arXiv:2301.06430v1 [math.NT] 16 Jan 2023

与滤过模相关的岩泽周期注记

Bernadette Perrin-Riou

巴黎萨克雷大学，法国国家科学研究中心，奥赛数学实验室，91405，法国奥赛。

2023年1月18日

设 p 为奇素数。设 $K_n=\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ 为 p^n 次单位根的定义域，并设 K_∞ 为各 K_n 的并。设 $\mathcal{D}$ 为 φ 上的滤过模，也就是说，它是一个有限维 $\mathbb{Q}_p$ 向量空间，维数为 d，带有一个 φ 可逆自同态以及一个完备分离递减滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathcal{D}$。设 $\mathcal{H}$为定义在任意球 $B(\rho)$ 上的收敛级数环，其中 $=\{x\in\mathbb{C}_p$ 满足 $|x|_p\le\rho\}$，对 $\rho<1$，$\Lambda=\mathbb{Z}_p[[x]]$ 且 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}=\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$。记 $\rho<1$

$$||f||_\rho=\sup_{|x|_p=\rho}|f(x)|_p=\sup_{|x|_p\le\rho}|f(x)|_p$$

对 $\mathbb{Q}_p$ 岩泽理论中晶体 p 进表示的研究，促使人们仅凭解析条件定义自然的子 $\mathcal{H}$-模 $L_N(\mathcal{D})$，它们是 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 的子模，其中 $\mathcal{D}$ 是与该 p 进表示相关联的 φ-滤过模。[16] 本文不借助 p 进表示来研究这些子模，并构造其一个“显式”基。这是一项纯粹的解析研究。

固定 $1+p\mathbb{Z}_p$ 的一个生成元 u。令 $t_{H,d}$ 为满足 $\mathrm{Fil}^{t_{H,d}}\mathcal{D}\neq0,\mathrm{Fil}^{t_{H,d}+1}\mathcal{D}=0$ 的整数。若 N 是一个整数 ≥0，则将 $L_N(\mathcal{D})$ 定义为 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 的子 $\mathcal{H}$-模，由满足以下条件的 g 构成：对任意整数 $j\le t_{H,d}$，且对 $n\ge N$

$$g(u^j\zeta-1)\in(1\otimes\varphi)^{n+1}K_n\otimes\mathrm{Fil}^j\mathcal{D} \tag{1}$$

对任意的阶为 p^n 的单位根 ζ。由于 $\mathrm{Fil}^j\mathcal{D}=\mathcal{D}$ 对 $j\ll0$，条件只有有限个。一个重要概念是斜率概念：若 f 是$\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$的一个元素，则称 f 的斜率为 $\le s$，如果 $||p^{n(s+t_{H,d})}(1\otimes\varphi)^{-n}f||_{\rho^{1/p^n}}$ 的序列对某个 $\rho<1$ 有界。我们关注由 $L_N(\mathcal{D})$ 中斜率 0 的元素生成的子-$\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-模。

若 J 是 $\mathbb{Z}$ 的一个有限区间，则定义

$$\mathrm{Log}_0^J(x)=\prod_{j\in J}\log(u^{-j}(1+x))=\prod_{j\in J}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\xi_n(u^{-j}(1+x)-1)}{p}$$

其中 $\xi_n = \frac{(1+x)^{p^n}-1}{(1+x)^{p^{n-1}}-1}$ 对 $n \geq 1$ 且 $\xi_0 = px$ 及更一般地

$$\mathrm{Log}_N^J(x) = \prod_{j\in J}\prod_{n=N}^{\infty} \frac{\xi_n(u^{-j}(1+x)-1)}{p}.$$

我们需要引入一个整数 $\delta \geq 0$，它取决于$\mathcal{D}$的滤过长度，且当该长度严格小于 p 时为零。回顾一下，若 φ-滤过模$\mathcal{D}$含有一个强可除格（初始定义的回顾见 2.9），则称其为弱可容许。

定理 1. 设$\mathcal{D}$是一个维数为 d 的 φ-滤过模。

1. $\mathcal{H}$-模 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 的秩为 d。2. 对于$\mathcal{D}$的任意一组适配于滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathcal{D}$的基$\mathcal{B}$，都可以显式地关联一组基$\left(\mathrm{Per}_{\mathcal{B}}\mathrm{N(v)}\right)\mathrm{v}\in\mathcal{B}$，它属于 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$，且由有限斜率元素构成。当 φ-滤过模$\mathcal{D}$弱可容许，且$\mathcal{B}$是适配于 φ-滤过模$\mathcal{D}$的一组基，并生成$\mathcal{D}$的一个强可除格时，所构造的基由斜率为正且小于或等于 δ 的元素构成。

3. 假设 $\delta = 0$。由零斜率元素生成的 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-子模由 $\left(\mathrm{Per}_{\mathcal{B}}\mathrm{N(v)}\right)\mathrm{v}\in\mathcal{B}$ 生成。若 $\mathrm{t}_{H,1} \leq \cdots \leq \mathrm{t}_{H,d}$ 是 $\mathcal{D}$ 的霍奇数（计入重数），则 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 中的初等因子序列为

$$[Log_N^{]t_{HT,1},t_{HT,d}]};\cdots;Log_N^{]t_{HT,j},t_{HT,d}]};\cdots;1].$$

4. 此外，若 $\mathcal{B}$ 适配于 $\mathcal{D}$ 的某个细化，则得到的基是适配于 <style id='H -模 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 到 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 的包含关系的适配基。

这些结果可用于研究与某个动机相关联的 p 进晶体表示的 p 进调节子。我们在本引言中给出总体思路，不作详细讨论。

记 $\mathrm{G}_\infty = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathbb{Q}_p) = \Delta\times\Gamma$ 为 $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_1/\mathbb{Q}_p)$ 与 $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}_1)$ 的规范分解，χ 为取值于 $\mathbb{Z}_p^\times$ 的 G_∞ 的圆分特征。设 γ 是 Γ 的一个生成元。

设 V 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上、维数为 d 的 p 进晶体表示，T 是 V 中在 $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}_p}$ 作用下稳定的格。设 $\mathcal{D}$ 是与之关联的 $\mathbb{Q}_p$ 上的弱可容许 φ-滤过模。与 V 及 $\mathbb{Q}_p$ 的分圆扩张 K_∞ 相关的岩泽理论通过调节子映射 $\mathbb{Q}_p$ 测量岩泽模

$$H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p,V) = \mathbb{Q}_p\otimes\varprojlim_{\leftarrow n} H^1(K_n,T)$$

借助调节子映射[1]

$$\mathrm{Reg}_V : H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p,V) \to \mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}$$

1. 一段漫长的历史，自 [13], [14], [16], [15], [17], [18], 起；此处我们不讨论其以（φ,Γ）-模的形式进行的重新诠释。

其中，$\mathcal{H}(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes \mathcal{H}(\Gamma)$，而 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是由 $x \to \gamma - 1$ 所诱导的映射下 $\mathcal{H}$ 的像。记 Tw 为由 $g \to \chi(g)g$ （其中 $g \in G_\infty$）在 $\mathcal{H}(G_\infty)$ 上诱导的扭转算子。[2] 若 $L_{G_\infty}(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathcal{D}$ 的子模，由满足对 $j \leq t_{HT,d}$ 的元素 f 构成

$$\eta(Tw^j(f)) \in \varphi^{f_\eta}(K_n \otimes \mathrm{Fil}^j \mathcal{D}) \tag{2}$$

对于任意导子为 p^{f_η} 且 $f_\eta \geq 1$ 的非平凡特征，并对 $f_\eta = 0$ 采用适当的定义，$H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p, V)$ 在 $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathcal{D}$ 中的像是 $L_{G_\infty}(\mathcal{D})$ 中斜率 0 的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$- 子模。通过 Mellin-Amice 同构 $\mathcal{H}(G_\infty) \cong \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes \mathcal{H}$，相对于 Δ 的非平凡分量，即 $H_\infty(G)$-模 $L_{G_\infty}(\mathcal{D})$ 的非平凡分量，等于由 $\mathbb{Q}_p[\Delta] \otimes L(\mathcal{D})$ 中由 $\mathbb{Q}_p[\Delta] \otimes \mathbb{Z}_p[\Gamma]$ 上 $\left(\mathrm{Per}_{\mathcal{B},0}(v)\right)_{v \in \mathcal{B}}$ 的像生成的子模的非平凡分量；平凡分量的情形则需根据“欧拉因子”作相应调整。

当 V 来自 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的伽罗瓦群的一个 p 进表示（或一个动机）时，研究某些全局特殊元素的岩泽调节子，并将其与本文引入的“岩泽周期”进行比较，可以构造出与 p进 L 函数相关的 $\mathbb{Z}_p[[\quad \infty]]$ $\mathbb{Q}_p \otimes$ H^1_{Iw} $\mathbb{Q}_p$ G 元素。因此，理解 $H(\ , V)$ 在 $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathcal{D}$ 中的像便十分重要；这与复数情形类似，人们会用复周期来表示 L 函数的值。对于与椭圆曲线、模形式及由其导出的某些表示相关的 p进 L 函数，这一点已为人所知（最早已知的情形归功于 Pollack [19]）。

下面介绍本文的结构。在第一部分，我们运用 Amice-Vélu 方法，对 $\mathbb{Z}$ 的有限区间 J 构造解析函数 $\mathcal{X}_N^J$，通过插值使其在形如 $u^j\zeta - 1$ 的值处取值，其中 $j \in J$，$u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$，且 ζ 为单位的一个 p^n 次根。这些函数可被 Log_N^J 整除；当 J 的长度小于 p 时，它们与 Log_N^J 相差一个单位。与 Log_N^J 一样，它们定义为收敛乘积，但收敛速度更快。

在第二部分中，我们回顾关于 φ-滤过模的定义，随后构造一个与适配滤过的基相关联的 $L_N(\mathcal{D})$ 的最大秩自由系。我们计算其在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 中的斜率。文献中有两类特殊基：生成 $\mathcal{D}$ 强可除格的基，以及与细化相关联的基。我们分别在这两种情况下进行计算，因为根据所选基的不同，所定义的元素具有或繁或简的公式，也具有不同的性质。特别是，在与细化相关联的基下进行计算，可以凸显其对滤过的依赖。

我们尤其讨论维数为2的情形，换言之，即 Pollack[19] 在 $p > 3$ 处具有良好超奇异约化的椭圆曲线所对应的 p 进表示情形下所得到的结果。利用 (φ, Γ)-模这一概念的文章中，也可以推出这类结果，例如 Lei、Loeffler、Zerbes 等人的文章（[8], [9], [11], [10]）。

处理系数取自 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张的 φ-滤模并无特别困难。我们不对此作明确处理，也不展开

2. 不重新定义此处的算子 ψ，我们回顾一下，也存在一种使用 $\mathcal{H}^{\psi=0}$ 的表述。通过由 $g \to g \cdot (1+X) = (1+X)^{\chi(g)}$ 诱导的同构 $\mathcal{H}(G_\infty) \to \mathcal{H}^{\psi=0}$，可以轻松地从一种表述转换到另一种。

讨论与主要猜想、Tate-Shafarevich 群在分圆扩张中的阶增长等相关的后果。

1 构造$\mathcal{H}$的元素

在本段后续内容中，r 表示一个严格正整数。

1.1 多项式插值

令 $\omega_n = (1+x)^{p^n} - 1$ 当 $n \geq 0$，$\xi_n = \omega_n/\omega_{n-1}$ 当 $n \geq 1$。对于 $n = 0$，取 $\xi_0 = px$。于是 $\log(1+x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{p^n} = \prod_{s=0}^{\infty} \frac{\xi_s}{p}$。

设 u 是一个模 p 同余于 1 的 p 进单位（除非有需要，以下定义的记号中不写出它）。若 $f \in \mathcal{H}$，记 $f_{(j)}(x) = Tw^{-}{}_{ju}(f)(x) = f(u^{-}{}_{j}(1+x) - 1)$：有 $f_{(j)}(u_j - 1) = f(0)$，且 $Tw_u^j(f)(0) = f(u_j - 1)$。

因此，

$$\omega_n^{(j)} = \omega_n(u^{-j}(1+x) - 1) = u^{-jp^n}(1+x)^{p^n} - 1$$
$$\xi_n^{(j)} = \sum_{k=0}^{p-1} u^{-jkp^{n-1}}(1+x)^{kp^{n-1}} \text{ pour } n > 0.$$

让我们回顾以下取自 Amice 和 Vélu 的工作（[1]）的命题。

命题1.1. 设 n 为一个整数 ≥ 0。设有 r 个次数严格小于 p^n 的多项式 Q_0、$\cdots$、Q_{r-1}。设 P 为次数为 $< rp^n$ 的多项式，使得

$$P \equiv Q_j \bmod \omega_n^{(j)}$$

对于 $0 \leq j < r$，并且设

$$\delta_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} Q_j$$

[1]对于 $0 \leq i < r$。设 ρ 为严格小于 $\rho_0 = p^{-\frac{1}{p-1}}$ 的正实数。那么 ，

$$||P||_1 \leq p^{\frac{r-1}{p-1}} \max_{0\leq i<r} \left(\frac{p^{-\frac{i}{p-1}}}{|i!|_p} \frac{||\delta_i||_1}{|u^{p^n} - 1|_p^i} \right) \leq p^{\frac{r-1}{p-1}} \max_{0\leq i<r} \left(\frac{||\delta_i||_1}{|u^{p^n} - 1|_p^i} \right). \tag{3}$$

注记 1.2. 若 Q_j 具有形式 $Q^{(j)}$，其中 Q 是一个多项式，则有

$$||\delta_i||_1 \leq ||Q||_1 |u^{p^n} - 1|_p^i.$$

证明。设 S 是关于 x 和 y 的唯一多项式，其关于 y 的次数为 <r，关于 x 的次数为 $< p^n$，且满足 $S(x, u_{jp^n} - 1) = Q_j(x)$，其中 $0 \le j < r$。设 $Q(x, z) = \sum_{i=0}^{r-1} \delta_i(x)\binom{z}{i}$。则对于$0 \le j < r$，有 $Q(x, j) = Q_j(x)$，并且

$$S(x, u^{jp^n} - 1) = Q(x, j).$$

由于 $S(x, (1+x)^{p^n} - 1)$ 的次数严格小于 rp^n，且满足对 P 所要求的条件，因此有

$$P(x) = S(x, (1+x)^{p^n} - 1).$$

令 $S = \sum_{k=0}^{r-1} S_k(x) y^k$，将其视为关于 y 的多项式。在系数取自赋范空间的关于 y（或 z）的多项式向量空间上，赋予取系数范数上确界所得的范数。因此有 $||S||_\rho = \max_k ||S_k||_1 \rho^k$。根据 [1],，对于 $\rho \le \rho_0 = p^{-1/(p-1)}$，$z \mapsto v^z - 1$（其中 $v = u^{p^n}$）是从球 $|z|_p < \rho/|v - 1|_p$ 到球 $|y|_p < \rho$ 的同构，逆同构为 $y \underline{\mapsto \log}_{(1+y)} \log_v$。因此

$$||S||_\rho = ||Q||_{\rho/|u^{p^n}-1|_p},$$

d'où

$$||S||_\rho = \max_{0 \le k < r} (||S_k||_1 \rho^k) = \max_{0 \le i < r} (||\delta_i||_1 \times ||\binom{\cdot}{i}||_{\rho/|u^{p^n}-1|_p}).$$

对于 $\rho > |u^{p^n} - 1|_p$，有

$$||\binom{\cdot}{i}||_{\rho/|u^{p^n}-1|_p} = \frac{(\rho/|u^{p^n} - 1|_p)^i}{|i!|_p}$$

et

$$||S||_\rho = \max_{0 \le i < r} \left(||\delta_i||_1 \frac{(\rho/|u^{p^n} - 1|_p)^i}{|i!|_p} \right)$$

D'où

$$||P||_1 \le ||S||_1 \le \rho^{-(r-1)} \max_{0 \le i < r} \left(\frac{||\delta_i||_1}{|u^{p^n} - 1|_p^i} \frac{\rho^i}{|i!|_p} \right) = \max_{0 \le i < r} \left(\frac{||\delta_i||_1}{|u^{p^n} - 1|_p^i} \frac{\rho^{i-r+1}}{|i!|_p} \right)$$

