arXiv:2301.06500v1 [math.CO] 16 Jan 2023

某些麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数的因式分解

KONSTANTIN MATVEEV 和 YUCHEN WEI

ABSTRACT.我们为某些麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ t)$ 找到了一个因式分解公式，并给出了证明。具体来说，我们考虑 Kostka 数 $K_{\mu,\ \nu-\lambda}$为 1 的情形。这解决了 Richard Stanely 的一个更一般猜想的特例，[St89]。该猜想认为，只要相应的普通 Littlewood-Richardson 系数 $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ 为 1，就存在一个因式分解公式。

CONTENTS

1. 引言 1 1.1. 预备知识 1 1.2. 结果 3 2. 唯一的半标准杨表 7 3. 证明因式分解 12 3.1. 三种矩形杨表 12 3.2. Pieri 公式 12 3.3. 具有相同列的矩形杨表 13 3.4. 水平条带 13 3.5. 第二类矩形块 14 3.6. 第三类矩形块 17 3.7. 一般情形 22 4. 与 Stanley 猜想的联系 24 参考文献 32

1. INTRODUCTION

1.1. 预备知识。

1.1.1. 麦克唐纳函数。 $P_\lambda = P_\lambda(q,t)$ 是一个 Macdonald 对称函数，[Mac99]。$\{P_\lambda\}$ 中的 λ（其中遍历所有分拆）构成了定义在 $\mathbb{C}(q,t)$ 上的对称函数代数的一组基。$P_\lambda P_\mu = \sum_\nu c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t)\ P_\nu$，其中求和遍历满足 $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ 的分拆 ν。我们感兴趣的是研究这些结构常数 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t)$，即麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数。

1.1.2. *Schur* 函数。 P_λ 对于 $q = t$ 变为 Schur 函数 S_λ，它与$q = t$无关。对于 $n \geq \ell(\lambda)$ 多项式 $S_\lambda(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$，可将其视为 Schur 模 E^λ的特征标；E^λ是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的一个不可约表示。因此，对于 $n \geq \ell(\nu) \geq \ell(\lambda)\ \ell(\mu)$，系数$c^{\nu}_{\lambda\mu} = c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ q)$ 是一个非负整数，用来计数 E^ν 在 $E^\lambda \otimes E^\mu$中的重数，[F97，第 8] 章。

1.1.3. *Littlewood-Richardson* 法则。 $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ 计数形状为 ν/λ、权为 μ的半标准斜杨表 T 的数量，并要求 $w(T)$ 是一个格词。这里，词 $w(T)$ 是通过从右向左逐行读取 T中的符号得到的，读取顺序从顶行开始。由符号 1、2、...、n组成的长度为 N的词，若对于 $1\le r\le N$和 $1\le i\le n-1$， w的前 r 个字母中符号 i出现的次数不少于符号 $i+1$出现的次数，则称其为格词。这就是著名的 Littlewood-Richardson 法则， [LR34], [F97，第 5], [章；Ste02]。 $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ 还可枚举其他组合对象族：Berenstein-Zelevinsky 模式、 [BZ92], 克努森–陶蜂窝/拼图/蜂巢、 [KT99], [KTW04], [B00],瓦基尔跳棋游戏， [V06]。

1.1.4. *Pieri* 公式。 对于单行 $\mu=(r)$ 或单列 $\mu=1^r$，相应的麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数由 Pieri 公式明确给出。

命题 1.1 (Mac99)。

$$P_\lambda\cdot P_{1^r}=\sum_{\lambda\prec_v\nu,\ |\nu|-|\lambda|=r}\psi'_{\nu/\lambda}P_\nu, \tag{1.1}$$

其中， ν/λ 是由 r 个方格组成的斜形，任意两格都不在同一行中，即一个竖条，并且

$$\psi'_{\nu/\lambda}:=\prod_{s\in C_{\nu/\lambda}-R_{\nu/\lambda}}\frac{b_\nu(s)}{b_\lambda(s)},\quad b_\lambda(s)=b_\lambda(i,j):=\begin{cases}\frac{1-q^{\lambda_i-j}t^{\lambda'_j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-j+1}t^{\lambda'_j-i}} & if\ s\in\lambda\\ 1 & otherwise.\end{cases},$$

