arXiv:2301.06467v1 [math.MG] 16 Jan 2023

具有精确维数的非单射阿苏阿德型定理

GUY C. DAVID

ABSTRACT. 由 Cheeger 和 Kleiner 定义的 Lipschitz light 映射，是度量空间之间一类非单射的“折叠”，能够保留某些几何信息。我们证明，若一个度量空间 (X,d) 的长田维数为 n，那么它的“雪花化空间”(X,d^ϵ) 对所有 $0<\epsilon<1$ 都存在到 $\mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz light 映射。这可视为阿苏阿德著名定理的一种类比。我们还给出其在共形维数一种新变体中的应用。

1. INTRODUCTION

度量几何中的一个基本研究方向是：给定一个抽象度量空间，何时能够将它嵌入、折叠或以其他方式映射到欧几里得空间中，同时又不至于过度扭曲其几何结构？这个问题的一个著名例子是双利普希茨嵌入问题：给定一个度量空间，何时存在一个到某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 的嵌入，使所有距离都在一个常数因子范围内得到保持?

这里似乎不存在简单的充要条件。一个相当明显的必要条件是， X 必须具有有限的阿苏阿德维数 $\dim_A$。（定义见第 2 节。）阿苏阿德的一个重要定理指出，若愿意先将度量提升到一个小于 1 的幂，则这一条件也是充分的:

定理 1.1（阿苏阿德， [1]的命题 2.6）。设 (X,d) 是一个具有有限阿苏阿德维数的度量空间，且 $\epsilon\in(0,1)$。那么存在一个欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，以及从度量空间 (X,d^ϵ) 到 $\mathbb{R}^N$ 的双利普希茨嵌入。嵌入的维数 N和畸变可以选取得仅依赖于 ϵ 和 X的阿苏阿德维数常数。

当 $\epsilon\in(0,1)$ 时，度量空间 (X,d^ϵ) 称为“雪花化空间”。在阿苏阿德定理中，这种雪花化是必要的：存在阿苏阿德维数有限、却无法双利普希茨嵌入到任何欧几里得空间中的度量空间，其中最著名的例子是海森堡群[14,定理 7.1]。

本文研究的度量空间类别比阿苏阿德定理中的更一般。这类空间将通过一种不同的维数概念来定义，即所谓的长田维数。度量空间的长田维数 $\dim_N(X)$ 可视为对纯拓扑概念勒贝格覆盖维数 $\dim_T(X)$ 的量化；后者是满足以下条件的最小$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$： X 的每个有限开覆盖都存在一个重数至多为

日期：2023年1月18日。2020年数学主题分类：30L99、30L05、51F30。本研究部分获得美国国家科学基金会DMS-2054004号资助。

$n+1$的加细。为定义长田维数，我们首先规定，若度量空间 X 的一个子集族中每个集合的直径都至多为 D，则称该子集族为 D-有界。对于 $s>0$，一个子集族的 s-重数是满足以下条件的最小 n： X 中直径至多为 s 的每个子集至多与该子集族中的 n 个成员相交。

定义 1.2。度量空间 X 的长田维数，记作 $\dim_N(X)$，是满足以下性质的最小整数 n：存在 $c>0$，使得对于所有 $s>0$，X 都有一个 cs- 有界覆盖，其 s- 重数至多为 $n+1$。

长田维数已被证明是研究利普希茨几何和拟对称几何中许多问题时一个非常有用的量；其性质的详尽介绍可见 [9]。

一般而言，[10,定理 1.1] 有如下不等式

$$\dim_N(X) \le \dim_A(X) \text{ for all metric spaces } X, \tag{1.1}$$

这个不等式通常是严格的，而且构造长田维数有限而阿苏阿德维数无限的度量空间甚至并不困难。

因此，Assouad 定理一般不再适用于长田维数有限的空间，所以我们可以回到引言开头提出的问题，询问这些空间是否存在映射到欧几里得空间且能保留某些几何信息的映射。我们的方法是放弃对映射的单射要求，并尝试找到一种定量“折叠”而非嵌入此类空间到欧几里得空间的方法。一类不一定是单射、但能在所有尺度上保留某些几何信息的折叠映射，便是 Cheeger 和 Kleiner 在 [2] 中定义的所谓“Lipschitz light”映射。要定义它们，我们首先需要讨论“r-路径”及相关概念：

定义 1.3. 给定 $r>0$，度量空间中的有限序列（x_1，.....，x_k）称为 r-路径，如果对每个 $i\in\{1,\dots,k-1\}$都有 $d(x_i,x_{i+1})\le r$。

如果度量空间 X 中的两个点 x、y 属于 X 的同一个 r-分支，即存在一条连接它们的 r-路径，也就是说，存在一条 X 中的 r-路径（x_1，.....，x_k），满足 $x=x_1$ 和 $y=x_k$，则称这两个点属于同一个 r-分支。对于每个 $r>0$，r-分支在 X 上定义了一个等价关系。

最后，如果一个集合只包含一个 r-分支，也就是说，其中任意两个点都可以通过一条 r-路径连接，则称该集合是 r-连通的。

定义 1.4（Cheeger–Kleiner [2]）。度量空间之间的映射 $f: X\to Y$ 称为 Lipschitz light，如果存在一个常数 $C>0$ 使得

- f 是利普希茨映射，其常数为 C，并且
- 对于每个 $r>0$ 以及每个满足 $\operatorname{diam}(W)\le r$ 的子集 $W\subseteq Y$，$f^{-1}(W)$ 的 r-分支的直径至多为 Cr。

Lipschitz light 映射在（拓扑意义上）是轻映射，因此不会将任何非平凡连续统（紧致连通集）压缩为一点。事实上，Lipschitz light 映射保留了更多定量信息。将定义 1.4 直接改述如下：f 是 Lipschitz light，当且仅当存在一个常数 $c>0$，使得对所有 $r>0$，

$$c^{-1}\operatorname{diam}(K)-r\le \operatorname{diam}(f(K))\le c\operatorname{diam}(K) \text{ for all } r\text{-connected sets } K\subseteq X.$$

因此，Lipschitz light 映射大致保留粗连通集的直径。特别地，Lipschitz light 映射在一个常数乘法因子的范围内保留连续统的直径：

$$\operatorname{diam}(f(K)) \approx \operatorname{diam}(K) \text{ for all continua } K \subseteq X. \tag{1.2}$$

因此，我们将 Lipschitz light 映射视为一种“折叠”度量空间、同时保留某些几何信息的方式。

于是，我们的主定理是阿苏阿德定理（定理 1.1）的一个类似结果，其中以长田维数取代阿苏阿德维数，以 Lipschitz light 映射取代双 Lipschitz 嵌入。因此，相较于阿苏阿德定理中的嵌入，我们构造的是一类更弱的映射，但适用于范围更广的空间。不过，一个重要的区别是，我们还得到了目标欧几里得空间的精确维数，因此即使对于阿苏阿德维数有限的空间，我们的结果也具有研究意义。

定理 1.5. 设 (X, d) 是一个长田维数为 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的度量空间，且令$\epsilon \in (0, 1)$。那么，存在一个从 (X, d^ϵ) 到 $\mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz light 映射。此映射的 Lipschitz light 常数可以选为仅依赖于 n、 ϵ 以及定义 1.2 中的常数 c 。

此外， 数 $n = \dim_N(X)$ 是存在此类映射的最小整数 .