[1]取 $\rho = p^{-\frac{1}{p-1}}$，即可得出（3）的第一个不等式。第二个不等式由以下事实得出

$$\mathrm{ord}_p(i!) = \sum_{s=1}^{i} \lfloor \frac{i}{p^s} \rfloor \le \frac{i}{p} \frac{1 - \frac{1}{p^i}}{1 - \frac{1}{p}} \le \frac{i}{p-1}$$

[i]对于 $i \ge 0$，因此 $p^{\frac{1}{p-1}} |i!|_p \le 1$。

□

1.2 在$\mathcal{H}$中构造对数周期

本段中，我们引入 $\mathcal{H}$的一些特殊元素，可将其视为对数乘积的一种变体。在下文中，J 是 $\mathbb{Z}$ 的一个非空有限区间。

设 $\Omega_n^J = \prod_{j\in J} \omega^{(j)n}$，$\ell_n^J = \prod_{j\in J} \frac{\xi_n^{(j)}}{p}$。因此有 $\mathrm{Log}_0^J = \prod_{n=0}^{\infty} \ell_n^J$。若 P 和 Q 是两个互素多项式，则用 $(P \bmod Q)^{-1}$ 表示唯一一个次数严格小于 Q 的次数的多项式 R，使得 $RP \equiv 1 \bmod Q$。

命题1.3. 设 J 是 $\mathbb{Z}$ 的一个非空区间，其基数为 #J。对任意 $n \geq 1$，令 Ξ_n^J 为 $\mathbb{Q}_p[X]$ 中唯一一个次数为 $< p^n \#J$ 的多项式，使得

$$\Xi_n^J \equiv \frac{\xi_n^{(j)}}{p} \bmod \omega_n^{(j)}$$

对任意 $j \in J$。于是，

$$\Xi_n^J = (\ell_n^J \bmod \Omega_{n-1}^J)^{-1} \ell_n^J \equiv \begin{cases} 0 & \bmod \Omega_n^J/\Omega_{n-1}^J \\ 1 & \bmod \Omega_{n-1}^J \end{cases} \tag{4}$$

et

$$p^{\#J} \leq ||\Xi_n^J||_1 \leq p^{\#J + o_p(\#J)}$$

其中 $o_p(s) = \mathrm{ord}_p((s-1)!)$。此外，若 $o_p(\#J) = 0$，则 Ξ_n^J/ℓ_n^J 是 $\mathbb{Z}_p[[X]]$的一个单位。

证明。存在性由中国剩余定理得出。恒等映射（4）由以下事实推出：多项式 Ξ_n^Jet $(\ell_n^J \bmod \Omega_{n-1}^J)^{-1}\ell_n^J$在 $\#J\, p^n$ 个点上的取值相同（它们在 $u^j\zeta - 1$ 中满足 ζ 阶 p^m 的取值，对 $m = n$ 为 0，对 $m < n$ 为 1），且它们的次数都严格小于 $p^n\#J$（第二个多项式的次数严格小于 $p^{n-1}\#J + (p-1)p^{n-1}\#J = p^n\#J$）。为了计算 $||\Xi_n^J||_1$，假设 $J = [0,r[$（这可以通过平移实现），并对多项式 $Q_j = \xi^{(}{}_{j)n} / p$（$j = 0, \ldots, r-1$）应用命题1.1。对于 $0 \leq i < r$，有

$$\begin{aligned}
\delta_i(x) &= p^{-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{s=0}^{p-1} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u^{-sjp^{n-1}} (1+x)^{sp^{n-1}} \\
&= p^{-1} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u^{-sjp^{n-1}} (1+x)^{sp^{n-1}} \\
&= p^{-1} \sum_{s=0}^{p-1} (u^{-sp^{n-1}} - 1)^i (1+x)^{sp^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$||\delta_i||_1 \leq p \max_{1\leq s\leq p-1} |u^{-sp^{n-1}} - 1|_p^i = |u^{p^n} - 1|_p^i p^{1+i}.$$

由此可得

$$||\Xi_n^J||_1 \leq p^{\frac{r-1}{p-1}} \max_{0\leq i<r}\left(\frac{p^{1+i-\frac{i}{p-1}}}{|i!|_p}\right) = p^{\frac{r-1}{p-1}}\frac{p^{r-\frac{r-1}{p-1}}}{|(r-1)!|_p} = \frac{p^r}{|(r-1)!|_p}.$$

因此,

$$||\Xi_n^J||_1 \leq p^{r+\mathrm{ord}_p((r-1)!} = p^{\#J+\mathrm{o}_p(\#J)}.$$

最后，显然， Ξ_n^J 可被 ℓ_n^J 整除，且 $||\ell_n^J||_1 = \mathrm{p}^{\#J}$。对任意整数 l， $^{\xi_n}(\mathrm{u}^{l}-1)$ p 是一个 p 进单位：当 $\mathrm{l}=0$时， $^{\xi_n}(\mathrm{u}^{l}-1)\,\mathrm{p}=1$; 当 $\mathrm{l}\neq 0$时， $^{\xi_n}(\mathrm{u}^{l}-1)\,\mathrm{p}=\mathrm{u}^{l\mathrm{p}^n}-1\,\mathrm{p}(\mathrm{u}^{l\mathrm{p}^{n-1}}-1)$ 的 p 进赋值为 0。由此可得，对 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$ 和 $\mathrm{n}\geq 1$， Ξ_n^J/ℓ_n^J 在 u^j-1 处的值是一个单位，因此 $||\Xi_n^J/\ell_n^J||_1 \geq 1$。当 $\mathrm{o}_p(\#\mathrm{J})=0$时， Ξ_n^J/ℓ_n^J 属于 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{x}]]$，且是一个单位，因为它在开单位圆盘中的一个值是单位。 □

以下命题推广了命题1.3。

命题 1.4. 设 J' 是 J 的一个子区间。设 n 是一个大于或等于 1 的整数。设 $\Xi^{J'\subset}\mathrm{Jn}$ 是 $\mathbb{Q}_p[\mathrm{x}]$ 中次数严格小于 $((\mathrm{p}-1)\#\mathrm{J}'+\#\mathrm{J})\mathrm{p}^{n-1}$ 的唯一多项式，满足

$$\Xi_n^{J'\subset J} \equiv \begin{cases} \frac{\xi_n^{(j)}}{p} \bmod \omega_n^{(j)} & pour\ j\in J' \\ 1 \bmod \omega_{n-1}^{(j)} & pour\ j\in J-J'. \end{cases}$$

那么,

$$\Xi_n^{J'\subset J} = (\ell_n^{J'} \bmod \Omega_{n-1}^J)^{-1}\ell_n^{J'} \equiv \begin{cases} 0 & \bmod \Omega_n^{J'}/\Omega_{n-1}^{J'} \\ 1 & \bmod \Omega_{n-1}^J \end{cases}$$

et

$$p^{\#J'} \leq ||\Xi_n^{J'\subset J}||_1 \leq p^{\#J'+\lfloor\frac{\#J-1}{p-1}+\max(0,\frac{1}{p-1}+\mathrm{ord}_p((\#J-1)!)-\mathrm{ord}_p(u^{p^{n-1}}-1))\rfloor}.$$

特别地，当 $\mathrm{n} > \mathrm{ord}_p((\#\mathrm{J}-1)!) - (\mathrm{ord}_p(\mathrm{u}-1)-1)$ 时,

$$p^{\#J'} \leq ||\Xi_n^{J'\subset J}||_1 \leq p^{\#J'+\tilde{\mathrm{o}}_p(\#J)}$$

其中 $\tilde{}\mathrm{o}_p(\mathrm{s}) = \lfloor \mathrm{s}-1\mathrm{p}^{-1}\rfloor$。此外，若 $\tilde{}\mathrm{o}_p(\#\mathrm{J})=0$，则 $\Xi^{J'\subset}\mathrm{Jn}/\ell^{J'}\mathrm{n}$ 是 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{x}]]$ 的一个单位。

注1.5. 1. 当 $\mathrm{ord}_p(\mathrm{u}-1)=1$ 时，条件为 $\mathrm{n} > \mathrm{ord}_p((\#\mathrm{J}-1)!)$。

2. 若 $\mathrm{J}'=\mathrm{J}$， $\Xi_n^{J\subset J}=\Xi_n^J$。若 $\mathrm{J}'=\emptyset$，则有 $\Xi_n^{\emptyset\subset J}=1$。3. $\Xi^{J'\subset}{}_{Jn}$ 的次数实际上小于或等于 $((\mathrm{p}-1)\#\mathrm{J}'+\#\mathrm{J}-1)\mathrm{p}^{n-1}$，当 $\mathrm{n}\geq 1$ 时。4. 取 $\Xi^{J'\subset}{}_{J_0} = \ell_0^{J'}$。

证明。与前面一样，显然 $\Xi^{J'\subset J_n}$ 可被 $\ell^{J'}{}_n$ 整除，并且 $||\Xi^{J'\subset J_n}/\ell^{J'}{}_n||_1 \geq p^{\#J'}$。我们证明当 $n \geq 1$ 时，

$$||\Xi_n^{J'\subset J}/\ell_n^{J'}||_1 \leq p^{\frac{\#J-1}{p-1}} \max(1, \frac{p^{\frac{1}{p-1}}|u^{p^{n-1}}-1|_p}{|(\#J-1)!|_p}). \tag{5}$$

只需考察 $n=1$ 且 u 为任意模 p 同余于 1 的情形。事实上，$\Xi^{J'\subset J_n}$ 可由对 $\Xi^{J'\subset J}1$ 应用 $\varphi^{n-1}: x \mapsto (1+x)^{p^{n-1}}-1$ 得到，并将 u 替换为 $u^{p^{n-1}}$：

$$\Xi_{n,u}^{J'\subset J}(x) = \Xi_{1,u^{p^{n-1}}}^{J'\subset J}(\varphi^{n-1}(x)), \quad \ell_{n,u}^{J'} = \ell_{1,u^{p^{n-1}}}^{J'}(\varphi^{n-1}x)$$

因为 φ 保持单位球，因此有

$$||\Xi_{n,u}^{J'\subset J}/\ell_{n,u}^{J'}||_1 = ||\Xi_{1,u^{p^{n-1}}}^{J'\subset J}/\ell_{1,u^{p^{n-1}}}^{J'}||_1.$$

令 $r = \#J$。通过平移，不妨设 $J = [0,\cdots,r[$。注意，$\ell_1^{J'}$ 在圆盘 $B(0,\rho)$ 内可逆，其中 $\rho < \rho_0$，并且根据定义，$\Xi^{J'\subset J_1}/\ell_1^{J'}$ 是次数严格小于 $\#J$ 的多项式 V，满足 $V(u^j-1) = \ell_1^{J'}(u^j-1)^{-1}$，其中 $j \in J$。

函数 $f = \frac{1}{\ell_1^{J'}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 在 $B(0,\rho_0)$ 上是解析函数。设 $\alpha_i = u^j - 1$，其中 $j \in J$。这些都是球 $B(0,|u-1|_p)$ 中的元素。多项式 V 是以 α_i 为插值节点、对 $f(\alpha_i)$ 进行插值所得的插值多项式。由于 f 的收敛半径为 ρ_0，我们有

$$|a_m|_p \leq \rho_0^{-m}||f||_{\rho_0}.$$

将 f 写成 $= Q + x^r g$，其中 Q 是次数为 $\leq r-1$ 的多项式。我们有

$$|f(\alpha_i) - Q(\alpha_i)|_p \leq \max_{m\geq r}|a_m|_p|u-1|_p^m \leq \left(\frac{|u-1|_p}{\rho_0}\right)^r ||f||_{\rho_0}.$$

设 P 是在 α_i（$i = 0,\cdots,r-1$）处对 $f(\alpha_i) - Q(\alpha_i)$ 进行插值的多项式。因此 $V = P + Q$。由公式

$$P = \sum_{i=0}^{r-1}(f(\alpha_i) - Q(\alpha_i))\prod_{j\neq i}\frac{x-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j},$$

由此可得

$$||P||_{\rho_0} \leq \left(\frac{|u-1|_p}{\rho_0}\right)^r \left(\max_{0\leq i<r}\prod_{j\neq i}\frac{\rho_0}{|\alpha_i-\alpha_j|_p}\right)||f||_{\rho_0} = \frac{|u-1|_p}{\rho_0}\left(\max_{0\leq i<r}\prod_{j\neq i}\frac{|u-1|_p}{|\alpha_i-\alpha_j|_p}\right)||f||_{\rho_0}.$$

对于 $i = 0,\cdots,r-1$，有

$$\prod_{j\neq i}\frac{|u-1|_p}{|\alpha_i-\alpha_j|_p} = \prod_{j\neq i}\frac{|u-1|_p}{|u^{i-j}-1|_p} = \prod_{j=0}^{i-1}p^{\mathrm{ord}_p(j-i)}\prod_{j=i+1}^{r-1}p^{\mathrm{ord}_p(j-i)} = (|i!|_p|(r-1-i)!|_p)^{-1},$$

donc

$$\max_{0\le i<r}\prod_{j\neq i}\frac{|u-1|_p}{|\alpha_i-\alpha_j|_p}=\frac{1}{|(r-1)!|_p}.$$

因此,

$$||P||_{\rho_0}\le\frac{|u-1|_p}{\rho_0}\frac{1}{|(r-1)!|_p}||f||_{\rho_0}=\frac{p^{\frac{1}{p-1}}|u-1|_p}{|(r-1)!|_p}||f||_{\rho_0}.$$

另一方面,

$$||Q||_{\rho_0}\le||f||_{\rho_0}.$$

D'où

$$||V||_{\rho_0}\le\max(||Q||_{\rho_0},||P||_{\rho_0})=\max(1,p^{\frac{1}{p-1}}\frac{|u-1|_p}{|(r-1)!|_p})||f||_{\rho_0}.$$

因此,

$$||V||_1\le\frac{1}{\rho_0^{r-1}}||V||_{\rho_0}=p^{\frac{r-1}{p-1}}\max(1,p^{\frac{1}{p-1}}\frac{|u-1|_p}{|(r-1)!|_p})||f||_{\rho_0}.$$

证明 $||f||_{\rho_0}\le 1$。我们有 $\xi_1=t(x)+x^{p-1}p$，其中 $t(x)\in 1+x\mathbb{Z}_p[x]$。因此，对于 $\rho'<\rho_0$，$||\frac{1}{\xi_1}||_{\rho'}=\max_{n\ge 0}(p\rho'^{p-1})^n=1$。于是有 $||\frac{1}{\xi_1^{(j)}}||_{\rho'}=1$ 且 $||\frac{1}{\ell_1^{J'}}||_{\rho'}=1$。令 ρ' 趋于 ρ_0，于是有 $||\frac{1}{\ell_1^{J'}}||_{\rho_0}\le 1$。由此得到不等式 (5)。 □

推论 1.6。当 $\#J<p$ 时，$\Xi^{J'\subset J}n$ 等于 $\ell^{J'}n$，相差一个 $\mathbb{Z}_p[[x]]$ 的单位。

对于充分接近模 p 同余于 1 的 u，更准确地说，若

$$|u-1|_p\le p^{-1/(p-1)}|(\#J-1)!|_p,$$

因此有

$$||\Xi_1^{J'\subset J}/\ell_1^{J'}||_1\le p^{\lfloor\frac{\#J-1}{p-1}\rfloor}$$

$|u-1|_p>p^{-1/(p-1)}|(\#J-1)!|_p$,

$$||\Xi_1^{J'\subset J}/\ell_1^{J'}||_1\le p^{\frac{\#J-1}{p-1}}\frac{p^{-\frac{1}{p-1}}|u-1|_p}{|(\#J-1)!|_p}\le\frac{p^{\frac{\#J-p-1}{p-1}}}{|(\#J-1)!|_p}.$$