其中， $C_{\nu/\lambda}$ （分别是 $R_{\nu/\lambda}$) ）表示 ν 中与 ν/λ 相交的列（分别是行），而 λ' 表示 λ 的共轭分拆。此外，

$$P_\lambda\cdot P_{(r)}=\sum_{\lambda\prec_h\nu,\ |\nu|-|\lambda|=r}\frac{(q;q)_r}{(t;q)_r}\varphi_{\nu/\lambda}P_\nu, \tag{1.2}$$

其中， ν/λ 是由 r 个方格组成的斜形，任意两格都不在同一列中，即一个水平条带，并且

$$\varphi_{\nu/\lambda}:=\prod_{s\in C_{\nu/\lambda}}\frac{b_\nu(s)}{b_\lambda(s)},\quad (a;q)_s:=\prod_{i=1}^{s}(1-aq^{i-1}).$$

更多详情请参见 [Mac99, VI.6] 。注意， $P_{1^r}=e_r$ 是第 r 个初等对称函数。由 Pieri 公式可知，相应的麦克唐纳 Littlewood-Richardson 系数在 $-1<q$， $t<1$ 时为正，并且在 $q=t$ 时为 1，即舒尔情形。

1.1.5. 麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数的公式。 [S11]使用插值麦克唐纳多项式，求得 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t)$ 的一个表达式； [Y12] 则使用非对称麦克唐纳多项式和胞腔行走的组合学，求得另一个公式。然而，这两个表达式都非常复杂。我们希望找到一些特殊情形，使相应的系数能够轻易地因式分解。更准确地说，我们寻找这样的分拆三元组 (λ,μ,ν)，使得 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t)$ 是若干项 $(\frac{1-q^at^{b+1}}{1-q^{a+1}t^b})^{\pm1}$ 的乘积，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。Pieri 公式表明，只要 ν/λ 是竖直 r-条带，$(\lambda,1^r,\nu)$ 就是这样的三元组；只要 ν/λ 是水平 r-条带，$(\lambda,(r)\ \nu)$ 就是这样的三元组。由交换性可知，$(1^r,\mu,\nu)$ 和 $((r)\ \mu,\nu)$ 也同样成立。

1.1.6. *Stanley* 猜想。令 $q = t$，意味着具有这种因式分解的三元组必须满足 $c^{\nu}_{\lambda\mu} = 1$。Richard Stanley 在 [St89, 猜想 8.5] 中猜想，反过来结论也成立。更准确地说，他的猜想针对的是可通过令 $q = t^{\alpha}$ 和 $t \to 1$ 从麦克唐纳函数得到的 Jack 函数。不过，该猜想可以直接推广到更一般的 Macdonald 情形。据我们所知，一般情形下这一猜想仍未解决。Stanley 还提出，因式分解公式应属于某个指定的有限族。然而，目前仍不清楚一般情况下如何从该族中选出正确的元素。[N16] 证明了 Stanley 猜想的一个特殊情形，即 $\ell(\lambda)\ \ell(\mu)\ \ell(\nu) \le 3$。本文中，我们确定了另一族可证明具有因式分解性质的特殊情形。

1.2. **结果**。

1.2.1. *Kostka* 数。分拆 μ 与合成 χ 的 Kostka 数 $K_{\mu\chi}$，等于形状为 μ、权为 χ 的半标准杨表的数量。设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n)$，其中某些 λ_i 可能为零。$\ell(\mu)\ \ell(\nu) \le n$，$\nu = (\lambda_1+\chi_1, \lambda_2+\chi_2, \ldots\ldots \lambda_n+\chi_n)$，其中所有 $\chi_i \ge 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \chi_i = |\mu|$。我们从 Littlewood-Richardson 规则的以下推论开始。

