YZ - z_{32}^m ZY\big) - z_{31}^n\big(z_{23}^m YZ - z_{32}^m ZY\big)X\Big)(1 \otimes 1 \otimes h),$$

对 $Y_{(m)}(X_{(n)}Z)$也同样如此

$$Y_{(m)}(X_{(n)}Z)(h) = \Big(z_{23}^m Y\big(z_{13}^n XZ - z_{31}^n ZX\big) - z_{32}^m\big(z_{13}^n XZ - z_{31}^n ZX\big)Y\Big)(1 \otimes 1 \otimes h).$$

现在注意到

$$z_{13}^{n}X(z_{32}^{m}ZY) = z_{32}^{m}(z_{13}^{n}XZ)Y \quad \text{and} \tag{9}$$
$$z_{31}^{n}(z_{23}^{m}YZ)X = z_{23}^{m}Y(z_{31}^{n}ZX). \tag{10}$$

作为 K 上的 3-分布。我们给出证明第一条的思路，第二条只需将 X 与 Y、n 与 m 互换即可得到。论证用到了显式计算，类似于引理 3.1.9 证明中的计算。固定 U 中 0 的一个开邻域 U_α，我们在 U/U_α 上进行讨论。对于某个 $\delta_{32} \in 1 \otimes K \hat{\otimes} K$，有 $\varphi_3 - \varphi_2 = 1 \otimes 1 \otimes \varphi - 1 \otimes \varphi \otimes 1 = (z_3 - z_2)\delta_{32}$。例如，我们可以展开 $z_{32}^{-1} = \delta_{32} \sum_{l \geq 0} \varphi_3^{-l-1}\varphi_2^{l} \in 1 \otimes \widehat{K \otimes K}^{2}$。同理，对于 z_{32}^{m}、$m \in \mathbb{Z}$ 以及 z_{13}^{n}、$n \in \mathbb{Z}$ 也可以如此展开。在 U/U_α 中计算 $\big(z_{13}^{n}X(z_{32}^{m}ZY)\big)(f \otimes g \otimes h)$ 时，z_{12}^{n} 和 z_{32}^{m} 的展开式中的所有求和都变成有限和。然后，通过直接计算即可轻松验证等式 (9)。

我们得到

$$X_{(n)}(Y_{(m)}Z)(h) - Y_{(m)}(X_{(n)}Z)(h) = \\ \left(z_{13}^{n}X\big(z_{23}^{m}YZ\big) - z_{23}^{m}Y\big(z_{13}^{n}XZ\big) - z_{32}^{m}(z_{31}^{n}ZX)Y + z_{31}^{n}(z_{32}^{m}ZY)X\right)(1 \otimes 1 \otimes h).$$

现在将右端视为 K 上的三重分布，并记为 $\Phi_{n,\,m}$。我们断言

$$(z_1 - z_2)^{N}\big(z_{13}^{n}X(z_{23}^{m}YZ) - z_{23}^{m}Y\big(z_{13}^{n}XZ\big)\big) = 0 \quad \text{and}$$
$$(z_1 - z_2)^{N}\big(z_{32}^{m}\big(z_{31}^{n}ZX\big)Y - z_{31}^{n}(z_{32}^{m}ZY)X\big) = 0$$

作为分布。我们唯一需要注意的是，展开式取自哪个完备化。第一个结论显然成立，因为我们可以在同一个空间中取所有展开式，即 $K \widehat{\otimes K \otimes K}^{3}$，然后利用这样一个事实：$(z_1 - z_2)^{N}[X, Y] = 0$。

为了证明第二个结论，我们需要考虑 U 中 0 的一个开邻域 U_α，并在 U/U_α 中进行运算。这里和往常一样，我们可以将所有内容写成三重分布的有限和；这些分布乘以 $(z_1 - z_2)^{N}$ 后均为 0。

将这两个方程合并，我们得到

$$(z_1 - z_2)^{N}\Phi_{n,m} = 0. \tag{11}$$

此外，显然

$$(z_1 - z_3)\Phi_{n,m} = \Phi_{n+1,m} \quad \text{and} \tag{12}$$
$$(z_2 - z_3)\Phi_{n,m} = \Phi_{n,m+1}. \tag{13}$$

现在考虑 $D_A^3(K, U)[[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]]$ 中的级数（它自然是一个 $K^{\otimes 3}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 模）

$$\Phi = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \Phi_{n,m} x^{-n-1} y^{-m-1}. \tag{14}$$

根据定义

$$[\mathcal{Y}(X, x), \mathcal{Y}(Y, y)]Z = \mathrm{Rest}_1\,\mathrm{Rest}_2\,\Phi.$$

我们有 将证明 $(x-y)^N\Phi=0$，这意味着 $(x-y)^N[\mathcal{Y}(X,x),\mathcal{Y}(Y,y)]Z=0$。写 e

$$(x-y)^N=\Big(\big(x-(z_1-z_3)\big)-\big(y-(z_2-z_3)\big)+(z_1-z_2)\Big)^N.$$

结合方程 (12)、(13) 和 (14)，可得

$$(x-(z_1-z_3))\Phi=(y-(z_2-z_3))\Phi=0,$$

因此

$$(x-y)^N\Phi=(z_1-z_2)^N\Phi=0.$$

□

3.3 由 K-场给出的作用

我们一如既往地使用一个 (φ)-进环 R 及其局部化 K，并选定一个全局坐标 $z\in R$ （参见定义 2.3.4）。回忆一下，根据定理 3.2.3，由互局域场构成的 $F_A^1(K,U)$的闭子空间，本质上是一个顶点代数，其 n-乘积在第 3.1 节中定义。

定义 3.3.1。设 V 是一个在 $\mathbb{C}$ 上的顶点代数， U 是一个完备的拓扑 A 代数，其拓扑由左理想生成。V在 U 上的**由 K-场给出的作用**是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$Y:V\to F_A(K,U)$$

使得 Y与 n-乘积和导数可交换:

$$Y(A)_{(n)}Y(B)=Y(A_{(n)}B),\qquad Y(TA)=\partial Y(A),$$

并且 V的像由取值于 U的互局域 K-场组成。

在 $A=\mathbb{C}$、 $K=\mathbb{C}((t))$ 和 $U=$ 为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ 的特殊情形下，定义 3.3.1 归结为顶点代数 V 的模的通常定义。

注 3.3.2。设 Y 是 V 在 U 上的一个由 K-场给出的作用。那么像 $Y(V)$ 是 $F_A(K,U)$ 的一个 $\mathbb{C}$-子空间，它在互局域场中封闭且由互局域场组成。令 $\mathbf{1}=Y(|0\rangle)$。那么对于任意 $X\in Y(V)$ 以及所有 $n\geq -1$，都有 $\mathbf{1}_{(n)}X=X\delta_{n,-1}$，因此根据定理 3.2.3， $\mathbb{C}$-向量空间 $Y(V)$ 具有顶点代数结构，并且映射 $Y:V\to Y(V)$ 是一个顶点代数同态。

定义 3.3.3. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的顶点代数。定义

$$\mathrm{Lie}_K(V)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{V\otimes_{\mathbb{C}}K}{\mathrm{Im}\,T+\partial_z}.$$

这是一个 A-模。用 Xf 表示 $X\otimes f$ 在商中的像，并在 $\mathrm{Lie}_K(V)$ 上定义如下括号:

$$[Xf,Yg]\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(X_{(n)}Y)g\partial_z^n f.$$

命题 3.3.4. 李$_K(V)$ 是一个 A-线性李代数，其括号即为刚刚定义的括号。

证明. 这是一个已知结论：当 K 是 $\mathbb{C}$ 上的任意带导子的交换代数 ∂时，该结论成立。例如可参见 [Frenkel，2007，命题 3.2.1]。 □

命题 3.3.5. 设 Y 是 U上由 V 的 K-场给出的作用。考虑 A-线性映射

$$\mathrm{Lie}(Y) : \mathrm{Lie}_K(V) \to U, \qquad Xf \mapsto Y(X)(f).$$

那么 $\mathrm{Lie}(Y)$ 是良定义的李代数同态，其中 U 上的括号由其结合乘积的交换子给出。

证明。 对任意 $a \in V$，特别是 $Y(Ta)(f) = -Y(a)(\partial_z f)$，都有 $Y(Ta) = \partial Y(a)$，因此映射 $\mathrm{Lie}(Y)$ 是良定义的。回顾一下，根据命题 3.1.3，以下公式成立

$$[Y(a)(f), Y(b)(g)] = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\big(Y(a)_{(n)}Y(b)\big)(g\partial_z^n f).$$

根据 V 在 U 上由 K-场给出的作用的定义， $Y(a)_{(n)}Y(b) = Y(a_{(n)}b)$，断言便显然成立。 □

4 K_n 上的场空间

现在我们将注意力限制在 $K = K_n$ 的情形，令 z 为典范坐标。

引理 4.0.1。 设 U 是一个完备的拓扑 A-代数，其拓扑由左理想生成。考虑 K_n-场

$$\mathbf{1} \overset{def}{=} 1_U \int : \qquad f \mapsto 1_U\left(\int f dz\right).$$

其中 1_U 是 U的单位元。那么对于 U 上的任意 K_n-场 X 和 $n \in \mathbb{Z}$，以下结论成立：

$$\mathbf{1}_{(n)}X = X\delta_{n,-1}, \qquad X_{(-1)}\mathbf{1} = X.$$

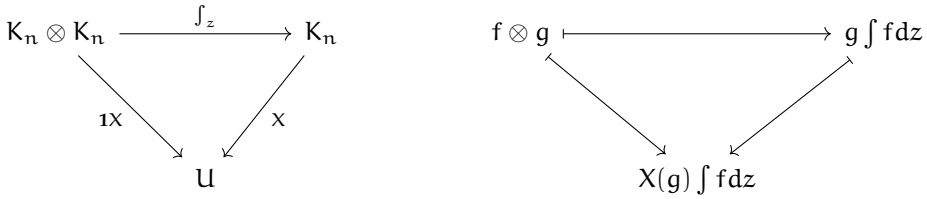
证明。 由于$\mathbf{1}$ 显然与每个场都交换，因此对任意 $n \geq 0$，自然有 $\mathbf{1}_{(n)}X = 0$。此外，由于留数满足 $\int df = 0$，我们得到 $\partial\mathbf{1} = 0$，所以对任意 $n \leq -2$， n-乘积等于零： $\mathbf{1}_{(n)}X = 0$。剩下只需证明 $\mathbf{1}_{(-1)}X = X$，因为根据引理 3.1.11，这也意味着 $X_{(-1)}\mathbf{1} = X$。回想一下，$\mathbf{1}$ 在 R_n 上为 0（正则函数的留数为 0）。因此我们有

$$\mathbf{1}_{(-1)}X = \big(E_2(z-w)^{-1}\mathbf{1}X\big)(1\otimes g) - \big(E_1(z-w)^{-1}X\mathbf{1}\circ\sigma\big)(1\otimes g).$$

注意，上述等式右侧的第二项为零，因为 $E_1(z-w)^{-1}1\otimes g \in \widehat{R_n \otimes K_n}^1$ and $\mathbf{1}(R_n) = 0$。因此

$$\mathbf{1}_{(-1)}X = (\mathbf{1}X)\left(\frac{1\otimes g}{z-w}\right) \quad \text{where} \quad \frac{1\otimes g}{z-w} \in \widehat{K_n \otimes K_n}^2.$$

现在注意，由于 A-线性性，下面的交换图是交换的



特别是，由于 $\int_z$ 和 $\mathbf{1}X$ 关于右拓扑都是连续的，我们得到以下公式

$$(\mathbf{1}X)\left(\frac{1\otimes g}{z-w}\right) = X\left(\int_z \frac{1\otimes g}{z-w}dz\right) = X(g),$$

因为根据引理 2.5.2，我们有 $\int_z \frac{1\otimes g}{z-w}dz = g$。 □

设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的单有限维李代数，且 κ 是 $\mathfrak{g}$上的不变对称双线性型。那么， κ 是 Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{g}}$的一个标量倍数： $\kappa = k\kappa_{\mathfrak{g}}$， $k \in \mathbb{C}$。现在，我们通过与 A 作张量积，将 $\mathfrak{g}$ 上的标量扩张，并通过 A-线性性扩张括号和 κ。然后，我们可以应用定义 2.8.3 中的构造，考虑带有其留数映射的 $K = K_n$，从而得到一个定义在 A上的李代数：

$$\hat{\mathfrak{g}}_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathfrak{g}}_{K_n,\kappa}.$$

我们用 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 表示推论 2.8 中出现的完备包络代数。 5.

定义 4.0.2。 固定 $X \in \mathfrak{g}$，并定义以下在 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$上的 K-分布

$$\hat{X} : K_n \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n), \qquad \hat{X}(f) = X \otimes f.$$

根据 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 上拓扑的定义，很容易验证这是一个场。

注 4.0.3. 设 $X, Y \in \mathfrak{g}$，则根据 $\hat{\mathfrak{g}}_n$ 中李括号的定义，相关场 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 满足以下公式。

$$[\hat{X}, \hat{Y}](f \otimes g) = \widehat{[X,Y]}(fg) + \kappa(X,Y)\int (g\partial_z f)dz.$$

由推论 3.1.5 可得

$$(z-w)^2[\hat{X}, \hat{Y}] = 0.$$

此外，我们还有以下等式

$$(\hat{X})_{(0)}(\hat{Y}) = \widehat{[X,Y]}, \qquad (\hat{X})_{(1)}(\hat{Y}) = \kappa(X,Y)\mathbf{1}.$$

定义 4.0.4. 令 $\mathcal{F}$ 为具有 $X \in \mathfrak{g}$ 的 $\hat{X}$ 的 $\mathbb{C}$-线性张成，并令 $\overline{\mathcal{F}}$ 为其关于 n-乘积和导子的闭包。注意到 $\mathbf{1} \in \overline{\mathcal{F}}$，因此 $V^k_{K_n}(\mathfrak{g})$ def= $\overline{\mathcal{F}}$ 具有自然的顶点代数结构，其中 $\mathbf{1}$ 为真空向量， ∂_z 为平移算子；此结论由定理 3.2.3 得出。

现在考虑层为 k 的仿射顶点代数 $V^k(\mathfrak{g})$。

命题 4.0.5. 存在一个顶点代数同构

$$Y_{can} : V^k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} V^k_{K_n}(\mathfrak{g})$$

使得对所有 X 属于 $\mathfrak{g}$，$Y_{can}(X_{-1}|0\rangle) = \hat{X}$。

证明。 根据 $V^k(\mathfrak{g})$ 满足的泛性质，只需验证端同态 $(\hat{X})_{(n)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V^k_{K_n}(\mathfrak{g})\right)$ 满足层为 k 的仿射 Kac-Moody 代数的关系。由于 $V^k_{K_n}(\mathfrak{g})$ 是一个顶点代数，我们有

$$[\hat{X}_{(n)}, \hat{Y}_{(m)}] = \left(\hat{X}_{(0)}\hat{Y}\right)_{(n+m)} + n\left(\hat{X}_{(1)}\hat{Y}\right)_{(n+m-1)} = \widehat{[X,Y]}_{(n+m)} + n\kappa(X,Y)\mathbf{1}_{(n+m-1)}.$$