根据上述观察（1.2），定理 1.5 中构造的 Lipschitz light 映射特别具有以下性质：

$$\operatorname{diam}_{\mathbb{R}^n}(f(K)) \approx \operatorname{diam}_{(X,d)}(K)^\epsilon \text{ for all continua } K \subseteq (X, d). \tag{1.3}$$

如上所述，阿苏阿德定理 1.1 对 $\epsilon = 1$ 不成立。同样，在定理 1.5 中也不能取 $\epsilon = 1$ 。事实上，[3, 定理 6.8] 表明，例如，海森堡群不允许映射到任何欧几里得空间中的 Lipschitz light 映射，而根据 [10, 定理 4.2]，其长田维数为 3。定理 1.5 意味着可以将海森堡群“雪花化并折叠”到 $\mathbb{R}^3$ 中。这颇为违反直觉：这个从海森堡群到 $\mathbb{R}^3$ 的映射将整体的 Hausdorff 维数和阿苏阿德维数从 4 降低到 3，同时通过（ 1.3 ）大幅扩大了所有小型连续统的直径

定理 1.5 与定理 1.1 之间的对应关系也延伸到了证明中。与阿苏阿德的证明一样，我们通过对所有位置和尺度上的某些局部化“隆起函数”求和来构造我们的映射。当我们考虑这些局部化函数如何相互作用以证明 Lipschitz 轻性（见引理 3.6）时，便出现了差异。这迫使我们使用一个充分“良好分离”的尺度序列 $\{r^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ （见（3.2）），而在阿苏阿德的论证中则不需要这样做。关于受上述论述影响的阿苏阿德论证，我们将在 [8, 第 12] 章中进行介绍。

现在我们给出定理 1.5 的几个推论。

1.1. 维数理论考量。关于拓扑维数 $\dim_T$ 的一个经典结果是（对于紧致度量空间），它也可以通过到欧几里得空间的（拓扑）轻映射来理解。回顾一下，若连续映射 p 满足：对于 f 的像中的每个 p ， $f^{-1}(p)$ 都是全不连通的，则称其为轻映射。若 X 是一个紧致度量空间，那么

$$\dim_T(X) = \min\{n \geq 0 : \exists f \colon X \to \mathbb{R}^n \text{ light}\}. \tag{1.4}$$

（参见 [13, 定理 III.6 和 III.10]。）

这促使 Cheeger 和 Kleiner 提出了度量空间的一种新维数：

定义 1.6（Cheeger–Kleiner [2]）。若度量空间 X 存在一个 Lipschitz light 映射 $f : X \to \mathbb{R}^n$，则称其具有 Lipschitz 维数 $\leq n$。

我们将 X 的 Lipschitz 维数定义为满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$： X 具有 Lipschitz 维数 $\leq n$，并记为 $\dim_L(X)$。若 X 不存在到任何欧几里得空间的 Lipschitz light 映射，则记作 $\dim_L(X) = \infty$。

Cheeger 和 Kleiner [2] 证明，有限 Lipschitz 维数的空间可以表示为某些逆极限；此外，Lipschitz 维数为 1 的空间可以双 Lipschitz 嵌入到巴拿赫空间 L_1中。文献 [3, 4, 5, 6] 进一步探讨了 Lipschitz 维数的其他性质。

鉴于拓扑领域中的 (1.4)，利普希茨维数和长田维数存在差异，这或许已经颇为令人惊讶。（如上文所述，对于海森堡群 H，$\dim_N(H) = 3$ 以及 $\dim_L(H) = \infty$。）然而，我们总是有以下不等式

$$\dim_T(X) \leq \dim_N(X) \leq \dim_L(X) \tag{1.5}$$

根据 [9, 定理 2.2] 和 [3, 推论 3.5]。

鉴于 [2] 的结果以及度量空间的双利普希茨不变量所具有的普遍意义，进一步理解有限 Lipschitz 维数的度量空间是值得的。我们主定理的一种改述如下：

推论 1.7。设度量空间 (X, d) 的长田维数为 $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$。那么，对于每个 $\epsilon \in (0, 1)$，度量空间 (X, d^ϵ) 的 Lipschitz 维数为 n。

由该推论和 [2, 定理 1.7] 可知，Nagata 维数为 1 的度量空间的每个雪花化空间都存在到 $L_1(Z, \mu)$ 的双利普希茨嵌入，其中某个测度空间为 (Z, μ)。

作为定理 1.7 的另一个直接推论，我们回答 [3, 问题 8.5]：

推论 1.8。雪花化不会增加度量空间的 Lipschitz 维数。换言之，对于每个度量空间 (X, d) 以及每个 $\epsilon \in (0, 1)$，都有 $\dim_L(X, d^\epsilon) \leq \dim_L(X, d)$。

证明。令 t X 为一个度量空间，且 $\epsilon \in (0, 1)$。由推论 1.7 和 (1.5)，我们有

$$\dim_L(X, d^\epsilon) = \dim_N(X, d) \leq \dim_L(X, d).$$

□

1.2. “分支共形”维数。现在我们讨论定理 1.5 在共形维数这一研究较为深入的概念的一种变体中的应用。

1.2.1. 拟对称映射与分支拟对称映射。雪花化变换 $(X, d) \mapsto (X, d^\epsilon)$ 是一类称为准对称映射的映射中的特例。这类映射起源于经典共形映射理论，如今在度量空间上的分析、双曲几何和几何群论中发挥着重要作用。

定义 1.9. 度量空间之间的嵌入 $f\colon X \to Y$ 称为准对称的（或称为准对称映射），如果存在一个同胚 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$d(f(x), f(a)) \leq \eta\left(\frac{d(x,a)}{d(x,b)}\right) d(f(x), f(b))$$