命题 1.2。 $c^{\nu}_{\lambda\mu} \le K_{\mu\chi}$ 取等号，特别是当 ν/λ 是一个水平条带时。

命题 1.2 的证明见第2节。注意，对于任意 $1 \le i \le n-1$，$\lambda_i - \lambda_{i+1} \ge \ell(\mu')$ 保证 ν/λ 是一个水平条带。因此，对于行间距较大的 λ，Littlewood-Richardson 系数会变成相应的 Kostka 数。

1.2.2. 唯一的半标准杨表。 [BZ92] 明确描述了满足 $K_{\mu\chi} = 1$ 的配对 (μ, χ)。我们证明一个相关结果

命题 1.3。 给定一个有 n 个方格的半标准杨表 T，以下条件等价：(C_n)： T 是其形状和权唯一的。
(C'_n)： 对于 T 中任意两列，后一列要么是将前一列至多一个数值改动后得到的，要么是前一列的子集。

1	2	3
3	3	

1	2	3
2	3	

图 1。 左：形状和权唯一的杨表。右：非唯一的杨表，第三列不包含于第一列中。

命题 1.3 的证明见第2节。

1.2.3. 麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数作为有理函数。设 $X_i := q^{\lambda_i} t^{1-i}$。那么 Pieri 重数 $\psi'_{\nu/\lambda}$ 可表示为

$$\prod_{1\le j<k\le n:\ \nu_j=\lambda_j,\ \nu_k=\lambda_k+1} \frac{X_k - X_j t q^{-1}}{X_k - X_j} \cdot \frac{X_k - X_j t^{-1}}{X_k - X_j q^{-1}}. \tag{1.3}$$

注意，对于一般的 q，t 以及任意合成 λ，(1.3) 的分母都不为零。若 λ是一个分拆，那么对于一般的 q，t，(1.3) 的分子恰好在 ν 不是分拆时为零。现在我们可以将 P_{μ} 表示为关于 e_r的多项式，并反复使用 (1.3)，将$c^{\nu}_{\lambda\mu}(q, t)$表示为关于 X_1，X_2、……、X_n的有理函数。这种方法打破了λ 与 μ之间的对称性，但可以利用同一个有理函数同时研究所有 λ。

我们最初是在 Mathematica 中研究这类有理函数时，发现了下面的公式 (1.4)。

1.2.4. 因式分解公式。设 T 是一个唯一的半标准杨表，其条目取自 $1, 2, \dots, n$。若 $1 \le j < k \le n$，且 T 的第 m 列包含 k 但不包含 j，则称三元组 (j,k,m) 可容许。用 $a(j,k,m)$ 表示 T 的前 $(m-1)$ 列中同时包含 k 但不包含 j 的列数。用 $b(j,k,m)$ 表示 T 的前 $(m-1)$ 列中包含 j 但不包含 k 的列数。用 $\psi_T(q,t)$ 表示杨表 T 的 ψ-权，如公式 $P_\mu(x) = \sum_T \psi_T(q,t)x^T$ 所示。我们的主要结果如下。

定理 1.4。 假设 $K_{\mu\chi} = 1$。令 T 为相应的唯一半标准杨表。那么，麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数 $c^\nu_{\lambda\mu}(q,t)$ 由下式给出

$$c^\nu_{\lambda\mu}(q,t) = \psi_T(q,t) \cdot \prod_{(j,k,m)\ -admissible} \left(\frac{X_k - q^{-a(j,k,m)+b(j,k,m)-1} t X_j}{X_k - q^{-a(j,k,m)+b(j,k,m)} X_j} \cdot \frac{X_k - q^{-a(j,k,m)} t^{-1} X_j}{X_k - q^{-a(j,k,m)-1} X_j} \right), \tag{1.4}$$

