arXiv:2301.06462v1 [math.RA] 16 Jan 2023

关于伪厄米二次幂零李代数

Mustapha Bachaou、Ignacio Bajo*和 Mohamed Louzari

2023年1月18日

摘要

我们研究带有复结构和二次结构的幂零李代数，其中二次结构相对于给定复结构是伪厄米的。我们提出了构造这类李代数的若干方法，并介绍一种通过平面双扩张来构造它们的方法，从而对所有这类代数作归纳描述。作为应用，我们给出了度量为洛伦兹-厄米的幂零二次李代数的完整分类，并对维数不超过 8 的所有幂零伪厄米二次李代数及其不等价的伪厄米度量进行了完整分类。

关键词：伪厄米李代数、二次李代数、二次双扩张。MSC分类：17B30、22E25、53C50、53C55。

引言

伪厄米二次李代数是一个三元组（$\mathfrak{g}$，J，φ），其中 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，J 是 $\mathfrak{g}$ 上的复结构，而 φ 是 $\mathfrak{g}$ 上的非退化伴随不变双线性型，并且与J相容，即对所有 x、$y \in \mathfrak{g}$，均有 $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$。从几何角度看，$\mathfrak{g}$是李群 G 的李代数，该李群带有左不变复结构和双不变伪厄米度量。此外，文献 [2] 指出，此类李代数上的复结构定义了经典的 r-矩阵，因此它们导出复型李双代数，进而导出某些泊松李群，其对偶群是复李群。

尽管伪厄米二次李代数上的复结构既不能是双不变的，也不能是阿贝尔的，但可以看出，这类李代数范围广泛，包含幂零、可解和非可解的例子；甚至还可以找到完美的伪厄米二次李代数。本文将重点关注其中的幂零情形。

Medina 和 Revoy [11] 提出了一种归纳方法，用于构造所有可解二次李代数。这种方法通常称为沿直线的二次双扩张方法，其核心是将维数为 n 的每个可解二次李代数描述为通过以下方式得到的李代数：

*通讯作者

从一个维数为 $n-2$的二次李代数出发，先对一个一维理想作中心扩张，再与另一个一维李代数作适当的半直积。对于带有复结构的李代数，我们希望维数为 $n-2$ 的李代数也具有复结构，而在大多数情况下，这种情形无法通过一次沿直线的双扩张来描述。因此，为了保证低维李代数存在复结构，需要考虑连续进行两次双扩张。在幂零情形下，这可以表述为一种特定的广义双扩张：中心扩张是通过一个二维的 J-不变子空间完成的，并且要进行两次半直积。通常，进行半直积所用的两个导子并不张成大伪厄米二次李代数的一个李子代数，因为它们的括号可能非零且属于小李代数。在命题 2.2 中，我们详细描述了这种改进的双扩张方法；在定理 2.4 中，我们证明每个不可分解幂零伪厄米二次李代数都可以用这种方式构造。通过简单应用该方法，我们可以描述所有能够赋予洛伦兹-厄米二次度量的李代数。

利用我们的双扩张方法（文中有时称为 pHQ-双扩张），我们给出了幂零伪厄米二次李代数的完整分类。需要特别指出的是，尽管不超过 10 维的不可分解（作为二次李代数）二次幂零李代数已在 [9], 中得到分类，但我们并不能轻易从其中的结果推导出我们的分类。一方面，作为二次李代数不可分解，并不等同于作为伪厄米二次李代数不可分解：有些伪厄米二次李代数无法分解为两个伪厄米二次李代数之和，却可以分解为两个二次李代数之和；例如李代数 $\mathcal{W}_3 \oplus \mathbb{R}$ 就是如此，其中 $\mathcal{W}_3$ 如 [7], 中所定义。显然，它作为二次李代数是可分解的，但作为伪厄米二次李代数则不可分解。另一方面，一个二次李代数可能具有互不等价的复结构或伪厄米二次度量。在定理 3.6 中，我们给出了不超过 8 维的李代数上互不等价的伪厄米二次结构的完整列表。具体而言，我们证明，不超过 8 维的不可分解伪厄米二次李代数只有六种互不等价的类型。

1 定义、例子与首批结果

从现在起，除非另有说明，本文所讨论的所有李代数均为实李代数。

定义 1.1 李代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构是一个映射 $J \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，满足 $J^2 = -I$，其中I 表示恒等映射，并且等式

$$N_J(x,y) = [x,y] + J[Jx,y] + J[x,Jy] - [Jx,Jy] = 0 \tag{1}$$

对所有 x、$y \in \mathfrak{g}$均成立。

若对任意 x，$y \in \mathfrak{g}$，复结构 J满足 $[Jx,Jy] = [x,y]$，则称其为阿贝尔复结构；若对任意 x，$y \in \mathfrak{g}$，$[Jx,y] = J[x,y]$成立，则称其为双不变复结构。

若存在李代数同构 ψ：$\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$，使得 $J_2 \circ \psi = \psi \circ J_1$，则称赋有复结构 $(\mathfrak{g}_1, J_1)$、$(\mathfrak{g}_2, J_2)$ 的两个李代数全纯同构。

注 1.1 我们指出几个有趣的事实。

(1) 所谓的 Nijenhuis 张量 $N_J(x,y) = [x,y] + J[Jx,y] + J[x,Jy] - [Jx,Jy]$ 显然是反对称的，并满足以下恒等式：

$$N_J(Jx,Jy) = -N_J(x,y), \quad N_J(Jx,y) = N_J(x,Jy) = -JN_J(x,y), \tag{2}$$

对所有 $x,y \in \mathfrak{g}$ 均成立。

(2) 记 $\mathfrak{g}^{1,0} = \mathrm{Ker}(J - iI)$ 和 $\mathfrak{g}^{0,1} = \mathrm{Ker}(J + iI)$ 为特征值 i 和 $-i$ 对应的特征子空间，它们位于 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 中，也就是说：

$$\mathfrak{g}^{1,0} = \{x - iJx \ : \ x \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{g}^{0,1} = \{x + iJx \ : \ x \in \mathfrak{g}\}.$$

等式 (1) 等价于 $\mathfrak{g}^{1,0}$（或 $\mathfrak{g}^{0,1}$）是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的复李子代数。众所周知，J 是阿贝尔的，当且仅当 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 是阿贝尔李代数；而 J 是双不变的，当且仅当 $(\mathfrak{g}, J)$ 与 $(\mathfrak{g}^{1,0}, i)$ 全纯同构（因此，$\mathfrak{g}$ 可视为复李代数）。

此外，对于李代数 $\mathfrak{g}$ 上任意的复结构 J，将赋予如下新括号的向量空间$\mathfrak{g}$ $\mathfrak{g}_J$ 记为

$$[x,y]_J = [Jx,y] + [x,Jy], \quad x,y \in \mathfrak{g}.$$

可以看出，$[\cdot,\cdot]_J$ 实际上是一个李括号，并且存在一个自然的全纯同构 ψ：$\mathfrak{g}_J \to \mathfrak{g}^{1,0}$，其定义为 $\psi(x) = Jx + ix$.

需要指出的是，由 $\eta(x) = Jx - ix$ 定义的映射 η：$\mathfrak{g}_J \to \mathfrak{g}^{0,1}$ 也是实李代数的同构。然而，η 不是全纯的，而是反全纯的，因为

$$\eta(Jx) = -x - iJx = -i(Jx - ix) = -i\eta(x), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

(3) 注意，每个带有复结构 $(\mathfrak{g}, J)$ 的李代数都具有复向量空间的结构，其数乘定义如下：

$$(\alpha + i\beta) \cdot x = \alpha x + \beta Jx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{g}.$$

因此，每个具有复结构的李代数都必须具有偶数维。实际上，对于每个具有线性自同态 J 且满足$J^2 = -I$ 的李代数，这一点也成立（即使 Nijenjuis 张量不恒等于零）。

定义 1.2 设 $(\mathfrak{g}, J)$ 是一个具有复结构的李代数。若 $\mathfrak{g}$ 还赋有一个非退化对称双线性映射 φ：$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$，并且对所有 x、$y \in \mathfrak{g}$ 都满足条件 $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$，则称 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 为伪厄米李代数，并称 (J, φ) 为 $\mathfrak{g}$上的伪厄米结构。

对于伪厄米李代数（$\mathfrak{g}, J, \varphi$），定义基本二形式或 K ¨ahler 形式为

$$\omega(x, y) = \varphi(x, Jy), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

不难验证，映射（$\cdot|\cdot$）：$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$(x|y) = \varphi(x, y) + i\omega(x, y), \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

实际上是复向量空间 $\mathfrak{g}$ 上的厄米形式，该空间如注 1.1 (3) 中所定义；也就是说，（$\cdot|\cdot$）是一个半双线性形式，使得对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$，都有（$y|x$）=（$x|y$）。

注 1.2 需要指出的是，$2n$ 维李代数上的伪厄米度量 φ 的惯性指数总是形如 $\mathrm{sig}(\varphi) = (2r, 2s)$。我们将“厄米度量”一词专用于正定情形 $\mathrm{sig}(\varphi) = (0, 2n)$，并将指标为 2 的情形称为洛伦兹-厄米度量，也就是说，$\mathrm{sig}(\varphi) = (2, 2n - 2)$。

此外，注意到，由于 $J^2 = -I$，条件 $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$ 等价于对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，$\varphi(Jx, y) = -\varphi(x, Jy)$。

定义 1.3 设 $(\mathfrak{g}_1, J_1, \varphi_1)$ 和 $(\mathfrak{g}_2, J_2, \varphi_2)$ 是两个伪厄米李代数。若存在一个全纯同构 $\psi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$，且它也是一个等距映射，即对所有 $x, y \in \mathfrak{g}_1$.，$\varphi_2(\psi x, \psi y) = \varphi_1(x, y)$ 成立，则称它们等价。

定义 1.4 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，$\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ 是一个非退化对称双线性型。若对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，都有

$$\varphi([x, y], z) + \varphi(y, [x, z]) = 0,$$

则称 φ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个二次结构或二次度量。在这种情况下，我们也称 $(\mathfrak{g}, \varphi)$ 为二次李代数。在许多参考文献中，二次李代数也称为度量李代数 [9]。

如果一个二次李代数（$\mathfrak{g}, \varphi$）还具有复结构 J，使得（$\mathfrak{g}, J, \varphi$）为伪厄米的，我们就称（$\mathfrak{g}, J, \varphi$）为伪厄米二次李代数。

我们的下一个结果表明，除非 $\mathfrak{g}$ 本身是阿贝尔的，否则二次李代数中不存在阿贝尔复结构（即使度量不是伪厄米的）。

命题 1.1 如果 $(\mathfrak{g}, \varphi)$ 是非阿贝尔二次李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 不能存在阿贝尔复结构。

证明。假设 $(\mathfrak{g},\varphi)$ 是一个二次李代数，且 J 是 $\mathfrak{g}$上的阿贝尔复结构。那么我们有

$$\begin{aligned}\varphi([Jx,Jy],z) &= -\varphi(Jy,[Jx,z])=\varphi(Jy,[x,Jz])=-\varphi(Jy,[Jz,x])=\varphi([Jz,Jy],x)\\ &= \varphi([z,y],x)=-\varphi([y,z],x)=\varphi(z,[y,x])=\varphi(z,[Jy,Jx])\\ &= -\varphi(z,[Jx,Jy])=-\varphi([Jx,Jy],z),\end{aligned}$$