根据定义，$\Xi^{J'\subset J_n}(u^j\zeta-1)$ 在 $j\in J'$ 且 ζ 阶为 p^n 的任意单位根处均为零，而在 $j\in J$ 且 ζ 阶整除 p^{n-1} 的任意单位根处均非零。

引理 1.7. 若 $m>n+\log(\lfloor\frac{\#J-1}{p-1}\rfloor)\log p$，则 $\Xi^{J'\subset J}n$ 在 $u^j\zeta-1$ 处不为零，其中 ζ 阶为 p^m。例如，若 $\#J<p(p-1)$ 且 $m\ge n$，则 $\Xi^{J'\subset J}n$ 仅在其定义所对应的 $u^j\zeta_m-1$ 处为零。

证明。若 $\Xi^{J'\subset J_n}/\ell^{J'}{}_n$ 在 $u^j\zeta-1$ 处的 ζ 阶为 p^m 且 $m>n$ 时消失，则其次数必须大于或等于 $p^{m-1}(p-1)$，这意味着 $p^{m-n}\le\lfloor\frac{\#J-1}{p-1}\rfloor$。 □

引理 1.8。当 $m > n$ 时，有

$$|p^{\#J'}\Xi_n^{J'\subset J}(u^k\zeta-1)|_p \le p^{-\frac{\#J'}{p^{m-n}}+\tilde{o}_p(\#J)}$$

对于 ζ 阶为 p^m 的单位根，当且仅当 $\tilde{o}_p(\#J)=0$ 时取等号。

证明。我们写作 $\Xi^{J'\subset J_n}=\ell^{J'}{}_n V$，其中 $||V||_1 \le p^{\tilde{o}_p(\#J)}$。计算 $p^{\#J'}\ell^{J'}{}_n(u^k\zeta-1)=\prod_{j\in J'}\xi_n(u^{k-j}\zeta-1)$ 的 p-adic绝对值。我们有

$$\xi_n(u^s\zeta-1)=\frac{u^{sp^n}\zeta^{p^n}-1}{u^{sp^{n-1}}\zeta^{p^{n-1}}-1}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_p(u^{sp^n}\zeta^{p^n}-1) &= \min(\mathrm{ord}_p(u^{sp^n}-1),\mathrm{ord}_p(\zeta^{p^n}-1))\\ &= \min(\mathrm{ord}_p(s+n+1),\frac{1}{(p-1)p^{m-n-1}}) = \frac{1}{(p-1)p^{m-n-1}}.\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{ord}_p(\xi_n(u^s\zeta-1)) = \frac{1}{p^{m-n}}$，且 $|p^{\#J'}\ell^{J'}{}_n(u^k\zeta-1)|_p = p^{-\frac{\#J'}{p^{m-n}}}$。若 $\tilde{o}_p(\#J)=0$，则 V 是一个单位，且 $||V||_1=1$。至此引理得证。 □

设 $\lambda(Q)$（分别为 $\mu(Q)$）是多项式 $Q\in\mathbb{Q}_p[x]$ 的 p-adic λ-不变量（分别为 μ不变量）。回顾一下，$\mu(\ell_n^J) = -\#J$。容易看出

$$\begin{cases}\deg(\Xi_n^J/\ell_n^J) & \le p^{n-1}(\#J-1)\\ \mu(\Xi_n^J/\ell_n^J) & \ge -\tilde{o}_p(\#J).\end{cases}$$

实验上，我们有

$$\begin{cases}\deg(\Xi_n^J/\ell_n^J) & = p^{n-1}(\#J-1)\\ \mu(\Xi_n^J/\ell_n^J) & = -\tilde{o}_p(\#J)\\ \lambda(\Xi_n^J/\ell_n^J) & = (p-1)p^{n-1}\lfloor\frac{\#J-2}{p-1}\rfloor.\end{cases}$$

1.3 无穷乘积

我们仍令 $\rho_0=p^{-1/(p-1)}$。对于 $0<\rho<1$，记 $n_0(\rho)$ 为满足 $\rho^{p^{n_0(\rho)}}\le\rho_0$ 的最小整数 ≥ 0。因此，$n_0(\rho_0)$ 为零。

命题 1.9。设 r 是一个严格正整数，μ 和 α_j 是正整数，且 $0\le j<r$。设 H 是一个可被 $\prod_{j=0}^{r-1}(\omega^{(j)}n-1)^{\alpha_j}$ 整除的多项式。那么，对于任意满足 $0<\rho<1$ 的实数 ρ，

$$||H||_\rho \le \begin{cases}(p\rho_0)^\lambda p^{-(n-n_0(\rho))\lambda}||H||_1 & si\ n\ge n_0(\rho)\\ (\rho^{p^n})^\lambda||H||_1 & si\ n\le n_0(\rho)\end{cases}$$

与 $\lambda=\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j$。

证明。我们有

$$H = \prod_{j=0}^{r-1} (u^{-jp^{n-1}}(1+x)^{p^{n-1}} - 1)^{\alpha_j} \times W$$

与 $W \in \mathbb{Q}_p[x]$。根据用 $\mathbb{Z}_p[x]$, $||W||_1$ 除以首一多项式的欧几里得除法定理，其结果小于 $||H||_1$。因此，

$$||H||_\rho \leq \prod_{j=0}^{r-1} ||u^{-jp^{n-1}}(1+x)^{p^{n-1}} - 1||_\rho^{\alpha_j} ||H||_1.$$

对于关于 x 的多项式 P，令 $\varphi(P) = P((1+x)^p - 1)$。有

$$||\varphi(P)||_\rho \leq \begin{cases} ||P||_{\rho/p} & \text{si } \rho \leq p^{-1/(p-1)} \\ ||P||_{\rho^p} & \text{si } \rho \geq p^{-1/(p-1)}. \end{cases}$$

首先假设 $n \geq n_0(\rho)$。于是，

$$\begin{aligned} ||\varphi^{n-1}(u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1)||_\rho &\leq ||u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1||_{\rho^{p^{n_0(\rho)}}/p^{n-1-n_0(\rho)}} \\ &\leq ||u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1||_{\rho_0/p^{n-1-n_0(\rho)}} \\ &\leq \max(|u^{-jp^{n-1}}-1|_p, p^{-n+1+n_0(\rho)}\rho_0). \end{aligned}$$

若 $j \neq 0$,

$$\begin{aligned} ||\varphi^{n-1}(u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1)||_\rho &\leq \max(|u^{p^{n-1+\mathrm{ord}_p(j)}}-1|_p, p^{-n+1+n_0(\rho)}\rho_0) \\ &\leq p^{-(n-1)} \max(|u-1|_p p^{-\mathrm{ord}_p(j)}, p^{n_0(\rho)}\rho_0) \\ &\leq p^{-(n-1)} \max(|u-1|_p, p^{n_0(\rho)}\rho_0). \end{aligned}$$

因此，对于 $n \geq n_0(\rho)$,

$$\begin{aligned} ||H||_\rho &\leq p^{-(n-1)\lambda} \max(|u-1|_p, p^{n_0(\rho)}\rho_0)^\lambda ||H||_1 \\ &\leq (p\rho_0)^\lambda p^{-(n-n_0(\rho))\lambda} ||H||_1. \end{aligned}$$

对于 $0 < n < n_0(\rho)$,

$$\begin{aligned} ||\varphi^{n-1}(u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1||_\rho &\leq ||u^{-jp^{n-1}}(1+x)-1||_{\rho^{p^n}} \\ &\leq \max(|u^{p^{n-1+\mathrm{ord}_p(j)}}-1|_p, \rho^{p^n}) \leq \rho^{p^n} \end{aligned}$$

因为 $|u^{p^{n-1+\mathrm{ord}_p(j)}} - 1|_p \leq p^{-1} < p^{-1/(p-1)} < \rho^{p^n} < 1$。因此，对于 $0 < n < n_0(\rho)$,

$$||H||_\rho \leq (\rho^{p^n})^\lambda ||H||_1 \leq ||H||_1.$$

□

定义 1.10。设有 $\lambda > 0$、$\mu \geq 0$。如果无穷乘积 $\prod_n G_n$ 的类型为(λ,μ)，则称其为

1. $||G_n||_1 \leq p^{\mu}$；
2. 存在一个常数 ν，使得对任意实数 $\rho, 0 < \rho < 1$,

$$||G_n - 1||_\rho \leq p^{\nu} p^{-\lambda(n-n_0(\rho))} \quad \text{si } n \geq n_0(\rho). \tag{6}$$

命题 1.11. 一个类型为 (λ, μ)、满足 $\lambda > 0$ 且 $\mu \geq 0$ 的乘积 $\prod_n G_n$，定义了 $\mathcal{H}$中一个阶小于或等于 μ 的元素 G。

分解 $G = \prod_n G_n$ 称为具有 $\geq \lambda$ 收敛速度。

证明。由方程 (6) 可得，当 $0 < \rho < 1, ||G_n - 1||_\rho$ 在 $n \to \infty$ 时趋于 0，这证明了 $\prod_n G_n = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + (G_n - 1))$ 的收敛。由此定义了 $\mathcal{H}$中的一个元素 G。回顾一下，G 的阶是满足 $||p^{mh}G||_{\rho^{1/p^m}}$ 关于 m 有界的 h 的最小值，其中 $\rho < 1$。取 $\rho = \rho_0 = p^{-\frac{1}{p-1}}$。由于 $n_0(\rho_0^{1/p^m}) = m$,

$$||G_n - 1||_{\rho_0^{1/p^m}} \leq \begin{cases} p^{\nu} p^{-\lambda(n-m)} & \text{si } n \geq m \\ p^{\mu} & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

由此可得，若 $n \geq m + \frac{\nu}{\lambda}, ||G_n||_{\rho_0^{1/p^m}} \leq 1$。因此

$$\prod_{n=1}^{\infty} ||G_n||_{\rho_0^{1/p^m}} \leq \prod_{n=1}^{m+\lfloor \frac{\nu}{\lambda} \rfloor} ||G_n||_{\rho_0^{1/p^m}} \leq p^{\lfloor \frac{\nu}{\lambda} \rfloor \mu} p^{m\mu}$$
$$||p^{m\mu} G||_{\rho_0^{1/p^m}} \leq p^{\lfloor \frac{\nu}{\lambda} \rfloor \mu}$$

且 G 的阶小于或等于 μ。 □

命题 1.12. 对任意满足 $0 < \rho < 1$ 的实数 ρ，有

$$||\Xi_n^{J' \subset J} - 1||_\rho \leq \begin{cases} p^{\frac{p-2}{p-1}\#J + \tilde{o}_p(\#J) + \#J'} p^{-(n-n_0(\rho))\#J} & si\ n \geq n_0(\rho) \\ p^{\tilde{o}_p(\#J) + \#J'} & si\ n \leq n_0(\rho) \end{cases}$$

对于 $n > \mathrm{ord}_p((\#J - 1)!) - (\mathrm{ord}_p(u - 1) - 1)$。

证明。由于 $||\Xi^{J' \subset J} n||_1 \leq p^{\tilde{o}_p(\#J) + \#J'}$，对 $||\Xi^{J' \subset J} n - 1||_1$ 也同样成立。另一方面，$\Xi^{J' \subset J} n - 1$ 可被 $\prod_{j \in J} \omega(j)\, n - 1$ 整除，因为 $\prod_{j \in J'} (\xi(j) n p - 1)$ 是 $\prod_{j \in J,\, \omega(j)} n - 1$ 的倍数。将命题 1.9 应用于 $H = \Xi^{J' \subset J} n - 1$，其中 $||H||_1 \leq p^{\tilde{o}_p(\#J) + \#J'}$ 且 $\lambda = \#J$。 □

命题 1.13. 设 J 是 $\mathbb{Z}$ 的有限区间，J' 是 J 的一个子区间。设 N 为一个正整数。

无穷乘积 $\mathfrak{x}^{J'\subset J}\mathrm{N}=\prod_{m=N}^{\infty}\Xi^{J'\subset J}\mathrm{m}$ 的收敛速度大于或等于 #J，定义了一个阶介于 #J′ 和 $\#J'+\tilde{}o_p(\#J)$ 之间的函数，使得对于 ζ 阶为 p^n 的单位根，

$$\mathfrak{x}_N^{J'\subset J}(u^j\zeta-1)=\begin{cases}0 & si\ n\geq N\ et\ j\in J'\\ 1 & si\ n<N\ et\ j\in J.\end{cases}$$

并且在$\mathcal{H}$中被 $\mathrm{Log}^{J'}\mathrm{N}=\prod_{m=N}^{\infty}\ell^{J'}\mathrm{m}$ 整除。特别是，当 #J $<$ p 时，两个函数$\mathfrak{x}^{J'\subset J}\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{Log}^{J'}\mathrm{N}$ 的阶相同 #J′，且商 $\mathfrak{x}^{J'\subset J}\mathrm{N}/\mathrm{Log}^{J'}\mathrm{N}$ 是 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{x}]]$ 的单位。

证明。应用命题 1.11，并结合命题 1.12 的上界估计，得到阶的上界。设 ζ 是一个阶为 p^n 的单位根。对于 J $\neq\emptyset$ 且 j $\in$J，有 $\mathfrak{x}^{J'\subset JN}(\mathrm{u}^j\zeta-1)=0$ 若 n $\geq$N，而当 n $<$N 时为 1，其中 j $\in$J′。因此，函数 $\mathfrak{x}^{J'\subset JN}$ 在 $\mathcal{H}$中可被 $\mathrm{Log}^{J'_N}$ 整除。由于 p-adic 对数的阶等于 1，由此可得$\mathfrak{x}^{J'\subset JN}$ 阶的下界。根据推论 1.6，该商是一个单位。 □

令 $\mathfrak{x}^{\emptyset}{}_N=\mathfrak{x}_N^{\emptyset\subset J}=1$和 $\mathfrak{x}_N^J=\mathfrak{x}_N^{J\subset J}$。

注 1.14。一般而言，我们期望当 ζ是阶为 p^n 的单位根，且 n $\geq$N、j $\in$J –J′（当 #J $<$p 时已证明）时，$\mathfrak{x}^{J'\subset JN}(\mathrm{u}_j\,\zeta-1)$ 非零。

与 φ-滤过模相关的 2 Λ-模

2.1 与 φ-滤过模相关的多边形

这里汇集了一些经典的定义和概念（[4], [6],...）。

递增有理数列 $(a1,\cdots,a_d)$ 的关联多边形是一个多边形，其顶点为 (0, 0) 和各点 $(i\ \sum_{j=1}^{i}a_j)$，其中 i $=1,\cdots,$ d。换言之，它是从 (0, 0) 出发、连续斜率为 a_i的多边形，并在 (0, 0) 与 $(0,\infty)$ 之间以及 $(d\ \sum_{j=1}^{d}a_i)$ 与 (d ∞) 之间添加竖直半直线。由于斜率序列 (a_i) 递增，该多边形是凸的，且凹面朝向 $+\infty$。[3] 递增序列 $(a1,\cdots,a_d)$ 的关联多边形位于递增序列 $(b1,\cdots,b_d)$ 的关联多边形下方，当且仅当对所有 j $=1,\cdots,$ d，均有 $a_1+\cdots+a_j\leq b_1+\cdots+b_j$。

设 A 是一个具有初等因子理论的整环。设 M 是一个有限生成无挠 A-模，f 是从 M 到 M 的单射 A- 模同态。称 f 在 M 上的初等因子序列（史密斯不变量 [4]）为 f (M) $\subset$ M 的初等因子序列 $(a1,\cdots,a_d)$，并将其规范化，使得

$$(a_d)\subset\cdots\subset(a_1)$$

3. 我们也将凸包称为多边形。4. 与史密斯矩阵的概念有关。

（每个 a_i 在相差一个单位的意义下确定）。当 f 是从 M 到 $a^{-1}M$ 的同态（其中 $a \in A$）时，定义自然扩展为：f 在 M 上的初等因子序列是 a^{-1} 乘以 af 在 M 上的初等因子序列。若 M 的一个基 $\mathcal{B} = (v1, \cdots, v_d)$ 对 f 适配，则对于初等因子序列 $(a1, \cdots, a_d)$,

$$\sum_i A a_i^{-1} f(v_i) = M$$

或者记 $M^{(i)}$ 为由 $(v_i, \cdots, v_d)$ 生成的 A-模，如果

$$\sum_i A a_i^{-1} f(M^{(i)}) = M.$$

f 在基 $\mathcal{B}$ 下的矩阵具有 VF 的形式，其中 $V \in GL_d(A)$，而 F 是对角线为 $a1, \cdots, a_d$ 的对角矩阵。当 $A = \mathbb{Z}_p$ 时，存在一个递增的整数序列 $s_1(M), \cdots, s_d(M)$，使得 $\sum_i \mathbb{Z}_p p^{-s_i(M)} f(v_i) = M$。$p^{s_i(M)}$ 是 f (M) 在 M 中的初等因子。$M^{(i)}$ 的序列构成 M 的一个与 f 和 $\mathcal{B}$ 相关的递减滤过。