现在由引理 4.0.1 可知 $\mathbf{1}_{(n+m-1)} = \delta_{n,-m}\,\mathrm{id}^{V^k_{K_n}(\mathfrak{g})}$，命题得证。最后，$Y_{\mathrm{can}}$ 显然是满射，而将右侧对 $a_i = 0$ 取商后，我们便得到 $V^k(\mathfrak{g})$ 作为 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}})$ 上的场的实现，因此 Y_{can} 也是单射。 □

态射 Y_{can} 诱导了 $V^k(\mathfrak{g})$ 在 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 上由 K_n-场给出的作用，因此它诱导出一个李代数态射（参见定义 3.3.3）

$$\mathrm{Lie}_{\mathrm{can}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Lie}(Y_{\mathrm{can}}) : \mathrm{Lie}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n).$$

4.1 导子的作用

现在我们将研究李代数 $\mathrm{Der}\ K_n$ 通过导子对李代数 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V)$ 的自然作用，其中 V 是一个拟共形顶点代数。

定义 4.1.1. 拟共形顶点代数是指配备了李代数 $\mathrm{Der}\ \mathbb{C}[[t]]$ 作用的顶点代数（该李代数在拓扑意义下由形如 $L_n = -t^{n+1}\partial_t$ 的元素生成），并满足

- 算子 L_{-1} 与 T相同；
- $L_0 = -t\partial_t$ 的作用是半单的，且特征值为整数；此外，每个特征空间的维数都有限；
- 该作用是连续的，也就是说，对于任意 $a \in V$，当n充分大时，我们有 $L_n a = 0$；
- 以下公式成立

$$[L_n, a_{(m)}] = \sum_{k \geq -1} \binom{n+1}{k+1} (L_k a)_{(n+m-k)}.$$

回顾一下，如果存在一个共形向量 ω，使其生成某一层的 Virasoro 代数的作用，则称顶点代数为**共形**的。在 $L_0 = \omega_{(1)}$ 的作用为半单的假设下，任何共形顶点代数都成为准共形顶点代数，其中 $L_n = \omega_{(n+1)}$。

The foll以下命题众所周知，可参见 [Frenkel，2007，第 6.1 节4]。

命题 4.1.2。 顶点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ 在任意层 k下都是拟共形的。此外，当 $k \neq k_c$为临界级时， $V^k(\mathfrak{g})$ 是共形的，而临界级处的拟共形结构可以由临界级之外的共形结构取极限得到。

定义 4.1.3. 定义如下 Der K 在李$_K(V^k(\mathfrak{g}))$上的作用

$$(-f\partial_z)\cdot ag = \sum_{l\geq -1}\frac{1}{(l+1)!}(L_l a)g\partial_z^{l+1}f.$$

容易验证，这确实是 Der K_n 的一个作用，并且 $-f\partial_z$ 诱导了李$_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$的一个导子。

命题 4.1.4. 典范态射

$$\mathrm{Lie}_{can} : \mathrm{Lie}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$$

是Der K_n-等变的。

证明。 对于 $k \neq k_c$ ， Der K_n 在两个空间上的作用由 $(\omega_k)f \in$李$_{K_n}\left(V^k_{K_n}(\mathfrak{g})\right)$的作用诱导而来，也就是说，对于所有 $x \in$李$_{K_n}\left(V^k_{K_n}(\mathfrak{g})\right)$，都有 $(-f\partial_z)\cdot x = [\omega_k f, x]$，其中 ω_k是 $V^k(\mathfrak{g})$的共形向量。因此，等变性源于该态射是李代数态射这一事实。对于 $k = k_c$ ，只需注意到 Der K_n 的作用是通过在两个空间中取极限得到的，因此等变性由情形 $k \neq k_c$推出。关于这一极限过程的严谨证明，可以采用与 [CASARIN, 2021, 命题 3.4.3 和命题 7.4.1]中类似的论证。可以定义一个在 $\mathbb{C}[\mathbf{k}]$ 上的顶点代数（此时$\mathbf{k}$ 是一个变量），记作$V^{\mathbf{k}}(\mathfrak{g})$，其在$\mathbf{k} = k$ 处的特化给出通常的层为$k \in \mathbb{C}$的泛仿射顶点代数。 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 的构造也可以在 $\mathbb{C}[\mathbf{k}]$ 上进行；两个空间上的导子作用以及命题中的映射都可以取为 $\mathbb{C}[\mathbf{k}]$-线性的。验证等变性时，需要处理关于$\mathbf{k}$ 的多项式方程；根据上述讨论，这些方程在将$\mathbf{k}$ 特化为 $= k \neq k_c$时均为 0。这便容易推出，这些多项式等式对于 $k = k_c$ 也成立。

□

4.2 完备拓扑代数 $\tilde{U}_{K_n}(V)$

我们将在此构造一个函子 $V \rightsquigarrow \tilde{U}_{K_n}(V)$，它将顶点代数 V映射为完备拓扑 A-代数。后者将配备一个李代数态射 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V) \to \tilde{U}_{K_n}(V)$。在 $V = V^k(\mathfrak{g})$ 这一特例中，我们证明存在唯一的连续态射

$$\tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$$

扩张映射 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$。

我们考虑的所有顶点代数都定义在 $\mathbb{C}$上，具有拟共形结构，并由关于 L_0的作用齐次的有限个元素生成。设 a^i 是这样一组生成元，则 $\deg(a^i_{(-n-1)}) = \deg(a^i) + n$，且 V的每个齐次分量 V_m 都由如下形式的元素张成

$$a^{i_1}_{(-n_1-1)}\dots a^{i_l}_{(-n_l-1)}|0\rangle \quad \text{with} \quad \sum_{j=1}^{l}\deg(a^{i_j}) + n_j = m.$$

我们按如下方式构造 $\tilde{U}_{K_n}(V)$。令$U^0_{K_n}(V)$为 A上的李代数 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V)$ 的泛包络代数，再除以由 $(\int(gdz)-|0\rangle\, g)$生成的双边理想，其中 g遍历 K_n。 ~现在考虑其左理想 I_N，它们由如下形式的元素生成： ag，其中 $a\in V_m$ 且$g\in R\varphi^n$，使得 $n\geq Nm$，并定义$U'_{K_n}(V)$ 为完备化

$$U'_{K_n}(V)=\varprojlim_N \frac{U^0_{K_n}(V)}{\widetilde{I_N}}.$$

可以验证，$U^0_{K_n}(V)$中的乘积关于此拓扑是连续的，因此 $U'_{K_n}(V)$是一个完备的拓扑 A代数。

给定 $a\in V$，我们考虑取值于 $U'_{K_n}(V)$ 的 K_n分布 $\tilde{a}$，它定义为将 $\tilde{a}(g)$设为 ag 在映射 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V)\to U^0_{K_n}(V)\to U'_{K_n}(V)$下的像。

根据 $U'_{K_n}(V)$ 上的拓扑定义，这些实际上是场。此外，容易验证，给定 a、$b\in V$，若对所有 $k\geq N$都有 $a_{(k)}b=0$，则 $(z-w)^N[\tilde{a},\tilde{b}]=0$，因此它们互相局部。我们将 $\tilde{U}_{K_n}(V)$定义为 $U'_{K_n}(V)$对 J取商，其中 J是由下列元素生成的双边理想的闭包

$$J=\big((a_{(-1)}b)g-\tilde{a}_{(-1)}\tilde{b}(g)\big),\qquad a,b\in V.$$

引理 4.2.1。 令 $\hat{X}$ 为与 $X\in\mathfrak{g}$ 相关联的 K_n场， Y 为任意场。令 $I_l=R_n\varphi^l_n$ 为定义其拓扑的 K_n的A_n子模，令 $U_N=\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)(\mathfrak{g}\otimes R_n\varphi^N_n)$ 为 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$的开邻域基本系。假设

$$Y(I_M)\subset U_N.$$

Then

$$(\hat{X}_{(-k-1)}Y)(I_{N+M+k})\subset U_N.$$

特别地，令 X^i 为与元素 $X^i\in\mathfrak{g}$ 相关联的场，则

$$(\hat{X}^1_{(-n_1-1)}\dots\hat{X}^r_{(-n_r-1)}\mathbf{1})\big(I_{rN+\sum_i n_i}\big)\subset U_N,$$

其中乘积按从右到左的顺序进行。

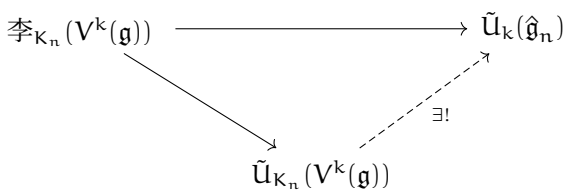
证明。 这可通过一个与引理 3.1.9 完全类似的论证直接计算得出。

□

命题 4.2.2。 考虑顶点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ 通过 K_n-场在完备拓扑 A_n-代数 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$上的典范作用。那么存在唯一的完备拓扑$A_n$-代数连续态射

$$\tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))\to\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)\tag{15}$$

使下列交换图成立。



证明。令 $U = \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$和 $V = V^k(\mathfrak{g})$。回忆一下，$U^0_{K_n}(V)$是由李$_{K_n}(V)$ $\int g dz - |0\rangle\, g$所生成的理想取商后得到的包络 A_n-代数。由于李$_{can}$上的映射按定义将 $|0\rangle\, g \mapsto \mathbf{1}(g) = \int g dz$映到……，我们得到唯一的态射 $U^0_{K_n}(V) \to U$。要验证连续性，可以使用引理 4.2.1 来证明 $I_{N+1} \mapsto U_N$。因此存在唯一的态射扩张 $U'_{K_n}(V) \to U$。最后，理想 J 在 U 中映到 0，这是因为 V通过 K_n-场作用于 U，故由构造可得 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$中的等式 $(a_{(-1)}b)g = (\tilde{a}_{(-1)}\tilde{b})(g)$。

□

最后，我们证明上述映射实际上是一个同构。

命题 4.2.3. 完备结合代数 $\tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$ 通过(15)中的态射与代数$\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_{K_n})$ 典范同构。在 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔代数且 $\kappa = 0$ 的最简单情形下，容易看出

$$\tilde{U}_K(V^\kappa(\mathfrak{g})) = \widetilde{\mathrm{Sym}}_A(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} K).$$

证明. $V^k(\mathfrak{g})$ 对 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 的 K_n-场典范作用根据命题 4.2.2 诱导出一个连续态射 $\tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$。反过来，我们有一个自然的连续映射 $\hat{\mathfrak{g}}_{K_n,k} \to \tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$，它将 $X \otimes f$映射到 $(X_{(-1)}|0\rangle)f$经由映射 $\mathrm{Lie}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$和$\mathbf{1} \mapsto 1$所得的像。此映射诱导出一个态射 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n) \to \tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$。容易看出，后者是态射 (15) 的逆，因为它们的复合在生成元集上为恒等映射。

□

注 4.2.4. 当李代数 $\mathfrak{g}$ 已经带有一个 $\mathbb{Z}$-分次时，这一构造有一个略有不同的版本。若将 $\mathfrak{g}$ 上原有的分次纳入考虑，顶点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 就会得到一个移位分次，因此我们在 $\tilde{U}_{K_n}(V^\kappa(\mathfrak{g}))$ 上定义的拓扑也略有不同。不过，我们仍能得到类似的结论。特别地，在阿贝尔情形下（$\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的且 $\kappa = 0$），若 x_i 是 $\mathfrak{g}$的一组齐次基，则

$$\tilde{U}_{K_n}(V^\kappa(\mathfrak{g})) = \varprojlim_N \frac{A\left[x_i \epsilon_{j,k_i}\right]}{\left(x_i \epsilon_{j,k_i} : k_i \geq N \deg x_i\right)}.$$

推论 4.2.5（命题 4.1.4）**.** 该同构

$$\tilde{U}_{K_n}(V^\kappa(\mathfrak{g})) \to \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_n)$$

是 Der K_n-等变的，其中 Der K_n 在 $\tilde{U}_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$ 上由导子给出的作用，是由其在 李$_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$上的作用所诱导的。

4.3 中心元

现在我们能够为 $k = k_c$ 在完备包络代数 $\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 中构造大量中心元，也就是那些来自 $V^k(\mathfrak{g})$ 的中心的中心元。

从现在起，我们只考虑固定的单李代数 $\mathfrak{g}$，且仅在临界级 $k = k_c$ 下讨论。

命题 4.3.1。设 $\zeta(\mathfrak{g})$ 是 $V^{k_c}(\mathfrak{g})$ 在临界层的中心。根据 *Feigin-Frenkel* 定理*[Feigin* 和 *Frenkel, 1992],* 它同构于形式圆盘 $\zeta(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}(D)]$ 上 *Opers* 空间的函数代数。于是，对任意 $z \in \zeta(\mathfrak{g})$ 和任意 $f \in K_n$，由 $Y_{can}(z)(f) \in \tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 定义的元素都是中心的：

$$Y_{can}(z)(f) \in Z(\tilde{U}_{k_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)).$$

证明。这一点很容易看出。令 $x = X_{(-1)}|0\rangle \in V^k(\mathfrak{g})$ 对于 $X \in \mathfrak{g}$，并注意到根据假设，对任意 $n \geq 0$，都有 $z_{(n)}x = 0$。特别地，括号 $[zf, xg] = 0$ 属于李$_{K_n}(V^k(\mathfrak{g}))$。现在，由于李

$\hat{X}(g)$ ^{can} $Y_{can}(z)(f)$ $_{can}(zf) = Y_{can}(z)(f)$ $_{can}(xg) =$ 是李代数的同态，并且由于李和 Xg $X \in \mathfrak{g}$

李，我们得到它与每个形如 for 的元素都交换。这些元素在拓扑意义下生成完备包络代数，因此 $Y_{can}(z)(f)$ 必须是中心的。

□

注 4.3.2. 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 以及具有 $n = 2$ 个奇点的情形，上述构造给出了 [Fortuna 等人构造的包络代数中的中心元素， 2020]。

根据命题 4.2.2 和推论 4.2.5，存在一个自然的、Der K_n-等变态射

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op^L_G(D)]) \to \tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n),$$

根据前一个命题，该映射可分解并经过中心。因此存在一个自然映射

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op^L_G(D)]) \to Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)).$$

在接下来的几节中，我们将分两步研究如何将 $Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n))$ 刻画为 $Op^L_{\mathfrak{g}}(D_n)$ 上的函数环。首先，我们将证明上面构造的映射是同构，从而得到中心的代数描述。其次，我们将证明代数 $\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op^L_G(D)])$ 与 $A[Op^L_{\mathfrak{g}}(D_n)]$典范同构，其中 $A[Op^L_{\mathfrak{g}}(D_n)]$是 n-带标记圆盘 $D_n =$ Spec K_n上的 Opers 空间的函数代数:

$$A[Op^L_G(D_n)] \simeq \tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op^L_G(D)]) \simeq Z(\tilde{U}_{k_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)).$$