对所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}$，这清楚地表明 $\mathfrak{g}$ 必须是阿贝尔的，因为 φ 是非退化的 . □

注 1.3 与上面的命题相反，非阿贝尔二次李代数可能存在双不变复结构。例如，若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{s}$ 的底层实李代数，且 φ 表示 $\mathfrak{s}$ 上 Killing 型 $\mathcal{K}$ 的实部，则容易证明 $(\mathfrak{g},\varphi)$ 是二次的，并且映射 $J\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，由 $Jx=ix$ 定义，对所有 $x\in\mathfrak{s}$，是 $\mathfrak{g}$ 上的双不变复结构。然而请注意，三元组 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 不是伪厄米的，因为

$$\varphi(Jx,Jy)=\mathrm{Re}(\mathcal{K}(ix,iy))=-\mathrm{Re}(\mathcal{K}(x,y))=-\varphi(x,y),$$

对每个 $x,y\in\mathfrak{s}$。满足 $\varphi(Jx,Jy)=-\varphi(x,y)$ 的这类度量通常称为 Norden度量（参见 [3] 及其中的参考文献）。

事实上，以下结果是众所周知的（例如参见 [2, 命题 9]）：

命题 1.2 设 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是一个伪厄米二次李代数。当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔李代数时，复结构 J 是双不变的。

注 1.4 尽管不存在带有阿贝尔复结构或双不变复结构的非阿贝尔伪厄米二次李代数，但这类李代数的范围十分广泛。

在 [2, Th. 24] 中可以看到，对于维数不超过 6 的情形，每个满足 $\mathrm{sig}(\varphi)=(2r,2s)$ 的二次李代数 $(\mathfrak{g},\varphi)$ 都存在一个 φ-斜对称复结构 J，因此 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是伪厄米二次李代数。

W接下来我们将介绍一些伪厄米二次李代数的构造方法 .

我们的第一个构造方法使用了 Bordemann 在 [6] 中定义的 T*-扩张概念。

命题 1.3 设 $(\mathfrak{g},J)$ 是一个带有复结构的李代数，并假设对于由 $\mathfrak{g}$ 的余伴随表示定义的切瓦莱-埃伦伯格复形，存在一个 2-余循环 $\theta\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$，使得对于所有 $x,y,x\in\mathfrak{g}$，下列等式成立：

$$\theta(x,y)z=\theta(Jx,Jy)z+\theta(Jy,Jz)x+\theta(Jz,Jx)y. \tag{3}$$

在向量空间 $T^*_\theta\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ 上定义双线性型 $\varphi(x+f,y+g)=f(y)+g(x)$ 和括号

$$[x+f,y+g]_T=[x,y]+\theta(x,y)+f\circ\mathrm{ad}(y)-g\circ\mathrm{ad}(x),$$

对所有 x、$y\in\mathfrak{g}$、f、$g\in\mathfrak{g}^*$，其中 $\mathrm{ad}(x)y=[x,y]$，并令 J_T由 $J_T(x+f)=Jx-f\circ J$定义

三元组 $(T^*_\theta\mathfrak{g},J_T,\varphi)$ 是一个伪厄米二次李代数。

证明。首先，请注意，对于每个 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，我们都有

$$\theta(y,z)x = \theta(Jy,Jz)x + \theta(Jz,Jx)y + \theta(Jx,Jy)z = \theta(x,y)z,$$

这证明了引理 3.1] 的循环条件 [6, 。由 [6] 中的结果可知，$(T^*_\theta\mathfrak{g}, \varphi)$ 是一个二次李代数。因此，我们只需证明 J_T 是 $T^*_\theta\mathfrak{g}$ 上的复结构，并且相对于 φ 是斜对称的。

最后这一点显然，因为

$$\begin{aligned}\varphi(J_T(x+f), y+g) &= \varphi(Jx - f\circ J), y+g) = g(Jx) - f(Jy) = -\varphi(x+f, Jy - g\circ J)\\ &= -\varphi(x+f, J_T(y+g)),\end{aligned}$$

对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$, $f, g \in \mathfrak{g}^*$ 都成立。

首先注意到，对所有 $x \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*$，都有 $J_T^2(x+f) = J^2x + f\circ J^2 = -x - f$，由此可知 J_T 是一个复结构。下面证明 N_{J_T} 恒为零。对于 $f, g \in \mathfrak{g}^*$，显然有

$$N_{J_T}(f,g) = [f,g]_T - J_T[f\circ J, g]_T - J_T[f, g\circ J]_T - [f\circ J, g\circ J]_T = 0.$$

现在，取 $x \in \mathfrak{g}, g \in \mathfrak{g}^*$，得到

$$\begin{aligned}N_{J_T}(x,g) &= [x,g]_T + J_T[Jx,g]_T - J_T[x, g\circ J]_T + [Jx, g\circ J]_T\\ &= -g\circ \mathrm{ad}(x) + g\circ \mathrm{ad}(Jx)\circ J - g\circ J\circ \mathrm{ad}(x)\circ J - g\circ J\circ \mathrm{ad}(Jx) \in \mathfrak{g}^*,\end{aligned}$$

但由于以下原因，$N_{J_T}(x,g) = 0$

$$N_{J_T}(x,g)(y) = -g([x,y] - [Jx,Jy] + J[x,Jy] + J[Jx,y]) = -g(N_J(x,y)) = 0.$$

最后，对于 $x, y \in \mathfrak{g}$，可得

$$\begin{aligned}N_{J_T}(x,y) &= [x,y]_T + J_T[Jx,y]_T + J_T[x,Jy]_T - [Jx,Jy]_T\\ &= N_J(x,y) + \theta(x,y) - \theta(Jx,y)\circ J - \theta(x,Jy)\circ J - \theta(Jx,Jy).\end{aligned}$$

但是，利用关于 θ 的假设及其循环性，对于所有 $z \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\begin{aligned}0 &= \theta(x,y)z - \theta(Jz,Jx)y - \theta(Jy,Jz)x - \theta(Jx,Jy)z\\ &= \theta(x,y)z - \theta(Jx,y)Jz - \theta(x,Jy)Jz - \theta(Jx,Jy)z,\end{aligned}$$

因此 $N_{J_T}(x,y) = N_J(x,y) = 0$，这就完成了证明。 □

例 1.1 利用命题 1.3，我们可以构造许多非平凡的伪厄米二次李代数。下面列举几个有趣的情形:

(1) 若考虑 $\theta = 0$，则李代数 $T_0^*\mathfrak{g}$ 实际上是余切代数 $T^*\mathfrak{g}$ [2, 例 11]。请注意，这种方法可以从任意一个带有复结构的李代数对 $(\mathfrak{g}, J)$ 出发，构造一个伪厄米二次李代数。

(2) 上述构造的一个有趣特例是，考虑具有自然双不变复结构 $Jx = ix$ 的半单复李代数的底层实李代数 $\mathfrak{g}$，其中 $x \in \mathfrak{g}$。在这种情况下，余切李代数 $T^*\mathfrak{g}$ 给出了一个完美（也就是说，$[T^*\mathfrak{g}, T^*\mathfrak{g}]_T = T^*\mathfrak{g}$）且因此无中心的伪厄米二次李代数的实例。

显然，对于赋有复结构 [14] 的秩为2的紧半单李代数，也可以采用相同的构造，从而得到其余切李代数是一个完美的伪厄米二次李代数。

(3) 可以找到满足 $\theta \neq 0$ 的实例。例如，设 $\mathfrak{k}$ 为三维海森堡代数与 $\mathbb{R}$ 的直和，也就是说，$\mathfrak{k} = \mathbb{R}$-span$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，其唯一的非平凡括号为 $[x_1, x_2] = x_3$。这类李代数是众所周知的 Kodaira–Thurston 流形 [10, 15] 的底层代数；众所周知，由 $Jx_1 = x_2$、$Jx_2 = -x_1$、$Jx_3 = x_4$、$Jx_4 = -x_3$ 定义的线性映射 J 是 $\mathfrak{g}$ 上的阿贝尔复结构。在下一个结果中，我们将完整描述所有非零可容许余循环 θ 及相应的李代数 $T_\theta^*\mathfrak{k}$。这些实例将在第3节给出的8维伪厄米二次李代数分类中发挥重要作用。

命题 1.4 设 $(\mathfrak{k}, J)$ 为由 $\mathfrak{k} = \mathbb{R}$-span$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 构成的李代数，其唯一的非平凡括号为 $[x_1, x_2] = x_3$，阿贝尔复结构由 $Jx_1 = x_2$, $Jx_2 = -x_1$, $Jx_3 = x_4$,$Jx_4 = -x_3$ 给出。

(1) 每个循环2-余循环 $\theta \in Z^2(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}^*)$ 都是由 $\theta_i, 1 \leq i \leq 4$ 定义的循环2-余循环的线性组合（除反对称性外），其非零取值如下:

$$\begin{aligned}
&\theta_1(x_1, x_2) = x_3^*, \quad \theta_1(x_1, x_3) = -x_2^*, \quad \theta_1(x_2, x_3) = x_1^*,\\
&\theta_2(x_1, x_2) = x_4^*, \quad \theta_2(x_1, x_4) = -x_2^*, \quad \theta_2(x_2, x_4) = x_1^*,\\
&\theta_3(x_1, x_3) = x_4^*, \quad \theta_3(x_1, x_4) = -x_3^*, \quad \theta_3(x_3, x_4) = x_1^*,\\
&\theta_4(x_2, x_3) = x_4^*, \quad \theta_4(x_2, x_4) = -x_3^*, \quad \theta_4(x_3, x_4) = x_2^*.
\end{aligned}$$

此外，任何这样的 2-余循环 θ 都满足式 (3) 的相容条件 .