其中 $X_i := q^{\lambda_i} t^{1-i}$。

1.2.5. 例子。 若 T 是单列杨表，则它在其形状和权下总是唯一的。于是 $a(j,k,1) = b(j,k,1) = 0$，因此 (1.4) 变为竖直 Pieri 公式 (1.3)。若 T 是单行杨表，则它在其形状和权下也总是唯一的。这种情形对应于水平 Pieri 公式，更多细节见第 3 节的 3.4 小节。下面给出一个并非 Pieri 公式的例子。令 $n = 3$, $\mu = (3,2)$, $\nu_1 - \lambda_1 = \nu_2 - \lambda_2 = 1, \nu_3 - \lambda_3 = 3$。相应的唯一半标准杨表如图 1 左侧所示。在这种情形下，公式 (1.4) 变为

$$\frac{(1+q)(1-t)}{1-qt} \cdot \frac{(X_3 - q^{-1}tX_2)(X_3 - t^{-1}X_2)}{(X_3 - X_2)(X_3 - q^{-1}X_2)} \cdot \frac{(X_2 - tX_1)(X_2 - t^{-1}X_2)}{(X_2 - qX_1)(X_2 - q^{-1}X_1)}$$
$$\cdot \frac{(X_3 - q^{-1}tX_1)(X_3 - t^{-1}X_1)}{(X_3 - X_1)(X_3 - q^{-1}X_1)} \cdot \frac{(X_3 - q^{-2}tX_1)(X_3 - q^{-1}t^{-1}X_1)}{(X_3 - q^{-1}X_1)(X_3 - q^{-2}X_1)} \cdot \frac{(X_3 - q^{-1}tX_2)(X_3 - t^{-1}X_2)}{(X_3 - X_2)(X_3 - q^{-1}X_2)}$$

1.2.6. 与 *Stanley* 猜想的联系。令

$$U(a,l) = 1 - q^{a+1}t^l, \quad L(a,l) = 1 - q^a t^{l+1}$$

分别表示上钩长和下钩长。令 s 表示分拆中的一个方格，并令 a（分别为 l（s））表示 s 处的臂（分别为腿）长。我们证明

命题 1.5。 在定理 *1.4* 的假设下，有

$$\left(\prod_{s\in\lambda} L(a(s), l(s)) \right) \cdot \left(\prod_{s\in\mu} L(a(s), l(s)) \right) \cdot \left(\prod_{s\in\nu} U(a(s), l(s)) \right) \cdot c^\nu_{\lambda\mu}(q,t) \tag{1.5}$$

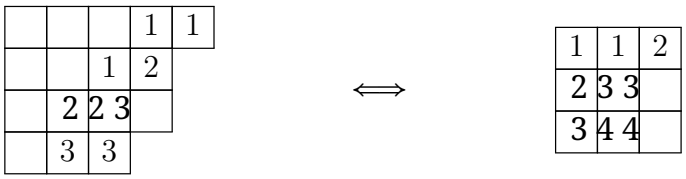
是关于 L、U 的多项式；此外，形如 U 的因子数等于形如 L 的因子数。

证明见第4节中的命题 1.5。

请注意，Stanley 猜想针对的是 Jack 多项式，只要求较弱的假设 $c^\nu_{\lambda\mu} = 1$。不过，通过令 $q = t^\alpha$ and $t \to 1$，可以将 Jack 情形视为 Macdonald 情形的特例。若在 $c^\nu_{\lambda\mu}(t^\alpha, t)$ 的极限下应用洛必达法则，其中 $t \to 1$，并将 $U(a, l)$（分别将 $L(a, l)$）替换为 $\alpha(a+1) + l$（分别替换为 $\alpha(a) + l + 1$），便可得到 Stanley 猜想。