对 X 中任意三个互不相同的点 a、b、x。

如果该嵌入是满射，我们就称 X 和 Y 准对称。

换言之，准对称映射是以受控方式扭曲距离比的同胚。如今，关于一般度量空间中的准对称映射，已经形成了庞大的理论；感兴趣的读者可参阅 [8] 了解背景，但本文实际上并不需要用到这些内容。对我们而言，最重要的事实是长田维数是准对称不变量（见 [9, 定理 1.2]），而阿苏阿德维数和利普希茨维数则不是。（前者见 [12]，后者见 [3, 推论 8.4]。）

近来，人们开始关注准对称映射的类似概念，这类映射不必是单射；这有些类似于经典复分析中全纯函数与共形映射之间的关系。为此，Guo 和 Williams [7] 定义并研究了“分支准对称”映射。为定义这类映射，我们先回顾一下：度量空间中的连续体是一个紧致连通集。如果连续体至少包含两个点，我们就称它为非平凡的。

定义 1.10. 连续映射 $f\colon X \to Y$ 若存在同胚 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 使得

$$\operatorname{diam}(f(E)) \leq \eta\left(\frac{\operatorname{diam}(E)}{\operatorname{diam}(E')}\right) \operatorname{diam}(f(E)),$$

对于 X 中每一对相交的非平凡连续体 E 和 E'，

因此，分支拟对称映射是以受控方式扭曲相交连续体直径比的连续映射，但不一定是单射。（我们指出，在 [7], 中，分支拟对称映射还必须是离散开映射，而在 [11], 中则不必。本文不作此要求。）简单论证可知，准对称嵌入自动具有分支准对称性。

如果 X 中没有连续体，那么分支准对称映射的定义就相当空泛。因此，研究分支拟对称映射的自然背景并非任意度量空间，而是配备了许多连续体的空间：所谓的“有界转弯”（或“线性连通”）空间。若度量空间中任意两点都能由一个连续体连接，且该连续体的直径与两点间距离可比，则称该空间具有有界转弯性。

1.2.2. 共形与“分支共形”维数。阿苏阿德维数不是拟对称不变量，但共形 Assouad 维数是。这一度量空间的量 X定义为

$$\operatorname{confdim}_A(X) = \inf\{\dim_A(Y) : Y \text{ is quasisymmetric to } X\}. \tag{1.6}$$

共形 Assouad 维数（及其各种变体）在几何群论和双曲几何中发挥了重要作用；综述请参见 [12] 。即使对于谢尔宾斯基地毯这样的著名空间，计算这一量仍是一个未解决的问题，而且在许多情况下，下确界并不能实际达到。

因此，一个自然的问题是：如果我们允许 (1.6) 中的 Y of X 取分支准对称像，会怎样？我们将得到另一个拟对称不变量，它可能小于共形 Assouad 维数。它是否可计算？下确界是否能取到？

事实上，我们证明，对于紧致的有界转弯空间，这一构造恰好得到长田维数。特别是，与（非分支）共形维数形成鲜明对比的是，我们得到一个取整数值的量，其下确界总能取到。这为长田维数提供了一种新的刻画。

推论 1.11. 设 X 是一个紧致的有界转弯度量空间。那么

$$\dim_N(X) = \inf\{\dim_A(Y)\colon \text{存在从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的非恒定分支准对称映射}\}.$$

这也表明，如果其中一个数为 ∞，那么另一个数也为 ∞。此外，当 $\dim_N(X) < \infty$ 时，上述下确界总能取到。

1.3. 文章结构。第 2 节介绍基本定义和记号，第 3 节给出定理 1.5 的证明，第 4 节补充背景知识并证明推论 1.11。

2. 预备知识

2.1. 基础知识。我们用 (X, d) 表示一个度量空间，但通常只写 X，度量 d 由上下文确定。在这种情况下，下文通常将度量空间 (X, d^ϵ) 记为 X^ϵ（事实上，当 $\epsilon \in$ 属于 $(0, 1)$ 时，它是一个度量空间）。

在 X 中，以 $x \in X$ 为中心、半径为 r 的开球记作 $B(x, r)$，相应的闭球记作 $\overline{B}(x, r)$。

点 $x \in X$ 到集合 $E \subseteq X$ 的距离为

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$

集合 E 的直径为

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

在需要明确讨论的是哪个度量空间时，我们可以将其写成下标，例如写作 $d_X(a, b)$ 或 $\operatorname{diam}_X(E)$。类似地，对于度量空间 (X, d^ϵ) 中 E 的直径，我们写作 $\operatorname{diam}^\epsilon(E)$；这当然就是 $(\operatorname{diam}(E))^\epsilon$。

我们使用记号 $A \lesssim B$ 表示：对于某个常数 c，有 $A \le cB$；该常数可能随行而变。如果要指出常数 c 所依赖的量 α、β、....., 我们写作 $A \lesssim_{\alpha,\ \beta,\ \ldots} B$。我们写 $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$。

2.2. 维数概述。本文使用度量空间 X 的三种维数概念：长田维数 $\dim_N(X)$（见定义 1.2）、Lipschitz 维数 $\dim_L(X)$（见定义 1.6）以及阿苏阿德维数 $\dim_A(X)$。

虽然下文不会用到阿苏阿德维数的定义，但为便于理解，我们仍给出其定义： X 的阿苏阿德维数是所有满足以下条件的数 $\beta > 0$ 的下确界：存在某个常数 $C > 0$，使得 X 中直径为 d 的任意集合，都可以被至多 $C\epsilon^{-\beta}$ 个直径不超过 ϵd的集合覆盖。更多讨论见 [8, 第 10] 章。与长田维数和 Lipschitz 维数不同，阿苏阿德维数可能不是整数。

3. Proof of Theorem 1.5

本节将证明本文的主要结果——定理 1.5。取一个长田维数为 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的度量空间 X，以及 $\epsilon \in \in$(0, 1)。