（2）通过余循环 $\theta = \sum_{i=1}^4 \alpha_i\theta_i$ 对 $(\mathfrak{k}, J)$ 进行伪厄米 T^*-扩张，得到由基 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$ 张成的李代数，其非平凡括号为

$$\begin{aligned}
&[x_1, x_2] = x_3 + \alpha_1 x_3^* + \alpha_2 x_4^*, \quad [x_1, x_3] = -\alpha_1 x_2^* + \alpha_3 x_4^*,\\
&[x_1, x_4] = -\alpha_2 x_2^* - \alpha_3 x_3^*, \quad [x_2, x_3] = \alpha_1 x_1^* + \alpha_4 x_4^*,
\end{aligned}$$

$$[x_2,x_4]=\alpha_2x_1^*-\alpha_4x_3^*,\quad [x_3,x_4]=\alpha_3x_1^*+\alpha_4x_2^*,$$
$$[x_3^*,x_1]=x_2^*,\quad [x_3^*,x_2]=-x_1^*$$

以及由下式定义的度量和复结构

$$\varphi(x_i,x_j^*)=\delta_{ij},\ \varphi(x_i,x_j)=\varphi(x_i^*,x_j^*)=0,\quad Jx_1=x_2,\ Jx_3=x_4,\ Jx_1^*=x_2^*,\ Jx_3^*=x_4^*.$$

证明。我们只证明第一个结论，因为 (2) 可由命题 1.3 中 $T_\theta^*\mathfrak{k}$ 的构造立即得到。

设 $\theta\colon \mathfrak{k}\times\mathfrak{k}\to\mathfrak{k}^*$ 是一个斜对称映射，并且对所有 $x,y,z\in\mathfrak{k}$，循环条件 $\theta(x,y)z=\theta(y,z)x$ 均成立。考虑满足下式的 $a_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le 12$：

$$\begin{aligned}&\theta(x_1,x_2)=a_1x_3^*+a_2x_4^*,\quad \theta(x_1,x_3)=a_3x_2^*+a_4x_4^*\\&\theta(x_1,x_4)=a_5x_2^*+a_6x_3^*,\quad \theta(x_2,x_3)=a_7x_1^*+a_8x_4^*\\&\theta(x_2,x_4)=a_9x_1^*+a_{10}x_3^*,\quad \theta(x_3,x_4)=a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*.\end{aligned}$$

由 θ 的循环性可得

$$\begin{aligned}a_1&=\theta(x_1,x_2)x_3=\theta(x_2,x_3)x_1=a_7=\theta(x_3,x_1)x_2=-a_3\\a_2&=\theta(x_1,x_2)x_4=\theta(x_2,x_4)x_1=a_9=\theta(x_4,x_1)x_2=-a_5\\a_4&=\theta(x_1,x_3)x^4=\theta(x_3,x_4)x_1=a_{11}=\theta(x_4,x_1)x_3=-a_6\\a_8&=\theta(x_2,x_3)x_4=\theta(x_3,x_4)x_2=a_{12}=\theta(x_4,x_2)x_3=-a_{10},\end{aligned}$$

so t对于 $\alpha_1=a_1,\alpha_2=a_2,\alpha_3=a_4$ 和 $\alpha_4=a_8$，帽 $\theta=\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2+\alpha_3\theta_3+\alpha_4\theta_4$。

要证明 θ 是一个 2-余循环，只需证明 $d\theta(x_1,x_2,x_3)x_4=0$；但是，由于 x_3,x_4 属于 $\mathfrak{k}$ 的中心，有 $d\theta(x_1,x_2,x_3)(x_4)=-\theta([x_1,x_2],x_3)x_4=-\theta(x_3,x_3)x_4=0$。

最后，为了证明等式 (3) 成立，取基 $\{x_1,x_2=Jx_1、\ x_3、\ x_4=Jx_3\}$中的三个不同向量 $x、\ y、\ z$。这三个向量 $x、\ y、\ z$中必有一个是另一个向量在 J作用下的像。不失一般性，我们可以设 $y=Jx$，从而得到

$$\begin{aligned}\theta(Jx,Jy)z+\theta(Jy,Jz)x+\theta(Jz,Jx)y=\theta(Jx,-x)z+\theta(-x,Jz)x+\theta(Jz,Jx)Jx=\\\theta(Jx,-x)z+\theta(x,-x)Jz+\theta(Jx,Jx)Jz=\theta(x,Jx)z=\theta(x,y)z,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

了解一个伪厄米二次李代数，也能让我们通过以下方法构造许多其他伪厄米二次李代数：

命题 1.5 设 $\mathcal{A}$ 是一个实结合交换代数，其具有非退化对称双线性型 $B\colon\ \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$，满足 $B(ab,c)=B(b,ac)$，对所有 $a、\ b、\ c\in\mathcal{A}$ 均成立；并设 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是一个伪厄米二次李代数。

张量积 $\mathfrak{G}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{A}$ 配备如下定义的括号、复结构 J' 和双线性型 ϕ

$$[x\otimes a,y\otimes b]_{\mathfrak{G}}=[x,y]\otimes ab,\quad J'(x\otimes a)=Jx\otimes a,\quad \phi(x\otimes a,y\otimes b)=\varphi(x,y)B(a,b),$$

对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$, $a,b\in\mathcal{A}$，都是伪厄米二次李代数。

证明。我们已在 [8, 命题 A] 中看到，$(\mathfrak{G},\phi)$ 是二次李代数。下面证明J' 是 $\mathfrak{G}$ 上的复结构，并且是 ϕ-斜对称的。

显然，对所有 $x\in\mathfrak{g},a\in\mathcal{A}$，有 $J'(Jx\otimes a)=J^2x\otimes a=-x\otimes a$，这表明 $(J')^2=-I$。此外，对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$, $a,b\in\mathcal{A}$，容易证明 $N_{J'}(x\otimes a,y\otimes b)=N_J(x,y)\otimes ab=0$，因此$J'$ 是复结构，并且我们还有

$$\phi(J'(x\otimes a),y\otimes b)=\varphi(Jx,y)B(a,b)=-\varphi(x,Jy)B(a,b)=-\phi(x\otimes a,J'(y\otimes b)).$$

因此，$(\mathfrak{G},J',\phi)$ 如所述是一个伪厄米二次李代数。 □

推论 1.6 若 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是一个伪厄米二次李代数，那么其复化 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ 的底层实李代数也是一个伪厄米二次李代数，其复结构 J' 和二次型 ϕ 定义如下

$$J'(x+iy)=Jx+iJy,\quad \phi(x+iy,z+it)=\varphi(x,z)-\varphi(y,t),$$

对所有 $x,y,z,t\in\mathfrak{g}$ 均成立。

证明。注意，通过考虑 $x+iy=x\otimes 1+y\otimes i$ 对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$ 均成立，我们可以自然地将 $\mathfrak{G}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 视为同一对象。令 $B(a,b)=\mathrm{Re}(ab)$，其中 $a,b\in\mathbb{C}$。容易看出， B 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的非退化对称双线性型，并且对所有 $a,b,c\in\mathbb{C}$， $B(ab,c)=B(b,ac)$ 成立。因此，只需应用命题 1.5，并注意在同一性识别 $\mathfrak{G}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 下，映射 J' 和双线性型 ϕ 如上所述。□

例 1.2 当 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是一个伪厄米二次李代数时，也可以利用命题 1.5，通过对 $\mathfrak{g}$进行适当的张量化，构造一族幂零伪厄米二次李代数。

令 $\mathcal{A}=\mathbb{R}\text{-span}\{a,a^2,\dots,a^k\}$ 为由以下乘积定义的幂零交换结合代数：当 $i+j\le k$ 时，$a^ia^j=a^{i+j}$；当 $i+j>k$ 时， $a^ia^j=0$。只需记住，由 $B(a^i,a^j)=\delta_{i+j,k+1}$双线性延拓定义的形式 $B\colon\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$，其中 $\delta_{r,s}$ 表示克罗内克符号，是 $\mathcal{A}$ 上的非退化对称双线性型，并且它满足

$$B(a^ia^j,a^\ell)=\delta_{i+j+\ell,k+1}=B(a^j,a^ia^\ell)$$

对于所有的 $1\le i,j,\ell\le k$。

根据命题 1.5， $\mathfrak{G}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{A}$ （幂零）李代数具有伪厄米二次结构。

2 伪厄米二次李代数的双扩张

在 [11], 中，作者提出了一种方法：通过适当的中心扩张和由某个斜对称导子定义的半直积，从给定的 n维二次李代数构造出 $n+2$维二次李代数。这种方法称为由一维空间得到的二次双扩张。具体而言，若 $(\mathfrak{g}_0,[\cdot,\cdot]_0,\varphi_0)$ 是一个二次李代数，且 D 是 $\mathfrak{g}_0$的一个 φ_0-反对称导子，则考虑向量空间 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}z\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v$，其括号 $[\cdot,\cdot]$ 和双线性映射φ：$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
&[z,x]=[z,v]=0,\quad [x,y]=[x,y]_0+\varphi_0(Dx,y)z,\quad [v,x]=Dx\\
&\varphi(z,v)=1,\quad \varphi(x,y)=\varphi_0(x,y),\quad \varphi(z,\mathbb{R}z\oplus\mathfrak{g}_0)=\varphi(v,\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v)=\{0\}
\end{aligned}
$$

对所有 x、$y\in\mathfrak{g}_0$ 均成立。因此，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\varphi)$ 是一个二次李代数。此外，有如下结果：

命题 2.1（Medina-Revoy）每个满足 $dim(\mathfrak{g})=n$ 的非阿贝尔可解二次李代数 $\mathfrak{g}$，都是由一个维数为 $n-2$ 的可解二次李代数 $\mathfrak{g}_0$ 经一条直线双扩张而得。因此，每个可解二次李代数都可以由阿贝尔李代数出发，通过一系列双扩张构造得到。

本节将利用伪厄米二次李代数的二次双扩张来构造新的伪厄米二次李代数。具体而言，有如下结果：

命题 2.2 设 $(\mathfrak{g}_0,[\cdot,\cdot]_0,J_0,\varphi_0)$ 是一个伪厄米二次李代数。设 D、F 是 $\mathfrak{g}_0$ 的两个φ_0-斜对称导子，使得 $[F+J_0D,J_0]=0$，且对某个 $s_0\in\mathfrak{g}_0$ 有 $[F,D]=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$。

定义向量空间 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 与一个由生成元 $\{z,z',v,v'\}$ 构成的 4 维空间的直和，即

$$
\mathfrak{g}=\mathbb{R}z\oplus\mathbb{R}z'\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v'\oplus\mathbb{R}v.
$$

在 $\mathfrak{g}$ 上定义斜对称乘积 $[\cdot,\cdot]$ 和对称双线性型 φ，其非零配对如下：

$$
\begin{aligned}
&[v,v']=s_0,\quad [v,x]=Fx-\varphi_0(s_0,x)z',\quad [v',x]=Dx+\varphi_0(s_0,x)z,\\
&[x,y]=[x,y]_0+\varphi_0(Dx,y)z'+\varphi_0(Fx,y)z\\
&\varphi(z,v)=\varphi(z',v')=1,\quad \varphi(x,y)=\varphi_0(x,y),
\end{aligned}
$$

对任意 x、$y\in\mathfrak{g}_0$。我们还考虑由下式定义的 $J\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$：

$$
Jz=z',\quad Jz'=-z,\quad Jv=v',\quad Jv'=-v,\quad Jx=J_0x,
$$

对所有 $x\in\mathfrak{g}_0$。

三元组（$\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\varphi$）是一个二次李代数，$J$是 $\mathfrak{g}$ 上的复结构，而 φ 实际上是伪厄米的。

证明。用（$\mathfrak{g}_1,\varphi_1$）表示通过 D对（$\mathfrak{g}_0,\varphi_0$）作二次双扩张。于是有$\mathfrak{g}_1=\mathbb{R}z'\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v'$，其中 φ_1 的非零括号和配对如下：

$$[x,y]_1=[x,y]_0+\varphi_0(Dx,y)z',\quad [v',x]_1=Dx,\quad \varphi_1(x,y)=\varphi_0(x,y),\quad \varphi_1(z',v')=1,$$