5 中心的代数描述

本节将证明映射

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op^L_G(D)]) \to Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n))$$

是一个同构。为此，我们将研究与中心相关的特定分次空间，这与 [Beilinson 和 Drinfeld, 1991] 的定理 3.7.7 完全类似。

我们需要引入 R_n-喷射概形，这是对通常喷射概形概念的直接推广。

5.1 R-喷射概形

我们将在此定义经典喷射概形的类似物。回顾一下，给定一个在 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形 X，可以考虑与 X 相关的喷射概形和第 n 阶喷射概形，它们可描述为 $\mathbb{C}$-代数上的函子:

$$JX(B) = X(B[[t]]) \quad \text{and} \quad J_nX(B) = X(B[t]/(t^n))$$

对于 $B \in Alg_{\mathbb{C}}$。我们将在所关注的环R_n, K_n的背景下推广这一构造。

本节的许多结果都可以推广到任意 (φ)-进环 R 及其局部化K；我们选择聚焦于 R_n 和 K_n，以便能够自由使用留数。

为使记号稍微简洁一些，我们常将 R 记作 R_n，将 K 记作 K_n，将 φ 记作 φ_n，将 I 记作理想 (φ)，并将 A 记作 A_n。

定义 5.1.1. 设 X 是 A上的概形，或是 A-代数的一个函子。我们定义以下函子

$$J^K X(B) \stackrel{\text{def}}{=} X(B(K)), \qquad J^R X(B) \stackrel{\text{def}}{=} X(B(R)), \qquad J^R_l X(B) \stackrel{\text{def}}{=} X(B \otimes (R/I_l)),$$

对于 $B \in \mathrm{Alg}_A$。这里，I_l 是 R中由 φ^l 生成的理想。我们称它们为 X的 K-喷射概形、 X 的R-喷射概形，以及 X的第 l个 R-喷射概形。

注 5.1.2. 当 $A = \mathbb{C}$ 和 $R = \mathbb{C}[[t]]$ 带有标准拓扑时，我们便得到经典的喷射概形定义。

T构造 J^K、 J^R、 J^R_l显然具有函子性，此外还存在自然映射 s

$$\pi_n : J^R X \to J^R_n X, \quad \pi_{m,n} : J^R_n X \to J^R_m X, \qquad J^R X \to J^K X$$

使得 $\pi_m = \pi_{m,\,n} \circ \pi_n$ 和 $\pi_{n,\,m} \circ \pi_{m,\,l} = \pi_{n,\,l}$。这些映射对于 X 也具有函子性。我们将证明，若 X 是 A 上的有限型仿射概形，则函子 $J^R X$ 可表且为仿射，而函子 $J^R_n X$ 可由 A上的有限型仿射概形表示。

回顾一下，在第 2.5.1 节中，我们引入了拓扑基 $e_{i,\,l}$，其中 $l \in \mathbb{Z}$ （分别是 $l \geq 0$）对应于 K_n （分别对应于 R_n），以及关于留数配对的对偶基 $\epsilon_{j,\,k}$。每个元素 $g \in B(R)$都可以唯一地表示为

$$g = \sum_{i,m \geq 0} b_{i,-m-1} e_{i,m} \quad \text{for some} \quad b_{i,-m-1} \in B.$$

此外， $B \otimes (R/I_n)$ 中的每个元素都可以唯一地写成上述形式的有限和，其中 $m \leq n$。

我们首先研究 $X = \mathbb{A}^N_A$的 R-喷射概形。根据定义， $J^R X$ 的 B 点由下式给出

$$J^R\,\mathbb{A}^N_A(B) = \{(b^1, \ldots, b^N) \text{ with } b^i \in B(R)\} \subset \{(b^1, \ldots, b^N) \text{ with } b^i \in B(K) = J^K\,\mathbb{A}^N_A(B).$$

考虑函数 $x^j_{i,\,n}$，它们在 B 的点上定义如下:

$$x^j_{i,m} : J^K\,\mathbb{A}^N_A \to \mathbb{A}^1_A, \qquad x^j_{i,m}(b^1, \ldots, b^N) \stackrel{\text{def}}{=} \int b^j \epsilon_{i,m}\, dz.$$

我们考虑它们在 $J^R X$ 上的限制，并记

$$b^j = \sum_{m \geq 0} b^j_{i,-m-1} e_{i,m}$$

我们有 $x^j_{i,\,n}(b^1, \ldots, b^n) = b^j_{i,\,n}$ 对于 $n < 0$ 和 $x^j_{i,\,n}(b^1, \ldots, b^n) = 0$ 对于 $n \geq 0$。这些函数也可以类似地为 $J^R_l\,\mathbb{A}^N_A$ 定义。由此构造可得以下命题。

命题 5.1.3. 设 $X = \mathbb{A}_A^N$，则函子 $J^R X$ 和 $J_l^R X$ 可由仿射概形表示，而 $J_l^R X$ 是 A 上的有限型。特别地

$$J^R \mathbb{A}_A^N = \operatorname{Spec} A\left[x_{i,m}^j\right]_{m<0}, \qquad J_l^R \mathbb{A}_A^N = \operatorname{Spec} A\left[x_{i,m}^j\right]_{-l\le m<0}.$$

此外，投影映射 $\pi_l : J^R \mathbb{A}_A^N \to J_l^R \mathbb{A}_A^N$ 由自然包含给出

$$\pi_l^* : A\left[x_{i,m}^j\right]_{-l\le m<0} \hookrightarrow A\left[x_{i,m}^j\right]_{m<0}.$$

我们可以对函子 $J^K \mathbb{A}_A^N$作类似的描述。$b \in B(K)$ 中的每个元素都可以唯一地写成一个无穷和

$$b = \sum_{m\ge -N} b_{i,-m-1} e_{i,m} \quad \text{with} \quad b_{i,-m-1} \in B.$$

而且，这种形式的每个无穷和都定义了 $B(K)$中的一个元素。注意，因此我们可以定义类似的函数

$$x_{i,k}^j : J^K \mathbb{A}_A^n \to \mathbb{A}_A^1, \qquad x_{i,k}^j(b^1, \dots, b^N) = b_{i,k}^j,$$

对于任意 i 以及任意整数 $k \in \mathbb{Z}$。

定义 5.1.4. 令 $X = \mathbb{A}_A^N$，并令 n 为一个正整数，定义函子

$$J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N(B) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(b^1, \dots, b^N) \in J^K \mathbb{A}_A^N(B) : \varphi^n b^i \in B(R)\right\}.$$

这里 φ 一如既往地是 K 中的函数，它定义了拓扑。此外，对于 $n \ge m$，还有自然映射

$$\iota_{m,n} : J_{\ge m}^K \mathbb{A}_A^N \to J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N.$$

引理 5.1.5. 函子 $J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N$ 可表，且通过乘法同构于 $J^R \mathbb{A}_A^N$

$$\cdot \varphi^n : J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N \to J^R \mathbb{A}_A^N, \qquad (b^1, \dots, b^N) \mapsto (\varphi^n b^1, \dots, \varphi^n b^N).$$

特别地

$$J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N = \operatorname{Spec} A[x_{i,k}^j]_{k<n}.$$

证明. 显然。 □

推论 5.1.6. 自然映射 $\iota_{m,n} : J_{\ge m}^K \mathbb{A}_A^N \to J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N$ 是闭浸入，且

$$J^K \mathbb{A}_A^N = \bigcup_{n\ge 0} J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N.$$

由此可知，$J^K \mathbb{A}_A^N$ 是一个归纳概形，因此

$$A[J^K \mathbb{A}_A^N] = \varprojlim_n A\left[J_{\ge n}^K \mathbb{A}_A^N\right] = \varprojlim_n \frac{A[x_{i,k}^j]_{k\in\mathbb{Z}}}{(x_{i,k}^j : k \ge n)}.$$

5.2 卷积与正规序乘积

现在我们继续研究 $Z \hookrightarrow \mathbb{A}_A^N$ 是闭子概形的情形。为此，我们将研究函数 $p : \mathbb{A}_A^N \to A_A^1$ 在应用函子 J^R 后的行为。

注意，我们可以将函数 $x_{i,m}^j$ 组织为 $J^K \mathbb{A}_A^N$ 上的 K-分布，其取值于 $A\left[J^K \mathbb{A}_A^N\right]$，并将其视为带有由极限拓扑诱导的拓扑的拓扑 A-代数（其中商带有离散拓扑）。事实上，考虑这些分布

$$x_K^j : K \to A\left[J^K \mathbb{A}_A^N\right], \qquad x_K^j(g)(b^1, \dots, b^N) = \int b^j g dz.$$

很明显，对于所有 m，$x_K^j(\epsilon_{i,m}) = x_{i,m}^j$ 的连续性也很容易得出。特别地，我们可以考虑这些 x_K^j 的正规序乘积，并在任意 $g \in K$上对其求值。

此外，由于 $A\left[J^K \mathbb{A}_A^N\right]$ 是交换的，这些场彼此互相局部。根据引理 3.1.11，它们的 (-1)-乘积不依赖于因子的排列顺序。因此，对于任意多项式 $p \in A[x^j]$，都有一个与之对应的典范场 p_K。

定义 5.2.1. 我们定义与 p 对应的 p_K 值 K 场 $A\left[J^K \mathbb{A}_A^N\right]$ 如下。将 p 视为由 x^j 与常值函数 1 的乘积构成的 A 线性组合，然后作代换 $x^j \mapsto x_K^j$、$1 \mapsto \mathbf{1}$，并将普通乘积替换为场的 (-1)-乘积。根据上述说明，这些乘积不依赖于 x^j 的排列顺序，因此 p_K 定义良好。

给定 $p \in A[x^j]$，我们将记 $p_{j,k} = p_K(\epsilon_{j,k})$。

将场 x^j 与自然投影 $A[J^K \mathbb{A}_A^N] \to A[J_{\geq n}^K \mathbb{A}_A^N]$ 复合后，我们得到$A[J_{\geq n}^K \mathbb{A}_A^N]$-值场，其中后一个代数赋予离散拓扑。此外请注意，这一构造给出了一个 $K[\partial_z]$-模的映射

$$F_A(K, A[J^K \mathbb{A}_A^N]) \to F_A(K, A[J_{\geq n}^K \mathbb{A}_A^N])$$

它与 n-乘积相容。

我们开始研究场 p_K，将它们复合后投影到 $A[J^R \mathbb{A}_A^N]$上，并将这一复合称为 p_R。事实证明，还有另一种描述场 p_R 的方式。

将 p 视为映射 $\mathbb{A}_A^N \xrightarrow{p} \mathbb{A}_A^1$，并考虑由函子性得到的相应态射

$$J^R p : J^R \mathbb{A}_A^N \to J^R \mathbb{A}_A^1 .$$

对于 $g \in K$，用 $J^R p(g)$ 表示它与映射的复合

$$\int (\cdot g dz) : J^R \mathbb{A}_A^1 \to \mathbb{A}_A^1 \qquad B(R) \ni b \mapsto \int b g dz \in B$$

命题 5.2.2。 对于任意 $g \in K$，以下等式成立

$$J^R p(g) = p_R(g).$$

证明。 由线性性，我们不妨设 p 是一个单项式。我们对 p 的次数进行归纳。根据定义，当 $\deg p = 1$ 时，结论成立。因此，假设该命题在

$\deg p \le n$ 时成立，并证明它在 $\deg\ p = n+1$时也成立，于是我们可以将 $p = x^j q$ 写成某个单项式 q，并且已知

$$q_R(g)\big(b^1,\dots,b^N\big) = \int q(b^1,\dots,b^N) g dz.$$

我们再作一项简化：注意，对于任意由 $B(R)$ 中元素组成的 N 元组 $(b^1,\dots,b^N)$，都存在一个自然的求值映射

$$ev_{(b^1,\dots,b^N)} : A\big[J^R\,\mathbb{A}_A^N\big] \to B.$$

$A\big[J^R\,\mathbb{A}_A^N\big]$ 中任何两个在所有求值下都相同的元素必相等。因此，我们可以固定一个由 $B(R)$ 中元素组成的 N 元组来进行讨论。为简化记号，我们仍用相同的符号 x_K^j 和 q_K 表示 x_K^j 和 q_K 与求值映射 $ev_{(b^1,\dots,b^N)}$ 的复合。我们要证明：

$$p_R(g) = \big((x_R^j)_{(-1)} q_R\big)(g) = \int b^j q(b^1,\dots,b^N) g dz = J^R p(g).$$

由归纳假设可知：

$$q_R(g) = \int q(b^1,\dots,b^N) g dz,$$

此外，我们可以利用 B 线性性将 x_R^j、q_R 延拓到 $B \otimes_A K$，并进一步利用连续性将其延拓到 $B(K)$；我们用 $\tilde{x}_R^j$、$\tilde{q}_R$ 表示这些延拓。接下来要证明等价命题

$$\big((\tilde{x}_R^j)_{(-1)} \tilde{q}_R\big)(g) = \int b^j q(b^1,\dots,b^N) g dz.$$

关于 q_R 的前一个公式很容易推出以下结论：

$$\forall \tilde{b} \in B(K) \qquad \tilde{q}_R(\tilde{b}) = \int q(b^1,\dots,b^N) \tilde{b} dz.$$

现在考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} B(K) \otimes_B B(K) & \xrightarrow{\int b^j \otimes 1 \cdot dz} & B(K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{x}_R^j \tilde{q}_R} & \swarrow{\scriptstyle \tilde{q}_R} & \\ B & & \end{array}$$

其中上方箭头由以下内容描述

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \int_z (b^j \alpha) \otimes \beta dz.$$

2这自然延拓到完备化 $B(K)\otimes_B B(K)$，而该交换图的交换性证明了

$$\big((\tilde{x}_R^j)_{(-1)}\tilde{q}_R\big)(g)=\tilde{q}_R\bigg(\int\frac{b^j\otimes g}{z-w}dz\bigg)=\tilde{q}_R(b^jg)=\int q(b^1,\dots,b^N)b^jgdz.$$

其中，第二个等式由推论 2.5.3 得出，因为 $b^j\in B(R)$；第三个等式则由对 $\tilde{q}_R$ 的先前描述得出。□

现在我们可以证明，若 X 是 A 上的仿射有限型概形，则函子 J^RX 可由 A 上的一个概形表示。证明 J_l^RX 可表且为有限型的过程完全类似，这里从略。设 $X=\mathrm{Spec}\ A[x^j]/(g^l)$，其中 $\{g^l\}_l\in A[x^j]$（A 是诺特的）。令

$$j:X\hookrightarrow\mathbb{A}_A^N$$

为相应的闭浸入。容易看出，J^RX 的 B 点对应于满足如下条件的 N 元组 $(b^1,\dots,b^N)\in B(R)^N$：对任意 g_l，都有 $g_l(b^1,\dots,b^N)=0$。后者是 $B(R)$ 的一个元素。根据我们对 $B(R)$ 的描述，很容易得出

$$g^l(b^1,\dots,b^N)=0\iff\int g^l(b^1,\dots,b^N)\epsilon_{i,k}dz=0\quad\forall j,\forall k<0.$$