定义 2.1（$\mathbb{Z}_p$ 上的史密斯多边形）。称 (M, f) 的史密斯多边形为与 f 在 M 上的初等因子的 p 进赋值序列相关联的多边形。

定义 2.2. 设$\mathcal{D}$ 是一个 φ-模，即一个配备了双射自同态的 $\mathbb{Q}_p$-向量空间。与$\mathcal{D}$ φ关联的牛顿多边形是特征多项式 $\det_{\mathcal{D}}(1 - x\varphi)$ 的牛顿多边形。若 $\det_{\mathcal{D}}(1 - x\varphi) = 1 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$，则它是平面上点 $(i, \mathrm{ord}_p(a_i))$（其中 $i = 0, \cdots, d$）的下凸包的边界。它也等于与D的特征值赋值递增序列关联的多边形。

命题 2.3（[6], Katz，Mazur）。设$\mathcal{D}$ 是一个 φ-模，M 是$\mathcal{D}$的一个子-$\mathbb{Z}_p$-模。φ 在 M 上的史密斯多边形与 ($\mathcal{D}$ φ) 的牛顿多边形具有相同的端点，并且 φ 在 M 上的史密斯多边形位于 φ的牛顿多边形下方。

我们在此称为史密斯多边形的多边形，在 [6] 中称为霍奇多边形。此外，它旨在等于霍奇–泰特多边形。

定义 2.4. 设 $\mathcal{D}$ 是一个维数为 d 的滤过模，即一个配备了由 $\mathbb{Q}_p$-向量空间构成的递减、完备且分离的滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$ 的 $\mathbb{Q}_p$-向量空间。设 $(t_{HT,1}, \cdots, t_{HT,d})$ 是满足 $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D} / \mathrm{Fil}^{i+1} \mathcal{D}$ 非零的整数 i 按递增顺序排列所得的序列，并按 $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i \mathcal{D} / \mathrm{Fil}^{i+1} \mathcal{D}$ 给出的重数计数（霍奇–泰特权）。

因此有 $\mathrm{Fil}^{t_{HT,1}} \mathcal{D} = \mathcal{D}$, $\mathrm{Fil}^{t_{HT,1}+1} \mathcal{D} \neq \mathcal{D}$, $\mathrm{Fil}^{t_{HT,d}} \mathcal{D} \neq 0$, $\mathrm{Fil}^{t_{HT,d}+1} \mathcal{D} = 0$。若 $v \in \mathcal{D}$，则令 $t_H(v)$ 为满足 $v \in \mathrm{Fil}^j \mathcal{D}$ 的最大整数 j。

定义 2.5. 滤过模的霍奇–泰特多边形是与其 Hodge–Tate 权重递增序列相关联的多边形。

定义 2.6. 适配滤过的基是一个基 $(v1, \cdots, v_d)$，满足 $v_i \in \mathrm{Fil}^{t_{HT,\, i}} \mathcal{D}$对任意 i。因此，$(v_i, \cdots, v_d)$ 包含于 $\mathrm{Fil}^{t_{HT,\, i}} \mathcal{D}$ 中。如果霍奇–泰特权重互不相同，$(v_i, \cdots, v_d)$ 是 $\mathrm{Fil}^{t_{HT,\, i}} \mathcal{D}$ 的一个基。

设 (Δ^i) 是滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet$ 的一个分次，即一族子空间 Δ^i de $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D}$，使得投影 $\Delta^i \to \mathrm{Fil}^i \mathcal{D}/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathcal{D}$ 是一个同构。满足 $\Delta^i \neq 0$ 的所有 i 的集合就是霍奇–泰特权重的集合。我们有 $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D} = \oplus_{j \geq i} \Delta_j$ 或 $\mathrm{Fil}^{t_{\mathrm{HT},\ i}} \mathcal{D} = \oplus_{j \geq t_{\mathrm{HT},\ i}} \Delta_j$。一个适配滤过的基 $\mathcal{B} = (\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_d)$ 可用于定义这样的分次 $\Delta^\bullet$：如果 $\Delta^i \neq 0, \Delta^i$，那么它就是由满足 $\mathrm{t}_H(\mathrm{v}j) = \mathrm{i}$ 的 $\mathrm{v}j$ 所生成的子空间。

定义 2.7. 设 $(\mathcal{D}, \mathrm{Fil}^\bullet)$ 是一个滤过模，(Δ^i) 是该滤过的一个分次。定义 Hodge-Tate 斜率同态 $\mathrm{t}_{\mathrm{HT},\Delta}$：对任意 v，$\mathrm{t}_{\mathrm{HT},\Delta}(\mathrm{v}) = p^i \mathrm{v}$。如果 $\mathcal{B} = (\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_d)$ 是一个适配滤过的基，则记 $\mathrm{t}_{\mathrm{HT},\mathcal{B}}$ 为满足 $\mathrm{t}_{\mathrm{HT},\mathcal{B}}(\mathrm{v}_i) = p^{t_{\mathrm{HT}}(v_i)} \mathrm{v}_i$ 的自同态。该定义与和 $\mathcal{B}$ 相关的 Δ 的 $\mathrm{t}_{\mathrm{HT},\Delta}$ 定义相容。

定义 2.8. 若基 $\mathcal{B}$ 同时是 φ 和滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$ 的适配基，则称其适配于 φ-滤过模 $(\mathcal{D}\ \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D})$。

等价　　地说，与 φ 和 $\mathcal{B}$ 相关的滤过与滤过 Fil 重合　　$^\bullet$.

定义 2.9（例如 Fontaine，[4]）。滤过 φ-模（$\mathcal{D}\ \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet$）的一个格 M 称为强可除的，若存在一组基，使其适配于滤过 φ-模（$\mathcal{D}\ \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$），且 φ 在 M 上的史密斯多边形等于（$\mathcal{D}, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$）的 Hodge-Tate 多边形。若 $\mathcal{D}$ 有这样的格，则称 $\mathcal{D}$ 是弱可容许的。

引理 2.10. $\mathcal{D}$ 的一个格 M 强可除，当且仅当 M 有一组基 $\mathcal{B}$，适配于滤过 φ-模（$\mathcal{D}\ \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$），使得 $\varphi \circ \mathrm{t}^{-1} \mathrm{HT}_{,\mathcal{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$。

证明。取 M 的一组基 $\mathcal{B}$，使其适配于滤过以及 φ。霍奇–泰特多边形与史密斯多边形的端点相等，意味着 φ 的行列式的赋值等于 $\sum_{v \in \mathcal{B}} \mathrm{t}_H(\mathrm{v})$（此性质与所选基或格无关）。因此，$\varphi \circ \mathrm{t}^{-1} \mathrm{HT}'_{\mathcal{B}}$ 的行列式是一个单位。

假设 $(\mathrm{M}\ \varphi)$ 的史密斯多边形与 $\mathcal{D}$ 的 Hodge-Tate 多边形相等：对于 $\mathrm{v} \in \mathcal{B}$，有 $\varphi(\mathrm{v}) \in p^{t_{H(v)}} \mathrm{M}$。因此 $\varphi \circ \mathrm{t}^{-1} \mathrm{HT}_{,\mathcal{B}}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{M}$。故二者相等。根据 φ 的初等因子的定义，反过来显然成立。 □

定理 2.11（Laffaille [5]）。当且仅当满足以下数值判据时，φ-滤过模 $(\mathcal{D}\ \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D})$ 弱可容许：

1. $(\mathcal{D}, \mathrm{Fil}^\bullet)$ 的 Hodge-Tate 多边形与 $(\mathcal{D}\ \varphi)$ 的牛顿多边形端点相同；2. 对于每个 $\mathcal{D}'$ 的子模，若其在 φ 作用下稳定，则 $(\mathcal{D}', \mathcal{D}' \cap \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D})$ 的 Hodge-Tate 多边形位于 $(\mathcal{D}', \varphi|_{\mathcal{D}'})$ 的牛顿多边形之下。

在 [12] 和 [2]中的细化定义并不相同。

定义 2.12（[12]）。φ-模 $\mathcal{D}$ 的一个细化是一个由 φ 稳定的完全旗 $\mathcal{F}_\bullet = (\mathcal{F}_i)$。适配细化 $\mathcal{F}$ 的基是 $\mathcal{D}$ 的一组基 $(\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_d)$，满足 $\mathcal{F}_i = (\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_i)$。

定义 2.13。滤过 φ-模$\mathcal{D}$的一个细化，是指给定$\mathcal{F}_\bullet$的 φ-模$\mathcal{D}$的一个细化，使得$\mathcal{F}_i \cap \mathrm{Fil}^{t_H,i}\mathcal{D} \neq \{0\}$且$\mathcal{F}_i \cap \mathrm{Fil}^{t_H,i+1}\mathcal{D} = \{0\}$对任意 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{d}$ 均成立。

此外，若霍奇–泰特权重互不相同，则有 $\mathcal{D} = \mathcal{F}_i \oplus \mathrm{Fil}^{t_H,i+1}\mathcal{D}$。也称其为 $\mathcal{D}$([2]) 的非临界精化。

定义 2.14. 若基 $\mathcal{B}$适配于 φ-滤过模 $(\mathcal{D}, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D})$ 的精化$\mathcal{F}_\bullet$，则称其为适配基；也就是说，$\mathcal{B}$适配于滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathcal{D}$和旗$\mathcal{F}_\bullet$。

一般而言，这样的基$\mathcal{B}$并非 φ-滤过模 $(\mathcal{D}, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D})$ 的适配基.

注记 2.15. 假设 D 的霍奇–泰特权重互不相同，且 φ 可对角化。若 $\mathrm{B} = (\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_d)$ 适配于精化 $\mathrm{F}_\bullet$，则 $(\mathrm{v}_i, \cdots, \mathrm{v}_d)$ 是 $\mathrm{Fil}^{t_H,i}\mathrm{D}$ 的一组基，而 $(\mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_i)$ 是 F_i 的一组基。t_{HT},B 在基 B 下的矩阵是对角矩阵 $\mathrm{p}^{t_H,1} \ldots \mathrm{p}^{t_H,d}$。存在由特征向量组成的基 $\mathrm{B}_0 = (\mathrm{e}1, \cdots, \mathrm{e}_d)$，使得

$(\mathrm{e}1, \cdots, \mathrm{e}_i)$ 是 F_i 的一组基。基 B 中向量在基 B_0 下的矩阵 P 是上三角矩阵，并且可以设为幺幂矩阵：$\mathrm{P} = ((\lambda_{i,j}))$，其中 $\lambda_{i,j} = 0$（若 $\mathrm{i} > \mathrm{j}$），且 $\lambda_{i,i} = 1$。若 $\varphi\mathrm{B}_0$ 是 φ 在基 B_0, 下的对角矩阵，则由 B 张成的格强可除，当且仅当幺幂矩阵 $\mathrm{P}\varphi\mathrm{B}_0\mathrm{P}^{-1}\varphi^{-1}\mathrm{B}_0$属于 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$。这可转化为关于 λ_i，j 的 p 进赋值的显式条件。

定义 2.16. 记 $\mathbb{Q}_p[\mathrm{i}]$为 φ 的 Tate 滤过模，它定义为带有滤过 $\mathrm{Fil}^i\mathbb{Q}_p[\mathrm{i}] = \mathbb{Q}_p$、$\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbb{Q}_p[\mathrm{i}] = 0$以及由乘以 p^i 给出的自同态 φ 的 $\mathbb{Q}_p$ 向量空间 $\mathbb{Q}_p$。记 $\mathcal{D}[\mathrm{i}] = \mathcal{D} \otimes \mathbb{Q}_p[\mathrm{i}]$ 为 $\mathcal{D}$经过 $\mathbb{Q}_p[\mathrm{i}]$ 扭曲所得的模。

2.2 对数模的定义。

设 $\mathrm{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$。

定义 2.17. 1. 对于 $\mathrm{N} \geq 0$，记 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 为 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 的子模，由满足下列条件的元素 G 构成

$$(1 \otimes \varphi)^{-(n+1)} g(u^j \zeta - 1) \in K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathcal{D}$$

对于所有 $\mathrm{j} \leq t_{\mathrm{HT},d}$ 以及所有阶为 p^n 的单位根 ζ，其中 $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$。

2. 记 $\mathrm{L}_{eul}(\mathcal{D})$ 为 $\mathrm{L}_1(\mathcal{D})$ 的子模，由满足下列条件的元素 g 构成

$$(1 - p^{-1+j}\varphi^{-1}) g(u^j - 1) \in (1 - p^{-j}\varphi)\,\mathrm{Fil}^j \mathcal{D}$$

对 $\mathrm{j} \leq t_{\mathrm{HT},d}$。

3. 对于 $\mathrm{N} < 0$，记 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 为 $\mathrm{L}_0(\mathcal{D})$ 中由满足 $\mathrm{g}(\mathrm{u}_j\,\zeta - 1) = 0$ 对所有 $\mathrm{j} \in]t_{\mathrm{HT},1}、t_{\mathrm{HT},d}]$，且 ζ阶整除 $\mathrm{p}^{|N|-1}$ 的元素 g 构成的子模。

对于 $\mathrm{N} \geq 0$，在定义 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 时，$\mathrm{j} \leq t_{\mathrm{HT},1}$ 的条件是自动满足的，因为此时 $\mathrm{Fil}\,_j\mathcal{D}$等于 $\mathcal{D}$。如果 $\mathcal{D}$只有一个 Hodge–Tate 权重，那么对于任意 N，$\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$ 都是 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$。

定义 2.18. 1. 设 $\mathcal{D}$是一个 φ-模。若存在一个实数 t，使得序列 $(||\mathrm{p}^{tn}(1\otimes\varphi)^{-n}\mathrm{g}||_{\rho^{1/p^n}})_n$ 对某个 $\rho<1$ 有界，则称 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$中的元素 g 为有限阶元素。此时将其斜率定义为所有此类 t 中的最小值。

2. 设$\mathcal{D}$为一个 φ-滤过模。若$\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$中的元素 g 存在一个实数 t，使得序列 $(||\mathrm{p}^{(t+t_{\mathrm{HT},d})n}(1\otimes\varphi)^{-n}\mathrm{g}||_{\rho^{1/p^n}})_n$ 对某个 $\rho<1$有界，则称其具有有限斜率。此时，将这些 t 中的最小值定义为它的斜率。

对于 φ-滤过模，斜率概念在经过 $\mathbb{Q}_p[\mathrm{i}]$ 扭曲后保持不变，因为 $t_{\mathrm{HT},d}(\mathcal{D}[\mathrm{i}])=t_{\mathrm{HT},d}(\mathcal{D})+\mathrm{i}$ $\varphi_{\mathcal{D}[i]}=\mathrm{p}^i\varphi_{\mathcal{D}}$。一个 φ-模可以视为带有平凡滤过 $\mathrm{Fil}^0\mathcal{D}=\mathcal{D},\mathrm{Fil}^1\mathcal{D}=0$ 的 φ-滤过模。此时，这两个概念一致，且都是 [7], 中斜率概念的特例；但为作区分，我们保留 [14] 中使用的阶（或 φ-阶）这一术语。

定义 2.19. 设 $\mathcal{D}$是一个 φ-滤过模。若 M 是 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$的一个 $\mathcal{H}$-子模，则将$\mathcal{E}_t(\mathrm{M})$定义为由 M 中斜率小于或等于 t 的元素生成的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-子模。若 t 是满足$\mathcal{H}\mathcal{E}_t(\mathrm{M})=\mathrm{M}$ 的最小实数，则称 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$的一个 $\mathcal{H}$-子模 M 的斜率为 t。