其中 $x,y\in\mathfrak{g}_0$。令 $D_1:\ \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_1$ 为如下定义的线性映射：

$$D_1(z')=0,\quad D_1(v')=s_0,,\quad D_1(x)=Fx-\varphi_0(s_0,x)z',$$

对所有 $x\in\mathfrak{g}_0$均成立。由于 F是 φ_0-斜对称的，因此对任意 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\mathbb{R}$和 $x,y\in\mathfrak{g}_0$，有

$$\begin{aligned}&\varphi_1(D_1(\alpha z'+x+\beta v'),\alpha' z'+y+\beta' v')+\varphi_1(\alpha z'+x+\beta v',D_1(\alpha' z'+y+\beta' v'))=\\&\varphi_1(Fx-\varphi_0(s_0,x)z'+\beta s_0,y+\beta' v')+\varphi_1(x+\beta v',Fy-\varphi_0(s_0,y)z'+\beta' s_0,)=\\&\varphi_0(Fx,y)+\beta\varphi_0(s_0,y)-\beta'\varphi_0(s_0,x)+\varphi_0(x,Fy)+\beta'\varphi_0(x,s_0)-\beta\varphi_0(s_0,y)=0,\end{aligned}$$

这表明 D_1 关于 φ_1是斜对称的。下面证明 D_1 是 $\mathfrak{g}_1$的导子。显然，对所有 $X\in\mathfrak{g}_1$均有 $D_1[z',X]=[D_1z',X]+[z',D_1X]$；并且对任意 $x\in\mathfrak{g}_0$，有

$$D_1[v',x]_1-[D_1v',x]_1-[v',D_1x]_1=FDx-\varphi_0(s_0,Dx)z'-[s_0,x]_0-\varphi_0(Ds_0,x)z'-DFx=0$$

因为 D是 φ_0-斜对称的，且 $[F,D]=\mathsf{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$。此外，再次利用上述等式，以及 F是$(\mathfrak{g}_0,\varphi_0)$的反对称导子且 φ_0是二次的这一事实，对所有 $x,y\in\mathfrak{g}_0$，有

$$\begin{aligned}&D_1[x,y]_1-[D_1x,y]_1-[x,D_1y]_1=\\&F[x,y]_0-\varphi_0(s_0,[x,y])z'-[Fx,y]_0-\varphi_0(DFx,y)z'-[x,Fy]_0-\varphi_0(Dx,Fy)z'=\\&-\varphi_0([s_0,x]y)z'+\varphi_0([F,D]x,y)z'=0.\end{aligned}$$

因此， D_1 是（$\mathfrak{g}_1$， φ_1）的反对称导子。现在，简单计算即可得出，由 D_1构造的（$\mathfrak{g}_1$， φ_1）的二次双扩张正是命题中的（$\mathfrak{g}$， φ），从而证明（$\mathfrak{g}$， φ）是一个二次李代数。

因此，只需证明 J 是一个复结构，且它是 φ-斜对称的。根据 J的定义，显然$J^2=-I$，并且对于 $x_k\in\mathfrak{g}_0$和 α_k、 α_k'、 $\beta_k\beta_k'\in\mathbb{R}$（$k=1$， 2），有如下结论

$$\begin{aligned}&\varphi(J(\alpha_1z+\alpha_1'z'+x_1+\beta_1'v'+\beta_1v),\alpha_2z+\alpha_2'z'+x_2+\beta_2'v'+\beta_2v)=\\&\varphi(\alpha_1z'-\alpha_1'z+J_0x_1-\beta_1'v+\beta_1v',\alpha_2z+\alpha_2'z'+x_2+\beta_2'v'+\beta_2v)=\\&\alpha_1\beta_2'-\alpha_1'\beta_2-\beta_1'\alpha_2+\beta_1\alpha_2'+\varphi_0(J_0x_1,x_2).\end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha_1z+\alpha_1'z'+x_1+\beta_1'v'+\beta_1v,J(\alpha_2z+\alpha_2'z'+x_2+\beta_2'v'+\beta_2v))=\\&\alpha_2\beta_1'-\alpha_2'\beta_1-\beta_2'\alpha_1+\beta_2\alpha_1'+\varphi_0(J_0x_2,x_1),\end{aligned}$$

因此， J 相对于 φ 是斜对称的，因为 J_0 是 φ_0-斜对称的。为了证明 $N_J=0$，首先注意到显然有 $N_J(z,\cdot)=N_J(z',\cdot)=0$，因为 z、$z'=Jz$属于 $\mathfrak{g}$的中心，并且还有 $N_J(v.v')=0$，因为 $v'=Jv$。若 $x\in\mathfrak{g}_0$，则我们得到

$$\begin{aligned}&N_J(v,x)=\\&Fx-\varphi_0(s_0,x)z'+J_0Dx+\varphi_0(s_0,x)z'+J_0FJ_0x+\varphi_0(s_0,J_0x)z-DJ_0x-\varphi_0(s_0,J_0x)z=\\&(F+J_0D+J_0FJ_0-DJ_0)x=J_0[F+J_0D,J_0]x=0.\end{aligned}$$

因为根据假设， $F+J_0D$与 J_0交换。注意，利用 (2)，这也意味着 $N_J(v',x)=N_J(Jv,x)=-JN_J(v,x)=0$。此外，对于 $x,y\in\mathfrak{g}_0$，我们有

$$\begin{aligned}&[x,y]=[x,y]_0+\varphi_0(Dx,y)z'+\varphi_0(Fx,y)z\\&J[Jx,y]=J_0[J_0x,y]_0-\varphi_0(DJ_0x,y)z+\varphi_0(FJ_0x,y)z'\\&J[x,Jy]=J_0[x,J_0y]_0+\varphi_0(J_0Dx,y)z-\varphi_0(J_0Fx,y)z'\\&[Jx,Jy]=[J_0x,J_0y]_0-\varphi_0(J_0DJ_0x,y)z'-\varphi_0(J_0FJ_0x,y)z,\end{aligned}$$

由此我们立即得到

$$N_J(x,y)=N_{J_0}(x,y)+\varphi_0([F+J_0D,J_0]x,y)z'-\varphi_0(J_0[F+J_0D,J_0]x,y)z=0.$$

因此，Nijenhuis 张量恒等于零，从而得到 $(\mathfrak{g},\varphi,J)$ 是一个伪厄米二次李代数。□

定义 2.1 按命题 2.2 所构造的伪厄米二次李代数 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$，称为通过一个平面，借助 (D,F) 和 s_0 对 $(\mathfrak{g}_0,J_0,\varphi_0)$ 作出的伪厄米二次双扩张。简言之，我们称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 pHQ-双扩张。

注 2.1 下面指出一些有趣的事实。

(1) 请注意，上文定义的 pHQ-双扩张概念不同于 Andrada、Barberis 和 Ovando 在 [2, Th. 21] 中给出的构造。对于幂零李代数 $\mathfrak{g}$，他们的构造是我们构造在 $D=0$ 时的特例。

(2) 如果 $\mathfrak{g}$ 是伪厄米二次李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 pHQ-双扩张，且 $\mathfrak{g}_0$ 上度量的惯性指数为 $\mathrm{sig}(\varphi_0)=(r,s)$，那么 $\mathfrak{g}$ 上的度量满足 $\mathrm{sig}(\varphi)=(r+2,s+2)$。

(3) 如果 F、D 满足 $[F+J_0D,J_0]=0$ 和 $[F,D]=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$，那么对于映射 $F_1=D$、$D_1=-F$，也有 $[F_1,D_1]=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$，并且

$$[F_1+J_0D_1,J_0]=[D-J_0F,J_0]=DJ_0-J_0FJ_0-J_0D-F=J_0[F+J_0D,J_0]=0.$$

若将 $\mathfrak{g}_1=\mathbb{R}z_1\oplus\mathbb{R}z_1'\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v_1'\oplus\mathbb{R}v_1$ pHQ-双扩张记为 (D_1,F_1)，且 $\mathfrak{g}$ 如命题 2.2 所述，则很容易看出，映射 $\Psi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}$ 由 $\Psi(z_1)=z',\psi(z_1')=-z,\Psi(v_1)=v',\psi(v_1')=-v,\Psi(x)=x$ 对所有 $x\in\mathfrak{g}_0$均成立，是一个保持相应度量的全纯同构。

(4) 请注意，条件 $[F,D]=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$ 并未完全确定 s_0，因为当 $w\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 时，对每个 $s_0'=s_0+w$ 都有同一恒等式成立。在 pHQ-双扩张的定义中选择 s_0' 而非 s_0，可能会得到非同构的李代数。例如，设 $\mathfrak{g}_0=\mathbb{R}^2$带有厄米度量，并取 $D=F=0$，则当$s_0=0$ 时，pHQ-双扩张是阿贝尔的；而对于 $s_0\neq 0$，则得到一个非阿贝尔的三步幂零李代数（例如参见下文的推论 2.5）。

命题 2.3 设 $(\mathfrak{g},J,\varphi)$ 是一个维数为 $\mathfrak{g}=n>4$ 的伪厄米二次李代数，并记其中心为 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。

若存在一个元素 $z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 使得 $Jz\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，则存在一个 $(n-4)$ 维伪厄米二次李代数 $(\mathfrak{g}_0,J_0,\varphi_0)$，使得 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的 pHQ-双扩张。

证明。由于 z和 Jz线性无关，我们可以找到一个元素 $v\in\mathfrak{g}$，使得 $\varphi(z,v)=1$且 $\varphi(Jz,v)=0$。现在，由于 $z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 蕴含 z是各向同性的，可以利用 Medina 和 Revoy 在 [11] 中的结果，得到存在一个二次李代数 $(\mathfrak{g}_1,\varphi_1)$，使得 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}z\oplus\mathfrak{g}_1\mathbb{R}v$ 是通过某个斜对称导子 D_1 对 $(\mathfrak{g}_1,\varphi_1)$作二次双扩张得到的。注意，在这种情况下，$\mathfrak{g}_1$是 φ-正交补 $\mathbb{R}z\oplus\mathbb{R}v$，因此，由于 J相对于 φ是斜对称的，当 $\varphi(Jz,v)=0$且 $\varphi(Jz,z)=0$时，我们有 $Jz\in\mathfrak{g}_1$。事实上，Jz是 $\mathfrak{g}_1$的各向同性中心元，因为 $\varphi(Jz,Jz)=\varphi(z,z)=0$且 $Jz\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。由于我们还有

$$\varphi(Jv,z)=-\varphi(v,Jz)=0,\quad \varphi(Jv,v)=-\varphi(v,Jv)=0,\quad \varphi(Jz,Jv)=\varphi(z,v)=1,$$

我们得到 $Jv\in\mathfrak{g}_1$ 并且，再次利用 [11], 的结果，我们得到存在一个二次李代数（$\mathfrak{g}_0,\varphi_0$），使得 $\mathfrak{g}_1=\mathbb{R}Jz\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}Jv$是通过（$\mathfrak{g}_0,\varphi_0$）的反对称导子 D对 $\mathfrak{g}_0$作二次双扩张得到的。若现在记 $z'=Jz,v'=Jv$，则有 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}z\oplus\mathbb{R}z'\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathbb{R}v'\oplus\mathbb{R}v$，其中 $\mathfrak{g}_0$是 φ中与 $\mathbb{R}$-span$\{z,z',v,v'\}$正交的部分。此外，由于 $\mathbb{R}$-span$\{z,z',v,v'\}$显然是 J-不变的。