但右边正是我们在定义 5.2.1 中定义的函数 $g_{i,k}^l$ 在 $(b^1,\dots,b^N)$ 上的取值。这就得到了以下命题。

命题 5.2.3. 设 X 是一个有限型仿射概形，其定义在 A上，记 $X=$谱 $A[x^j]/(g^l)$。那么函子 J^RX（分别地，J_l^RX）可由一个概形（分别地，由一个定义在 A 上的有限型概形）表示，并且自然映射

$$J^Rj:J^RX\to J^R\,\mathbb{A}_A^N\qquad(\textit{resp.}\ J_l^Rj:J_l^RX\to J_l^R\,\mathbb{A}_A^N)$$

是一个闭浸入。特别地，J^RX 可描述如下

$$J^RX=\mathrm{Spec}\,\frac{A[x_{i,k}^j]_{j,k<0}}{(g_{i,k}^l:k<0)}.$$

由此描述可知，对于定义在 A 上的有限型仿射概形 X，我们有

$$A[J^RX]=\bigcup_{l\geq0}Im(A[J_l^RX]\to A[J^RX])$$

既然我们已经证明了可表性，现在可以陈述以下一个非常有用的推论。

推论 5.2.4. 设 X 是一个定义在 A 上的有限型仿射概形。若 X 光滑，则对任意正整数l，概形 J_l^RX 在 A 上光滑；特别地，$A[J_l^RX]$ 在 A 上平坦。

证明。由于 X 在 A 上光滑，因此也是形式光滑的。这很容易推出函子 J_l^RX也都是形式光滑的。由于它们都可表为 A 上的有限型概形，因此它们也是光滑的。□

我们还需要最后一个引理，用来描述齐次多项式在同构 $\cdot\,\varphi^n : J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}^N_A \to J^R\,\mathbb{A}^N_A$下的表现。

引理 5.2.5. 设 $p \in A[\mathbb{A}^N_A]$ 是一个次数为 d 的齐次多项式。那么在同构下

$$(\cdot\,\varphi^n)^* : A[J^R\,\mathbb{A}^N_A] \to A[J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}^N_A]$$

函数 $p_{j,k}$ 映射为函数 $p_{j,k+dn}$。

证明. 这由引理 3.1.12 得出。我们对次数 d 进行归纳证明： p 取值域 $A[J^R\,\mathbb{A}^N_A]$被映到$A\left[J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}^N_A\right]$ 取值域 $\varphi^{dn}p_K$，这与引理中的陈述等价。对于 $d = 1$，断言显然成立。为了证明对于 $d+1$的情形，在已知断言对 d 成立的情况下，只需注意到，由于交换域的 (-1)-乘积是交换的，根据引理 3.1.12，可知它是 K-双线性的。 □

5.3 开浸入

本节研究函子 J^R 在开浸入下的行为。我们首先研究从喷射概形到基概形 X 的一些自然投影映射。

定义 5.3.1. 存在自然的投影映射

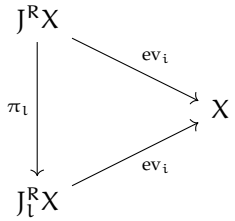
$$ev_i : J^RX \to X, \qquad ev_i : J^R_l X \to X,$$

d按函子性定义如下。对于任意 A 代数 B，考虑环之间的 B-线性映射

$$\widetilde{ev_i} : B(R) \to B \quad \text{and} \quad B(R)/(\varphi^l), \to B \qquad z \mapsto a_i.$$

我们将 ev_i 定义为映射 $J^RX \to X$（分别为 $J^R_l X \to X$），它由 $\widetilde{\ }ev_i$通过函子性得到。

投影 ev_i 可理解为令 $z = a_i$。它们是经典投影 $JX \to X$的类似物。注意，它们构成自然的交换图



引理 5.3.2. 以下结论成立：

1. 若 U 是 X 的开子概形，则

$$J^R_{\leq n}U = \bigcap_i ev_i^{-1}(U).$$

特别地，如果 $J^R_l X$ 可表，那么 $J^R_l U$ 也可表，且它是$J^R_l X$的一个开子概形。

2. 如果 X 是一个仿射概形，且 $U = D(g)$ 是一个主开子集，那么

$$J^R U = \pi_1^{-1} J^R_{\leq 1} U = \bigcap_i \mathrm{ev}_i^{-1}(U).$$

证明。 我们先证明 (1)。由于 $U \to X$ 是一个开浸入，我们可以将 U 视为 X的子函子，因此可以将 $J^R U$ 视为 $J^R X$的子函子。显然，函子之间的浸入$J^R_{\leq 1} U \to J^R_{\leq} X$ 可经由

$$J^R_l U \to \bigcap_i \mathrm{ev}_i^{-1}(U).$$

反过来，考虑一个 $\bigcap_i \mathrm{ev}_i^{-1}(U)$的 B-值点。它由一个映射 $\mathrm{Spec}\ B(R)/(\varphi^l) \to X$构成，使得对每个 i，都存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{谱}\ B(R)/(\varphi^l) & \longrightarrow & X \\ \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{ev}_i}^*} & & \uparrow \\ \text{谱}\ (B) & \longrightarrow & U \end{array}$$

我们需要证明存在一个分解

$$\begin{array}{ccc} \text{谱}\ B(R)/(\varphi^l) & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \uparrow \\ & & U \end{array}$$

为此，只需证明 $B(R)/(\varphi^l)$ 的每个素理想在 U 中都有像。若能证明映射 $\widetilde{\ }\mathrm{ev}_i^* : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ B(R)/(\varphi^l)$ 是联合满射，这一点便显而易见。我们将问题归结为证明：对于任意素理想 $\mathfrak{p} \in B(R)/(\varphi^l)$，都存在一个指标 i，使得$z - a_i \in \mathfrak{p}$。这显然成立，因为对于任意素 $\mathfrak{p}$，$\prod(z - a_i) = \varphi \in \mathfrak{p}$ 是幂零元。

现在证明第 2 点。设 $X = \mathrm{Spec}\ S$ 是一个仿射概形，$U = D(g)$ 是由某个 $g \in S$ 定义的主开子集。那么 U 的点函子可描述如下:

$$U(B) = \{\chi : S \to B \ : \chi(g) \in B^*\} \subset X(B).$$

现在回想一下，根据完备化的标准结果，元素 $x \in B(R)$ 可逆，当且仅当它在 $B(R)/(\varphi)$ 中的像也可逆。由此可得:

$$\begin{aligned} J^R U(B) = U(B(R)) &= \{\chi : S \to B(R) \ : \chi(g) \in B(R)^*\} \\ &= \{\chi : S \to B(R) \ : \overline{\chi}(g) \in \big(B(R)/(\varphi)\big)^*\} = \pi_1^{-1}\big(J^R_{\leq 1} U\big)(B), \end{aligned}$$

其中 $\overline{\chi}$ 是 χ 与自然投影 $B(R) \to B(R)/(\varphi)$ 的复合。证明至此结束。

□

5.4 基变换

本节我们研究通过任意映射 Spec $k \to$ Spec A 进行基变换时， R-喷射概形的性质。

备注 5.4.1. 注意，给定任意域值点 $A \to k$，元素 a_i 会自然地按照等价关系 $a_i \sim a_j$ 划分，该等价关系由 k中的相等关系诱导。任意两个不属于同一等价类的元素之差显然在 k中可逆。

引理 5.4.2. 设 $A \to k$ 如前，并假设 B 是一个 k-代数，用 J 表示前一条备注中引入的 a_i的划分。则

$$B(R_n) \simeq \prod_{j \in J} B[[z_j]].$$

这里 z_j 表示 $z - a_i$，其中 a_i 是 j的第 - 个划分中的任意元素。

证明. 设 d_j 是 j的第 - 个划分中的 a_i 的个数。由中国剩余定理可得

$$\frac{B[z]}{\varphi_n^N} \simeq \prod_{j \in J} \frac{B[z]}{(z - a_j)^{N d_j}},$$

其中 a_j 是 j的第 - 个划分中的任意元素。要证明该引理，只需对两边取极限。

□

前面的引理有如下推论。

命题 5.4.3. 设 $A \to k$ 是任意映射。 J 为前面引入的 a_i 的划分，且 X 为任意概形或 A 代数的函子。那么基变换 $(J^R)_k$

$$\begin{array}{ccc} (J^R X)_k & \longrightarrow & J^R X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{谱 } k & \longrightarrow & \text{谱 } A \end{array}$$

与其典范同构

$$(J^R X)_k = \prod_{j \in J} (JX)_k$$

证明。 作为一个函子， $(J^R X)_k$ 被描述为将 $J^R X$ 限制到子范畴 $\mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Alg}_A$。它将任意结构来自复合 $A \to k \to B$的 A-代数 B 作为输入。根据前述命题

$$(J^R X)_k(B) = X(B(R)) = X\Big(\prod_{j \in J} B[[z_j]]\Big) = \prod_{j \in J} X\big(B[[z_j]]\big) = \prod_{j \in J} JX(B)$$

□

5.5 不变量

根据 J^R 的函子性，如果给定一个定义在 A上的群概形 G，则 R-Jet $J^R G$ 自然地是一个群函子。特别地，如果 G 作用于 X，则 $J^R G$ 在 $J^R X$ 上有一个自然作用；特别地，我们得到 $J^R G(A)$（即 $J^R G$ 的 A 点）对函数环 $A[J^R X]$的作用。类似地，如果 $\mathfrak{g}$是 G 的李代数，则 $J^R \mathfrak{g}(A)$ 通过导子对 $A[J^R X]$有一个诱导作用。

我们将需要以下关于这些作用的备注。

备注 5.5.1. 设 G 是一个作用于概形 X 的群概形，令 $\mu : X \times G \to X$ 为定义此作用的态射。对于任意正整数 n，我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} J^R X \times J^R G & \xrightarrow{J^R \mu} & J^R X \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^R_l X \times J^R_l G & \xrightarrow{J^R_l \mu} & J^R_l X \end{array}$$

由此交换图可推得映射

$$A[J^R_l X] \to A[J^R X]$$

是 $J^R G$ 等变的，其中 $J^R G$ 通过投影 $J^R G \to J^R_l G$ 作用于 $A[J^R_l X]$。特别地，这表明 $J^R G$ 对像 $\mathrm{Im}(A[J^R_l X] \to A[J^R X])$ 的作用可通过 $J^R_l G$ 的作用分解。类似的结论也可由 A 点 $J^R G(A)$ 的作用以及李代数 $J^R \mathfrak{g}$ 的作用推出，对于其 A 点 $J^R \mathfrak{g}(A)$ 也同样成立。特别地，若 X 是一个在 A 上有限型的仿射概形，则 $J^R \mathfrak{g}(A)$ 的作用关于自然拓扑是连续的，而 $J^R \mathfrak{g}(A)$ 通过其商 $J^R_l \mathfrak{g}(A)$ 作用于 $\mathrm{Im}(A[J^R_l X] \to A[J^R X])$。

我们将主要把函子 J^R 应用于通过 $A \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$ Spec 的基变换，其中涉及定义在 $\mathbb{C}$上的概形。若 X 是一个 $\mathbb{C}$上的概形，我们用 $J^R X = J^R(X_A)$ 表示将 R-Jet 函子应用于 X的基变换。

我们关注以下情形。设 $\mathfrak{g}$ 是一个来自线性代数群 G的 $\mathbb{C}$上的单李代数。存在 G 在对偶 $\mathfrak{g}^*$上的典范作用，即余伴随作用。以下定理归功于 Kostant [Kostant, 1963]。

定理 5.5.2. 存在代数独立的齐次多项式 $P^i \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$，满足 $i \in \{1 \dots l\}$，其中 $l = $秩 $\mathfrak{g}$，使得

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{G(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[P^i].$$

我们用 $\mathcal{P} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[P_i]$ 表示，它带有一个自然的 G-不变态射 $\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathcal{P}$；根据 Kostant 的一个定理，该态射有一个截面 $\sigma : \mathcal{P} \to \mathfrak{g}^*$。

众所周知，这一结果可以推广到喷射概形。下述定理由 A. Beilin- son 和 V. Drinfeld [Beilinson 和 Drinfeld, 1991]提出。

定理 5.5.3。 不变函数代数 $\mathbb{C}[J\mathfrak{g}^*]^{J\mathfrak{g}(\mathbb{C})}$ 等于 $\mathbb{C}[J\mathcal{P}]$，通过包含映射$J\pi^* : \mathbb{C}[J\mathcal{P}] \to \mathbb{C}[J\mathfrak{g}^*]$。

本节的目标是将前面的定理推广到我们的 R-喷射概形情形。考虑前面的设定

$$\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathcal{P},$$

并考虑此映射关于环 A 的基变换。

$$\pi_A : \mathfrak{g}_A^* \to \mathcal{P}_A .$$

现在我们可以应用函子 J^R，得到一个 $J^R G$ 等变映射

$$J^R\pi : J^R \mathfrak{g}^* \to J^R \mathcal{P} .$$

这里我们省略下标以简化记号。由于 π 有一个截面 σ，由函子性容易推出 $J^R\pi$ 有一个截面 $J^R\sigma$。

命题 5.5.4. 映射 $J^R\pi^* : A[J^R \mathcal{P}] \to A[J^R \mathfrak{g}^*]$ 是单射，并诱导出一个同构

$$A[J^R \mathcal{P}] = A[J^R \mathfrak{g}^*]^{J^R \mathfrak{g}(A)}.$$

为证明这一点，我们首先需要关于有限 jet 概形的若干引理。

Lemma5.5.5. 设 l 是一个正整数。考虑 $J_l^R G$ 在 $J_l^R \mathfrak{g}^*$ 上的作用。以下结论成立 s

$$A[J_l^R \mathcal{P}] = A[J_l^R \mathfrak{g}^*]^{J_l^R G}.$$

证明。 注意，根据引理 5.3，2 $J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}$ 是 $J_l^R \mathfrak{g}$的一个开子概形，而后者由于 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathbb{A}^N$同构，因此是一个整概形。特别地，映射 $A[J_l^R \mathfrak{g}^*] \to A[J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}]$ 是单射。由于 G 的作用自然限制为对 $\mathfrak{g}^*_{reg}$ 的作用，我们可以归结为证明】【。

$$A[J_l^R \mathcal{P}] = A[J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}]^{J_l^R G}.$$

这是因为根据上面的讨论，我们已经有了自然包含

$$A[J_l^R \mathcal{P}] \subset A[J_l^R \mathfrak{g}^*]^{J_l^R G} \subset A[J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}]^{J_l^R G}.$$