命题 1.5 的证明可直接由定理 1.4 得出。其思路是将 1.4 中的因子改写为下钩长和上钩长的形式，并约去重复的因子。

1.2.7. 例子。

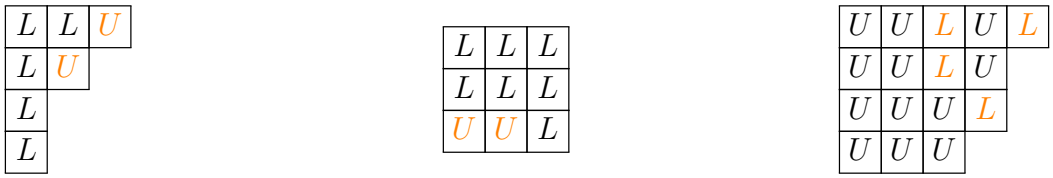


一个关于 $\lambda=(3,\ 2,\ 1,\ 1)$ $\mu=(3,\ 3,\ 3)$ $\nu=(5,\ 4,\ 4,\ 3)$ 的例子。

考虑上面的分拆和杨表。定理 1.4 告诉我们　　t

$$c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t)=\underbrace{\left(\frac{L(0,0)}{U(0,0)}\cdot\frac{U(1,0)}{L(1,0)}\cdot\frac{L(0,0)}{U(0,0)}\cdot\frac{U(2,0)}{L(2,0)}\right)}_{\psi_T(q,t)}\cdot\left(\frac{L(\lambda_2-\lambda_3-1,1)}{U(\lambda_2-\lambda_3-1,1)}\cdot\frac{U(\lambda_2-\lambda_3-1,0)}{L(\lambda_2-\lambda_3-1,0)}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{L(\lambda_2-\lambda_4,2)}{U(\lambda_2-\lambda_4,2)}\cdot\frac{U(\lambda_2-\lambda_4-1,1)}{L(\lambda_2-\lambda_4-1,1)}\right)\cdot\left(\frac{L(\lambda_1-\lambda_2,1)}{U(\lambda_1-\lambda_2,1)}\cdot\frac{U(\lambda_1-\lambda_2-1,0)}{L(\lambda_1-\lambda_2-1,0)}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{L(\lambda_1-\lambda_3-1,2)}{U(\lambda_1-\lambda_3-1,2)}\cdot\frac{U(\lambda_1-\lambda_3-1,1)}{L(\lambda_1-\lambda_3-1,1)}\right)\cdot\left(\frac{L(\lambda_1-\lambda_4,3)}{U(\lambda_1-\lambda_4,3)}\cdot\frac{U(\lambda_1-\lambda_4-1,2)}{L(\lambda_1-\lambda_4-1,2)}\right)$$

其中，颜色相同的分数互为倒数。现在，我们可以用上钩长和下钩长的乘积来表示 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ t)$，一种可能的方法如下



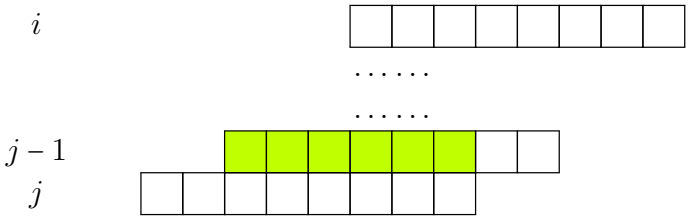
这幅图展示了如何翻转 λ，μ 中的下钩，以及 ν 中的上钩。

注意，分数 $U_{(\lambda_2-\lambda_4-1,\ 1)}\ L_{(\lambda_2-\lambda_4-1,\ 1)}$ 对应于一个“虚拟翻转器”（将在第4节讨论），因为 λ 的第二行中没有腿长为一的方格；不过，我们可以将它与其倒数配对 $L_{(\lambda_2-\lambda_3-1,\ 1)}\ U_{(\lambda_2-\lambda_3-1,\ 1)}$。

分数 $L_{(\lambda_1-\lambda_2,1)}\ U_{(\lambda_1-\lambda_2,1)}$ 对应一个“虚拟翻转器”，因为 ν 的第一行中没有腿长为一的方格；不过，我们将它与其互反项配对 $U_{(\lambda_1-\lambda_3-1,1)}\ L_{(\lambda_1-\lambda_3-1,1)}$。