根据二次双扩张的构造，对于 φ，先验上唯一可能非零的配对为

$$\varphi(z,v)=1,\quad \varphi(z',v')=\varphi_1(z',v')=1,\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)=\varphi_0(x,y),\quad x,y\in\mathfrak{g}_0,$$

并且，$\mathfrak{g}$ 中的括号由 z、$z'\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 以及

$$\begin{aligned}
&[x,y]_1=[x,y]_0+\varphi_0(Dx,y)z',\quad [v',x]_1=Dx\\
&[x,y]=[x,y]_1+\varphi_1(D_1x,y)z,\quad [v',x]=[v',x]_1+\varphi_1(D_1v',x)z,\\
&[v,x]=D_1x,\quad [v,v']=D_1v',
\end{aligned}$$

对所有 x、$y\in\mathfrak{g}_0$。注意，由于 $D_1z'=0$ 相对于 φ_1是 D_1 斜对称的，我们有 $\varphi_1(D_1z',z')=0$，并且对于 $x\in\mathfrak{g}_0$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，可得

$$\varphi_1(x+\lambda v',D_1z')=-\varphi_1(D_1x+\lambda D_1v',z')=-\varphi([v,x+\lambda v'],z')=\varphi(x+\lambda v',[v,z'])=0.$$

这意味着 $\varphi_1(D_1\mathfrak{g}_1, z') = \varphi_1(\mathfrak{g}_1, D_1 z') = \{0\}$，从而表明 $D_1\mathfrak{g}_1 \subset \mathbb{R}z' \oplus \mathfrak{g}_0$。但是，由于 D_1 是斜对称的，因此 $\varphi_1(D_1 v', v') = 0$，我们有：

$$D_1 v' \in \mathfrak{g}_0, \quad D_1 x = Fx + \alpha(x)z', \quad x \in \mathfrak{g}_0$$

对于某个 $\alpha \in \mathfrak{g}_0^*$ 以及某个线性自同态 F（定义在 $\mathfrak{g}_0$上）。但由 D_1的斜对称性可知， F 是 φ_0-斜对称的，并且

$$\alpha(x) = \varphi_1(D_1 x, v') = -\varphi_1(x, D_1 v').$$

D_1 是 $\mathfrak{g}_1$ 的导子这一事实给出

$$F[x,y]_0 - \varphi_0([x,y]_0, s_0)z' = [Fx, y]_0 + \varphi_0(DFx, y)z' + [x, Fy]_0 + \varphi_0(Dx, Fy)z',$$

由此可推得， F是 $\mathfrak{g}_0$的导子，并且 $[F, D] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(s_0)$，因为

$$\varphi_0([s_0, x], y) = \varphi(s_0, [x,y]) = -\varphi_0(DFx, y) - \varphi_0(Dx, Fy) = \varphi([F, D]x, y),$$

对所有 x、 $y \in \mathfrak{g}_0$均成立。综上，若记 $s_0 = D_1 v'$ ，则 $\mathfrak{g}$ 中的括号由下式给出

$$\begin{aligned}
&[x,y] = [x,y]_0 + \varphi_0(Dx, y)z' + \varphi_0(Fx, y)z, \quad [v', x] = Dx + \varphi_1(s_0, x)z, \\
&[v, x] = Fx - \varphi_1(s_0, x)z', \quad [v, v'] = s_0.
\end{aligned}$$

因此，只需证明 J_0 是 $\mathfrak{g}_0$ 上的 φ_0-斜对称复结构，并且$[F + J_0 D, J_0] = 0$。利用上述括号以及 F关于 φ_0是斜对称的这一事实，对于 x、 $y \in \mathfrak{g}_0$ ，有

$$\begin{aligned}
&[x,y] = [x,y]_0 + \varphi_0(Dx, y)z' + \varphi_0(Fx, y)z \\
&J[Jx, y] = J_0[J_0 x, y]_0 - \varphi_0(DJ_0 x, y)z + \varphi_0(FJ_0 x, y)z' \\
&J[x, Jy] = J_0[x, J_0 y]_0 + \varphi_0(J_0 Dx, y)z - \varphi_0(J_0 Fx, y)z' \\
&[Jx, Jy] = [J_0 x, J_0 y]_0 - \varphi_0(J_0 DJ_0 x, y)z' - \varphi_0(J_0 FJ_0 x, y)z
\end{aligned}$$

因此， $N_J(x,y) = 0$ 等价于 $N_{J_0}(x,y) = 0$，并且

$$0 = D + FJ_0 - J_0 F + J_0 DJ_0 = [F + J_0 D, J_0], \quad 0 = F - DJ_0 + J_0 D + J_0 FJ_0 = J_0[F + J_0 D, J_0].$$

由于显然有 $J_0^2 x = J^2 x = -x$ and $\varphi_0(J_0 x, y) = \varphi(Jx, y) = -\varphi(x, Jy) = -\varphi_0(x, J_0 y)$，对于任意元素 $x, y \in \mathfrak{g}_0$，我们可以得出结论：$(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 是通过 (D, F) 对 $(\mathfrak{g}_0, J_0, \varphi_0)$ 进行的 pHQ-双扩张，□

现在我们可以陈述主要结果。其证明主要基于 Salamon [13, 推论 1.4]（另见 [12, 命题 3.2]）的结果，该结果表明，对于具有复结构（$\mathfrak{g}, J$）的幂零李代数，总有 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$.

定理 2.4 设（$\mathfrak{g}, J, \varphi$）是一个幂零伪厄米二次李代数，并假设 dim（$\mathfrak{g}$） > 4。则有：

(1) 要么 $\mathfrak{g}$ 是一个（$n-4$）维伪厄米二次李代数的 pHQ-双扩张，要么它是一个（$n-2$）维幂零伪厄米二次李代数与赋有定号伪厄米度量的 $\mathbb{R}^2$ 的正交直和。(2) 若 $\mathfrak{g}$ 不是阿贝尔的，则它是一个（$n-4$）维伪厄米二次李代数的 pHQ-双扩张。因此，每个非阿贝尔伪厄米二次李代数都可由一系列 pHQ-双扩张从一个阿贝尔李代数出发构造得到。

证明。正如 Salamon 在 [13], 中证明的那样，我们有 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$，因此，相对于 φ，其正交空间满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} \cap (J[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^{\perp} \neq \{0\}$。由于 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 且 $(J[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^{\perp} = J([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp}) = J\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，可得 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap J\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.。取一个非零的 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap J\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。显然，我们有 $Jz \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。若 z是各向同性的，这意味着 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，于是命题 2.3 保证 $\mathfrak{g}$是一个 pHQ-双扩张。否则， $\varphi(z,z) = \varphi(Jz,Jz) \neq 0$且 $\varphi(z,Jz) = 0$，因此 $\mathfrak{I} = \mathbb{R}\text{-span}\{z, Jz\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个非退化 J- 不变理想，并且 φ 在 $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ 上的限制是定号的（正定或负定）。此外，显然由 $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 可得 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} \subset \mathfrak{I}^{\perp}$，这证明 $\mathfrak{I}^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想；又因为 J 相对于 φ是斜对称的，所以它是 J-不变的。因此$\mathfrak{g} = \mathfrak{I}^{\perp} \oplus \mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{\perp} \oplus \mathbb{R}^2$，这就证明了 (1)。

为了证明 (2)，注意到，如果 $\mathfrak{g}$ 是非阿贝尔的，我们可以递归地应用 (1)，得到李代数的正交分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\mathbb{R}^2)^k$，其中某个 $k \geq 0$ 满足： $\mathfrak{h}$ 是通过某个 $(F_{\mathfrak{h}}, D_{\mathfrak{h}}, s_{\mathfrak{h}})$ 对三元组 $(\mathfrak{h}_0, J_0, \varphi_0)$ 作 pHQ-双扩张所得。简单计算可知，此时 $\mathfrak{g}$ 是通过三元组 (F, D, s_0) 对 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus (\mathbb{R}^2)^k$ 作 pHQ-双扩张所得，该三元组定义为$F(h,t) = F_{\mathfrak{h}}(h)$ $D(h,t) = D_{\mathfrak{h}}(h)$，对所有 $h \in \mathfrak{h}_0, t \in (\mathbb{R}^2)^k$ 以及 $s_0 = (s_{\mathfrak{h}}, 0)$ 均成立。

(2) 的第二部分可通过对 $\mathfrak{g}_0$ 重复同样的论证，依此类推。显然，当到达阿贝尔约化李代数时，这一过程便会停止。□

注 2.2 注意，如果 $\mathfrak{g}$ 是另一个伪厄米二次李代数的 pHQ-双扩张 $\mathfrak{g}_0$，且 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，那么如定理所述， $\mathfrak{g}_0$ 必定是幂零的，而定义该双扩张的导子 D、F 也应当是幂零的。实际上，如果 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}z' \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}v' \oplus \mathbb{R}v$ 是 k步幂零的，那么对所有 $x \in \mathfrak{g}$， $\mathrm{ad}(v)^k = \mathrm{ad}(v')^k = 0$ 且 $\mathrm{ad}(x)^k = 0$； 但对于每个 $y \in \mathfrak{g}_0$，我们有

$$
\begin{aligned}
0 = & \ \mathrm{ad}(v)^k(y) = F^k y - \varphi_0(s_0, F^{k-1}y)z' \\
0 = & \ \mathrm{ad}(v')^k(y) = D^k y + \varphi_0(s_0, D^{k-1}y)z' \\
0 = & \ \mathrm{ad}(x)^k(y) = \ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x)^k y + \varphi_0(Dx, \ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x)^{k-1}y)z' + +\varphi_0(Fx, \ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x)^{k-1}y)z.
\end{aligned}
$$

前两个等式表明 F 和 D 是幂零的，第三个等式表明 $\mathfrak{g}_0$ 是幂零李代数。

利用上述定理和评注，我们可以完整描述洛伦兹-厄米二次李代数。

推论 2.5 非阿贝尔幂零伪厄米二次李代数 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 是洛伦兹厄米的，当且仅当它是一个阿贝尔厄米李代数与 6 维洛伦兹厄米李代数的正交和；后者由 $\mathcal{L} = \mathbb{R}\text{-span}\{x_1, Jx_1, x_2, Jx_2, x_3, Jx_3\}$ 给出，其非零括号和 φ-配对如下：

$$[x_1, Jx_1] = x_2, \quad [x_1, x_2] = -Jx_3, \quad [Jx_1, x_2] = x_3$$
$$\varphi(x_1, x_3) = \varphi(Jx_1, Jx_3) = 1, \quad \varphi(x_2, x_2) = \varphi(Jx_2, Jx_2) = 1.$$