我们先简要证明定理中的“此外.....”这一结论：对于任意 $k < n$， X^ϵ 都不存在到 $\mathbb{R}^k$ 的 Lipschitz light 映射。若存在这样的映射，则有 $\dim_L(X^\epsilon) \leq k$。然而，根据 [3, 推论 3.5] 以及长田维数的拟对称不变性，我们便会得到

$$k \geq \dim_L(X^\epsilon) \geq \dim_N(X^\epsilon) = \dim_N(X) = n, \tag{3.1}$$

矛盾。

本节余下部分将通过构造一个从 X^ϵ 到 $\mathbb{R}^n$的 Lipschitz light 映射，来证明定理 1.5 的第一部分。

设 C 为定义 1.2 中相应的长田维数常数。Lang 和 Schlichenmaier 的下述命题给出了 X的一组有用覆盖；我们仅陈述其结果中稍后会用到的结论。

命题 3.1（ [9]的命题 4.1）。存在常数 $\hat{c}$ 和 $\hat{r}_0$ （仅依赖于 n和 C），使得对每个 $r \geq \hat{r}_0$, 都存在 X ($j \in \mathbb{Z}$) 的一个覆盖序列 $\hat{\mathcal{B}}^j$，满足：

(i) 对于每个 $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mathcal{B}}^j = \cup_{k=0}^n \hat{\mathcal{B}}_k^j$，其中每个 $\hat{\mathcal{B}}_k^j$ 都是由 r^j 构成的、重数至多为 1 的 $\hat{c}r^j$-有界族 t

（ii）对于每个 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in X$，存在一个 $\hat{} B \in \hat{\mathcal{B}}^j$，它包含闭球 $\overline{B}(x, r^j)$。

对我们的目的而言，使用开集（并取一个常数 ≥ 1）更为方便，因此我们对命题 3.1 作了一个小调整。

引理 3.2. 存在常数 $c \geq 1$ 和 r_0（仅依赖于 n 和 C），使得对于每个$r \geq r_0$，都存在 X ($j \in \mathbb{Z}$) 的一个覆盖序列 $\mathcal{B}^j$，满足：

(i) 对于每个 $j \in \mathbb{Z}$， $\mathcal{B}^j = \cup_{k=0}^n \mathcal{B}_k^j$，其中每个 $\mathcal{B}_k^j$ 都是由 $\frac{1}{2}r^j$ 构成的、重数至多为 1 的 cr^j-有界族。(ii) 对于每个 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in X$，存在一个 $B \in \mathcal{B}^j$，它包含闭球 $\overline{B}(x, r^j)$。

(iii) 对于每个 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $B \in \mathcal{B}^j$，集合 B 是开集。

证明。应用命题 3.1。对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，令 $\mathcal{B}^j$ 为 $\hat{\mathcal{B}}^j$ 中各元素的开 $\frac{1}{4}r^j$-邻域的集合。于是，引理中的性质很容易得到，其中 $r_0 = \hat{r}_0$ 且 $c = \hat{c} + \frac{1}{2}$。

如有必要，我们可以用 $\max\{c,1\}$ 替换 c，而不改变引理的结论，以确保 $c \geq 1$。□

现在固定一个足够大的 r，使引理 3.2 成立，并且满足

$$\frac{2}{r^\epsilon - 1} + \frac{4c}{r^{1-\epsilon} - 1} < 1 - \frac{1}{2^\epsilon}, \tag{3.2}$$

其中 c 是引理 3.2 中的常数。应用引理 3.2，得到 X 的覆盖 $\{\mathcal{B}^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$，并在证明余下部分中固定使用这些覆盖。

给定 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $B \in \mathcal{B}^j$，定义 $\psi_B\colon X \to \mathbb{R}$ 为

$$\psi_B(x) = \min\left\{1, r^{-j}\mathrm{dist}(x, B^c)\right\}.$$

ψ_B 具有以下基本性质。

引理 3.3。函数 ψ_B 具有以下性质：

(i) $0 \leq \psi_B(x) \leq 1$ 对所有 $B \in \mathcal{B}, x \in X$均成立。(ii) $\psi_B(x) > 0$ 当且仅当 $x \in B$。(iii) 若 $B \in \mathcal{B}^j$，则 ψ_B 是 Lipschitz 的，且常数不超过 r^{-j}。(iv) 若 $x \in X$ 且 $j \in \mathbb{Z}$，则存在 $k \in \{0,\dots,n\}$ 和 $B \in \mathcal{B}^j_k$，使得 $\psi_B(x) = 1$。

证明。(i) 显然成立。对于 (ii)，若 $\psi_B(X) > 0$，则 $x \notin B^c$，因此 $x \in B$。若 $x \in B$，则由于 B 是开集，$\psi_B(x) > 0$。对于 (iii)，根据三角不等式，距离函数是 1-利普希茨的，而两个 L-利普希茨函数的最小值是 L-利普希茨的。(iv) 由 ψ_B 的定义和引理 3.2 的性质 (ii) 立即得出。□

设 $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ 并设 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基为 $\{e_1,\dots,e_n\}$。对每个 $j \in \mathbb{Z}$，令

$$\phi^j(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{B\in\mathcal{B}^j_k} \psi_B(x) \right) e_k.$$

L理 3.4。函数 ϕ^j 具有以下性质，对每个 $j \in \mathbb{Z}$:

(i) 对所有 $x \in X$，$|\phi^j(x)| \leq n+1$。(ii) 作为从 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的函数，ϕ^j 是利普希茨函数，其常数为 $2(n+1)r^{-j}$。

证明。由引理 3.2(i)，一个给定点至多属于 B 中的 $n+1$ 个不同集合 $B \in \mathcal{B}^j$。由此以及引理 3.3(ii)可知，链中最右侧求和式至多有 $(n+1)$ 项非零

$$|\phi^j(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{B\in\mathcal{B}^j_k} |\psi_B(x)| = \sum_{B\in\mathcal{B}^j} |\psi_B(x)|$$

。由引 由命题 3.3(i)，每一项都不超过 1，因此 $|\phi^j(x)| \leq n+1$，从而证明了 (i)。

同样，给定 $x, y \in X$，链式表达式最右侧的和中至多有 2$(n+1)$ 项

$$|\phi^j(x) - \phi^j(y)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{B \in \mathcal{B}_k^j} \psi_B(x) - \psi_B(y) \right| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}^j} |\psi_B(x) - \psi_B(y)|$$

均非零。由 引理 3.3(iii)，每个加项都不超过 $r^{-j}d(x,y)$。因此 e

$$|\phi^j(x) - \phi^j(y)| \leq 2(n+1)r^{-j}d(x,y),$$

这就证明了 (ii)。

□

固定 $x_0 \in X$。定义 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^n$ 为

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r^{j\epsilon}(\phi^j(x) - \phi^j(x_0)) \tag{3.3}$$