同样，分数 $U_{(\lambda_1-\lambda_4-1,2)}\ L_{(\lambda_1-\lambda_4-1,2)}$ 是一个“虚拟翻转器”，因为 λ 的第一行中没有腿长为二的方格；不过，我们将它与其互反项配对 $L_{(\lambda_1-\lambda_3-1,2)}\ U_{(\lambda_1-\lambda_3-1,2)}$。

第4节全部用于证明：每当出现一个“虚拟翻转器”时，都必定能在 $c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ t)$ 的表达式中找到它的倒数。我们通过比较来考察这一事实：对于每个满足 $i<j-1$ 的固定整数三元组 $(i,\ j-1,\ j)$，形如 $\begin{smallmatrix}U\\L\end{smallmatrix}$ 且腿长为 $(j-i)-1$（分别为 $\begin{smallmatrix}L\\U\end{smallmatrix}$ 且腿长为 $(j-1)-i$）的“虚拟翻转器”的数量，不超过其腿长为 $(j-1)-i$（分别为 $(j-i)-1$）的倒数的数量。



这幅图说明，第 i 行中所有可能的“虚拟翻转器”，其“虚拟腿长”为 $(j-1)-i$ 在 ν中，或 $(j-i)-1$ 在 λ中，都对应于一些着色方格。

1.2.8. 命题 *1.3* 的证明纲要。我们对给定半标准杨表 T 中方格的总数 n 使用归纳法。

为了证明 $(C_n) \implies (C'_n)$，对于 T中的任意两列，我们根据这两列中最低方格的相对位置，以及最大整数 l 在这两列中的出现情况，区分出七种不同情形。根据归纳假设，我们可以很快处理前五种情形。

当第六种情形出现时，我们利用归纳法论证 (C'_n) 必须成立，也就是说，在这种特殊情形下，$[\lambda'_j]$是 $[\lambda'_i]$ 的子集。最终，这进一步归结为证明：当 $\lambda'_i = \lambda'_j + 1$时，对于满足情形 6 的任意 $i<j$，必有 $[\lambda'_j] = [\lambda'_i] \setminus \{l\}$。下面用反证法证明。反设对于情形 6 中的某个$i<j$，$\lambda_i = \lambda'_j + 1$ 且 $[\lambda'_j] \neq [\lambda'_i] \setminus \{l\}$，那么对一列方格进行逆时针移动后（记号定义见证明）：

$$(T(\lambda'_j - h, S), T(\lambda'_j - h + 1, s), T(\lambda'_j - h + 2, s), ..., T(\lambda'_i, s), T(\lambda'_i, s+1), ..., \\ T(\lambda'_i, m), T(\lambda'_j, S), T(\lambda'_j - 1, S), ..., T(\lambda'_j - h + 1, S))$$

我们将得到一个新的杨表。这与（C_n）矛盾。

剩下要证明情形 7 不可能。排除 $T(\lambda'_i,\ i) > T(\lambda'_j - 1,\ j)$ 这一简单情形后，我们断言，对方格进行顺时针移动：

$$(T(\lambda'_j - h + 1, i), T(\lambda'_j - (h-1) + 1, i), ..., T(\lambda'_j, i), T(\lambda'_j, j), T(\lambda'_j - 1, j), ..., T(\lambda'_j - h + 1, j))$$

会得到一个新的杨表，与（C_n）矛盾。

为证明（C'_n）$\implies (C_n)$，我们用反证法。假设存在两个形状和权相同但彼此不同的杨表。我们首先证明，每一对对应的竖直矩形块的权必定相同。这意味着 l 的位置是固定的。接着我们注意到 $C'_{n-\|L\|}$ 成立，这意味着杨表其余部分也相同。证明至此完成。

假设杨表 T 在其形状和权下是唯一的。它由一系列高度递减的矩形块组成。根据命题 1.3，这些块中的每一块在其形状和权下也必定是唯一的。考虑一个大小为 $k \times m$ 的此类块。于是，命题 1.3 表明，其各列的权都是大小为 k 的集合，并且任意两个这样的集合至多相差一个元素。