证明. 由于维数不超过 4 的幂零二次李代数都是阿贝尔的 [7, 9], ，我们可以设 $\dim(\mathfrak{g}) = n \geq 6$。根据定理 2.4， $\mathfrak{g}$ 是一个 $(n-4)$ 维伪厄米二次李代数的 pHQ-双扩张。

回顾注 2.1 (2)，相应的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的惯性指数必为 $(0, n-4)$。但正定度量下唯一的幂零二次李代数是阿贝尔李代数，因此 $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}^{n-4}$ 配备任意复结构和厄米度量。众所周知，关于正定内积斜对称的幂零线性映射必定恒为零。因此，定义 pHQ-双扩张的导子 D 和 F 均为零。这意味着 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}z' \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}v' \oplus \mathbb{R}v$ 中唯一的非零括号为

$$[v, v'] = s_0, \quad [v, x] = -\varphi(s_0, x)z', \quad [v', x] = \varphi(s_0, x)z.$$

令 $n = 2k$, $\alpha = \varphi(s_0, s_0)$，并在 $\mathfrak{g}_0$ 中为 $s_0^{\perp}$ 选取一组基 $\{Js_0, s_1, Js_1, \ldots, s_{k-3}, Js_{k-3}\}$。那么， $\mathfrak{g}$ 中的非零括号为

$$[v, v'] = s_0, \quad [v, s_0] = -\alpha z', \quad [v', s_0] = \alpha z.$$

注意到 $\alpha > 0$，因为 φ_0 是正定的。令 $x_1 = \alpha^{-1/4}v$, $x_2 = \alpha^{-1/2}s_0$ 和 $x_3 = \alpha^{1/4}z$。由于 $v' = Jv$ 和 $z' = Jz$，我们得到非零括号为

$$[x_1, Jx_1] = \alpha^{-1/2}s_0 = x_2, \ [x_1, x_2] = -\alpha^{-1/4}\alpha^{-1/2}\alpha Jz = -Jx_3, \ [Jx_1, x_2] = \alpha^{-1/4}\alpha^{-1/2}\alpha z = x_3.$$

此外，在 $\mathcal{L} = \mathbb{R}\text{-span}\{x_1, Jx_1, x_2, Jx_2, x_3, Jx_3\}$ 中，度量由下式给出

$$\varphi(Jx_1, Jx_3) = \varphi(x_1, x_3) = \alpha^{-1/4}\alpha^{1/4}\varphi(v, z) = 1, \ \varphi(Jx_2, Jx_2) = \varphi(x_2, x_2) = \alpha^{-1}\varphi(s_0, s_0) = 1.$$

现在，令 $\mathcal{A} = \mathbb{R}\text{-span}\{s_1, Js_1, \ldots, s_{k-3}, Js_{k-3}\}$，立即可得 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{A}$ 的正交和，其中 $\mathcal{A}$ 是带有厄米度量的阿贝尔李代数。□

注 2.3 李代数 $\mathcal{L}$ 按照 [7] 的记法与 $\mathcal{W}_3 \oplus \mathbb{R}$ 同构，它是 Salamon 在 [13] 给出的、允许复结构的 6 维幂零李代数列表中记作 (0, 0, 0, 12, 14, 24) 的李代数。在 [2], 中，它记作 $L_3(1, 2) \times \mathbb{R}$.

3 8 维以下伪厄米二次幂零李代数的分类

现在我们将对允许伪厄米二次度量的幂零李代数进行完整分类。需要注意的是，我们的分类实际上是按全纯等距同构进行的；但对于阿贝尔李代数，我们不会列出所有显而易见的不同惯性指数。

6 维以下的分类现在几乎显而易见。采用与推论 2.5 相同的记号，有

命题3.1 一个幂零李代数 $\mathfrak{g}$，若 $\dim(\mathfrak{g}) \leq 6$，则它存在伪厄米二次结构，当且仅当它是阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^4$、$\mathbb{R}^6$ 之一，且度量的惯性指数为 $(2r, 2p)$；或者它是 $\mathcal{L}$，并配备推论 2.5 中的度量或其相反度量。

证明。回顾一下，4 维以下的幂零二次李代数都是阿贝尔的 [7]，而伪厄米二次李代数的维数为偶数。因此，4 维以下只有李代数 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^4$。对于 6 维情形，根据定理 2.4，伪厄米二次李代数 $\mathfrak{g}$ 要么是 $\mathbb{R}^2$ 与一个 4 维伪厄米二次李代数的直和，要么是一个带有定号伪厄米度量的 $\mathbb{R}^2$ 的 pHQ-双扩张。第一种情形得到 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^6$；第二种情形（必要时改变 $\mathfrak{g}$ 上度量的符号）得到李代数 $\mathcal{L}$，如推论 2.5 的证明所述，其中取 $s_0 \neq 0$ 和 $\mathbb{R}^6$，当 $s_0 = 0$ 时。□

接下来研究 $\dim(\mathfrak{g}) = 8$ 的情形。再次利用定理 2.4 以及 6 维情形的分类可知，若 $\mathfrak{g}$ 不是 $\mathbb{R}^4$ 的 pHQ-双扩张，则它必与 $\mathbb{R}^8$ 或 $\mathcal{L} \oplus \mathbb{R}^2$ 同构。因此，我们可以认为 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的 pHQ-双扩张。注意，对于 $\mathbb{R}^4$ 上的正定度量，我们同样得到 $\mathbb{R}^8$ 或正交和 $\mathcal{L} \oplus \mathbb{R}^2$（度量由推论 2.5 给出，或取其相反数），因此可以认为 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的 pHQ-双扩张，且带有中性伪厄米度量（通常记作 $\mathbb{R}^{2,2}$）。

我们先讨论通过两个零导子进行 pHQ-双扩张的情形。

命题 3.2 设 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 是通过 $D = F = 0$ 和 $s_0 \in \mathbb{R}^4$ 对 $\mathbb{R}^{2,2}$ 进行的 pHQ-双扩张。那么它等价于 $\mathbb{R}^{4,4}$、$T_0^*\mathfrak{k}$ 或 $T^*_{\pm\theta_1}\mathfrak{k}$，其中 $\mathfrak{k}$ 和 θ_1 如命题 1.4 所述。

证明。根据 pHQ-双扩张的定义，我们得到非零括号为

$$[v, Jv] = s_0, \quad [v, x] = -\varphi(s_0, x)Jz, \quad [Jv, x] = \varphi_0(s_0, x)z.$$

若 $s_0 = 0$，显然可得具有中性度量的阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^8$，因此我们可以考虑 $s_0 \neq 0$。

假设 $\varphi_0(s_0,\ s_0)=0$。于是我们可以找到一个各向同性向量 $t_0\in\mathbb{R}^4$，使得 $\varphi_0(s_0,\ t_0)=1$，$\varphi_0(Js_0,\ t_0)=0$。那么，在基 $\{v,Jv,z,Jz,s_0,Js_0,t_0,Jt_0\}$ 下，非平凡括号为

$$[v,Jv]=s_0,\quad [v,t_0]=-Jz,\quad [Jv,t_0]=z.$$

若我们定义

$$x_1=v,\quad x_2=Jv,\quad x_3=s_0,\quad x_4=Js_0,\quad x_1^*=z,\quad x_2^*=Jz,\quad x_3^*=t_0,\quad x_4^*=Jt_0,$$

我们立即得到，$\mathfrak{g}$ 是带有命题 1.4 中伪厄米结构的李代数 $T_0^*\mathfrak{k}$。

另一方面，若 $\varphi(s_0,s_0)=\alpha\neq 0$，由于 $\mathbb{R}^4$ 中的度量是中性的，我们可以选取 $t_0\in(\mathbb{R}s_0\oplus\mathbb{R}Js_0)^\perp$，使得 $\varphi_0(t_0,t_0)=-\varphi_0(s_0,s_0)$，从而在相应的基下得到以下非零括号：

$$[v,Jv]=s_0,\quad [v,s_0]=-\alpha Jz,\quad [Jv,s_0]=\alpha z. \tag{4}$$

选取 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\alpha=\epsilon 2\lambda^4$，其中 $\epsilon=\pm 1$ 是 α 的符号，并定义

$$\begin{aligned}&x_1=\lambda^{-1}v,\quad x_2=\lambda^{-1}Jv,\quad x_3=(2\lambda^2)^{-1}(s_0+t_0),\quad x_4=(2\lambda^2)^{-1}(Js_0+Jt_0),\\&x_1^*=\lambda z,\quad x_2^*=\lambda Jz,\quad x_3^*=\epsilon(2\lambda^2)^{-1}(s_0-t_0),\quad x_4^*=\epsilon(2\lambda^2)^{-1}(Js_0-Jt_0).\end{aligned}$$

于是我们有 $x_1^*,x_2^*,x_4,x_4^*\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，简单计算可得

$$[x_1,x_2]=x_3+\epsilon x_3^*,\quad [x_2,x_3]=\epsilon x_1^*,\quad [x_3,x_1]=\epsilon x_2^*,\quad [x_3^*,x_1]=x_2^*,\quad [x_3^*,x_2]=-x_1^*,$$

这表明 $\mathfrak{g}$ 的括号与 $T^*_{\epsilon\theta_1}\mathfrak{k}$的相同。由于复结构显然相同，并且我们还有 φ 的非零乘积为 $\varphi(x_i,x_i^*)=1$，故证毕。□

注3.1 注意，由恒等式 (4) 可轻易看出，$T^*_{\pm\theta_1}\mathfrak{k}$与 $\mathcal{L}\oplus\mathbb{R}^2$全纯同构。此外，若在 $\mathcal{L}$上选取推论 2.5 中的洛伦兹-厄米度量，则$T^*_{\theta_1}\mathfrak{k}$与 $\mathcal{L}\oplus\mathbb{R}^2$等价，^{0}，而 $T^*_{-\theta_1}\mathfrak{k}$是具有相反度量的同一个李代数。此外，$T^*_{\theta_1}\mathfrak{k}$ 与 $T^*_{-\theta_1}\mathfrak{k}$不可能等价，因为度量在导出理想上的限制，对于 $T^*_{\theta_1}\mathfrak{k}$的惯性指数为 (0, 1)，而对于 $T^*_{-\theta_1}\mathfrak{k}$ 的惯性指数为 (1, 0)。

为了对 $(D,F)\neq(0,0)$ 的情形进行分类，我们将始终假设 $F\neq 0$。请注意，根据注2.1（3），作此假设并不失一般性。我们首先需要以下技术引理：

引理 3.3 在具有任意复结构 J 和中性伪厄米度量 φ 的 $\mathbb{R}^4$ 中，设我们考虑 F、$D\in\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ 两个幂零 φ-斜对称映射，使得 $F\neq 0$ 以及 $[F,D]=[F+JD,J]=0$.