2.3 构造 L($\mathcal{D}$) 的有限阶元素

固定一个适配于 $\mathcal{D}$ 的滤过的$\mathcal{B}$ 基。设 $\Delta_{\mathcal{B}}$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上相应的分次，M 是由$\mathcal{B}$生成的 $\mathcal{D}$ 的格。将自同态的范数定义为其矩阵在$\mathcal{B}$基下各系数范数的最大值：有 $||\mathrm{f}\,\mathrm{g}||_{\mathcal{B}}\leq||\mathrm{f}||_{\mathcal{B}}||\mathrm{g}||_{\mathcal{B}}$。

令 $t'_{\mathrm{HT},d}$为大于或等于 $t_{\mathrm{HT},d}$的最小整数，并且满足 $t'_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},1}>t_{\mathrm{N},d}-t_{\mathrm{N},1}$。在接下来研究的特殊情形中，有 $t'_{\mathrm{HT},d}=t_{\mathrm{HT},d}$ 或 $t_{HT,d}+1$。下文中，J 是 $\mathbb{Z}$的一个区间，包含 $]t_{\mathrm{HT},1},t'_{\mathrm{HT},d}]$。实际应用中，我们取 J 为 $]t_{\mathrm{HT},1},\mathrm{h}]$，其中 $\mathrm{h}\geq t'_{\mathrm{HT},d}$。对于 $\mathrm{n}\geq 0$，记 $\mathrm{T}^{\mathrm{J}}_{\Delta\mathrm{B},\mathrm{n}}$ 为 $\mathrm{H}\otimes\mathrm{D}$ 上的自同态，对 $\mathrm{v}\in\Delta^i\mathrm{B}$，定义为

$$T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}(v)=\Xi_n^{]i,t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}\cdot v$$

（当 $\Delta^i_{\mathcal{B}}$ 非零时，i 是 $t_{\mathrm{HT},j}$ 之一。）

定理 2.20. 设 D 是一个 φ-滤过模。对于包含 $]t_{HT,1},t'_{HT,d}]$的 J，递归定义从 H 到 $H\otimes D$ 且取值于 $H\otimes D$ 的 H-线性映射序列

$$P^J_{\mathcal{B},N,n}=(1\otimes\varphi)^{n+1}T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n-1}\ pour\ n>N$$

以及 $\mathrm{P}^{J}{}_{\mathcal{B},\mathrm{N},\mathrm{N}}=\mathrm{Id}$。对于 $\mathrm{n}\geq\mathrm{N}$，有

$$P^J_{\mathcal{B},N,n+1}\equiv P^J_{\mathcal{B},N,n}\bmod\Omega^J_n. \tag{7}$$

对于 $\mathrm{v}\in\mathcal{D}$，序列 $\mathrm{P}^{J}{}_{\mathcal{B},\mathrm{N},\mathrm{n}}(\mathrm{v})$ 在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 中收敛。极限 $\mathrm{Per}^{J}{}_{\mathcal{B},\mathrm{N}}$ 的行列式等于 $\prod_{k=1}^{d}\mathfrak{X}^{]t_{HT,k},t_{HT,d}]\subset\mathrm{J}}\,\mathrm{N}$，相差一个 $\mathcal{H}$单位。

也可以用 h 而非 J 为引入的对象编序，其中 $h \geq t'_{HT,d}(J =]t_{HT,1}, h]$,见 [14])。

定理 2.20 的证明。我们来证明方程 (7)。对于 $n > N$，有

$$P^J_{\mathcal{B},N,n} - P^J_{\mathcal{B},N,n-1} = (1\otimes\varphi)^{n+1}(T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n} - \mathrm{Id})(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n-1}. \tag{8}$$

在 $\Delta^i_{\mathcal{B}}$不约化为 $\{0\}$(此时 $i = t_{HT,j}$，其中 j 介于 1 和 d 之间)的情况下，$T^{J^{\Delta_{\mathcal{B}}n}} - \mathrm{Id}$ 是乘以 $\Xi^{]t_{HT,d}]\subset Jn-1}$ 的运算，且可被 Ω^J_{n-1} 整除。因此，

$$P^J_{\mathcal{B},N,n} \equiv P^J_{\mathcal{B},N,n-1} \bmod \Omega^J_{n-1},$$

由此得到方程 (7)。对于 $0 < \rho < 1$，有

$$||T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n} - \mathrm{Id}||_{\mathcal{B},\rho} = \max_i ||\Xi_n^{]t_{HT,i},t_{HT,d}]\subset J} - 1||_\rho.$$

应用命题 1.12，对于 $n \geq n_0(\rho)$,

$$||T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n} - \mathrm{Id}||_{\mathcal{B},\rho} \leq p^{\frac{p-2}{p-1}\#J + \tilde{o}_p(\#J) + t_{HT,d} - t_{HT,1}} p^{-(n-n_0(\rho))\#J}. \tag{9}$$

因此，对于 $n \geq n_0(\rho)$,

$$\begin{aligned}||P^J_{\mathcal{B},N,n} - P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho &\leq ||\varphi^{n+1}||_{\mathcal{B}}||\varphi^{-(n+1)}||_{\mathcal{B}}||T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n} - \mathrm{Id}||_\rho||P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho \\ &\leq ||\varphi^{n+1}||_{\mathcal{B}}||\varphi^{-(n+1)}||_{\mathcal{B}} p^{\frac{p-2}{p-1}\#J + \tilde{o}_p(\#J) + t_{HT,d} - t_{HT,1}} p^{-(n-n_0(\rho))\#J}||P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho.\end{aligned}$$

On a

$$\lim_n \frac{\mathrm{ord}_p(||\varphi^{n+1}||_{\mathcal{B}})}{n} = -t_{N,1}, \quad \lim_n \frac{\mathrm{ord}_p(||\varphi^{-(n+1)}||_{\mathcal{B}})}{n} = t_{N,d}.$$

由此可得，当 n 充分大时，

$$||P^J_{\mathcal{B},N,n} - P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho \leq C(\rho)p^{-(n-n_0(\rho))(\#J - t_{N,d} + t_{N,1})}||P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho.$$

根据假设，$\#J \geq t'_{HT,d} - t_{HT,1} > t_{N,d} - t_{N,1}$。因此，当 n 充分大时，我们有 a

$$||P^J_{\mathcal{B},N,n}||_\rho \leq \max(||P^J_{\mathcal{B},N,n} - P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho, ||P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho) \leq ||P^J_{\mathcal{B},N,n-1}||_\rho$$

并且序列 $||P^J_{\mathcal{B},N,n}||_\rho$ 关于 n 有界。

$P^J_{\mathcal{B},N,n}$ 的行列式等于 $\prod_{s=1}^d \left(\prod_{m=N}^n \Xi^{]t_{HT,s},t_{HT,d}]\subset Jm}\right)$。取极限可得，$\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}$ 的行列式等于 $\prod_{s=1}^d \mathfrak{X}^{]t_{HT,s},t_{HT,d}]\subset J\,N}$。 □

定理 2.21. 由 $\mathcal{D}$在 $\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B}}N$ 下的像所生成的 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-子模 $\mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B}}N$ 包含于 $L_N(\mathcal{D})$ 中。其斜率 $sl(\mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B}}N)$ 满足

$$t_{N,1} - t_{HT,d} \leq sl(\mathfrak{L}^J_{\mathcal{B},N}) \leq \mathrm{ord}_p(||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}) - t_{HT,1} + \tilde{o}_p(\#J).$$

注记 2.22. 模 $\mathfrak{L}^J_{\mathcal{B},N}$ 在扭曲下表现良好，所得到的界限也在扭曲下保持不变。

证明。为证明 $\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}$ 的像包含于 $\mathrm{L}_N(\mathcal{D})$，计算 $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$、$\zeta$ 阶为 p^n 的一个单位根以及 j 属于 $]t_{\mathrm{HT},1}, t_{\mathrm{HT},d}]$ 时的 $(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}(u^j\zeta-1)$：

$$\begin{aligned}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}(u^j\zeta-1) &= (1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n}(u^j\zeta-1)\\ &= T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}(u^j\zeta-1)(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n-1}(u^j\zeta-1)\end{aligned}$$

对于 $i \in \{t_{\mathrm{HT},1}, \cdots, t_{\mathrm{HT},d}\}$ 以及 $t_{\mathrm{HT},1} < j \leq t_{\mathrm{HT},d}$，$T\,J^{\Delta}B_{\cdot}n(u^j\zeta-1)$ 在 $\Delta^i B$ 上的限制为 $\Xi^{]i}{}_{,t_{\mathrm{HT}},d]}\subset \mathrm{Jn}\,(u^j\zeta-1)\mathrm{Id}_{\Delta^i B}$。对于 $j > i$，$]i, t_{\mathrm{HT},d}]$ 包含 j 的情形，$\Xi^{]i}{}_{,t_{\mathrm{HT}},d]}\subset \mathrm{Jn}\,(u^j\zeta-1)$ 为零。因此，$T\,J^{\Delta}B_{\cdot}n(u^j\zeta-1)|^{\Delta^i}B$ 为零。于是，$T\,J^{\Delta}B_{\cdot}n(u^j\zeta-1)$ 的像包含于 $K_n\otimes\left(\oplus_{i\geq j}\Delta^i B\right) = K_n\otimes \mathrm{Fil}^j D$。$(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^J B,N\,(u^j\zeta-1)$ 的像也同样如此。

证明关于斜率的断言。取 $\rho=\rho_0$ 和 $\rho_n=\rho_0^{1/p^n}$。下文中引入的常数均与 n 无关。我们有

$$(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N} = (1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n} + \sum_{m=n}^{\infty}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}(P^J_{\mathcal{B},N,m+1}-P^J_{\mathcal{B},N,m}).$$

令 $B_{n,\mathcal{B}} = T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}\circ(1\otimes\varphi)^{-1}$。对于 $n \geq N$，有

$$\begin{aligned}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n} &= B_{n,\mathcal{B}}\cdots B_{N,\mathcal{B}}\\ (1\otimes)^{-(n+1)}\left(P^J_{\mathcal{B},N,n}-P^J_{\mathcal{B},N,n-1}\right) &= \left(T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}-\mathrm{Id}\right)(1\otimes\varphi)^{-1}B_{n-1,\mathcal{B}}\cdots B_{N,\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

根据命题 1.12，存在一个整数 $\gamma(J)$，使得 $||\Xi^{]i}{}_{,t_{\mathrm{HT}},d]\subset Jm}||_{\rho_n}\leq 1$ 对于 $m \geq \gamma(J)+n_0(\rho)$。对于 $n > n_0(\rho)$，有

$$\begin{aligned}||B_{n-1,\mathcal{B}}\cdots B_{n_0(\rho),\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},\rho} &\leq \left(\prod_{m=n_0(\rho)}^{n_0(\rho)+\gamma(J)-1}\max_i||\Xi_m^{]i,t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}||_{\rho}\right)||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}^{n-n_0(\rho)}\\ &\leq p^{(\tilde{o}_p(\#J)+t_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},1})\gamma(J)}||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}^{n-n_0(\rho)}\end{aligned}$$

et

$$||B_{n-1,\mathcal{B}}\cdots B_{1,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},\rho} \leq p^{(\tilde{o}_p(\#J)+t_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},1})(\gamma(J)+n_0(\rho)}||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}^{n}.$$

因此，对于 $m \geq n$，

$$\begin{aligned}||(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}(P^J_{\mathcal{B},N,m+1}-P^J_{\mathcal{B},N,m})||_{\mathcal{B},\rho_n} &\leq C_4||\varphi^{m-n}||_{\mathcal{B}}||T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},m}-\mathrm{Id}||_{\mathcal{B},\rho_n}||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}^{m-n}||B_{n,\mathcal{B}}\cdots B_{1,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},\rho_n}\\ &\leq C_5 p^{-(m-n)(\#J-\mathrm{ord}_p(||\varphi||||\varphi^{-1}||))}||B_{n,\mathcal{B}}\cdots B_{1,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},\rho_n}\\ &\leq C_5||B_{n,\mathcal{B}}\cdots B_{1,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},\rho_n} = C_5||(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}P^J_{\mathcal{B},N,n}||_{\mathcal{B},\rho_n}.\end{aligned}$$

因此，接下来只需给 $(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{P}^{J}_{\mathcal{B},\ N,\ n}=\mathrm{B}_{n,\ \mathcal{B}}\cdots\mathrm{B}_{1,\mathcal{B}}$ 的范数作上界。由命题 1.4 以及等式 $\mathrm{B}_{k,\ \mathcal{B}}=\mathrm{T}^{J}_{\Delta_{\mathcal{B}},\ k}\circ(1\otimes\varphi)^{-1}$，可得

$$||B_{k,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},1}\leq p^{\tilde{o}_p(\#J)+t_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},1}}||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}}.$$

因此，

$$||(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^{J}_{\mathcal{B},N}||_{\mathcal{B},\rho_n}\leq C_5 p^{n\left(\tilde{o}_p(\#J)+t_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},1}+\mathrm{ord}_p(||\varphi^{-1}||_{\mathcal{B}})\right)}.$$

序列 $||\mathrm{p}^{n(\tilde{o}_p(\#\mathrm{J})+\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}-\mathrm{t}_{\mathrm{HT},1}+\mathrm{ord}_p(||\varphi^{-1}||\mathrm{B}))}(1\otimes\varphi)^{-n}\mathrm{Per}^{J}\mathrm{B,N}||\mathrm{B}_{\ \rho_n}$ 有界。因此，$\mathrm{H}\ \otimes\mathrm{D}$ 中的子模 $\mathfrak{L}^{J}\mathrm{B,N}$ 的斜率小于或等于 $\mathrm{ord}_p(||\varphi^{-1}||\mathrm{B})-\mathrm{t}_{\mathrm{HT},1}+\tilde{\ }\mathrm{o}_p(\#\mathrm{J})$。

$\mathrm{Per}^{J}_{\mathcal{B},N}$ 的斜率大于 $\mathrm{t}_{\mathrm{N},1}-\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}$。事实上，若 $||\varphi^{n+1}||_{\mathcal{B}}=\mathrm{p}^{-s_n}$，$s_n$ 是满足 $\varphi^{n+1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}\subset\mathrm{p}^{s_n}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ 的最大有理数，这等价于 $\mathrm{p}^{-s_n}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}\subset\varphi^{-(n+1)}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$。于是

$$||p^{-s_n}\mathrm{Per}^{J}_{\mathcal{B},N}||_{\mathcal{B},\rho_n}\leq||(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^{J}_{\mathcal{B},N}||_{\mathcal{B},\rho_n}.$$

设 h 为一个整数，使得 $||\mathrm{p}^{hn}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)}\mathrm{Per}^{J}\mathrm{B,N}||\mathrm{B}_{\ \rho_n}$ 有界。那么，$||\mathrm{p}^{(h-s)n}\mathrm{Per}^{J}\mathrm{B,N}||\mathrm{B}_{\ \rho_n}$ 有界，且 $\mathrm{s}=\limsup\mathrm{s}_{\ n}=-\mathrm{t}_{\mathrm{N},1}$。由于 $\mathrm{Per}^{J}\mathrm{B,N}$ (D) 包含于 $\mathrm{H}\ \otimes\mathrm{D}$ 中，因此 $\mathrm{h}-\mathrm{s}\geq 0$。根据斜率的定义，这意味着 $\mathrm{Per}^{J}\mathrm{B,N}$ 的斜率大于 $\mathrm{t}_{\mathrm{N},1}-\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}$。关于 $\mathfrak{L}^{J}\mathrm{B,N}$ 的斜率的断言可轻易得出。□