在本节余下部分，我们将证明，将 f 视为从X^ϵ 到 $\mathbb{R}^n$的映射时，它是 Lipschitz light。首先，我们证明它是利普希茨的。

引理 3.5. 对每个 $x \in X$，(3.3) 中的级数都绝对收敛，并定义一个 Lipschitz 映射 $f\colon X^\epsilon \to \mathbb{R}^n$。$f$ 的 Lipschitz 常数可以由仅依赖于 C、ϵ 和 n 的量来界定。

证明. 暂且假设收敛性结论成立，让我们证明 f 是 Lipschitz 的。

令 x、$y \in X$。选取 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $r^{j_0} \leq d(x,y) < r^{j_0+1}$。那么，利用引理 3.4 的两个部分，我们有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} r^{j\epsilon} |\phi^j(x) - \phi^j(y)| \\
&\leq (n+1) \sum_{j \leq j_0} r^{j\epsilon} + 2(n+1) \sum_{j > j_0} r^{j\epsilon} r^{-j} d(x,y) \\
&\lesssim_{r,n} r^{j_0\epsilon} + r^{j_0(\epsilon-1)} d(x,y) \\
&\lesssim_{r,n} r^{j_0\epsilon} + r^{j_0\epsilon} \\
&\lesssim_{r,n} d(x,y)^\epsilon.
\end{aligned}$$

r 的选取如上所述，仅依赖于 ϵ 和 c，而后者本身仅依赖于 C 和 n。

证明 (3.3) 中的级数绝对收敛，实质上完全相同，只需将 y 替换为 x_0。□

我们现在着手 证明 f 是 Lipschitz light。以下是主要的技术引理 a.

引理 3.6. 假设 x、$y \in X$、$s > 0$、$j_0 \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 满足以下性质：

(i) $|f(x) - f(y)| \leq s$,

(ii) $d(x,y) \le 2cr^{j_0}$,
(iii) $r^{j_0\epsilon} > 2^\epsilon s$, 以及
(iv) $\sum_{B\in\mathcal{B}_k^{j_0}} \psi_B(x) = 1$。
Then

$$y \in \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k^{j_0}} B.$$

注记 3.7。这个引理的作用如下：给定一个尺度 j_0 和两点 x、y，该引理给出充分条件，使我们能够断定 x 和 y 属于 $\mathcal{B}^{j_0}$ 中同一“颜色”的集合，也就是说，它们属于某个 k 对应的同一族 $\mathcal{B}_k^{j_0}$。

读者或许会对变量 s 感到疑惑：它出现在假设中，却没有出现在结论中。这只是为了使下面定理 1.5 的证明中对该引理的应用更加清晰。

引理 3.6 的证明。注意，$f(x) - f(y)$ 的第 k 个坐标可写为

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} (\psi_B(x) - \psi_B(y)).$$

假设条件 (i) 至 (iv) 均成立，但 $y \notin \cup_{B\in\mathcal{B}_k^{j_0}} B$。由引理 3.3 可知，对每个 $B \in \mathcal{B}_k^{j_0}$，都有 $\psi_B(y) = 0$。于是，

$$\begin{aligned}
s &\ge |f(x) - f(y)| \\
&\ge \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} (\psi_B(x) - \psi_B(y)) \right| \\
&\ge r^{j_0\epsilon} - \left| \sum_{j<j_0} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} (\psi_B(x) - \psi_B(y)) \right| - \left| \sum_{j>j_0} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} (\psi_B(x) - \psi_B(y) \right| \\
&\ge r^{j_0\epsilon} - \sum_{j<j_0} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} |\psi_B(x) - \psi_B(y))| - \sum_{j>j_0} r^{j\epsilon} \sum_{B\in\mathcal{B}_k^j} |\psi_B(x) - \psi_B(y)|| \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

对于 (3.4) 中间求和里的每个 $j < j_0$，至多有两个 $B \in \mathcal{B}_k^j$ 的取值会使差值 $|\psi_B(x) - \psi_B(y)|$ 非零。（这是因为 x、y 各自至多包含在一个 $B \in \mathcal{B}_k^j$ 中，且由引理 3.3(ii) 可知。）对于这些使差值非零的 $B \in \mathcal{B}_k^j$，由引理 3.3(i) 可知，差值至多为 1。

同理，对于 (3.4) 最后一项求和中的每个 $j > j_0$，至多有两个 $B \in \mathcal{B}_k^j$ 的取值会使差值 $|\psi_B(x) - \psi_B(y)|$ 非零。对于使该差值非零的那些 $B \in \mathcal{B}_k^j$，根据引理 3.3(iii)，其至多为 $r^{-j}d(x,y)$。

因此，我们有：

$$\begin{aligned} s &\geq r^{j_0\epsilon} - 2\sum_{j<j_0} r^{j\epsilon} - 2\sum_{j>j_0} r^{j\epsilon} r^{-j} d(x,y) \\ &= r^{j_0\epsilon} - \frac{2r^{j_0\epsilon}}{r^{\epsilon}-1} - \frac{2r^{j_0(\epsilon-1)}}{r^{1-\epsilon}-1} d(x,y) \\ &\geq r^{j_0\epsilon} - \frac{2r^{j_0\epsilon}}{r^{\epsilon}-1} - \frac{4cr^{j_0\epsilon}}{r^{1-\epsilon}-1} \\ &= r^{j_0\epsilon}\left(1 - \frac{2}{r^{\epsilon}-1} - \frac{4c}{r^{1-\epsilon}-1}\right) \end{aligned}$$

根据我们在 (3.2) 中对 r 的选择，上述括号中的量至少为 $\frac{1}{2^{\epsilon}}$。因此 $r^{j_0\epsilon} \leq 2^{\epsilon}s$，这与本引理的假设 (iii) 矛盾。

□

现在，我们通过证明在 (3.3) 中构造的映射 $f\colon X^{\epsilon} \to \mathbb{R}^n$ 是 Lipschitz light，来完成定理 1.5 的证明；其常数仅取决于 ϵ、n 和 C。