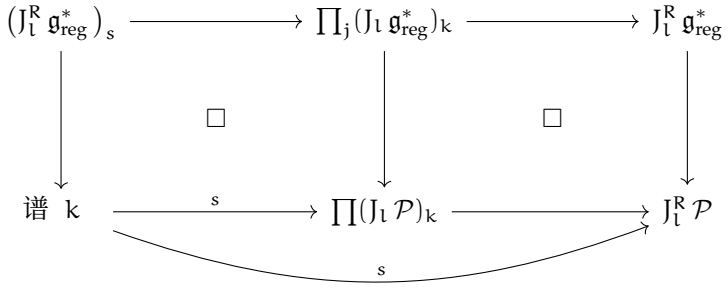
我们将使用 [Mumford 等人的命题 0.2， 1994]。该命题证明，给定两个正规诺特 S 概形 X 和 Y，以及一个在 S 上普遍开且有限型的群概形 H，它作用于 X，并且存在一个 H 不变映射 $\pi : X \to Y$，使得每个几何纤维至多包含一个唯一的 H轨道，则 $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_X(X)^H$。

我们将此命题应用于其中 S = 谱 A、 $X = J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}$、 $Y = J_l^R \mathcal{P}$ 和 $H = J_l^R G$。

$J_l^R \mathcal{P}$ 显然是正规的诺特概形，因为它与 $\mathbb{A}_A^N$ 同构； $J_l^R \mathfrak{g}^*_{reg}$也是如此，因为它是正规诺特概形的开子概形。我们之前已证明， $J_l^R G$ 是 A 上的有限型概形，而 $J_l^R G$ 在 A 上光滑这一事实（推论 5.2.4 ）表明它是普遍开的。剩下要证明的只有几何纤维至多是单个 $J_l^R G$- 轨道。

为此，我们将使用基变换的描述以及以下关键事实（例如可见于 [Frenkel, 2007], 定理 3.4.2）：喷射概形 $J_l \mathfrak{g}^*_{reg} \to J_l \mathcal{P}$ 的经典映射的几何纤维至多由单个 $J_l G$ 轨道组成。

现在考虑一个几何点 $s:\text{谱 } k \to J_l^R\mathcal{P}$，自然地， k 是一个 A-代数。给出 $J_l^R\mathcal{P}$ 的一个 k点，等价于给出 $\left(J_l^R\mathcal{P}\right)_k$的一个 k 点；根据命题 5.4.3，后者自然同构于 $\prod_i(J\mathcal{P})_k$。我们有如下交换图



这表明几何纤维 $\left(J_l^R\mathfrak{g}^*_{reg}\right)_s$ 同构于左侧方块的纤维。由此可知，$\left(J_l^R\mathfrak{g}^*_{reg}\right)_s$ 也是乘积映射 $\prod(J\mathfrak{g}^*_{reg})_k \to \prod(J\mathcal{P})_{\underline{k}}$的一个几何纤维；根据经典情形，该映射的纤维至多是单个 $(J_lG)_k$ 轨道。

□

命题 *5.5.4* 的证明。 单射性源于截面 $J^R\sigma$的存在。此外，由于映射 $J^R\pi$ 按构造具有 J^RG 不变性，我们得到一个自然的包含

$$A[J^R\mathcal{P}] \subset A[J^R\mathfrak{g}^*]^{J^R\mathfrak{g}(A)}.$$

为证明满射性，取一个元素 $x \in A[J^R\mathfrak{g}^*]^{J^R\mathfrak{g}(A)}$。由 $A[J^R\mathfrak{g}^*] = \bigcup A[J_l^R\mathfrak{g}^*]$ 这一事实可知，存在 l 使得 $x \in A[J_l^R\mathfrak{g}^*]$。此外，由备注 5.5.1 可知

$$x \in A[J_l^R\mathfrak{g}^*]^{J_l^R\mathfrak{g}(A)}.$$

现在只需证明， $A[J_L^R\mathfrak{g}^*]$ 的任意 $J_l^R\mathfrak{g}(A)$ 不变元也是 J_L^RG 不变元。由引理 5.5.5，我们得到 $x \in A[J_l^R\mathcal{P}] \subset A[J^R\mathcal{P}]$，因此这就证明了该命题。

令 Q 为 A 的分式域， $\overline{Q}$ 为其代数闭包。 $A[J_l^R\mathfrak{g}^*]$ 是自由的，因此其 A子模 $A[J_l^R\mathfrak{g}^*]^{J_l^R\mathfrak{g}(A)}$ 是无挠的，故可嵌入

$$A[J_l^R\mathfrak{g}^*]^{J_l^R\mathfrak{g}(A)} \subset \left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)_Q^{J_l^R\mathfrak{g}(A)}.$$

其中 $\left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)_Q$ 是张量积 $\left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)\otimes_A Q$。根据命题 5.4.3，这自然同构于 $Q[\prod(J_l\mathfrak{g}^*)_Q]$；此外，由于 $J_L^R\mathfrak{g}(A)$ 在 A上有限，我们得到

$$\left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)_Q^{J_l^R\mathfrak{g}(A)} = \left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)_Q^{(J_l^R\mathfrak{g}(A))\otimes Q} = \left(A[J_l^R\mathfrak{g}^*]\right)_Q^{\prod(J_l\mathfrak{g})(Q)} = Q\left[\prod(J_l\mathfrak{g}^*)_Q\right]^{\prod(J_l\mathfrak{g})(Q)}.$$

其中第二个等式由等式 $J_l^R\mathfrak{g}(A)\otimes Q = \prod(J_l\mathfrak{g})(Q)$ 结合基变换论证得出。现在，根据 Q 线性性，我们可以从 Q 转到其代数闭包 $\overline{Q}$，从而得到一个浸入

$$A[J_l^R\mathfrak{g}^*]^{J_l^R\mathfrak{g}(A)} \subset \overline{Q}\left[\prod(J_l\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}\right]^{\prod(J_l\mathfrak{g})(\overline{Q})}.$$

根据关于特征为 0 的代数闭域上的光滑连通代数群的标准定理，后者等于

$$\overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]^{\prod(J_l\,\mathfrak{g})(\overline{Q})}=\overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]^{\prod(J_lG)(\overline{Q})}=\overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]^{\prod(J_lG)_{\overline{Q}}}.$$

J_l^RG 在 $A[J_l^R\,\mathfrak{g}^*]$ 上的作用可写成 Hopf代数 $A[J_l^RG]$的余作用，$\prod(J_lG)_{\overline{Q}}$作用于 $\overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]$的情形也是如此。不变元恰好是那些通过余作用映射被映到 $x\otimes 1$ 的 x。我们有以下余作用与包含映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} A[J_l^R\,\mathfrak{g}^*] & \longrightarrow & A[J_l^R\,\mathfrak{g}^*]\otimes_A A[J_l^RG] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}] & \longrightarrow & \overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]\otimes_{\overline{Q}}\overline{Q}[\prod(J_lG)_{\overline{Q}}] \end{array}$$

根据上述讨论，第一个竖直箭头是单射；第二个竖直箭头也是单射，因为 $A[J_l^R\,\mathfrak{g}^*]$ 作为 A 模是自由的，而 J_l^RG 的光滑性（因而在 A 上平坦，进而无挠）意味着$A[J_l^RG]\subset\overline{Q}[\prod(J_lG)_{\overline{Q}}]$。考虑 $x\in A[J_l^R\,\mathfrak{g}^*]^{J_l^R\,\mathfrak{g}(A)}$，我们证明了 x 在 $\overline{Q}[\prod(J_l\,\mathfrak{g}^*)_{\overline{Q}}]$ 中的像对于群的作用是不变的，因此它必定经由下方的水平映射被映到 $x\otimes 1$。于是，根据第二个竖直箭头的单射性可知，x 必定经由上方的水平映射被映到 $x\otimes 1$，从而证明 x 是 J_l^RG 不变的。 □

现在回顾一下，在定义 5.2.1 中，我们定义了一个取值于 $A[J^R\,\mathfrak{g}^*]$ 的 K 场 p_R，它与任意多项式 $p\in A[\mathfrak{g}^*]$ 相关联；特别地，对于各种 P^i，我们可以关联场 P_K^i。我们记作$P^i_{j,\,k}=P^i_R(\epsilon_{j,k})$，它们是 $A[J^R\,\mathfrak{g}^*]$ 中的元素。

推论5.5.6. 元素 $P^i_{j,\,k}$ 在 $k<0$ 下代数独立，且满足以下等式

$$A[J^R\,\mathfrak{g}^*]^{J^R\,\mathfrak{g}(A)}=A[P^i_{j,k}]_{k<0}.$$

证明. 结合命题 5.2.2 与命题 5.5.4 即得。 □

最后注意到，该同构

$$(\cdot\ \varphi^n)^*:A[J^R\,\mathbb{A}_A^N]\to A[J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}_A^N]$$

是 $J^R\,\mathfrak{g}(A)$ 等变的。因此，我们可以联系两边的不变环。引理 5.2.5 给出了如下蕴含关系。

推论5.5.7. *[引理 5.2.5]* 的不变代数 $A[J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}_A^N]^{J^R\,\mathfrak{g}(A)}$ 与自由多项式代数同构

$$A[J^K_{\geq n}\,\mathbb{A}_A^N]^{J^R\,\mathfrak{g}(A)}=A[P^i_{j,k_i}]_{k_i<d_in},$$

其中 d_i 是 P^i的次数。

5.6 中心的代数描述

现在我们可以证明所构造的映射

$$\tilde{U}_{K_n}\left(\mathbb{C}[\mathrm{Op}^{L_G}(D)]\right) \to Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n))$$

is 一个同构。为使下文记号更简洁，我们将 $Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) \overset{\text{def}}{=} Z(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n))$ 称为.....我们需要以下关于过滤交换代数的结果。

引理 5.6.1。设 S 是交换环 A 上的交换代数，并带有一个 A-线性滤子。假设存在元素 $x_i \in S$，使得它们在伴随分次代数中的符号 $\overline{x_i} \in \mathrm{gr}\ S$ 满足

$$\mathrm{gr}\ S = A[\overline{x_i}].$$

那么元素 $x_i \in S$ 代数独立，并且作为 A 代数生成 S：

$$S = A[x_i].$$

设 U_N 是 $\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 中由 $\mathfrak{g} \otimes (R_n f^N)$ 生成的左理想，这些理想定义了完备包络代数上的拓扑。记 $I_N = Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) \cap U_N$，这是中心的一个双边理想。显然，中心是 $\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)$ 的闭子代数，因此它是完备的。特别地，我们有

$$Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) = \varprojlim_N \frac{Z_n(\hat{\mathfrak{g}})}{I_N}$$

因此，我们将研究商代数 $Z_n(\mathfrak{g})/I_N$

备注 5.6.2. 空间 $\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)/U_N$ 具有由 PBW 过滤诱导的自然滤子。不难看出，存在一个 $J^R\mathfrak{g}(A)$-等变自然同构

$$\mathrm{gr}\left(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)/U_N\right) = A[J^K_{\geq N}\mathfrak{g}^*].$$

特别地，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{gr}\left(Z_n(\hat{\mathfrak{g}})/I_N\right) & \hookrightarrow & A[J^K_{\geq N}\mathfrak{g}^*]^{J^R\mathfrak{g}(A)} & \xrightarrow[\simeq]{} & A[P^i_{j,k_i}]_{k_i<Nd_i} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{gr}\left(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)/U_N\right) & \xrightarrow{=} & A[J^K_{\geq N}\mathfrak{g}^*] & &
\end{array}$$

命题 5.6.3. 上述描述的映射

$$\mathrm{gr}\left(Z_n(\hat{\mathfrak{g}})/I_N\right) \hookrightarrow A[J^K_{\geq N}\mathfrak{g}^*]^{J^R\mathfrak{g}(A)} = A[P^i_{j,k_i}]_{k_i<Nd_i}$$

是一个同构。

证明。只需证明该映射是满射，从而证明各个P^i_{j,k_i}属于中心的像；等价地，证明存在元素$P^i_{j,k_i} \in Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$，使它们在$\mathrm{gr}\,(Z_n(\hat{\mathfrak{g}})/I_N)$中的符号等于$P^i_{j,k_i}$。

我们断言，元素$Y_{\mathrm{can}}(P^i_{-1})(\epsilon_{j,k}) \in Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$（它们是元素$P^i_{-1}\epsilon_{j,k} \in \tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}(D)])$的像）的符号等于$P^i_{j,k}$。回想一下，按照构造，元素$P^i_{-1}$属于$V^{\kappa_c}(\mathfrak{g})$，且它们在$\mathrm{gr}\ V^{\kappa_c}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[J\,\mathfrak{g}^*]$中的伴随符号恰好是多项式$P^i$。

更精确地说，在为$\mathfrak{g}$选定一组基x_a后，我们可以写成$P^i = \sum_\alpha \lambda_a x_{a_1}\dots x_{a_d}$其中$d = d_i$是齐次多项式$P^i$的次数，$a = (a_1,\dots,a_d)$是一个$d$元指标组。于是，除去排序以及低于PBW次数的项，$P^i_{-1}$可以表示为

$$P^i_{-1} \sim \sum_\alpha \lambda_\alpha x_{a_1,-1}\dots x_{a_d,-1}\,|0\rangle\,.$$

按照构造，$Y_{\mathrm{can}}(P^i_{-1})$是通过取$P^i_{-1}$的表达式，作代换$x_a \mapsto \overline{x_a}$（其中$\overline{x_a}$是与$x_a \in \mathfrak{g}$相关联的取值于$\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)$的$K_n$场），再对这些场应用$(-1)$-乘积得到的；顶点代数$V^{k_c}(\mathfrak{g})$中出现的是普通的$(-1)$-乘积。直接计算可见，利用$\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)/U_N$中对$(-1)$-乘积的显式描述——它是对我们的场求值所得乘积的有限和（例如参见引理3.1.9的证明）——可知，(-1)-乘积与取伴随分次空间相交换。由此可得，$P^i_{-1}\epsilon_{j,k}$在$\mathrm{gr}\,(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_n)/U_N) = A[J^K_{\geq N}\,\mathfrak{g}^*]$中的像等于$P^i_K(\epsilon_{j,k})$，其中$P^i_K$是定义5.2.1中定义的场。再由命题5.2.2可得，$Y_{\mathrm{can}}(P^i_{-1})(\epsilon_{j,k})$的符号等于$P^i_{j,k}$。

□

推论 5.6.4。令$\overline{P}^i_{j,k} = Y_{can}(P^i_{-1})(\epsilon_{j,k})$。那么对于每个$N \geq 0$

$$\frac{Z_n(\hat{\mathfrak{g}})}{I_N} = A\left[\overline{P}^i_{j,k_i}\right]_{k_i < d_i N}.$$

特别地

$$Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) = \varprojlim_N \frac{A\left[\overline{P}^i_{j,k}\right]_{k\in\mathbb{Z}}}{\left(\overline{P}^i_{j,k_i} : k_i \geq d_i N\right)}.$$

证明。这直接由以下事实以及命题5.6.3和引理5.6.1的结合得出：$Z_n(\hat{\mathfrak{g}}) = \varprojlim_N Z_n(\hat{\mathfrak{g}})/I_N$。

□

推论 5.6.5。我们构造的映射

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}(D)]) \to Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$$

是一个同构。

证明。这很容易由以下事实推出：根据命题4.2.3，代数$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}(D)]$与$Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$有相同的描述。事实上，$\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}](D)$可以解释为由阿贝尔有限维李代数$P = \mathrm{Span}(P^i_{-1})$生成的阿贝尔仿射顶点代数。由命题4.2.3可得