在对$\mathcal{B}$作出额外假设后，可以更精确地确定斜率。

定理 2.23. 假设基$\mathcal{B}$适配于 φ-滤过模$\mathcal{D}$，且 $\mathrm{t}_{sm,1},\cdots,\mathrm{t}_{sm,d}$是由$\mathcal{B}$生成的 $\mathbb{Z}_p$-模的史密斯不变量。那么，$\Lambda_{\mathbb{Z}_p}$-模$\mathfrak{L}^{J}{}_{\mathcal{B},}\mathrm{N}$ 的斜率 $\mathrm{sl}(\mathfrak{L}^{J}{}_{\mathcal{B},}\mathrm{N})$ 满足

$$\min_{1\leq i\leq d}(t_{sm,i}-t_{HT,i})\leq sl(\mathfrak{L}^{J}_{\mathcal{B},N})\leq\max_{1\leq i\leq d}(t_{sm,i}-t_{HT,i})+\tilde{o}_p(\#J).$$

证明. 沿用前面定理证明中的记号。在基$\mathcal{B}$下，φ^{-1}的矩阵具有 $\mathrm{diag}(\mathrm{p}^{-t_{sm,1}},\cdots,\mathrm{p}^{-t_{sm,d}})\mathrm{U}$ 的形式，其中 $\mathrm{U}\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$。$\mathrm{B}_{n,\mathcal{B}}$ 的矩阵为

$$diag(p^{-t_{sm,1}}\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J},\cdots,p^{-t_{sm,d}}\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},d},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J})U$$

et

$$p^{\min_{1\leq i\leq d}(t_{sm,i}-t_{\mathrm{HT},i}+t_{\mathrm{HT},d})}\leq||B_{n,\mathcal{B}}||_{\mathcal{B},1}\leq p^{\max_{1\leq i\leq d}(t_{sm,i}-t_{\mathrm{HT},i}+t_{\mathrm{HT},d}+\tilde{o}_p(\#J))}$$

（若 D 是对角矩阵，则有 $||\mathrm{DU}||_1=||\mathrm{D}||_1$）。沿用前一个证明中计算斜率的方法，即可推出该定理。□

推论 2.24. 若$\mathcal{D}$ 是一个弱可容许的 φ-滤过模，且$\mathcal{B}$ 是生成强可除格的φ-滤过模的一组适配基，则有

$$0\leq sl(\mathfrak{L}^{J}_{\mathcal{B},N})\leq\tilde{o}_p(\#J).$$

特别是，如果 $\tilde{\ }\mathrm{o}_p(\#\mathrm{J})=0$，$\mathrm{sl}(\mathfrak{L}^{J}{}_{\mathcal{B},}\ \mathrm{N})$ 为零。

证明。生成一个强可除格的基 $\mathcal{B}$，与该格相关的史密斯多边形等于滤过的 Hodge-Tate 多边形。 □

同样地，对于 N ≥ 1，可以构造 $L_{-N}(\mathcal{D})$ 的子-$\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-模。

1. 设 $\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B}\ -N}$ 为借助由下式定义的序列构造的自同态：$\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},N}$

$$P^J_{\mathcal{B},-N,n} = (1\otimes\varphi)^{n+1} T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},n}(1\otimes\varphi)^{-(n+1)} P^J_{-N,\mathcal{B},n-1}$$

对于 n $\geq$ N 且 $P^J_{-N,\mathcal{B},N-1} = \Omega^J_{N-1}\mathrm{Id}$。与之对应的 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ 的子-$\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-模 $\mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B}\ -N}$ 包含于 $L_{-N}(\mathcal{D})$ 中。

2. 假设 φ 不具有形如 p^j 的特征值，并取首项为

$$P^J_{\mathcal{B},eul,0} = (1\otimes\varphi)_{eul} T^J_{\Delta_{\mathcal{B}},0}(1\otimes\varphi)^{-1}_{eul}$$

其中 $(1\otimes\varphi)_{eul}$ 是 $\mathbb{Z}_p[x]\otimes\mathcal{D}$ 的自同态，其次数严格小于 #J，且满足

$$(1\otimes\varphi)_{eul}(u^j-1) = (1-p^{-j}(1\otimes\varphi))(1-p^{-1+j}(1\otimes\varphi)^{-1})^{-1}$$

对于 j $\in$ J。所得子-$\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-模 $\mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B},eul}$ 包含于 $\mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B}},1$ 中。它考虑了“经典”欧拉因子。

命题 2.25. 设 N 为一个整数 ≥ 0。

1. 映射 θ_N: $\mathfrak{L}^J B,N_{+1}/\mathfrak{L}^J B,N \to \prod_{j\in]t_{HT},1,t_{HT,d}]} K_N\otimes(D/\mathrm{Fil}\ j\ D)$ 是满射。2. 映射 θ^N: $\mathfrak{L}^J B\ -N/\mathfrak{L}^J B\ -N_{+1} \to \prod_{j\in]t_{HT},1,t_{HT,d}]} K_N\otimes \mathrm{Fil}\ j\ D$ 是满射，若在 $t'_{HT,d}\neq t_{HT,d}$, $\Xi^{]t}{}_{,t_{HT,d}]\subset}$ J N $(u^{t_{HT}}{}_{,1+1}\zeta_N-1)$ 非零的情形下。

证明. 设 j $\in]t_{HT},1,t_{HT,d}]$. 有 $\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},N+1}(u_j\ \zeta_N-1) = P^J{}_{\mathcal{B},N+1,N}(u_j\ \zeta_N-1) = \mathrm{Id}$. 因此 θ_N 是满射。θ^N 的满射性来自

$$\begin{aligned}(1\otimes\varphi)^{-(N+1)}\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},-N}(u^j\zeta_N-1) &= (1\otimes\varphi)^{-(N+1)}P^J_{\mathcal{B},-N,N}(u^j\zeta_N-1)\\ &= diag_v([\Xi_N^{]t_{HT,v},t_{HT,d}]\subset J}(u^j\zeta_N-1)]_v)(1\otimes\varphi)^{-(N+1)}\prod_{j'\in]t_{HT,1},t_{HT,d}]}(u^{(j-j')p^{N-1}}\zeta_N^{p^{N-1}}-1).\end{aligned}$$

□

注记 2.26。$\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},N}$ 的行列式是 $\prod_{j=1}^d(\mathrm{Log}^{[\ ]}_{j\ N})^{\dim_{\mathcal{D}}/\mathrm{Fil}^j\mathcal{D}}$ 的一个倍数。它是一个阶介于 $t_{HT}(\mathcal{D})$ 和 $t_{HT}(\mathcal{D})+\tilde{o}_p(\#J)\times\dim\mathcal{D}$ 之间的函数。将其视为 φ-滤过模 $\mathcal{H}\otimes\det\mathcal{D}$ 的元素时，其斜率介于 0 和 $\tilde{o}_p(\#J)\times\dim\mathcal{D}$ 之间。

2.4 与细化相关的构造

我们将重新审视这一构造，以凸显它对 φ-滤过模的依赖关系。为简化起见，在本段中假设$\mathcal{D}$的霍奇–泰特权重互不相同，且 φ 可对角化，尽管这并非必要。特别地，$\mathrm{Fil}^{t_{\mathrm{HT},i}}\mathcal{D}$的维数为 d +1 –i。

给定滤过模$\mathcal{F}_\bullet$的 φ-模$\mathcal{D}$的一个细化。设$\mathcal{B}=(v1,\cdots,v_d)$是$\mathcal{D}$的一组基，适配于此细化：$(v1,\cdots,v_d)$适配于滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet$，且$\mathcal{F}_i=\langle v1,\cdots,v_i\rangle$在 φ下稳定。设$\mathcal{B}_0=(e1,\cdots,e_d)$是$\mathcal{D}$的一组由特征向量构成的基，使得$(e1,\cdots,e_i)$是$\mathcal{F}_i$的一组基。基$\mathcal{B}$在基$\mathcal{B}_0$下的矩阵 P 是上三角矩阵，并且可以假设它是幺幂的：$P=((\lambda_{i,j}))$，其中 $\lambda_{i,j}=0$ 当 i > j 时，且 $\lambda_{i,i}=1$。

定理 2.27。设 $F_\bullet$是滤过模 D 的一个细化，B 和 B_0是上述基。设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 是与 $F_\bullet$相关联的特征值序列：$\varphi e_i=\alpha_i e_i$。设 J 是 $\mathbb{Z}$ 的一个有限区间，包含 $]t_{HT},1,t_{HT,d}]$，且满足 # J > max j≥i $\mathrm{ord}_p(\alpha_j/\alpha_i)$。自同态 Per^JB,N 是关于 $\lambda_{i,j}$（i < j）的次数为 ≤d −1 的多项式。B,N 的斜率小于或等于 $\tilde{o}_p(\#J)+\max_{i\le k}(\mathrm{ord}_p(\alpha_k)-t_{HT,i})$。

证明。对 n ≥N，取 $P^J{}_{\mathcal{B},N,n}$，并记 Z^n 为它在基 $\mathcal{B}_0$下的矩阵。T_n 在基 $\mathcal{B}_0$ 下的矩阵 $T^J{}_{\mathcal{B},n}$ 等于 $P\mathrm{diag}([\Xi^{]t_{\mathrm{HT},i},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J_n}])P^{-1}$，其系数为

$$t_{i,j}^{(n)}=\begin{cases}0 & \text{pour } i>j\\ \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},i},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J} & \text{pour } i=j\\ \sum_{k=i}^{j}\lambda_{i,k}\lambda'_{k,j}(\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},k},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}-1) & \text{pour } i<j\end{cases}$$

其中 $\lambda'_{i,j}$是矩阵 P^{-1}的系数。在基 $\mathcal{B}_0$下，φ的矩阵 $\varphi_{\mathcal{B}_0}$是对角线为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 的对角矩阵。因此，矩阵 Z_n是一个上三角矩阵，其对角系数为

$$\Big(\prod_{m=N}^{n}\Xi_m^{]t_{\mathrm{HT},i},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}\Big)_{i=1,\cdots,d}$$

且系数 $Z_{n,i,j}$（i < j）满足递推关系

$$Z_{n,i,j}=\sum_{i\le l\le j}\Big(\frac{\alpha_i}{\alpha_l}\Big)^{n+1}t_{i,l}^{(n)}Z_{n-1,l,j}=\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},i},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}Z_{n-1,i,j}+\sum_{i<l\le j}\Big(\frac{\alpha_i}{\alpha_l}\Big)^{n+1}t_{i,l}^{(n)}Z_{n-1,l,j}.$$

先给出以下引理。

引理 2.28。设 A 是一个整环。设 P 和 Q 是两个系数属于多项式环 $A[x_1,\cdots,x_n]$v 的上三角矩阵，并满足以下性质：

(*) 对任意 i ≤j，系数 (i, j) 是一个总次数小于或等于 j –i 的多项式。

1. 乘积 PQ 也满足条件(*)。

2. 此外，若 P 是幺幂矩阵且次数为 ≤ 1，则 P^{-1} 满足条件 (*)。

证明。对于第一个断言，只需写出乘积公式。对于第二个断言，写作 $P = Id + N$，其中 N 是幂零上三角矩阵。因此，$P^{-1} = Id - N + N^2 - \cdots + (-1)^{d-1}N^{d-1}$。$P^{-1}$ 的第 (i, j) 个系数，就是矩阵 $Id - N + N^2 - \cdots (-1)^{d-1}N_{j-i}$ 的第 (i, j) 个系数，其次数为 $\leq j - i$。 □

继续证明定理 2.27。将引理 2.28 应用于 P^{-1}、P 与 $\mathrm{diag}([\Xi^{]t_{HT},k}, t_{HT,d}] \subset J_n]_k)P^{-1}$ 的乘积，以及当 $m \leq n$ 时此类矩阵的乘积。由此可得，对于 $i \leq l$，$t^{(n)}_{i,l}$ 是关于 $\lambda_{k,k'}$ 的多项式，其总次数小于或等于 $l - i$，且系数属于 H 的 $\mathbb{Z}_p$-模，该模由 $\Xi^{]t_{HT},h}, t_{HT,d}] \subset J_{n-1}$（其中 $i \leq h \leq l$）生成；而 $Z_{n,i,j}$ 在 Z_n 中的系数，是关于 $\lambda_{k,l}$ 的多项式，其总次数小于或等于 $j - i \leq d - 1$。因此，当 $i \leq l$ 且 n 充分大时，

$$||(\frac{\alpha_i}{\alpha_l})^{n+1} t^{(n)}_{i,l}||_\rho \leq C(\rho) p^{-n\left(\#J + \mathrm{ord}_p(\alpha_i/\alpha_l)\right)}$$

且对于 $i \leq j$,

$$||Z_{n,i,j} - Z_{n-1,i,j}||_\rho \leq C'(\rho) p^{-n(\#J - \max_{i \leq l \leq j} \mathrm{ord}_p(\alpha_l/\alpha_i))}$$

其中 $C(\rho)$ 和 $C'(\rho)$ 是涉及 $||P||_1^d$ 且满足 $||P||_1 = \max(|\lambda_{k,k'}|_p)$ 的常数。由此可得 Z_n 的收敛。更具体地，当 $\#J > \max_{i \leq l \leq j} \mathrm{ord}_p(\alpha_l/\alpha_i)$ 时，序列 $(Z_{n,i,j})_n$ 收敛。其极限仍是关于 $\lambda_{k,l}$ 的多项式，总次数小于或等于 $j - i$；而 $\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}$ 的矩阵 Z_∞ 在基 $\mathcal{B}_0$ 中关于 $\lambda_{k,l}$ 的总次数小于或等于 $d - 1$。

计算 $\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}$ 的斜率可归结为研究 $||Z_{n,i,j}||_1$ 的行为，与定理 2.20 的证明中一样。令 $(\varphi^{n+1}_{\mathcal{B}_0} T_n)_{i,j} = \sum_{\deg(s_\kappa) \leq j-i} c^{(i,}{}_{j)\kappa,n} \lambda_\kappa^{s_\kappa}$，其中 κ 是多重指标。于是有

$$||c^{(i,j)}_{\kappa,n}||_1 \leq p^{\tilde{o}_p(\#J) + t_{HT,d} - t_{HT,i} + \max_{i \leq k \leq l \leq j} \mathrm{ord}_p(\alpha_l) - t_{HT,k} + t_{HT,i}} \leq p^{\tilde{o}_p(\#J) + t_{HT,d} - t_{HT,i} + m_{i,j}}$$

其中 $m_{i,j} = \max_{i \leq l \leq j} \mathrm{ord}_p(\alpha_l)$。由上述内容可得

$$||\alpha_i^{-(n+1)} Z_{n,i,j}||_1 \leq ||P||_1^d p^{n(\tilde{o}_p(\#J) + t_{HT,d} - t_{HT,i}) + m^{(n)}_{i,j}}$$

其中 $m^{(n)}_{i,j}$ 满足

$$m^{(1)}_{i,j} = m_{i,j},\ m^{(n)}_{i,j} \leq \max_{i \leq l \leq j} m^{(n-1)}_{i,l} + m_{i,j}.$$

我们用递推法证明

$$m^{(n)}_{i,j} \leq \left(\max_{i \leq k \leq j} m_k\right) n$$

其中 $m_k = \mathrm{ord}_p(\alpha_k)$。当 $n = N$ 时，该关系确实成立。若它对 $n - 1$ 成立，则 a

$$\begin{aligned} m^{(n)}_{i,j} &\leq \max_{i \leq l \leq j} \left(\max_{i \leq k \leq l} m_l\right)(n-1) + \max_{i \leq l \leq j} m_l \\ &\leq \left(\max_{i \leq k \leq j} m_k\right) n. \end{aligned}$$

由此可得，当 n 足够大时，

$$||\alpha_i^{-(n+1)} Z_{n,i,j}|| \leq C||P||_1^d p^{\left(\delta_p(\#J)+t_{\mathrm{HT},d}-t_{\mathrm{HT},i}+\max_{i\leq k\leq j}(\mathrm{ord}_p(\alpha_k))\right)n}$$

且 $\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},N}$ 的斜率小于或等于 $\tilde{o}_p(\#J) + \max_{i\leq k}(\mathrm{ord}_p(\alpha_k) - t_{\mathrm{HT},i})$。 □