如果我们将 分别记 F 为核，F 为像，则它们分别是 F 的核和像 e

$$\mathrm{Ker}(F)=J(\mathrm{Ker}(F))=\mathrm{Im}(F).$$

证明。注意， F 关于 φ 是斜对称的，因此其秩必为偶数。由于 $F \neq 0$ 和 F 是奇异的（因为它是幂零的），我们必有 $\mathrm{rank}(F) = 2$。这显然意味着 $\mathrm{Ker}(F)$ 是二维的。另请回忆，若 F^* 表示 F 关于 φ 的伴随，由于 F 是 φ-斜对称的，我们有 $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(F^*)^\perp = \mathrm{Ker}(F)^\perp$。

首先，假设 $\mathrm{Ker}(F) \cap J(\mathrm{Ker}(F)) = \{0\}$。那么 $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(F) \oplus J(\mathrm{Ker}(F))$。由于 F是幂零的，我们可以找到一个非零元素 $t_1 \in \mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Im}(F)$，并考虑另一个与 t_1线性无关的 $t_2 \in \mathrm{Ker}(F)$。于是， $\{t_1, t_2, Jt_1, Jt_2\}$是 $\mathbb{R}^4$的一组基。记 $\mathcal{F}$、$\mathcal{D}$、$\mathcal{J}$和 $\mathcal{G}$分别为相对于这组基， F、D、J和 φ对应的矩阵。由于 $t_1 \in \mathrm{Im}(F)$，它必与 $\mathrm{Ker}(F)$ 正交，因此我们有

$$\varphi(t_1, t_1) = \varphi(t_1, t_2) = \varphi(Jt_1, Jt_1) = \varphi(Jt_1, Jt_2) = \varphi(t_1, Jt_1) = 0.$$

此外，存在 α、$\beta \in \mathbb{R}$，满足 $\beta \neq 0$，使得

$$\varphi(t_2, t_2) = \varphi(Jt_2, Jt_2) = \alpha, \quad \varphi(t_1, Jt_2) = -\varphi(Jt_1, t_2) = \beta,$$

因此，矩阵 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{J}$ 为

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面，存在两个 2×2 矩阵 S_1、S_2，使得 $\mathcal{F}$ 具有如下分块分解

$$\mathcal{F} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & S_1 \\ \hline 0 & S_2 \end{array}\right),$$

但容易看出，条件 $F + F^* = 0$，或者等价地， $\mathcal{G}\mathcal{F} + \mathcal{F}^t\mathcal{G} = 0$，意味着存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得

$$S_1 = aI, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & a\alpha/\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在，由于 $[F, D] = 0$，可知 $D(\mathrm{Ker}(F)) \subset \mathrm{Ker}(F)$。因此，关于给定基的 D 矩阵必为如下形式

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$$

对于某些 2×2 矩阵 A_1、A_2、A_3.。条件 $[F+JD, J] = 0$ 导出 $A_1 = A_3 - aI$ 和 $A_2 = -S_2$。但是 F 是幂零的，这意味着 A_3 和 $A_1 = A_3 - aI$ 都必须是幂零的，因而是无迹的；这将推出 $a = 0$，与假设 $F \neq 0$ 矛盾。

因此，我们最终得到 $\mathrm{Ker}(F) \cap J(\mathrm{Ker}(F)) \neq \{0\}$，从而可以找到一个向量 $u \in \mathrm{Ker}(F)$，满足 $Ju \in \mathrm{Ker}(F)$，这意味着 $\mathrm{Ker}(F) = \mathbb{R}\text{-span}\{u, Ju\} = J(\mathrm{Ker}(F))$。如果 $\varphi(u, u) = \alpha \neq 0$，我们

就会得到 φ 在 Ker(F) 上是定型的，但这是不可能的，因为根据 F的幂零性，Ker(F) $\cap$ Im(F) $\neq \{0\}$，因此 Ker(F) 中存在一个各向同性向量。因此，$\varphi(u,u) = 0$，且 Ker(F) $=$Ker(F)$^{\perp}$ $=$Im(F)。□

注 3.2 回顾一下，在伪厄米李代数 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 中，若 $u_1 \in \mathfrak{g}$ 是各向同性的，则子空间 $\mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}Ju_1$ 是全各向同性的。由于 $u_1^{\perp} \neq (Ju_1)^{\perp}$，我们可以找到 $v \in (Ju_1)^{\perp}$，使得 $\varphi(u_1, v) = \lambda \neq 0$，从而 $u_2 = -\frac{\varphi}{(2\lambda^2} \overset{v}{,)} \overset{v}{u_1} + \frac{1}{\lambda} v$ 满足 $\varphi(\overline{u_2, u_2}) = 0$, $\varphi(u_1, u_2) = 1$ 以及 $\varphi(Ju_1, u_2) = 0$。

引理 3.4 设 $\mathbb{R}^4$ 带有任意复结构 J 和中性伪厄米度量 φ。设 F, D 是两个幂零的 φ-斜对称映射，满足 $F \neq 0$ 和 $[F, D] = [F + JD, J] = 0$，并考虑一个非零向量 $u_1 \in$ Ker(F) 以及一个非零的各向同性 $u_2 \in \mathbb{R}^4$，使得 $\varphi(u_1, u_2) = 1, \varphi(Ju_1, u_2) = 0$。

集合 $\{u_1, Ju_1, u_2, Ju_2\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的基，度量 φ 仅由以下非零配对给出：$\varphi(u_1, u_2) = \varphi(Ju_1, Ju_2) = 1$；并且存在 $a, b \in \mathbb{R}$，满足 $a \neq 0$，使得 $F(u_2) = aJu_1$, $F(Ju_2) = -au_1$, $D(u_2) = bJu_1$, $D(Ju_2) = -bu_1$，此外还有 $D(u_1) = D(Ju_1) = 0$。

证明。显然，$\{u_1, Ju_1, u_2, Ju_2\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的基，且 $\varphi(u_1, u_2) = \varphi(Ju_1, Ju_2) = 1$，因此我们只讨论陈述的最后一部分。

注意，根据上面的引理，Ker(F) $= \mathbb{R}$-span$\{u_1, Ju_1\} =$Im(F)，因此 $F(u_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 Ju_1$, $F(Ju_2)$ $\beta_1 u_1 + \beta_2 Ju_1$；但由于 F 关于 φ 是斜对称的，我们有 $\alpha_1 = \varphi(F(u_2)\ u_2) = 0$, $\beta_2 = \varphi(F(Ju_2)\ Ju_2) = 0$，并且

$$\alpha_2 = \varphi(F(u_2), Ju_2) = -\varphi(u_2, F(Ju_2)) = -\beta_1,$$

因此，令 $a = \alpha_2$，我们得到 $F(u_2) = aJu_1$, $F(Ju_2) = -au_1$。注意，此时我们有 $[F, J] = 0$。

条件 $[F, D] = 0$ 表明 D(Ker(F)) $\subset$Ker(F)，因此，相对于基 $\{u_1, Ju_1, u_2, Ju_2\}$，F的矩阵具有如下形式

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$$

其中 2×2是矩阵 A_i。由于我们已得到 $[F, J] = 0$，条件 $[F + JD, J] = 0$推出$[D, J] = 0$，并且简单计算可知，每个矩阵 A_i都必须具有如下形式

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_1 \end{pmatrix},$$

对于某些 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$。D 的幂零性现在推出 $a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = 0$，这表明 Ker($F$) $\subset$Ker(D)；又由于 D是 φ-斜对称的，我们有 $a_2 = \varphi(F(u_2)\ u_2) = 0$，因此，选取$b = b_2$ 即可得到所需结果。□

命题 3.5 设 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 是通过一对 $(F, D) \neq (0,0)$ 和某个 $s_0 \in \mathbb{R}^4$ 对 $\mathbb{R}^2,\ _2$ 作出的 pHQ-双扩张，并设 $\mathfrak{k}$ 和 θ_i $(1 \leq i \leq 4)$ 如命题 1.4 中所述。那么 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 等价于 $T_0^*\mathfrak{k}$ 或 $T_{\theta_3}^*\mathfrak{k}$。

证明。由注2.1（3）可知，我们可以认为 $F \neq 0$。引理 3.3 显然推出 Ker(F) 是二维且全各向同性的。考虑 $\mathbb{R}^4$ 中 Ker(F) 的一个二维全各向同性补空间W，并令 $s_0 = t_0 + w_0$，其中 $t_0 \in$Ker(F) $w_0 \in W$。下面根据 s_0 和 w_0 是否为零，区分若干情形。

若 $s_0 = 0$，取任意的 $u_1 \in$Ker(F)，并选择 $u_2 \in W$使得 $\varphi_0(u_1, u_2) = 1$ 且$\varphi_0(Ju_1, u_2) = 0$。利用引理 3.4 以及命题 2.3 中给出的括号，可得存在$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$，使得 $\mathfrak{g}$ 中的括号由下式给出

$$[v, Jv] = 0, \quad [v, u_2] = aJu_1, \quad [v, Ju_2] = -au_1$$
$$[Jv, u_2] = bJu_1, \quad [Jv, Ju_2] = -bu_1, \quad [u_2, Ju_2] = az + bJz.$$

回顾一下，$\mathfrak{g}$ 上的二次型由以下非零乘积给出

$$\varphi(v, z) = \varphi(Jv, Jz) = \varphi(u_1, u_2) = \varphi(Ju_1, Ju_2) = 1.$$

现在定义这些向量

$$x_1 = u_2, \quad x_3 = az + bJz, \quad x_1^* = u_1, \quad x_3^* = (a^2 + b^2)^{-1}(av + bJv),$$
$$x_2 = Jx_1, \quad x_4 = Jx_3, \quad x_2^* = Jx_1^*, \quad x_4^* = Jx_3^*.$$

显然，x_1^*, x_2^*, x_3, x_4 位于 $\mathfrak{g}$ 的中心中，简单计算还可得 x_4^* 也在中心中，因此仅有以下非平凡括号

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_3^*, x_1] = x_2^*, \quad [x_3^*, x_2] = -x_1^*.$$

由于容易验证，对于所有 $1 \leq i, j \leq 4$，都有 $\varphi(x_i, x_j^*) = \delta_{ij}$且 $\varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_i^*, x_j^*) = 0$，因此我们看到，$\mathfrak{g} = T_0^*\mathfrak{k}$配备命题 1.4 中定义的括号和复结构。

如果 $s_0 \neq 0$但 $w_0 = 0$我们可以选择 $u_1 = t_0 \in F$的核，并找到一个 $u_2 \in W$，验证 $\varphi_0(u_1, u_2) = 1$以及 $\varphi_0(Ju_1, u_2) = 0$。结合引理 3.4和命题 2.3，可以得到 a、$b \in \mathbb{R}$、$a \neq 0$，使得括号为

$$[v, Jv] = u_1, \quad [v, u_2] = aJu_1 - Jz, \quad [v, Ju_2] = -au_1$$
$$[Jv, u_2] = bJu_1 + z, \quad [Jv, Ju_2] = -bu_1, \quad [u_2, Ju_2] = az + bJz.$$

考虑 $\mathbb{R}^4$ 中的以下向量:

$$x_1 = u_2 - av - bJv, \quad x_3 = 2(a^2 + b^2)u_1 + 2az + 2bJz,$$
$$x_1^* = \frac{1}{2a^2 + 2b^2}((a^2 + b^2)u_1 - az - bJz) \quad x_3^* = \frac{1}{4a^2 + 4b^2}(u_2 + av + bJv)$$
$$x_2 = Jx_1, \quad x_4 = Jx_3, \quad x_2^* = Jx_1^*, \quad x_4^* = Jx_3^*.$$