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g}}(D)] = \varprojlim_N \frac{A\left[P^i\epsilon_{j,k}\right]_{k\in\mathbb{Z}}}{\left(P^i\epsilon_{j,k_i} : k_i \geq d_i N\right)}$$

这里分次的平移是因为李代数 P 实际上带有分次，且 $\deg P^i_{-1} = d_i$；这一分次参与了代数 $\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}^L_{\mathfrak{g}}(D)])$的构造（见注 4.2.4）。最后，根据命题 5.6.3，元素 $P^i\epsilon_{j,k}$ 恰好映射为 $\overline{P}^i_{j,k}$，证明至此完成。

□

6 与 Opers 空间上的函数代数的识别

6.1 关于 Opers 的一般性讨论

本节致力于将完备的 A-代数 $\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D)])$ 识别为形式 n-点圆盘 $D_n = \mathrm{Spec}\ K_n$ 上的 $\mathfrak{g}$-Opers 空间的函数代数。

从现在起，$\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的一个固定单李代数，G 是与之关联的伴随型群。我们还固定一个 Cartan 子代数和一个 Borel 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$，并分别将其对应的子群称为 H 和 B，它们都是 G 的子群。$\mathfrak{h}$ 的选取确定了 $\mathfrak{g}$ 的根集 Φ，而 $\mathfrak{b}$ 的选取则确定了优选的单根基 $\Delta \subset \Phi$。我们将记作 $\Delta = \{\alpha_i\}$，并将 e_i、h_i、f_i 称为 $\mathfrak{g}$ 的一组标准生成元。我们将 $p_{-1} = \sum f_i$ 称为……，并将 $\rho^\vee$ 称为 $\mathfrak{h}$ 中诱导主分次的元素（即对任意根 α，$(\mathrm{ad}\ \rho^\vee)_{|\mathfrak{g}_\alpha} = \mathrm{ht}(\alpha)$）。众所周知，选定 p_{-1} 和 $\rho^\vee \in \mathfrak{h}$ 后，$\mathfrak{g}$ 内存在唯一的 $\mathfrak{sl}_2$ 三元组 $\{p_{-1}, 2\rho^\vee, p_1\}$。

我们将 $V^{\mathrm{can}} = \mathfrak{g}^{p_1}$ 记为，并选取一组按权排序的齐次元素基 $v_i \in V^{\mathrm{can}}_i$（使得 v_1 的次数为 1），并将 d_i 记为 v_i 的次数。众所周知，自然数 $d_i + 1$ 恰好是生成经典包络代数中心的多项式 P^i 的齐次次数。

我们首先回顾 $\mathfrak{g}$-Oper 的定义，主要遵循 [Beilinson 和 Drinfeld，2005],并针对我们感兴趣的空间 $D_n = $ 谱 K_n。由于我们希望赋予 Oper 空间一种几何结构，从而描述其点函子，因此我们将立即引入在任意 A-代数 S 上的 S Opers 族这一概念。

定义 6.1.1. S 族 $\mathfrak{g}$-Opers 在 D_n 上是由 P 给出的数据：一个在$(D_n)_S = $谱 $S(K_n)$ 上的平凡 G-丛，带有一个平凡的 B-约化 P_B。再配备一个联络 ∇，使得在任意同构 $P_B \simeq (D_n)_S \times B \subset (D_n)_S \times G \simeq P$ 下，它都具有如下形式

$$\nabla = d + \left(\sum_i f_i \otimes \psi_i + v(t)\right)dt \quad \text{with} \quad \psi_i \in (S(K_n))^* \text{ and } v(t) \in \mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{C}} S(K_n).$$

Opers 的同构有一个显然的概念。更具体地说，当两个 Oper ∇、∇' 写成上述形式时，它们同构当且仅当存在一个截面$b \in B(S(K_n))$，使得

$$b \cdot \nabla = \nabla',$$

其中 B 的作用由所谓的 规范变换作用给出

$$b \cdot \big(d + A(t)dt\big) = d + \big(\mathrm{Ad}_b(A(t))\big)dt - db \cdot b^{-1}.$$

以下引理 是基础性的，其原始版本可见于 [Drinfeld 和 Sokolov，1984] .

引理 6.1.2. 给定 ∇，存在一个 $\mathfrak{g}$-*Opers* 的 S 族，其中有唯一的元素 $b \in B(S(K_n))$，使得 t

$$b \cdot \nabla = d + \big(p_1 + c(t)\big)dt, \quad \textit{with} \quad c(t) \in V^{\textit{can}} \otimes_{\mathbb{C}} S(K_n).$$

这将称为 *Oper* ∇的典范形式 。

证明。 首先，可以取 ∇ 的一个代表元，使其具有如下形式

$$\nabla = d + \left(\sum_i f_i \otimes \psi_i + v(t) \right) dt.$$

容易验证，由于 G 是伴随型，因此存在唯一的 $h \in H(S(K_n))$ 和唯一的$v_1(t) \in \mathfrak{b} \otimes S(K_n)$，使得 $h \cdot \nabla$ 具有以下形式:

$$h \cdot \nabla = d + \big(p_{-1} + v_1(t)\big)dt.$$

现在我们需要证明，存在唯一的元素 $U \in \mathfrak{n} \otimes K_n$，使得

$$\exp(U) \cdot \Big(d + \big(p_{-1} + v_1(t)\big)dt \Big) = d + \big(p_{-1} + v_2(t)\big)dt,$$

满足 $v_2(t) \in V^{\mathrm{can}} \otimes K_n$。这个证明与 Frenkel 的书 [Frenkel, 2007] 中引理 4.2.2 的证明完全类似。 □

同样的论证也可对 R_n 而非 K_n 进行。一般而言，对于任何秩为 1 的微分模平凡的对象，也都可以如此。我们可以如下定义 Oper 函子:

定义 6.1.3. 我们将具有 n 个奇点的 $\mathfrak{g}$-Opers 函子 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}$ 定义为作用在 A-代数上的函子

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}(S) = \big\{\text{isomorphism classes of } S\text{-families of } \mathfrak{g}\text{-Opers over } D_n\big\}.$$

推论 6.1.4(引理 6.1.2 的推论**).** 标准代表元的构造给出了如下对 A-代数函子的描述 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}$

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}(S) = \big\{ d + (p_1 + v(t))dt : v(t) \in V^{\textit{can}} \otimes S(K_n) \big\}.$$

特别地 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}$ 与函子 $J^K \mathbb{A}^l$ 同构，其中 l 是 $\mathfrak{g}$ 的秩，也就是空间 $V^{\textit{can}}$ 的维数。

与喷射概形的处理类似，选定基 v_i 后，我们可以将一个指标 i 和一个函数 $g \in K_n$ 关联到 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}$ 上的一个函数，我们将其称为 $v_i^*(g)$，定义如下

$$v_i^*(g) : \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n} \to \mathbb{A}^1, \qquad d + \big(p_{-1} + v(t)\big)dt \mapsto \int v_i^*(v(t))g\,dt,$$

其中 v_i^* 表示 V^{can}的基 v_i 的对偶基。根据推论 6.1.4，我们有

$$A[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}] \simeq \widetilde{\mathrm{Sym}}_A(V^{\mathrm{can}} \otimes K_n) = \varprojlim_N \frac{A\big[v_i^*(\epsilon_{j,k})\big]}{(v_i^*(\epsilon_{j,k}) : k \geq N)}.$$

6.2 自同构与李代数的作用

环 K_n 的每个自同构都会改变余切丛选定的平凡化。具体而言，若 $\psi : K_n \to K_n$ 是一个自同构，则使 $\Omega^1_{,K_n/A}{}^{\mathrm{cont}}$ 平凡化的新坐标为$d(\psi(t))$。这一构造在联络空间上诱导出自然作用，进而在 Opers 空间上诱导出自然作用。

其实现如下。考虑一个连续的 S 自同构 $\varphi : 谱\ S(K_n) \to 谱\ S(K_n)$，并令 $\psi : S(K_n) \to S(K_n)$为相应的环 $S(K_n)$ 的连续自同构。令 $s = \psi(t)$考虑一族 S 的 Opers ∇，它们相对于坐标 s处于典范形式。

$$\nabla = d + \big(p_{-1} + v(s)\big)ds, \quad \text{with} \quad v(s) \in V^{\mathrm{can}} \otimes_{\mathbb{C}} S(K_n).$$

则在同构 φ 下，联络 ∇可写为

$$\nabla = d + \big(p_{-1} + v(\psi(t))\big)d(\psi(t)) = d + \big(p_{-1} + v(\psi(t))\big)\partial_t(\psi(t))dt.$$

这里，略微滥用符号时，我们写 $v(\psi(t))$，意指 $\psi\big(v(s)\big)$，其中 ψ 作用于 $V^{\mathrm{can}} \otimes S(K_n)$的第二个因子。为了将 Oper 恢复为典范形式，只需施加 $g = \exp\big(\frac{1}{2}\frac{\partial_t^2\psi(t)}{\partial_t\psi(t)}p_1\big)\rho^\vee(\partial_t\psi(t))$ 的规范作用，如 [Frenkel 的公式 4.2-5/4.2-8 所示。注意，这样做是有意义的，因为根据推论 2.4.10，函数 $\partial_t\psi(t)$ 是可逆的。

到目前为止所做的一切都具有函子性；考虑 $\mathrm{Aut}\,(K_n)$ 这个取值于A-代数 $S \mapsto \mathrm{Aut}_S^{\mathrm{cont}}(S(K_n))$ 的群函子，我们得到以下命题。

命题 6.2.1. 群函子 $\mathrm{Aut}(K_n)$ 在空间 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}$ 上有一个自然作用；给定 $\psi \in \mathrm{Aut}\,(K_n)(S)$ 和 $\nabla = d + (p_1 + v(t))dt \in \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}(S)$，该作用可描述如下

$$\psi \cdot v_1(s) = v_1(\psi(s))(\partial_t\psi(t))^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_t^3\psi(t)}{\partial_t\psi(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_t^2\psi(t)}{\partial_t\psi(t)}\right)^2\right), \tag{16}$$

$$\psi \cdot v_j(s) = v_j(\psi(s))(\partial_t\psi(t))^{d_j+1} \qquad \textit{for } j > 1. \tag{17}$$

由群函子 $\mathrm{Aut}\,(K_n)$ 的作用，自然得到其李代数 $\mathrm{Der}\ K_n = K_n\partial_t$的作用。

推论 6.2.2. 设 $h\partial_t \in \mathrm{Der}\ K_n$，并设 $v_i^*(g) \in A[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}]$ 为上一节末尾定义的函数。那么，李代数 $\mathrm{Der}\ K_n$ 在 $A[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},n}]$ 的生成元 $v_i^*(g)$ 上的作用如下

$$h\partial_t \cdot v_1^*(g) = -v_1^*(g\partial_t h) + v_1^*(h\partial_t g) - \frac{1}{2}\int(\partial_t^3 h)g\,dt, \tag{18}$$

$$h\partial_t \cdot v_j^*(g) = -d_j v_j^*(g\partial_t h) + v_j^*(h\partial_t g) \qquad \textit{for } j > 1. \tag{19}$$

我们可以将迄今为止所做的一切应用于 R_n，而不是 K_n。注意，在 $n = 1$且 $a_1 = 0$，从而 $A = \mathbb{C}$ 和 $R_n = \mathbb{C}[[t]]$ 的情形下，作用是 $\mathbb{C}[\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(D)]$上的通常作用。记 $v_{i,m}^* = v_i^*(t^m)$（在 $\mathbb{C}[[t]]$ 的情形下，我们只考虑 $m \le -1$），并记 $L_n = -t^{n+1}\partial_t$（在 $\mathbb{C}[[t]]$的情形下，我们只考虑 $n \ge -1$），则

$$L_n \cdot v_{1,-m-1}^* = (n+m+2)v_{1,n-m-1}^* + \frac{1}{2}(n+1)n(n-1)\delta_{n-m,2}\,|0\rangle, \tag{20}$$

$$L_n \cdot v_{j,-m-1}^* = (d_j(n+1) + m + 1)v_{j,n-m-1}^* \qquad \text{for } j > 1. \tag{21}$$

特别是

$$L_n v^*_{1,-1} = \begin{cases} v^*_{1,-2} = T(v^*_{1,-1}) & \text{if } n = -1, \\ 2v^*_{1,-1} & \text{if } n = 0, \\ 3\,|0\rangle & \text{if } n = 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{22}$$

$$L_n v^*_{j,-1} = \begin{cases} v^*_{j,-2} = T(v^*_{j,-1}) & \text{if } n = -1, \\ (d_j + 1)v^*_{j,-1} & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{23}$$

6.3 n 奇点情形下的 Feigin-Frenkel 同构

现在我们可以构造一个 Der K_n-等变自然同构，它建立在 $\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)])$与 $A[Op_{\mathfrak{g},n}]$之间。我们将在最后一节证明，这个同构满足自然因子化性质。

回忆一下，$\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)] = \mathbb{C}[v^*_{i,n}]_{n<0}$，其中 $v^*_{i,\ n}$ 是上一节定义在 $Op_{\mathfrak{g}}(D)$ 上的函数。将 $(\tilde{V}^{can})^*$ 称为 $v^*_{i,\ -1}$的线性张成。由命题 4.2.3 可得

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)]) \simeq \varprojlim_N \frac{A[v^*_{i,-1}\epsilon_{j,k}]}{(v^*_{i,-1}\epsilon_{j,k_i} : k_i \geq N d_i)} \simeq \widetilde{Sym}_A(\tilde{V}^{can} \otimes_{\mathbb{C}} K_n).$$

因此，我们研究的代数具有相同的描述。

命题 6.3.1。 自然同构

$$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)]) \to A[Op_{\mathfrak{g},n}],$$

它在生成元上的映射为 $\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)]) \ni v^*_{i,\ -1}g \mapsto v^*_i(g) \in A[Op_{\mathfrak{g},n}]$，对任意 $g \in K_n$，都是 Der K_n-等变的。

证明。 由于两个空间的描述相同，因此显然上面的映射是一个同构。我们只需验证 Der K_n 等变性。回想一下，Der K_n 在$\tilde{U}_{K_n}(\mathbb{C}[Op_{\mathfrak{g}}(D)])$ 上的作用定义如下

$$(h\partial_t) \cdot (v^*_{i,-1}g) = -\sum_{k \geq -1} \frac{1}{(k+1)!}(L_k v^*_{i,-1})(g\partial_t^{k+1}h).$$

特别地，根据上一截面的公式

$$\begin{aligned} (h\partial_t) \cdot (v^*_{1,-1}g) &= -T(v^*_{1,-1})(gh) - 2v^*_{1,-1}(g\partial_t h) - \frac{1}{2}\,|0\rangle(g\partial_t^3 h) \\ &= -v^*_{1,-1}(g\partial_t h) + v^*_{1,-1}(h\partial_t g) - \frac{1}{2}\,|0\rangle(g\partial_t^3 h), \\ (h\partial_t) \cdot (v^*_{j,-1}g) &= -T(v^*_{j,-1})(gh) - (d_j+1)v^*_{j,-1}(g\partial_t h) = -d_j v^*_{j,-1}(g\partial_t h) + v^*_{j,-1}(h\partial_t g). \end{aligned}$$

该方程右端各项的像恰好是

$$-\nu_1^*(g\partial_t h)+\nu_1^*(h\partial_t g)-\frac{1}{2}\int(\partial_t^3 h)g\,dt=(h\partial_t)\cdot\nu_1^*(g),$$
$$-d_j\nu_j^*(g\partial_t h)+\nu_j^*(h\partial_t g)=(h\partial_t)\cdot\nu_j^*(g)\qquad\text{for } j>1.$$

这表明　生成元上的等变性，因此孔态射是等变的　t.