2.5 维数为 2 的例子

取 $\mathcal{D}$ 为一个维数为 2、霍奇权重为 $t_{\mathrm{HT},1} = -r < 0, t_{\mathrm{HT},2} = 0$ 的 φ-滤过模，其 φ 的特征多项式为 $x^2 - p^{-r}a_p x + p^{-r}\iota$，其中 $a_p \in \mathbb{Z}_p$ 和 ι 是单位。记 ω 为 $\mathrm{Fil}^0\mathcal{D}$ 的一组基。进一步假设 φ-滤过模 $\mathcal{D}$ 不可分解，这意味着 ω 不是 φ 的特征向量。

2.5.1 适配基与 φ-滤过模

φ-滤过模 $\mathcal{D}$ 的一组适配基是 $\mathcal{B} = (\varphi(\omega)\ \omega)$。事实上，在基 $\mathcal{B}$ 下，φ 的矩阵为

$$\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a_p}{p^r} & 1 \\ -\frac{\iota}{p^r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p & 1 \\ -\iota & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix} a_p & 1 \\ -\iota & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$，且范数为 p^r。其逆 $\varphi^{-1}{}_{\mathcal{B}} = \iota^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -p^r \\ \iota & a_p \end{pmatrix}$ 的范数为 1。格 $M_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}_p\varphi\omega \oplus \mathbb{Z}_p\omega$ 是一个强可除格。设 $t_{N,1} \leq t_{N,2}$ 为 φ 的牛顿斜率。它们也是其特征值的 p 进赋值。于是有

$$t_{sm,1} = t_{\mathrm{HT},1} = -r, \quad t_{sm,2} = t_{\mathrm{HT},2} = 0, \quad -r \leq t_{N,1} \leq t_{N,2} \leq 0.$$

若 p 整除 a_p，则有 $-r < t_{N,1} \leq t_{N,2} < 0$ 以及 $t'_{\mathrm{HT},2} = \varepsilon$，其中 $\varepsilon = 1$ 在 p 不整除 a_p 时成立，否则为 0。取 $J =]-r\ \varepsilon]$。于是有

$$P^J_{\mathcal{B},N,n} = \varphi^{n+1}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \Xi_n^{]-r,0]\subset J} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}}^{-(n+1)} P^J_{\mathcal{B},N,n-1}$$

根据定理 2.20，矩阵序列 $P^J{}_{\mathcal{B},N,n}$ 收敛。$\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},N}$ 的斜率介于 0 和 $\tilde{o}_p(\#J)$ 之间。若 $\tilde{o}_p(\#J) = 0$（例如 $p > \#J$），则 $\mathfrak{X}^{]-r,0]\subset J}{}_N$ 与 $\mathrm{Log}^{]-r,0]}{}_N$ 相差一个单位。

注 2.29. 对于 $a_p = 0$，有

$$B_{m+1,\mathcal{B}}B_{m,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -p^r\iota\Xi_{m+1}^{]-r,0]} & 0 \\ 0 & -p^r\iota\Xi_m^{]-r,0]} \end{pmatrix} = -p^r\iota \begin{pmatrix} \Xi_{m+1}^{]-r,0]} & 0 \\ 0 & \Xi_m^{]-r,0]} \end{pmatrix} = \varphi^{-2} \begin{pmatrix} \Xi_{m+1}^{]-r,0]} & 0 \\ 0 & \Xi_m^{]-r,0]} \end{pmatrix}$$

取极限后，我们在 $\mathrm{Per}_{\mathcal{B},N}$ 的对角线上重新得到 $\prod_m$ 偶 $_{\Xi^{]-r,0]}}$ 和 $\prod_m$ 奇 $_{\Xi^{]-r,0]}}$ 元素 $\log^+$ 和 $\log^-$ 的类似物 [19]。

若 $\mathrm{Per}_{\mathcal{B},\ 1}$ 在基 $\mathcal{B}=(\varphi(\omega)\ \omega)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \text{整数环 } z_{11} & \text{整数环 } z_{22}^{12} \\ \text{整数环 } z_{21} & \text{整数环 } z \end{pmatrix}$，则 $\mathfrak{L}_{\mathcal{B},\ 1}$ 的一个元素具有如下形式

$$\Psi_{\mathcal{B}}(f,g) = f(Z_{11}\varphi\omega + Z_{21}\omega) + g(Z_{12}\varphi\omega + Z_{22}\omega) = (fZ_{11}+gZ_{12})\varphi\omega + (fZ_{21}+gZ_{22})\omega$$

其中 f 和 g 属于 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$。

命题 2.30。设 $(f,g)\in\mathcal{H}^2$。那么，$\Psi_{\mathcal{B}}(f,g)$ 属于 $L_{Eul}(\mathcal{D})$，当且仅当对任意 $-r\le j<0$，

$$(1-p^{-1}\iota)f(u^j-1)+(p^{r+j-1}+p^{-j}-p^{-1}a_p)g(u^j-1)=0.$$

证明。 对于 $-r\le j<0$，$\mathrm{Per}_{\mathcal{B},1}$ 在 u^j-1 处的值是恒等映射。另一方面，

$$(1-p^{-j}\varphi_{\mathcal{B}})^{-1}(1-p^{j-1}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}) = \frac{p^{j+r}}{p^{j+r}+p^{-j}\iota-a_p}\begin{pmatrix} 1-p^{-1}\iota & p^{r+j-1}+p^{-j}-p^{-1}a_p \\ -p^{-(j+r)}\iota-p^{j-1}\iota+p^{-(r+1)}a_p & p^{-1}\iota+1+(p^{-(j+r)}+p^{j-1})a_p+p^{-(r+1)}a_p^2 \end{pmatrix}.$$

基 $\mathcal{B}$的第二个向量是 $\mathrm{Fil}^{-r+1}\mathcal{D}=\cdots=\mathrm{Fil}^0\mathcal{D}$ 的一组基，因此可推出该条件。

□

2.5.2 适配于一个细化的基底

为简化起见，假设特征值属于 $\mathbb{Q}_p$。设 $B_0=(e_1,e_2)$，其中$\varphi e_1=\alpha_1 e1$, $\varphi e_2=\alpha_2 e_2$，这里 α_i的 p 进赋值为 s_i，且 $-r\le s_1,s_2\le 0$，$s_1+s_2=-r$（我们有 $\{s_1,s_2\}=\{t_N,1,t_N,{}_2\}$）。在基 B_0中写出 $\omega\in\mathrm{Fil}^0 D$，并将其规范化，使得$\omega=-\lambda e_1+e_2$ 对于 $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ 成立（根据 e_1 和 e_2的选取，可能 $\lambda\neq 0$）。由于 D 不可分解，ω 不是 φ 的特征向量，且 $B=(e1,\omega)$ 是 D 的一个基，适配于 D 的滤过和细化 $\mathbb{Q}_p e_1\subset D$。基 B_0 与基 B 之间的基变换由矩阵 $P=\left(\begin{smallmatrix}1 & -\lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$给出。矩阵 φB 在基 B 下的 φ 为

$$\varphi_{\mathcal{B}}=P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\lambda\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix},\quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & (\alpha_2^{-1}-\alpha_1^{-1})\lambda\\ 0 & \alpha_2^{-1}\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\lambda\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha_1}{p^{s_1}} & \frac{\alpha_2}{p^{s_2}}(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2})\lambda\\ 0 & \frac{\alpha_2}{p^{s_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^{s_1} & 0\\ 0 & p^{s_2}\end{pmatrix}$$

其中 $\frac{\alpha_1}{p^{s_1}}$ 和 $\frac{\alpha_2}{p^{s_2}}$ 是单位。当基 $\mathcal{B}$ 适配于 φ-滤过模时，

$$\mathrm{ord}_p(\lambda)\ge-\mathrm{ord}_p(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}),$$

这一点可以通过将 e_1 替换为其倍数来实现；若此外 $\{s_1,s_2\}=\{0,-r\}$，它就生成一个强可除的 $\mathbb{Z}_p$-模，也就是说，当且仅当 $\mathcal{D}$是普通情形时才成立。

假设 $\mathrm{ord}_p(\lambda) \geq -\mathrm{ord}_p(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2})$，并应用定理 2.23。当 $\mathcal{D}$是普通情形（$s_1=-r$，$s_2=0$）时，$\mathrm{Per}_{\mathcal{B},N}$的斜率介于 0 与 $\tilde{o}_p(r+1)$ 之间（由于 $t_{HT,d}=0$，这也是它的 φ-阶）。当 $-r<s_1,s_2<0$（非普通情形）时，可以取 $J=]-r,0]$；$\mathrm{Per}_{\mathcal{B},N}$的斜率介于 $\min(s_1+r, s_2)$ 与 $\max(s_1+r, s_2)+\tilde{o}_p(r)$ 之间，也就是说，介于 s_2 与 $-s_2+\tilde{o}_p(r)$ 之间。由此可见，基 $\mathcal{B}$的选择会产生影响（这里它不生成强可除格）。

我们来明确说明 在基 $\mathcal{B}_0$（其中 $J=]-r\ \varepsilon]$）中构造矩阵 $Z_n P^J_{\mathcal{B},N,n}$。有

$$Z_n=\begin{pmatrix}\Xi_n^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]} & \lambda(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{n+1}(\Xi_n^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}Z_{n-1}$$

其中 $Z_N=$为整数环 Z。 在超奇异情形下，这只是

$$Z_n=\begin{pmatrix}\Xi_n^{]-r,0]} & \lambda(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{n+1}(\Xi_n^{]-r,0]}-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}Z_{n-1}.$$

因此，对于 $n\geq N$

$$Z_n=\begin{pmatrix}\Pi_{m=N}^{n}\Xi_m^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]} & \lambda F_{n,\alpha_1/\alpha_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中 $F_{n,\nu}$ 满足递推关系

$$F_{n,\nu}=\Xi_n^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}F_{n-1,\nu}+\nu^{n+1}(\Xi_n^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}-1)$$

其中 $F_{N,\nu}=0$，在超奇异情形下

$$F_{n,\nu}=\Xi_n^{]-r,0]}F_{n-1,\nu}+\nu^{n+1}(\Xi_n^{]-r,0]}-1)$$

D'où

$$F_{n,\nu}=\sum_{t=N}^{n}\nu^{t+1}(\Xi_t^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}-1)\prod_{t<i\leq n}\Xi_i^{]-r,\varepsilon]\subset]0,\varepsilon]}.$$

对于任意单位根 ζ（其阶为 p^m，且 $N\leq m\leq n$），当 $j\in]-r,0]$ 时，有 $F_{n,\nu}(u^j\zeta-1)=F_{m,\nu}(u^j\zeta-1)=-\nu^{m+1}$。若进一步有 $r+\varepsilon$ 严格大于 $-\mathrm{ord}_p(\nu)$，则 $F_{n,\nu}$ 序列收敛到 $\mathcal{H}$ 中的一个元素 $F_{\infty}^{]-r0]\subset]-r\varepsilon]}{}_{,,,\nu}$，其阶小于或等于 $r+\varepsilon+\tilde{o}_p(r+\varepsilon)$（可直接证明）。于是对于 $n\geq 0$、$j\in]-r,0]$ 以及阶为 p^n 的单位根 ζ，有

$$F_{\infty,\nu}^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}(u^j\zeta-1)=-\nu^{n+1}.$$

基 $\mathcal{B}_0$ 下 $\mathrm{Per}_{\mathcal{B},N}$ 的整数环 Z_∞ 矩阵为

$$Z_\infty=\begin{pmatrix}\Xi_\infty^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]} & \lambda F_{\infty,\alpha_1/\alpha_2}^{]-r,0]\subset]-r,\varepsilon]}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

这在超奇异情形下可简化为

$$Z_\infty=\begin{pmatrix}\Xi_\infty^{]-r,0]} & \lambda F_{\infty,\alpha_1/\alpha_2}^{]-r,0]}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2.6 3维的例子

我们稍微展开一下当$\mathcal{D}$的维数为 3，且滤过由 $0 \neq \mathrm{Fil}^{t_{H,3}}\mathcal{D} \subsetneq \mathrm{Fil}^{t_{H,2}}\mathcal{D} \subsetneq \mathrm{Fil}^{t_{H,1}}\mathcal{D}$给出时的计算，沿用第 2.4 节的记号：设$\mathcal{B}_0 =(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ 是一组适配该细化的 φ 特征向量基，其特征值依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，并设 P 为所选滤过基$\mathcal{B} =(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$ 的矩阵。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} \\ 0 & 1 & -\lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{2,3} \\ 0 & 1 & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

由在基 $\mathcal{B}$ 中计算 φ 的矩阵，可得

$$P\varphi_{\mathcal{B}_0}P^{-1}\varphi_{\mathcal{B}_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-1)\lambda_{12} & (\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-\frac{\alpha_1}{\alpha_3})\lambda_{12}\lambda_{23}+(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}-1)\lambda_{13} \\ 0 & 1 & (1-\frac{\alpha_2}{\alpha_3})\lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易写出关于 λ_{ij} 的 p 进赋值的条件，使该矩阵属于 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$，从而基 $\mathcal{B}$ 适用于滤过 φ-模 $\mathcal{D}$：系数必须是 p 进整数，并且总可以用一个标量修改 e_i，使其满足这一条件，进而应用定理 2.23。

我们来显式计算基 $\mathcal{B}_0$ 下的矩阵。为简化起见，假设 $t'_{\mathrm{HT},3} = t_{H,3}$ 且 $J =]t_{H,1}, t_{H,3}]$，则有

$$P^J_{\mathcal{B},N,n}(\mathcal{B}_0) = T_n P^J_{\mathcal{B},N,n-1}(\mathcal{B}_0)$$

avec

$$T_n = \varphi_{\mathcal{B}}^{n+1} \begin{pmatrix} \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]} & 0 & 0 \\ 0 & \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J} & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},3},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J} \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}}^{-n}$$

$$= \begin{pmatrix} \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]} & (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{n+1}\lambda_{12}(\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]}-\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J}) & (\frac{\alpha_1}{\alpha_3})^{n+1}\left(\lambda_{13}(\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]}-1)+\lambda_{12}\lambda_{23}(\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]}-\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J})\right) \\ 0 & \Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J} & (\frac{\alpha_2}{\alpha_3})^{n+1}\lambda_{23}(\Xi_n^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J}-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是，$\mathrm{P}^J{}_{\mathcal{B},N,n}$ 具有如下形式的表达式：

$$P^J_{\mathcal{B},N,n} = \begin{pmatrix} \prod_{m=N}^n \Xi_m^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]} & \lambda_{12}F_{n,12} & \lambda_{13}F_{n,13}+\lambda_{12}\lambda_{23}G_{n,13} \\ 0 & \prod_{m=N}^n \Xi_m^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset J} & \lambda_{23}F_{n,23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可容易写出一个递推关系。取极限后，$\mathrm{Per}^J{}_{\mathcal{B},\ N}$ 写作

$$\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_N^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]} & \lambda_{12}F_{\infty,N,12} & \lambda_{13}F_{\infty,N,13}+\lambda_{12}\lambda_{23}G_{\infty,N,13} \\ 0 & \mathfrak{x}_N^{]t_{\mathrm{HT},2},t_{\mathrm{HT},3}]\subset]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},3}]} & \lambda_{23}F_{\infty,N,23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 推论

命题 3.1。$\mathcal{H}$-模 $L_N(\mathcal{D})$ 的秩为 $d = \dim \mathcal{D}$。

证明。H-模 $L_N(D)$ 包含 $\mathfrak{L}^J B,N$，其秩大于或等于 d，因为 $\mathrm{Per}^J B,N$ 的行列式非零。另一方面，模 $L_N(D)$ 是 $H \otimes D$ 的一个闭子模，赋予弗雷歇拓扑。事实上，若 g_s 是 $L_N(D)$ 中的元素序列，并收敛到 $H \otimes D$ 中的一个元素 g，则对于任意 $j \leq t_{HT,d}$, $(1\otimes\varphi)^{n+1} g_s(u^j\zeta - 1) \in K_n \otimes \mathrm{Fil}\, j\, D$，对任意整数 s 以及任意整数 $n \geq N$ 和 ζ 阶 p^n 均成立。弗雷歇拓扑下的收敛蕴含逐点收敛。因此，$(1\otimes\varphi)^{n+1} g(u\ j\ \zeta - 1)$ 是 $(1\otimes\varphi)^{n+1} g_s(u\ j\ \zeta - 1)$ 在 $s \to \infty$ 时的极限，属于 $K_n \otimes \mathrm{Fil}\, j\, D$；后者是 $K_n \otimes D$ 的一个闭子空间（有限维）。因此，可以应用以下命题，推得 $L_N(D)$ 的秩小于或等于 d。