定理 1.5 的证明。由引理 3.5，映射 f 已经是利普希茨的。要证明 f 是 Lipschitz light，只需证明：对于 X^{ϵ} 中任意满足 $\operatorname{diam}(f(P)) \leq s$ 的 s-路径 P，都有 $\operatorname{diam}^{\epsilon}(P) \lesssim_{\epsilon,\ n,\ C} s$。因此，令 $s>0$，并设 P 是 X^{ϵ} 中一条满足 $\operatorname{diam}(f(P)) \leq s$ 的 s-路径。我们将证明

$$\operatorname{diam}(P) \leq 10crs^{\frac{1}{\epsilon}}, \tag{3.5}$$

这当然意味着

$$\operatorname{diam}^{\epsilon}(P) \leq (10cr)^{\epsilon}s.$$

由于 r 和 c 仅依赖于 ϵ、n和 C，这就证明了该引理。

反设 $\operatorname{diam}(P) > 10crs^{\frac{1}{\epsilon}}$。选取 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$2s^{\frac{1}{\epsilon}} < r^{j_0} \leq 2rs^{\frac{1}{\epsilon}} < \frac{1}{5c}\operatorname{diam}(P). \tag{3.6}$$

首先，我们注意到 P 不可能完全包含在 $\cup_{B\in B_0^{j_0}} B$中：根据引理 3.2(i)，$B_0^{j_0}$中的不同集合之间的 d^{ϵ}-距离至少为$\frac{1}{2^{\epsilon}}r^{j_0\epsilon} > s$，因此，如果 s-路径 P 包含在这个并集中，它就必须包含在某个单独的集合 $B \in B_0^{j_0}$中。但这样一来，P的 d-直径就会被 $\operatorname{diam}(B) \leq cr^{j_0} \leq 2crs^{\frac{1}{\epsilon}} < \operatorname{diam}(P)$ 所界定，这与假设矛盾。

因此，存在一点 $x \in P$不包含在 $\cup_{B\in B_0^{j_0}} B$中。由引理 3.3(iv)，存在一个 $k \in \{1,\dots,n\}$ 和一个 $B \in \mathcal{B}_k^{j_0}$，使得 $\psi_B(x) = 1$。由于 x至多属于$\mathcal{B}_k^{j_0}$中的一个元素，我们有

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_k^{j_0}} \psi_B(x) = 1. \tag{3.7}$$

现在， P 必须包含一点 z ，使得

$$d(z,x) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(P) > 2cr^{j_0}.$$

通过截断 P（必要时反转顺序），我们可以找到一条 d^ϵ-距离下的 s-路径 $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$，满足 $x_1 = x$, $x_m = z$，且每个 x_i 都包含在 P 中。令 x_b 表示 Q 中第一个满足 $d(x_b, x) > 2cr^{j_0}$ 的点。

令 R 为子路径 $(x_1, x_2, \ldots, x_{b-1})$。这是 d^ϵ-距离下的一条 s-路径，并具有如下性质

$$d(x_i, x) \leq 2cr^{j_0} \text{ for each } x_i \in R. \tag{3.8}$$

固定任意一个 $i \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$。现在，我们用上述的 x, j_0, k, s 以及 $y = x_i \in R$ 应用引理 3.6。由于 $x_i, x \in P$ 且 $\operatorname{diam}(f(P)) \leq s$，该引理的假设 (i) 得以满足。假设 (ii) 至 (iv) 分别由 (3.8)、(3.6) 和 (3.7) 验证。因此，每个 $x_i \in R$ 都包含在 $\cup_{B \in \mathcal{B}_k^{j_0}} B$ 中。$\mathcal{B}_k^{j_0}$ 中的集合在 d^ϵ-距离下彼此 $\frac{1}{2^\epsilon} r^{j_0 \epsilon}$-分离，并且根据 (3.6)，$R$ 是 d^ϵ-距离下的一条 s-路径，满足 $s < \frac{1}{2^\epsilon} r^{j_0 \epsilon}$ 。因此， R 必定完全包含在单个集合 $B \in \mathcal{B}_k^{j_0}$ 中。因此

$$\operatorname{diam}(R) \leq \operatorname{diam}(B) \leq cr^{j_0}.$$

另一方面，

$$\operatorname{diam}(R) \geq d(x_{b-1}, x_1) \geq d(x_b, x) - s^{\frac{1}{\epsilon}} \geq 2cr^{j_0} - \frac{1}{2}r^{j_0} \geq (2c - \frac{1}{2})r^{j_0} > cr^{j_0},$$

回顾引理 3.2 中的 $c \geq 1$ 。

这就产生了矛盾。因此，我们证明了 (3.5)，从而证明 f 是 Lipschitz light，且常数具有定量控制。□

4. Branched quasisymmetries

本节首先介绍 Guo–Williams [7], 关于分支拟对称映射的一些基本事实，然后证明推论 1.11。

4.1. Guo–Williams 的拉回度量。 在研究 [7], 中的分支拟对称映射时，Guo 和 Williams 通过一种称为拉回度量的方法，证明这些映射可以按照一种有用的方式进行分解。由于我们的假设和陈述与他们的略有不同，而且我们不需要他们给出的全部记号，因此我们在此介绍所需的全部事实和证明。不过，我们强调，4.1 小节中的所有思想最初都归功于 Guo 和 Williams；我们这里只将其作为必要的背景介绍。

在整个第 4.1 小节中，我们固定 X 为一个紧致的有界转弯度量空间，并令 $f\colon X \to Y$ 为一个非恒定分支拟对称映射。在 X 上定义拉回度量如下：

$$d_f(x,y) = \inf\{\operatorname{diam}(f(K)) : K \text{ a continuum containing } x \text{ and } y\}. \tag{4.1}$$

我们用 $\operatorname{diam}_f(E)$ 表示度量 d_f 中集合 E 的直径。

注 4.1. 在这些假设下，(4.1) 中的下确界总能取到：给定 $x, y \in X$，设 K_n 是一列连续统，满足

$$\operatorname{diam}(f(K_n)) \to d_f(x, y).$$

由于 X 是紧致的且 f 是连续的，这些连续统的一个子序列在豪斯多夫意义下收敛到一个满足以下条件的连续体 K

$$\operatorname{diam}(f(K)) = d_f(x, y). \tag{4.2}$$

引理 4.2。这个 d_f 是 X 上的一个度量，且与原度量d_X拓扑等价。

证明。首先请注意， f 不能将任何非平凡连续体压缩为一点。事实上，如果可以，那么有界转弯假设和定义 1.9 将迫使 f 把整个X 压缩为一点，但我们假设 f 是非恒定的。

由此以及注 4.1 可知， d_f 是正定的。对称性和三角不等式由 d_f的定义直接得出，因此 d_f 是 X上的一个度量。

现在假设 $x_n \to x$ 属于 d_X。由于 X 有界转弯，存在包含 x_n 和 x 的连续统 K_n，使得

$$\operatorname{diam}(K_n) \lesssim d(x_n, x) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