□

结合命题 6.3.1 和推论 5.6.5，我们得到如下定理。

定理 6.3.2. 存在一个自然的Der K_n-等变同构

$$Z_n(\hat{\mathfrak{g}})=A[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g},n}]$$

7 因子化性质

在最后这一节中，我们将证明 A_n-交换代数 $Z_n(\hat{\mathfrak{g}})$ 和 $A[\mathrm{Op}_{L\mathfrak{g},n}]$ 是 [Beilinson 等人所定义的因子化代数， 2004] 并且定理 6.3.2 中的同构保持因子化结构。由于我们所考虑的代数是完备拓扑代数，我们将使用若干种张量积的完备化。

记号。 在本节中，且仅对于包络代数的张量积或 Opers 空间上的函数代数的张量积，符号 $\hat{\otimes}$ 表示沿朴素和拓扑（定义见引理 2.2.1 之前的讨论）对张量积取完备化。由于我们所处理的代数具有由双边理想或左理想生成的拓扑，因此可以验证，沿朴素和拓扑取完备化后所得的对象具有自然的代数结构。

为了处理因子化性质，我们稍微改变一下记号：给定有限集 I，我们用 $A_I=\mathbb{C}[D^I]=\mathbb{C}[[a_i]]_{i\in I}$ 表示，并按照同样的方式定义完备的 (φ_I)-进环 R_I，再考虑它的局部化 $K_I=(R_I)_{\varphi_I}$。

7.1 K_n 和 $\hat{\mathfrak{g}}_n$的因子化性质

给定一个 A_I 代数 S，回顾 $S(K_I)$的构造；其定义见引理 2.2.1 之前的讨论，即沿右拓扑对张量积 $S\otimes_{A_I}K_I$ 取自然完备化。

给定一个满射 $I\twoheadrightarrow J$，存在一个自然映射 $A_I\to A_J$。特别地， A_J 是一个 A_I-代数，我们可以考虑完备拓扑环 $A_J(K_I)$

另一方面，对于给定的分解 $I=I_1\coprod I_2$，记 $A_{I_1,\,I_2}$ 为环 A_I 关于元素 a_i-a_j 的局部化，其中 i 遍历 I_1，而 j 遍历 I_2。它自然是一个 A_I代数，因此自然地也是一个 A_{I_1},A_{I_2} 代数。

命题 7.1.1. 以下结论成立：

- 对于任意给定的满射 $f:I\twoheadrightarrow J$，存在一个自然同构

$$A_J(K_I)=K_J.$$

与此同构相伴的是一个自然映射限制$_{I\to J}:K_I\to A_J(K_I)=K_J$，我们称之为限制映射。

- 对于任意给定的分解 $I = I_1 \coprod I_2$，存在一个自然同构

$$A_{I_1,I_2}(K_I) = \big(A_{I_1,I_2}(K_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(K_{I_2})\big).$$

  与此同构相伴的是一个自然映射 $e^I_{I_1,\ I_2} : K_I \to A_{I_1,\ I_2}(K_I)$ 以及两个自然映射 $e^I_{I_1} : K_I \to A_{I_1,\ I_2}(K_I) \xrightarrow{\pi_1} A_{I_1,\ I_2}(K_{I_1})$ 和 $e^I_{I_2} : K_I \to A_{I_1,\ I_2}(K_I) \xrightarrow{\pi_2} A_{I_1,\ I_2}(K_{I_2})$，我们称之为展开映射。

- 上述同构与留数和导数相容，其中乘积上的留数定义为各因子上的留数之和。

证明。 利用同构 $S(K_I) = S(R_I)_{\varphi_I}$ 可以证明这一点；该同构对任意 A_I 代数都成立，因此我们只需证明将 K_I 替换为 R_I 后的相应命题。

第一点源于这样一个事实：张量积 $A_J \otimes_{A_I} K_I$ 同构于 K_I 对由满足 $f(i) = f(j)$ 的那些指标对所对应的 $a_i - a_j$ 生成的理想取商。由于这是一个闭理想，$A_J \otimes_{A_I} K_I$ 已经完备，因此只需证明 $A_J(R_I) = R_J$，上述等式便可轻易得出。事实上，我们有

$$A_J(R_I) = \varprojlim_n \frac{A_J[t]}{\varphi^n_{I\to J}},$$

其中 $\varphi_{I\to J} = \prod_{j\in J}(t - a_j)^{|f^{-1}(j)|}$。容易验证，由 $\varphi_{I\to J}$ 诱导的拓扑等价于由 φ_J 生成的拓扑。这就证明了 $A_J(R_I) = R_J$。

和之前一样，我们首先证明 $A_{I_1,\ I_2}(R_I) = A_{I_1,\ I_2}(R_{I_1}) \oplus A_{I_1,\ I_2}(R_{I_2})$。事实上，我们有 e

$$A_{I_1,I_2}(R_I) = \varprojlim_n \frac{A_{I_1,I_2}[t]}{\varphi^n_I}.$$

根据定义，$\varphi_I = \varphi_{I_1}\varphi_{I_2}$；根据 $A_{I_1,\ I_2}$ 的定义，φ_{I_1} 和 φ_{I_2} 的结式在环 $A_{I_1,\ I_2}$ 中可逆。因此，根据关于结式的已知结果，我们有 $(\varphi_{I_1}, \varphi_{I_2}) = A_{I_1,\ I_2}[t]$。最后，由中国剩余定理可知

$$A_{I_1,I_2}(R_I) = \varprojlim_n \frac{A_{I_1,I_2}[t]}{\varphi^n_I} = \varprojlim_n \left(\frac{A_{I_1,I_2}[t]}{\varphi^n_{I_1}} \times \frac{A_{I_1,I_2}[t]}{\varphi^n_{I_2}}\right) = A_{I_1,I_2}(R_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(R_{I_2}).$$

现在注意到，φ_{I_2} 在 $A_{I_1,\ I_2}(R_{I_1})$ 中可逆：事实上，它在 $A_{I_1,\ I_2}[t]/(\varphi_{I_1})$ 中可逆，因为正如前面所指出的，$(\varphi_{I_1}, \varphi_{I_2}) = A_{I_1,\ I_2}[t]$。类似地，$\varphi_{I_1}$ 在 $A_{I_1,\ I_2}(R_{I_2})$ 中可逆。因此我们有等式 $A_{I_1,\ I_2}(K_{I_j}) = A_{I_1,\ I_2}(R_{I_j})_{\varphi_{I_0}}$ 由此可得同构

$$A_{I_1,I_2}(R_I) = A_{I_1,I_2}(R_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(R_{I_2})$$

诱导出一个同构

$$A_{I_1,I_2}(K_I) = A_{I_1,I_2}(R_{I_1})_{\varphi_I} \times A_{I_1,I_2}(R_{I_2})_{\varphi_I} = A_{I_1,I_2}(K_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(K_{I_2})$$

这些同构与导数相容这一点显而易见。至于它们与留数的相容性，则可直接由我们对 K_I 上留数的定义推出：它是各点 $\{a_i\}_{i\in I}$ 上留数之和。

□

K_I 环的因子化性质会诱导 Opers 空间上函数环 $A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]$ 的因子化性质。为简化记号，对于 A_I-代数 B，我们将 $B[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]$ 记作基变换 $B\big(A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]\big)$。

命题 7.1.2。 集合 $I \mapsto A[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]$ 自然地构成一个因子化代数。这意味着

- 对于每个满射 $I \twoheadrightarrow J$，都有一个自然同构

$$A_J[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}] = A_J[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},J}].$$

- 对于每个分解 $I = I_1 \coprod I_2$，都有一个自然同构

$$A_{I_1,I_2}\big(A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]\big) = A_{I_1,I_2}[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_1} \times \mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_2}] = A_{I_1,I_2}[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_1}] \hat{\otimes} A_{I_1,I_2}[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_2}].$$

命题 7.1.3。 完备拓扑环 K_I 的因子化性质传递给李代数 $\hat{\mathfrak{g}}_{K_I,\kappa}$。存在李代数的自然同构

$$\begin{aligned} A_J(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I,\kappa}) &= \hat{\mathfrak{g}}_{K_J,\kappa}, \\ A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I,\kappa}) &= \big(A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_1},\kappa}) \oplus A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_2},\kappa})\big)/\big(\mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2\big). \end{aligned}$$

这些同构延拓到包络代数的完备化，从而得到同构

$$\begin{aligned} A_J\big(\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I})\big) &= \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_J}), \\ A_{I_1,I_2}\big(\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I})\big) &= A_{I_1,I_2}\big(\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_1}})\big) \hat{\otimes} A_{I_1,I_2}\big(\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_2}})\big). \end{aligned}$$

证明。 这些同构

$$A_J(K_I) = K_J \qquad A_{I_1,I_2}(K_I) = A_{I_1,I_2}(K_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(K_{I_2})$$

诱导出自然同构

$$\begin{aligned} A_J(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I,\kappa}) &= \hat{\mathfrak{g}}_{K_J,\kappa}, \\ A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I,\kappa}) &= \big(A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_1},\kappa}) \oplus A_{I_1,I_2}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_{I_2},\kappa})\big)/\big(\mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2\big). \end{aligned}$$

这些同构是李代数同构，这一事实源于命题 7.1.1 中引入的同构与留数相容，因此括号得以保持。

□

7.2 场的因子分解

我们聚焦于以下情形：考虑一个取值于 X an U 的 K_I 场，其中 U 一如既往是一个完备的拓扑 A_I 代数，其拓扑由左理想定义。我们考虑两个平行的情形

- 假设我们有一个满射 $f : I \twoheadrightarrow J$，且 A_I 在 U 上的作用可经由$A_I \to A_J$分解。那么，场 $X : K_I \to U$ 可以唯一地线性延拓为场 $X : A_J(K_I) \to U$。由前述命题可知 $A_J(K_I) = K_J$。特别地，对于任意 U，我们可以考虑张量积 $A_J(U)$的自然完备化。存在一个自然映射

$U \to A_J(U)$ 给定一个场 $X : K_I \to U$，我们可以将它与自然映射$U \to A_J(U)$后合成。此构造给出了下列场空间之间的一个 A_I 线性映射

$$\mathrm{Rest}_{I\to J} : F_{A_I}(K_I, U) \to F_{A_J}(K_J, A_J(U)),$$

我们称之为**限制映射**。给定一个场 $X \in F_{A_I}(K_I, U)$，场 $\mathrm{Rest}_{I\to J} X$ 是使下列交换图成立的唯一场：

$$\begin{array}{ccc} K_I & \xrightarrow{X} & U \\ {\scriptstyle \mathrm{rest}^{I\to J}}\downarrow & & \downarrow \\ K_J & \xrightarrow[\mathrm{Rest}_{I\to J} X]{} & A_J(U) \end{array}$$

• 假设给定一个分解 $I = I_1 \coprod I_2$，并考虑 A_I-代数 $A_{I_1,\ I_2}$。假设 A_I 在 U 上的作用可扩张为 $A_{I_1,\ I_2}$上的作用。那么 X 以唯一的方式线性扩张 $A_{I_1,\ I_2}$至 $A_{I_1,\ I_2} \otimes K_I$，并且由连续性，它以唯一的方式扩张为一个取值于 U的$A_{I_1,\ I_2}(K_I)$ 场。与之前一样，给定任意的 U，我们可以考虑 $A_{I_1,\ I_2}(U)$，并将场 $X : K_I \to U$ 与自然映射 $U \to A_{I_1,\ I_2}(U)$ 后复合。这得到以下场空间之间的一个 A_I 线性映射

$$E^I_{I_1,I_2} : F_{A_I}(K_I, U) \to F_{A_{I_1,I_2}}(A_{I_1,I_2}(K_I), A_{I_1,I_2}(U)),$$

我们称之为**展开映射**。给定 $X \in F_{A_I}(K_I, U)$，场 $E^I_{I_1,\ I_2} X$ 是使下列交换图成立的唯一场：

$$\begin{array}{ccc} K_I & \xrightarrow{X} & U \\ {\scriptstyle e^I_{I_1,I_2}}\downarrow & & \downarrow \\ A_{I_1,I_2}(K_{I_1}) \times A_{I_1,I_2}(K_{I_2}) & \xrightarrow[E^I_{I_1,I_2} X]{} & A_{I_1,I_2}(U) \end{array}$$

利用同构 $A_{I_1,I_2}(K_I) = A_{I_1,I_2}(K_{I_1}) \oplus A_{I_1,I_2}(K_{I_2})$，$E^I_{I_1,I_2}$ 的陪域可改写为

$$F_{A_{I_1,I_2}}(A_{I_1,I_2}(K_{I_1}), A_{I_1,I_2}(U)) \oplus F_{A_{I_1,I_2}}(A_{I_1,I_2}(K_{I_2}), A_{I_1,I_2}(U)).$$

我们分别用$E^I_{I_1}$ 和 $E^I_{I_2}$ 表示 $E^I_{I_1,I_2}$ 与关于此分解的第一和第二个因子的自然投影的复合。

命题 7.2.1. 以下结论成立：

• 上述构造的映射 $\mathrm{Rest}^{I\to J}$ 与所有 n-场乘积交换。

• 若给定两个场 X，Y满足 $[E^I_{I_1} X(g_1), E^I_{I_2} Y(g_2)] = 0$，则对每个 $g_1 \in A_{I_1,\ I_2}(K_{I_1})$ 以及每个 $g_2 \in A_{I_1,\ I_2}(K_{I_2})$，态射 $E^I_{I_1}$ 和 $E^I_{I_2}$ 与所有 n-乘积可交换。

上述命题的证明需要对我们所处理的环作几点说明。我们将考察具有全局坐标 $\chi : K_1 \to K_2$ 的 (φ)-阿代尔环的局部化之间的连续映射，其中 $\chi : K_1 \to K_2$ 将 K_1 的坐标映到 K_2 的坐标，并将这类映射称为保坐标态射。我们要求 K_1 是基环为 A_1 的 (φ_1)-阿代尔环，且 K_2是基环为 A_2的 (φ_2)-阿代尔环，但不要求 $A_1 = A_2$。我们只要求 A_2 是一个 A_1-代数，且态射 χ 是 A_1-线性的。坐标均应相对于相应的基环来理解。