□

命题 3.2 ([3])。设 M 是 $\mathcal{H}$ 上的秩为 d 的有限生成自由模，且 M' 是 M 的一个关于 M 的弗雷歇拓扑闭合的子模。那么，M' 是秩为 $e \leq d$ 的自由模。

命题 3.3。$L_N(\mathcal{D}) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 的行列式（换言之，$L_N(\mathcal{D})$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 中的指数）可被 $\prod_{j \leq t_{HT,d}} (\mathrm{Log}^{\lceil j \rceil} N)^{\dim_{\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^j \mathcal{D}}}$ 整除。

由以下引理可推出该命题：

引理 3.4。设 W 是一个 K-向量空间，其维数为 d，并设 $g_1, \ldots, g_d$ 是 $\mathcal{H} \otimes W$ 的元素。假设对每个整数 $n \geq 1$，W_n 的 $W_n = K_n \otimes W$ 存在一个完备分离递减滤过 $\mathrm{Fil}\, j\, n\, W_n$，且满足 $\mathrm{Fil}_n^{r+1} W_n = 0$，使得

1. K_n-向量空间 $\mathrm{Fil}\, jn W_n$ 的维数 $v\ j$ 与 n 无关；2. 对任意整数 $j \leq r$ 以及任意阶为 p^n 的单位根 ζ

$$g_i(u^j\zeta - 1) \in \mathrm{Fil}_n^j W_n.$$

行列式 在 W 的一组基下计算的 $\det(g_1, \cdots, g_d)$ 可被 $\prod_{j \leq r} (\mathrm{Log}^{\lceil j \rceil} N)^{d - v_j}$ 整除。

证明。论证是经典的（[16]）。令 $F = \det(g1, \cdots, g_d)$，并令 $v\ j = \dim_{K_n} \mathrm{Fil}\, jn\, W_n$。只需证明，当 $j \leq r$ 且 ζ 阶为 p^n 的单位根时，对 $s < d - v_j$，$F^{(s)}(u\ j\ \zeta - 1)$ 为零。事实上，$F^{(s)}$ 可表示为若干行列式的线性组合，其中涉及 $d - s$ 列 g_i，因此其形式为 $G = \det(h1, \cdots, h_{d-s}, \cdots)$，其中 $\{h1, \cdots, h_{d-s}\} \subset \{g1, \cdots g_d\}$。由于对于 $0 \leq i \leq d - s$，$h_i(u\ j\ \zeta - 1)$ 都属于维数为 $v\ j < d - s$ 的子空间 $\mathrm{Fil}\, jn\, W_n$，故 G 为零。由此可得，当 $s < d - v\ j$ 时，$F^{(s)}(u\ j\ \zeta - 1)$ 为零，因此 F 可被 $(\mathrm{Log}^{\lceil j \rceil} N)^{d - v_j}$ 整除。

□

定理 3.5. 假设 $\tilde{o}_p(\#J) = 0$。设 $\mathcal{B}$ 是与滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet \mathcal{D}$ 相适配的 $\mathcal{D}$ 的一组基。那么 $\mathcal{H} \otimes \mathfrak{L}^J{}_{\mathcal{B},N}$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 中的初等因子序列为

$$[Log_N^{]t_{HT,1}, t_{HT,d}]}; \cdots; Log_N^{]t_{HT,i}, t_{HT,d}]}; \cdots; 1].$$

证明。我们利用 $\mathrm{Per}^{J}{}_{\mathcal{B},N}$ 的矩阵在基 $\mathcal{B}$ 下可表示为以下形式的矩阵乘积

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{n+1} diag([\Xi_{n}^{]t_{\mathrm{HT},v},t_{\mathrm{HT},d}]\subset J}])\varphi_{\mathcal{B}}^{-(n+1)}$$

对 $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$。矩阵 $\varphi\mathrm{B}$ 在 H 中可逆，因为其系数属于 $\mathbb{Q}_p$，且行列式非零。因此，只需应用下面的引理，并注意到当 $\mathrm{n} \geq 1$、$\mathrm{m} \geq 1$，$\Xi^{]t_1,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]\subset \mathrm{Jn}}$ 与 $\Xi^{]t_2,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]\subset \mathrm{Jm}}$ 互素（$\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$）时：在假设 $\tilde{\mathrm{o}}_p(\#\mathrm{J}) = 0$ 下，它们分别在 H 中相差一个单位，等于 $\prod_{\mathrm{j}\in]\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]} \xi(\mathrm{j})\mathrm{n}$ 和 $\prod_{j\in]t_2,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]} \xi(\mathrm{j})\mathrm{m}$。 □

引理 3.6。设 A 和 B 是两个矩阵，其史密斯不变量分别为 $[\mathrm{f}_1; \cdots; \mathrm{f}_d]$ 和 $[\mathrm{g}_1; \cdots; \mathrm{g}_d]$。若 f_i 与 $\mathrm{g\,j}$ 互素，则 $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ 的史密斯不变量为 $[\mathrm{f}_1\mathrm{g}_1; \cdots; \mathrm{f}_d\mathrm{g}_d]$。

证明。我们使用 Smith 不变量 $\mathrm{f}_i \cdots \mathrm{f}_d$ 的刻画：它是矩阵 A 的 $\mathrm{d} - \mathrm{i} + 1$ 阶子式的最大公因数。可以假设 A 为对角形式 $\mathrm{Diag}(\mathrm{f1}, \cdots, \mathrm{f}_d)$，必要时在左侧乘以一个 $\mathrm{GL}_d(\mathcal{H})$ 中的矩阵。若 $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_{ij})$，则 $\mathrm{AB} = (\mathrm{f}_i\mathrm{b}_{i,j})$。于是，AB 的一个 i 阶子式是 A 和 B 各自的两个 i 阶子式的乘积。由此可得，当 f_j 与 g_k 互素时，$\mathrm{h}_i \cdots \mathrm{h}_d$ 是 $\mathrm{f}_i \cdots \mathrm{f}_d$ 与 $\mathrm{g}_i \cdots \mathrm{g}_d$ 的乘积。根据归纳法，可得 $\mathrm{h}_j | \mathrm{f}_j \mathrm{g}_j$。最后，只需注意到 h_j 的乘积等于 $\prod_j \mathrm{f}_j \prod_j \mathrm{g}_j$，即可得证。

□

注记。在 $\tilde{\mathrm{o}}_p(\#\mathrm{J}) \neq 0$ 的情况下，$\mathfrak{X}^{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]\subset \mathrm{J\,N}}$ 不一定整除，这是由于存在额外因子。$\mathfrak{X}^{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]\subset \mathrm{J\,N}}$ 与 $\mathfrak{X}^{]t_{\mathrm{HT}},j,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]\subset \mathrm{J\,N}}$ 对于 $\mathrm{t}_{\mathrm{HT},i} > \mathrm{t}_{\mathrm{HT},\mathrm{j}}$ 的最大公因数是 $\mathrm{Log}_{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]}\,\mathrm{N}$ 的倍数。实验上，它似乎等于 $\mathrm{Log}_{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]}\,\mathrm{N}$。这让人期待这些不变量具有如下形式：

$$[\mathrm{Log}_{N}^{]t_{\mathrm{HT},1},t_{\mathrm{HT},d}]}; \mathrm{Log}_{N}^{]t_{\mathrm{HT},d-1},t_{\mathrm{HT},d}]}; \cdots; \mathrm{Log}_{N}^{]t_{\mathrm{HT},j},t_{\mathrm{HT},d}]}; \cdots; F]$$

其中 F 是 $\mathcal{H}$中的一个元素，在 $\mathrm{u}^j\zeta - 1$ 处（对 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$）以及阶为 p 的某个幂的 ζ 单位根处均不为零。

命题 3.7。假设 $\tilde{\mathrm{o}}_p(\#\mathrm{J}) = 0$。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{D}$ 的滤过模 $\mathcal{D}$ 的一个细化，并设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}_0$ 是与 $\mathcal{F}$ 相关的基，如第 2.4 节所述。序列 $(\mathrm{Per}^{J}{}_{\mathcal{B},}\mathrm{N}\,(\mathrm{v}))_{v\in\mathcal{B}_0}$，其元素属于 $\mathfrak{L}^{J}{}_{\mathcal{B},}\mathrm{N}$，是 $\mathcal{H} \otimes \mathfrak{L}^{J}{}_{\mathcal{B},}\mathrm{N}$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 中关于初等因子的适配基。

证明。沿用定理 2.27 证明中的记号，并在基 B_0中进行计算。注意到 $\ell^{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]}\mathrm{n}$ 整除 T_n 的前 i 列，因此也整除$\varphi^{n+1}\mathrm{B}_0\,\mathrm{T}_n\varphi^{-(n+1)}\,\mathrm{B}_0$。由于矩阵 Z_n 是上三角的，我们可得，基 B_0 下矩阵 $\mathrm{P}^{J}\mathrm{B,N,n}$ 的前 i 列也被 $\ell^{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]}\mathrm{n}$ 整除；对于 $\mathrm{m} \geq \mathrm{n}$，矩阵 $\mathrm{P}^{J}\mathrm{B,N,m}$ 也同样如此。因此，基 B_0 下矩阵 $\mathrm{P}^{J}\mathrm{B,N,m}$ 的前 i 列被 $\ell^{]t_{\mathrm{HT}},i,\mathrm{t}_{\mathrm{HT},d}]}\mathrm{n}$ 整除。

□

定理 3.8。假设 $\tilde{o}_p(\#J) = 0$。设$\mathcal{B}$是$\mathcal{D}$的一个适配于滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathcal{D}$的基。那么，$L_N(\mathcal{D})$ 等于 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^J_{\mathcal{B},N}$。特别地，$L_N(\mathcal{D})$ 在$\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$中的指数为

$$\prod_{j \le t_{HT,d}} (Log_N^{[j]})^{\dim \mathcal{D}/\mathrm{Fil}^j \mathcal{D}}$$

且 $L_N(\mathcal{D})$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$中的初等因子为

$$[Log_N^{]t_{HT,1},t_{HT,d}]}; \cdots; Log_N^{]t_{HT,j},t_{HT,d}]}; \cdots; 1].$$

证明. $\mathrm{Per}^J_{B,N}$ 在 $H \otimes D$ 中的行列式为 $\prod_{j \le t_{HT,d}} (\mathrm{Log}^{[j]} N)^{\dim D/\mathrm{Fil}^j D}$. 由于 $L_N(D)$ 包含 $H \otimes \mathcal{L}^J_{B,N}$，$L_N(D)$ 在 $H \otimes D$ 中的行列式整除 $\prod_{j \le t_{HT,d}} (\mathrm{Log}^{[j]} N)^{\dim D/\mathrm{Fil}\, j\, D}$，因此根据命题 3.3 可得等式，从而得到定理。 □

推论 3.9. 假设 $\tilde{o}_p(\#J) = 0$。设 $\mathcal{B}$ 是一个适配滤过且适配某一细化的基。$L_N(\mathcal{D})$ 的元素序列 $(\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}(v))^{v \in \mathcal{B}_0}$ 是一个适配 $L_N(\mathcal{D})$ 在 $\subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ 中的初等因子的基。

由定理 3.8 和推论 2.24 可得以下定理。

定理 3.10. 假设 $\tilde{o}_p(\#J) = 0$。若存在一个基 $\mathcal{B}$，它适配于 φ-滤过模 $\mathcal{D}$，且生成 $\mathcal{D}$ 中的一个强可除格，则 $L_N(\mathcal{D})$ 存在一个由零斜率元素构成的基，具体为 $(\mathrm{Per}^J_{\mathcal{B},N}(v))^{v \in \mathcal{B}}$。

推论 3.11. 在定理 3.10 的假设下，$\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-模 $\mathcal{L}^J_{\mathcal{B},N}$ 是由零斜率元素生成的 $L_N(\mathcal{D})$ 的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-子模。

证明. 设 X 为 $L_N(\mathcal{D})$ 中由斜率为 ≤ 0 的元素构成的 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$-子模。由定理 3.10，$L_N(\mathcal{D}) = \mathcal{H}X = \mathcal{H}\,\mathcal{L}^J_{\mathcal{B},N}$。于是，由包含关系 $\mathcal{L}^J_{\mathcal{B},N} \subset X$，以及 $\mathcal{H}$中的可逆元就是 $\Lambda_{\mathbb{Q}_p}$ 中的可逆元这一事实，可得所要结果。 □

推论 3.12. 设 ζ 是一个阶为 p^n 的单位根。在定理 3.10 的假设下，由下式诱导的求值映射

$$\mathbf{L}_N(\mathcal{D}) \to \prod_{j \in]t_{HT,1},t_{HT,d}]} K_n \otimes \mathrm{Fil}^j \mathcal{D}$$

诱导

$$G \mapsto ((1 \otimes \varphi)^{-(n+1)} G(u^j \zeta - 1))_j$$

且限制在零斜率元素上的映射是满射。

参考文献

[1] Yvette Amice 和 Jacques Vélu，《与 Hecke 级数相关的 p进分布》，《Astérisque》24-25 (1975)，119–131。[2] Joel Bellaiche 和 Gaetan Chenevrier，《伽罗瓦表示族与塞尔默群》，第 324 卷，法国数学会，巴黎，2009。[3] Laurent Berger，《p进表示与微分方程》，Invent. math. 148 (2002)，219–284。[4] Jean-Marc Fontaine，《伽罗瓦模、滤过模与 Barsotti–Tate 环》，《Astérisque》，雷恩代数几何研讨会 65 (1979)，3–80。[5] Jean-Marc Fontaine 和 Guy Laffaille，《p进表示的构造》，Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 15 (1982)，547–608。[6] Nicolas Katz，《F-晶体的斜率滤过》，《Astérisque》，雷恩代数几何研讨会 63 (1979)，113–163。[7] Rikan S. Kedlaya，《相对 Frobenius 的斜率滤过》，《Astérisque》319 (2008)，259–301。[8] Antonio Lei、David Loeffler 和 Sarah Livia Zerbes，《模形式的 Wach 模与岩泽理论》，Asian J. Math. 14 (2010)，475–528。[9] ———，《Coleman 映射与 p进调节子》，Algebra and Number Theory 5 (2011)，1095–1131。[10] ———，《圆分扩张上模形式的 Bloch–Kato–Shafarevich–Tate 群的渐近增长》，Canadian Journal of Mathematics 69 (2017)，第 4 期，826–850。[11] David Loeffler 和 Sarah Livia Zerbes，《Wach 模与临界斜率 p进 L 函数》，J. Reine Angew. Math. 679 (2012)，181–206。[12] Barry Mazur，《p进变动的主题》，Amer. Math. Soc.，《数学：前沿与展望》63 (2000)，433–459。[13] Bernadette Perrin-Riou，《椭圆曲线的 p进 L 函数与有理点》，Ann. Inst. Fourier, Grenoble 43 (1993)，945–995。[14] ———，《局部域上 p进表示的岩泽理论（附录由 J.-M. Fontaine 撰写）》，Inventiones mathematicae 115 (1994)，第 1 期，81–150。[15] ———，《岩泽理论与显式互反律：重写 P. Colmez 的一篇文章》，Doc. Math. 4 (1999)，215–269。[16] ———，《p进表示与普适范数：I. 晶体情形》，Journal of the American Mathematical Society 13 (2000)，533–551。[17] ———，《半稳定 p进表示的岩泽理论》，第 84 卷，Mém. Soc. Math. Fr.，2001。[18] ———，《关于岩泽调节子初等因子的注记》，Publications Mathématiques de Bordeaux 33 (2021)，1069–1075。[19] Robert Pollack，《超奇异素数处模形式的 p进 L 函数》，Duke Mathematical Journal 118 (2003)，523–558。