令 K 为任意一个包含 x的非平凡固定连续体，并回顾一下，根据第一段，$f(K)$ 也是一个非平凡连续体。由定义 1.9 可得

$$\operatorname{diam}(f(K_n)) \leq \operatorname{diam}(f(K)) \cdot \eta(\operatorname{diam}(K_n)/\operatorname{diam}(K)) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

因此， $d_f(x_n, x) \to 0$。

反过来，假设 $x_n \to x$ 属于 d_f。那么存在一列连续体 E_n，它们包含x_n 和 x，且 $\operatorname{diam}(f(E_n)) \to 0$。如上所述，令 K 为包含 x的非平凡连续体。于是

$$0 < \operatorname{diam}(f(K)) \leq \operatorname{diam}(f(E_n))\eta(\operatorname{diam}(K)/\operatorname{diam}(E_n)). \tag{4.3}$$

我们知道 $\operatorname{diam}(f(E_n)) \to 0$，因此，若要使 (4.3) 右侧的表达式远离零，就必须有 $\eta(\operatorname{diam}(K)/\operatorname{diam}(E_n)) \to \infty$，等价地，$\operatorname{diam}(E_n) \to 0$。由此可得

$$d(x_n, x) \leq \operatorname{diam}(E_n) \to 0.$$

□

Le引理 4.3。映射 $f\colon (X, d_f) \to Y$是 1-利普希茨的，而且还满足 *fies*

$$\operatorname{diam}(f(J)) = \operatorname{diam}_f(J) \tag{4.4}$$

对 (X, d_f) 中所有连续统 J均成立。

此外，空间 (X, d_f) 的有界转弯常数为 1。

这是对 [7,引理 5.7]的轻微修改。

证明。考虑 x， $y \in X$。令 K 如（4.2）所示，则

$$d_f(x,y) = \operatorname{diam}(f(K)).$$

在这种情况下，

$$d(f(x), f(y)) \leq \operatorname{diam}(f(K)) = d_f(x,y),$$

因此 f 是 1-利普希茨。

继续使用上述的 x、 y 和 K，注意若 p、 $q \in K$，则

$$d_f(p,q) \leq \operatorname{diam}(f(K)) = d_f(x,y).$$

这证明 $\operatorname{diam}_f(K) \leq d_f(x,y)$，因此 (X, d_f) 是 1-有界转弯的。

现在考虑任意连续体 $J \subseteq (X, d_f)$。由于 f 在 (X, d_f) 上是 1-利普希茨的，我们有 $\operatorname{diam}(f(J)) \leq \operatorname{diam}_f(J)$。另一方面，若 x 和 y 属于 J，则

$$d_f(x,y) \leq \operatorname{diam}(f(J)),$$

因此，$\operatorname{diam}_f(J) = \operatorname{diam}(f(J))$。

□

引理 4.4。恒等映射是从 (X, d_X) 到 (X, d_f) 的拟对称同胚。

这包含在 [7, 命题 6.47 和 6.48] 中。

证明。我们首先注意到，从 (X, d_X) 到 (X, d_f) 的恒等映射是分支拟对称映射。事实上，若 E 和 E' 是 X中的相交连续统，那么根据前一个引理以及 $f\colon (X, d_X) \to Y$是分支拟对称映射这一事实，我们有

$$\operatorname{diam}_f(E) = \operatorname{diam}(f(E)) \leq \operatorname{diam}(f(E'))\eta\left(\frac{\operatorname{diam}_X(E)}{\operatorname{diam}_X(E')}\right) = \operatorname{diam}_f(E')\eta\left(\frac{\operatorname{diam}_X(E)}{\operatorname{diam}_X(E')}\right).$$

接下来，我们仿照 [7] 中的命题 6.48 进行论证，以证明恒等映射实际上是拟对称同胚。设 x、 y、 $z \in X$为互不相同的点。由于 (X, d_X) 是 C-有界转弯的，且 (X, d_f) 是 1-有界转弯的，我们可以选取包含 x 和 y的连续统 E，以及包含x和 z的连续统 E'，使得 $\operatorname{diam}_X(E) \leq C d_X(x,y)$ 且 $\operatorname{diam}_f(E') = d_f(x,z)$。

Then

$$\frac{d_f(x,y)}{d_f(x,z)} \leq \frac{\operatorname{diam}_f(E)}{\operatorname{diam}_f(E')} \leq \eta\left(\frac{\operatorname{diam}_X(E)}{\operatorname{diam}_X(E')}\right) \leq \eta\left(C\frac{d(x,y)}{d(x,z)}\right).$$

因此，从 (X, d_X) 到 (X, d_f) 的恒等映射是 $\tilde{\eta}$-准对称的，其中 $\tilde{\eta}(t) = \eta(Ct)$。

□

我们将上述引理总结如下：若 X 是紧致且有界转弯的，并且 $f\colon X \to Y$ 是分支准对称的，那么 f 可分解为

$$X \to (X, d_f) \to Y, \tag{4.5}$$

其中，第一个映射是拟对称同胚，第二个映射保持所有连续统的直径。

4.2. 与 Lipschitz 轻性及推论 1.11 的证明的关系。现在我们着手证明推论 1.11。首先，我们注意到，在有界转弯的情形下，“保持连续统的直径”这一性质等价于 Lipschitz 轻性。

引理 4.5. 设 X 是一个有界转弯度量空间， Y 是另一个度量空间。设 $f\colon X \to Y$。则下列条件等价：

(i) f 是 Lipschitz light。(ii) 对每个连续体 $K \subseteq X$，
$\operatorname{diam}(f(K)) \approx \operatorname{diam}(K)$。

每个条件中的常数仅取决于另一条件中的常数以及 X的有界转弯常数。

正如引言中所指出的，引理 4.5 中从 (i)⇒到 (ii) 的蕴含无需有界转弯假设。

证明。为证明 (i) 蕴含 (ii)，假设 f 是常数为 L的 Lipschitz light。设 K 是 X中的一个连续体。由于 f是 L-利普希茨映射，$\operatorname{diam}(f(K)) \leq L \operatorname{diam}(K)$。对于另一边的不等式，注意到由于 K 是连通的，它包含于 $f^{-1}(K)$ 的一个 $\operatorname{diam}(f(K))$-连通分支中。由 f 的 Lipschitz 轻性可得

$$\operatorname{diam}(K) \leq L \operatorname{diam}(f(K)),$$

因此（ii）成立。

现在证明（ii）蕴含（i）。假设性质（ii）对 f 成立。首先， f 必须是利普希茨的：若 x、$y \in X$，则由有界转弯性质，存在一个包含这两点的连续体 K，使得 $\operatorname{diam}(K) \lesssim d(x,y)$。因此

$$d(f(x), f(y)) \leq \operatorname{diam}(f(K)) \lesssim \operatorname{diam}(K) \lesssim d(x,y),$$