为使记号简洁，我们固定一个分解 $I = I_1 \coprod I_2$，并记 $\tilde{K}_{I_j} = A_{I_1,I_2}(K_{I_j})$，以及 $\tilde{K}_I = A_{I_1,I_2}(K_I) = \tilde{K}_{I_1} \times \tilde{K}_{I_2}$。

注 7.2.2. 以下结论成立

1. 给定场 X、$Y : K \to U$以及一个态射 $\chi : K' \to K$，我们可以将它们拉回到 K'场 χ^*X、χ^*Y。由于态射 $K' \to K$保持所选坐标，拉回与所有 n-乘积可交换。事实上，显然作为两个分布，$\chi^*(XY) = (\chi^*X)(\chi^*Y)$。此外还有一个自然映射

$$\chi \otimes \chi : \widehat{K' \otimes K'}^2 \to \widehat{K \otimes K}^2.$$

等式 $\chi^*(XY) = (\chi^*X)(\chi^*Y)$在这些完备化上也成立。由假设 χ保持所选坐标可知，$\chi \otimes \chi$ 将 $(z' - w')^n$ （K'中的坐标）映到$(z - w)^n$ （K中的坐标），因此 χ^* 与取 n-乘积可交换。注意，只需 $\chi \otimes \chi$ 保持坐标之差 $z - w$ 即可；

2. 回顾一下，两个场的乘积 XY 自然延拓为 $K \hat{\otimes} K$，即沿中间拓扑对 $K \otimes K$ 进行完备化。乘积 $\sigma \circ Y X$ 也同样如此。

3. 现在考虑 $\tilde{K}_I = \tilde{K}_{I_1} \times \tilde{K}_{I_2}$ 的情形。完备张量积 $\tilde{K}_I \hat{\otimes} \tilde{K}_I$ 分解为四个形如 $K_{ij} \overset{\text{def}}{=} \tilde{K}_{I_i} \hat{\otimes} \tilde{K}_{I_j}$ 的直和项。我们声称，若 $i \neq j$ 函数 $z - w \in \tilde{K}_I \hat{\otimes} \tilde{K}_I$ 限制在 K_{ij} 上时已经可逆。事实上，我们将证明 $z - w$ 在 $\tilde{R}_{I_1} \hat{\otimes} \tilde{R}_{I_2}$ 中可逆；由于存在环的自然映射 $\tilde{R}_{I_1} \hat{\otimes} \tilde{R}_{I_2} \to K_{ij}$，这足以证明我们的断言。

如命题 2.3.3[4] 所述，存在一个同构 $\tilde{R}_{I_1} \hat{\otimes} \tilde{R}_{I_2} = \tilde{R}^{\mathrm{pol}}_{I_1} \otimes \tilde{R}^{\mathrm{pol}}_{I_2}$，其中 $\tilde{R}^{\mathrm{pol}}_{I_1} = A_{I_1,I_2}[z]$ 具有由 φ_{I_1} 和 $\tilde{R}^{\mathrm{pol}}_{I_2} = A_{I_1,I_2}[w]$ 定义的拓扑，且 φ_{I_2}具有由 $z - w$ 定义的拓扑。要证明 A_{I_1}在完备化中可逆，只需证明它在第一个商 $A_{I_1,I_2}[z,w]/(\varphi_{I_1}(z), \varphi_{I_2}(w))$ 中可逆。这等价于证明再次模去 $z-w$ 后得到零环。这个第二个商自然同构于 $A_{I_1,I_2}[z]/(\varphi_{I_1}(z), \varphi_{I_2}(z))$。根据 A_{I_1,I_2} 的构造，φ_{I_1}、φ_{I_2}可知 $\varphi_{I_1}(z)$ 和 $\varphi_{I_2}(z)$ 的结式可逆，因此由它们生成的理想就是整个环。由此我们得出

$$\frac{A_{I_1,I_2}[z,w]/(\varphi_{I_1}(z), \varphi_{I_2}(w))}{(z-w)} = 0,$$

因此，$z - w$ 必须是可逆的；

命题 *7.2.1* 的证明。关于限制态射 $\mathrm{Rest}^{I \to J}$ 的断言由上一条注记的第一点推出。

为说明展开与 n 乘积之间的相容性，首先注意，我们可以将场 X、Y 分解如下。为简化记号，令 $\tilde{X}_j = E^I_{I_j} X$ 为展开 $E^I_{I_1,\ I_2} X$ 在 $\tilde{K}_{I_j}$ 上的限制。存在自然映射 $E^I_{I_j} : \tilde{K}_I \to \tilde{K}_{I_j}$，并且根据定义，以下等式显然成立

$$X = (E^I_{I_1})^* \tilde{X}_1 + (E^I_{I_2})^* \tilde{X}_2.$$

如前所述，这个方程唯一确定了 $\tilde{X}_i$，也就是说，给定另外两个场 $\chi_i : \tilde{K}_{I_i} \to A_{I_1,\ I_2}(U)$ 使得 $X = (E^I_{I_1})^* \chi_1 + (E^I_{I_2})^* \chi_2$，则 $\chi_i = X_i$。这是因为 $A_{I_1,\ I_2} \otimes K_I \to K'_{I_1} \times K'_{I_2}$ 的像是稠密的。

由 n 乘积的双线性性可知，我们只需证明

$$\big((E^I_{I_i})^* \tilde{X}_i\big)_{(n)} \big((E^I_{I_j})^* \tilde{Y}_j\big) = 0$$

若 $i \neq j$。事实上，由此可得

$$X_{(n)} Y = \big((E^I_{I_1})^* \tilde{X}_1\big)_{(n)} \big((E^I_{I_1})^* \tilde{Y}_1\big) + \big((E^I_{I_2})^* \tilde{X}_2\big)_{(n)} \big((E^I_{I_2})^* \tilde{Y}_2\big),$$

这便按所需证明了 $E^I_{I_j}(X_{(n)} Y) = \big(E^I_{I_j} X\big)_{(n)} \big(E^I_{I_j} Y\big)$。

固定 $i \neq j$，根据假设，我们有

$$\big[(E^I_{I_i})^* \tilde{X}_i, (E^I_{I_j})^* \tilde{Y}_j\big] = 0,$$

因此，对于 $n \geq 0$，n 乘积自动为 0。为证明其他乘积也为 0，我们使用注 7.2.2 的第 4 点。事实上，将乘积 $X_i Y_j$ 和 $\sigma \circ Y_i X_j$ 延拓到注 7.2.2 第 2 点定义的完备化 $K_{ij} = \widehat{\tilde{K}_{I_i} \otimes \tilde{K}_{I_j}}$ 上。根据交换性假设，这些延拓相同。特别地，由于 $z - w$ 在这个完备张量积中已经可逆，对于任意 n 和任意 $g_i \in \tilde{K}_{I_i}$，$g_j \in \tilde{K}_{I_j}$，我们有

$$\tilde{X}_i \tilde{Y}_j \left(\frac{g_i \otimes g_j}{(z-w)^n} \right) = \sigma \circ \tilde{Y}_i \tilde{X}_j \left(\frac{g_i \otimes g_j}{(z-w)^n} \right).$$

这很容易推出

$$\big((E^I_{I_i})^* \tilde{X}_i\big)_{(n)} \big((E^I_{I_j})^* \tilde{Y}_j\big) = 0.$$

对于负的 n 也同样成立。 □

推论 7.2.3。 给定元素 $x \in V^k(\mathfrak{g})$，考虑场 $Y^{can}_I(x) \in F_{A_I}(K_I, \tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I}))$。那么对于每个满射 $I \twoheadrightarrow J$ 以及每个分解 $I = I_1 \coprod I_2$，都有

$$\operatorname{Res}_{I \to J} Y^{can}_I(x) = Y^{can}_J(x),$$
$$E^I_{I_j} Y^{can}_I(x) = (Y^{can}_{I_j}(x))_{A_{I_1,I_2}}.$$

其中 $(Y^{can}_{I_j}(x))_{A_{I_1,\ I_2}}$ 是 $Y^{can}_{I_j}(x)$ 在 $F_{A_{I_1}}$ 中的像，$_{I_2}(A_{I_1,I_2}(K_{I_j}), A_{I_1,I_2}(\tilde{U}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}_{I_j}))$。

证明。 第一个等式直接由命题 7.2.1 的第一点得到。对于第二个等式，只需注意，对于 $x = X_{-1}|0\rangle$ 和 $y = Y_{-1}|0\rangle$ 且满足 X、$Y \in \mathfrak{g}$，场 $Y^{can}_I(x)$ 和 $Y^{can}_I(y)$ 关于任意分解 $I = I_1 \coprod I_2$ 都彼此交换。该等式由反复应用命题 7.2.1 的第二点以及以下事实可轻易得到：

$$A_{I_1,I_2}(\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_I)) = A_{I_1,I_2}(\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_{I_1})) \hat{\otimes} A_{I_1,I_2}(\tilde{U}_k(\hat{\mathfrak{g}}_{I_2})).$$

□

7.3 因子化映射

考虑临界级 $Z_I(\mathfrak{g}) = Z\big(\tilde{U}_{\kappa_c}(\hat{\mathfrak{g}}_{K_I})\big)$ 处的中心时，存在自然同态

$$\begin{aligned} A_J(Z_I(\mathfrak{g})) &\to Z_J(\mathfrak{g}), \\ A_{I_1,I_2}(Z_I(\mathfrak{g})) &\to A_{I_1,I_2}(Z_{I_1}(\mathfrak{g}))\hat{\otimes}A_{I_1,I_2}(Z_{I_2}(\mathfrak{g})). \end{aligned}$$

由相应的完备包络代数映射诱导，这些映射在命题 7.1.3 中引入。我们将证明上述映射实际上是同构；为此，只需注意到，与 Opers 空间上的函数环之间的同构和这些限制映射及展开映射相交换。

定理 **7.3.1.** 定理 *6.3.2* 中构造的同构使下列交换图成立

$$\begin{array}{ccc} A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}] & \xrightarrow{\simeq} & Z_I(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_J[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},J}] & \xrightarrow[\simeq]{} & Z_J(\mathfrak{g}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}] & \xrightarrow{\simeq} & Z_I(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{I_1,I_2}[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_1} \times \mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I_2}] & \xrightarrow[\simeq]{} & A_{I_1,I_2}(Z_{I_1}(\mathfrak{g}))\hat{\otimes}A_{I_1,I_2}(Z_{I_2}(\mathfrak{g})) \end{array}$$

特别地，由于 *Opers* 空间上的函数代数构成一个因子化代数，我们可知族 $Z_I(\mathfrak{g})$ 也是一个因子化代数，并且定理 *6.3.2* 中的同构是因子化代数的同构。

证明。我们来考察第一个交换图。容易看出，我们在$\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}$上构造的函数 $\nu_i^*(g)$，对于 V^{can} 和 $g \in K_I$ 的一个齐次基 v_i，经由左侧的竖直映射被映到函数$\nu_i^*(\mathrm{Res}_{I\to J}\, g)$。此外，由命题 7.2.1 可得以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \nu_i^*(g) & \longmapsto & Y_I^{\mathrm{can}}(\nu_{i,-1}^*)(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_i^*(\mathrm{Res}_{I\to J}\, g) & \longmapsto & Y_J^{\mathrm{can}}(\nu_{i,-1}^*)(\mathrm{Res}_{I\to J}\, g) \end{array}$$

这表明，第一个方块在 $A_I[\mathrm{Op}^{L}{}_{\mathfrak{g},I}]$的一组拓扑生成元上是交换的；由于所有映射都是完备拓扑代数之间的连续同态，因此我们得到了所需的交换性。

对于第二个方块，可以进行类似的论证。显然，根据命题 7.2.1，函数$\nu_i^*(g)$经由左侧的竖直箭头映射为函数 $\nu_i^*(E_{I_1}^I g) + \nu_i^*(E_{I_2}^I g)$

我们知道元素 $Y_I^{can}(\nu_{i,-1}^*)(g)$ 被映射为 $Y_{I_1}^{can}(\nu_{i,-1}^*)(E_{I_1}^I g)+Y_{I_1}^{can}(\nu_{i,-1}^*)(E_{I_1}^I g)$，沿着交换图可得下面这个方块

$$\begin{array}{ccc} \nu_i^*(g) & \longmapsto & Y_I^{can}(\nu_{i,-1}^*)(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_i^*(E_{I_1}^I g)+\nu_i^*(E_{I_2}^I g) & \longmapsto & Y_{I_1}^{can}(\nu_{i,-1}^*)(E_{I_1}^I g)+Y_{I_2}^{can}(\nu_{i,-1}^*)(E_{I_2}^I g) \end{array}$$

再次，这表明该交换图在 $A_I[Op_{L_{\mathfrak{g},I}}]$ 的一组生成元上可交换；与之前一样，这证明整个方形图可交换。□

参考文献

[Beilinson 和 Drinfeld， 1991] Beilinson, A. 和 Drinfeld, V. (1991). Hitchin 可积系统的量子化与 Hecke 特征层。

[Beilinson 和 Drinfeld， 2005] Beilinson, A. 和 Drinfeld, V. (2005). Opers。*arXiv* 预印本 *math/0501398*。

[Beilinson 等人， 2004] Beilinson, A., Drinfeld, V. 和 Drinfeld, V. (2004). 手征代数，第 51 卷。美国数学会。

[CASARIN， 2021] CASARIN, L. (2021). 仿射 Kac-Moody 代数包络代数的中心的描述。

[Drinfeld 和 Sokolov， 1984] Drinfeld, V. G. 和 Sokolov, V. V.（1984）。李代数与 Korteweg–de Vries 型方程。*Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya" Sovremennye Problemy Matematiki.Noveishie Dostizheniya"*，24：81–180。

[Feigin 和 Frenkel， 1992] Feigin, B. 和 Frenkel, E.（1992）。临界层的仿射 Kac-Moody 代数与 Gelfand-Dikii 代数。《国际现代物理学杂志 *A*》，7（supp01a）：197–215。

[Fortuna 等， 2020] Fortuna, G.、Lombardo, D.、Maffei, A. 和 Melani, V.（2020年）。具有两个奇点的局部 opers：$\mathfrak{sl}_2$的情形。*arXiv* 预印本 *arXiv:2012.01858*。

[Frenkel， 2007] Frenkel，E.（2007）。环群的朗兰兹对应，第 103 卷。剑桥大学出版社。

[Frenkel 和 Ben-Zvi， 2004] Frenkel，E. 和 Ben-Zvi，D.（2004）。顶点代数与代数曲线。第 88 号。美国数学会。

[Kac， 1998] Kac，V. G.（1998）。面向初学者的顶点代数。第 10 号。美国数学会。

[Kostant， 1963] Kostant，B.（1963年）。多项式环上的李群表示。《美国数学杂志》，85(3)：327–404。

[Mumford 等， 1994] Mumford，D.、Fogarty，J. 和 Kirwan，F.（1994）。几何不变理论，第34卷。Springer Science & Business Media。

[StacksProject Authors， 2018] Stacks Project Authors，T.（2018）。*Stacks Project*。https://stacks.math.columbia.edu.