与前一种情况一样，显然 x_1^*、x_2^*、x_3、$x_4 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。直接计算可得 $x_4^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，并且

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_3^*, x_1] = x_2^*, \quad [x_3^*, x_2] = -x_1^*$$
$$\varphi(x_i, x_j^*) = \delta_{ij}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_i^*, x_j^*) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4,$$

这就证明了 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 再次是 $T_0^*\mathfrak{k}$。

现在假设 $w_0 \neq 0$。取一个元素 $u_1 \in \mathrm{Ker}(F)$，使得 $\varphi_0(u_1, w_0) = 1$ and$\varphi_0(Ju_1, w_0) = 0$。取 β_1，$\beta_2 \in \mathbb{R}$，使得 $t_0 = \beta_1 u_1 + \beta_2 J u_1$，并考虑 $u_2 = \beta_2 J u_1 + w_0$。立即可得 $\varphi(u_2, u_2) = \varphi(u_2, Ju_1) = 0$ and $\varphi(u_1, u_2) = 1$。此外，$s_0 = \beta_1 u_1 + u_2$。由引理 3.4 和命题 2.3 可得

$$[v, Jv] = u_2 + \beta_1 u_1, \ [v, u_1] = -Jz, \ [v, u_2] = aJu_1 - \beta_1 Jz, \ [v, Ju_2] = -au_1$$
$$[Jv, u_1] = z, \ [Jv, u_2] = bJu_1 + \beta_1 z, \ [Jv, Ju_2] = -bu_1, \ [u_2, Ju_2] = az + bJz.$$

在这种情况下，如果我们取

$$x_1 = (a^2 + b^2)^{-3/5}(av + bJv), \quad x_3 = (a^2 + b^2)^{-1/5} u_2,$$
$$x_1^* = (a^2 + b^2)^{-2/5}(az + bJz) \quad x_3^* = (a^2 + b^2)^{1/5} u_1$$
$$x_2 = Jx_1, \quad x_4 = Jx_3, \quad x_2^* = Jx_1^*, \quad x_4^* = Jx_3^*,$$

并取 $\alpha = (a^2 + b^2)^{-2/5}\beta_1$，则可得 $\mathfrak{g}$ 中的括号由下式给出

$$[x_1, x_2] = x_3 + \alpha x_3^*, \quad [x_1, x_3] = -\alpha x_2^* + x_4^*,$$
$$[x_1, x_4] = -x_3^*, \quad [x_2, x_3] = \alpha x_1^*,$$
$$[x_3, x_4] = x_1^*, \quad [x_3^*, x_1] = x_2^*, \quad [x_3^*, x_2] = -x_1^*.$$

此外，很容易证明我们还有

$$\varphi(x_i, x_j^*) = \delta_{ij}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_i^*, x_j^*) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4,$$

因此，我们得到 $T_\theta^*\mathfrak{k}$ 在 $\theta = \theta_3 + \alpha\theta_1$上的伪厄米结构。

现在，考虑这些向量

$$y_1 = x_1 + \alpha x_3, \quad y_2 = x_2 + \alpha x_4, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4,$$
$$y_1^* = x_1^*, y_2^* = x_2^*, \quad y_3^* = x_3^* - \alpha x_1^*, \quad y_4^* = x_4^* - \alpha x_2^*.$$

注意到 $Jy_1 = y_2$、$Jy_3 = y_4$、$Jy_1^* = y_2^*$、$Jy_3^* = y_4^*$，通过直接计算可得

$$\varphi(y_i, y_j^*) = \delta_{ij}, \quad \varphi(y_i, y_j) = \varphi(y_i^*, y_j^*) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4.$$

此外，显然 y_1^*、y_2^*、y_4^* 均为中心元素，且有

$$
\begin{aligned}
&[y_1, y_2] = [x_1, x_2] + \alpha[x_3, x_2] + \alpha[x_1, x_4] + \alpha^2[x_3, x_4] = x_3 + \alpha x_3^* - \alpha^2 x_1^* - \alpha x_3^* + \alpha^2 x_1^* = y_3 \\
&[y_1, y_3] = [x_1, x_3] = -\alpha x_2^* + x_4^* = y_4^* \\
&[y_1, y_4] = [x_1, x_4] + \alpha[x_3, x_4] = -x_3^* + \alpha x_1^* = -y_3^* \\
&[y_2, y_3] = [x_2, x_3] + \alpha[x_4, x_3] = \alpha x_1^* - \alpha x_1^* = 0 \\
&[y_3, y_4] = [x_3, x_4] = x_1^* = y_1^* \\
&[y_3^*, y_1] = [x_3^*, x_1] + \alpha[x_3^*, x_3] = x_2^* = y_2^* \\
&[y_3^*, y_2] = [x_3^*, x_2] + \alpha[x_3^*, x_4] = -x_1^* = -y_1^*,
\end{aligned}
$$

其余括号均为零。因此，我们实际上得到李代数 $T^*_{\theta_3}\mathfrak{k}$。 □

现在可以总结以上所有结果。我们将 $\mathcal{L}^{4,\ 2}$ 记为推论 2.5 中带有复结构 $\mathcal{L}$ 并赋予洛伦兹-厄米度量的李代数，将 $\mathcal{L}^{2,\ 4}$ 记为赋予相反度量的同一李代数。与前面一样，$T^*_\theta\mathfrak{k}$ 上的度量和复结构均由命题 1.4 给出。

由于伪厄米二次李代数的直和显然仍是伪厄米二次李代数，因此我们只给出不可分解情形的分类，也就是说，只讨论那些不能分解为两个伪厄米二次理想之和的伪厄米二次李代数。

定理 3.6 对于 $n \leq 8$ 个 n维不可分解伪厄米二次李代数，它等价于以下伪厄米李代数中的一个且仅一个：$\mathbb{R}^{0,\ 2}$, $\mathbb{R}^{2,\ 0}$, $\mathcal{L}^{4,\ 2}$, $\mathcal{L}^{2,\ 4}$,$T^*_0\mathfrak{k}$, $T^*_{\theta_3}\mathfrak{k}$。

证明。根据上述命题，结果立即可得。现在只需证明这些李代数彼此不等价。利用李代数的维数和度量的惯性指数，只需说明两个 T*-扩张彼此不等价即可。然而，$T^*_0\mathfrak{k}$ 的中心是 5 维的，而 $T^*_{\theta_3}\mathfrak{k}$ 的中心是 3 维的，因此它们不同构（实际上，$T^*_0\mathfrak{k}$ 是二步幂零的，而另一个是三步幂零的）。□

显然，阿贝尔伪厄米二次李代数可由李代数的维数和度量的惯性指数分类。下表给出了非阿贝尔伪厄米二次李代数 $(\mathfrak{g}, J, \varphi)$ 的分类方案，其中 $\dim(\mathfrak{g}) \leq 8$，该方案依据 $\mathfrak{g}$ 和 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的维数，以及 φ 的惯性指数和其在 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$上的限制 $\varphi_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ 的惯性指数。虽然并非必要，我们仍列出 $\mathfrak{g}$的幂零指数。

dim(𝔤)	dim([𝔤, 𝔤])	sig(φ)	sig($\varphi_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$)	幂零指数	𝔤
6	3	(2,4)	(0,1)	3	$\mathcal{L}^{2,4}$
6	3	(4,2)	(1.0)	3	$\mathcal{L}^{4,2}$
8	3	(2,6)	(0,1)	3	$\mathcal{L}^{2,4} \oplus \mathbb{R}^{0,2}$
8	3	(4,4)	(0,1)	3	$\mathcal{L}^{2,4} \oplus \mathbb{R}^{2,0} = T^*_{\theta_1}\mathfrak{k}$
8	3	(4,4)	(0,0)	2	$T^*_0\mathfrak{k}$
8	3	(4,4)	(1,0)	3	$\mathcal{L}^{4,\ 2} \oplus \mathbb{R}^{0,\ 2} = T^{*-}_{\ \ \theta_1}\mathfrak{k}$
8	3	(6,2)	(1,0)	3	$\mathcal{L}^{4,\ 2} \oplus \mathbb{R}^{2,\ 0}$
8	5	(4,4)	(1,1)	3	$T^*_{\theta_3}\mathfrak{k}$

表 I. 至多 8 维的非阿贝尔伪厄米二次幂零李代数

参考文献

[1] A.Andrada，M.L. Barberis，I.G. Dotti，《阿贝尔厄米几何》，微分几何及其应用 30 (2012)，第 5 期，509–519。[2] A. Andrada，M.L. Barberis，G. Ovando，《复型李双代数及其相关的泊松李群》，几何与物理杂志 58 (2008)，1310–1328。[3] I. Bajo，《李代数的预导子与双不变李群的等距变换》，专献几何 66 (1997)，第 3 期，281–291。[4] I. Bajo，S. Benayadi，A. Medina，《二次李代数上的辛结构》，代数杂志 316 (2007)，174–188。[5] M.L. Barberis，I. Dotti，《可解李代数上的阿贝尔复结构》，李理论杂志 14 (2004)，25–34。[6] M. Bordemann，《非结合代数上的非退化不变双线性形式》，科穆尼亚数学学报，LXVI，第 2 期 (1997)，151–201。[7] G. Favre，L.J. Santharoubane，《李代数上的对称、不变、非退化双线性形式》，代数杂志 105，451–464 (1987)。

[8] K.H. Hofmann, V.S. Keith, 有限维李代数上的不变二次型，澳大利亚数学会通报 33 (1986), no. 1, 21–36.[9] I. Kath, 小维数幂零度量李代数，李理论杂志 17 (2007) 41–61.[10] K. Kodaira, 关于紧复解析曲面的结构 I，美国数学杂志 86 (1964), 751–798.[11] A. Medina, Ph. Revoy, Alg`èbres de Lie et produit scalaire invariant, Ann. Scient. l' ´E.N.S. 4^{e}s´érie, t. 18, 3 (1985), 553–561.[12] D.V. Millionshchikov, 幂零李代数上的复结构与降中心列，都灵理工大学数学研讨会报告 74, 1 (2016), 163–182.[13] S.M. Salamon, 幂零李代数上的复结构，纯粹与应用代数杂志 157 (2001), 311–333.[14] H. Samelson, 一类紧解析流形，葡萄牙数学 12 (1953), 129–132.[15] W. Thurston, 辛流形的一些简单例子，美国数学会会刊 55 no. 2 (1976), 467–468.

作者地址：

MustaphaBachaou，数学系，理学院，阿卜杜勒马利克·埃萨迪大学，邮政信箱 2121，得土安，摩洛哥。mustapha.bachaou@etu.uae.ac.ma

Ignacio Bajo，应用数学系 II，电信工程学院，维戈大学，36280 维戈，西班牙。
ibajo@dma.uvigo.es

Mohamed Louzari，数学系，理学院，阿卜杜勒马利克·埃萨迪大学，邮政信箱 2121，得土安，摩洛哥。m.louzari@uae.ac.ma