因此 f 是利普希茨的。

现在令 $A \subseteq Y$ 的 $\operatorname{diam}(A) \leq s$，其中某个 $s \geq 0$。令 $P = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ 为 $f^{-1}(A)$ 中的一条 s-路径。对 P 中每一对相邻点 (x_i, x_{i+1})，用一个连续体 K_i 将它们连接起来，使得

$$\operatorname{diam}(K_i) \lesssim d(x_i, x_{i+1}) \leq s.$$

令 $K = \cup_{i=0}^{m-1} K_i$，它是一个包含 P 的连续体。此外， K 包含于 P 的闭 bs-邻域中，其中 b 是 X 的有界转弯常数。由此以及 f 是利普希茨的、且 $f(P) \subseteq A$ 这些事实可得

$$\operatorname{diam}(f(K)) \lesssim \operatorname{diam}(A) + s \lesssim s.$$

由此可得

$$\operatorname{diam}(P) \leq \operatorname{diam}(K) \approx \operatorname{diam}(f(K)) \lesssim s.$$

因此， f 是 Lipschitz light。 □

推论 1.11 的证明。设 X 是一个紧致的有界转弯度量空间。令

$$n = \dim_N(X)$$

and

$$a = \inf\{\dim_A(Y)\text{：存在一个从 } X \text{ 到 } Y\}\text{.的非恒定分支拟对称映射}$$

这两个数中的任意一个都可能是无穷大。

首先假设 $n < \infty$。定理 1.5 给出了一个从 X^ϵ 到子集 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz light 映射。根据引理 4.5，该映射满足

$$\operatorname{diam}(f(K)) \approx \operatorname{diam}(K)^\epsilon \text{ for all continua } K \subseteq X,$$

因此可立即看出，f 是一个分支拟对称映射。由于 $\dim_A(Y) \leq \dim_A(\mathbb{R}^n) = n$，这便得到

$$a \leq n.$$

由于这个不等式当 $n = \infty$ 时显然也成立，因此我们证明了 $a \leq n$ 一般而言 l.

现在我们来证明反向不等式：$a \geq n$。不妨假设 $a < \infty$，否则该不等式显然仍然成立。

对于任意 $t > 0$，根据 a 的定义，存在一个空间 Y，满足 $\dim_A(Y) < a + t$，以及一个从 X 到 Y 上的分支拟对称映射 f。应用 (4.5)，我们将 f 分解为

$$X \to (X, d_f) \to Y,$$

其中第一个映射是准对称映射，第二个映射保持连续统的直径不变。由引理 4.3 和 4.5 可知，第二个映射是 Lipschitz light。

长田维数是准对称不变量，因此我们有 $\dim_N(X, d_f) = n$。Lipschitz light 映射不会降低长田维数（[3, 引理 4.1]），且阿苏阿德维数从上方界定长田维数（见 (1.1)）。因此我们有

$$n = \dim_N(X) = \dim_N(X, d_f) \leq \dim_N(Y) \leq \dim_A(Y) < a + t.$$

由于 $t > 0$ 是任意的，证明至此完成。

□

References

[1] Patrice Assouad。《R^{n}中的利普希茨嵌入》。载于：Bull. Soc. Math. France 111.4 (1983)，第 429–448 页。[2] Jeff Cheeger 和 Bruce Kleiner。《将度量空间实现为逆极限，以及在 L_1中的双利普希茨嵌入》。载于：Geom. Funct. Anal. 23.1 (2013)，第 96–133 页。 DOI: 10.1007/s0003

9-012-020

[3] Guy C. David.《Cheeger-Kleiner 的 Lipschitz 维数》。载于：《基础数学》253.3（2021），第 317–358 页。 DOI: 10.4064/fm776-8-2020.[4] David M. Freeman。《弱拟圆的 Lipschitz 维数为 1》。载于：芬兰数学年刊 47.1（2022），第 283–303 页。 DOI: 10.54330/afm.113453.

[5] David M. Freeman 和 Chris Gartland。《拟共形树上的利普希茨函数》。2022 年。 DOI: 10.48550/ARXIV.2204.05464.[6] David M. Freeman 和 Chris Gartland。《度量空间并与商上的利普希茨函数》。2022 年。 DOI: 10.48550/ARXIV.2212.08707。

[7] Chang-Yu Guo 和 Marshall Williams。《几何函数论：拉回分解的艺术》。2016 年。 DOI: 10.48550/ARXIV.1611.02478.[8] Juha Heinonen。《度量空间上的分析讲义》。Universitext。施普林格出版社，纽约，2001 年，第 x+140 页。 DOI: 10.1007/978-1-4613-0131-8.[9] Urs Lang 和 Thilo Schlichenmaier。《Nagata 维数、准对称嵌入与利普希茨延拓》。载于：《国际数学研究通知》58（2005），第 3625–3655 页。 DOI: 10.1155/IMRN.2005.3625.
[10] Enrico Le Donne 和 Tapio Rajala。“阿苏阿德维数、长田维数及一致接近的度量切空间”。载于：《印第安纳大学数学杂志》64.1（2015），第 21–54 页。 DOI: 10.1512/iumj.2015.64.5469.[11] Jeff Lindquist 和 Pekka Pankka。垂直拟等距映射与分支拟对称映射。2019。 DOI: 10.48550/ARXIV.1911.12680.[12] John M. Mackay 和 Jeremy T. Tyson。共形维数。第 54 卷。大学讲座系列。理论与应用。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010 年，第 xiv+143 页。 DOI: 10.1090/ulect/054.[13] Jun-iti Nagata。现代维数理论。数学文库，第六卷。由阿姆斯特丹的“数学中心”和“数学学会”协助编辑。跨科学出版社、约翰·威立父子公司，纽约，1965 年，第 iv+259 页。[14] Stephen Semmes。“关于双利普希茨参数化不存在的问题，以及有关 A_∞-权的几何问题”。载于：《伊比利亚美洲数学评论》12.2（1996），第 337–410 页。 DOI:10.4171/RMI/201.

Department of Mathematical Sciences, Ball State University, Muncie, IN 47306电子邮件地址：gcdavid@bsu.edu