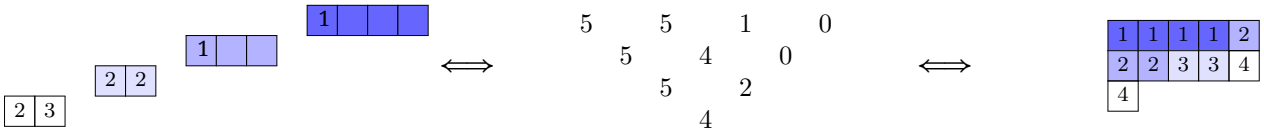
命题 1.6. 设 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ 是基数为 k 的集合，使得对于所有 $1 \leq i,\ |S_i \Delta S_j| \leq 1$。那么，要么 $S_1 = S_2 = \cdots = S_m$（称为第一类），要么 $\left|\bigcap_{i=1}^{m} S_i\right| = k-1$（称为第二类），要么 $\left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = k+1$（称为第三类）。

命题 1.6 的证明见第 3 节。注意，有些矩形块既属于第二类，也属于第三类。单行杨表要么属于第一类，要么属于第二类。思路是分别证明定理 1.4 对每一类矩形块都成立，然后借助归纳法将所有情况综合起来。主要工具是竖直 Pieri 公式 1.1。

1.2.9. 致谢。 作者谨向 Siddhartha Sahi 和 Vadim Gorin 致谢，感谢他们就本文主题进行了富有成效的讨论。

2. Unique semistandard tableau

命题 *1.2* 的证明。 考虑一个形状为 ν/λ 、权为μ的 Littlewood-Richardson 杨 tableaux T。对于 $1 \le k \le j \le n$ ，令 μ_k^j 表示 T前 j 行中等于 k 的条目数。那么 $\mu_k^n = \mu_k$。显然，对于 $j \le n-1$，有 $\mu_k^{j+1} \ge \mu_k^j$。格字条件等价于：对于 $j \le n-1$，有$\mu_{k+1}^{j+1} \le \mu_k^j$。 $\sum_{k=1}^{j} \mu_k^j - \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k^{j-1}$ 是第 j 行中条目的总数，因此有 $\nu_j - \lambda_j$。所以 $\{\mu_k^j\}_{1\le k\le j\le n}$ 是一个顶行为 μ 、权为$\nu-\lambda$的交错 Gelfand-Tsetlin 数组。它对应于一个形状为 μ、权为 $\nu-\lambda$的半标准杨表。因此，我们构造了一个从{形状为 ν/λ 、权为 μ的 Littlewood-Richardson 杨 tableaux}到{形状为 μ 、权为 $\nu-\lambda$ 的半标准杨表}的单射。因此 $c_{\lambda\mu}^{\nu} \le K_{\mu,\ \nu-\lambda}$。一般而言，这个映射不是双射，因为 T 的列带来了额外的约束，而我们尚未考虑这些约束。然而，如果 ν/λ 是一个水平条带，则不存在此类约束。因此，在这种情况下，该映射是双射，并且 $c_{\lambda\mu}^{\nu} = K_{\mu,\ \nu-\lambda}$。□



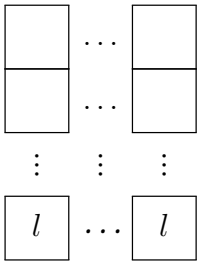
当 λ有 4 行、 μ = (5，5，1)、 l = (4，3，2，2) 时，双射的一个例子。

命题 *1.3* 的证明。 （记号：设 λ' 表示分拆 $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_k > 0)$ 的共轭分拆，其中 k 是 λ 的长度。设 $[\lambda_i']$ 表示 λ' 中第 i 列的方格集合。由于该列填入了不同的整数，我们将这些整数与同一列中对应的方格等同。例如，如果 l 是出现在第 i 列中的整数，我们就写作 $l \in [\lambda_i']$。设 $T(r,\ c)$表示第 r 行、第 c 列的方格。）

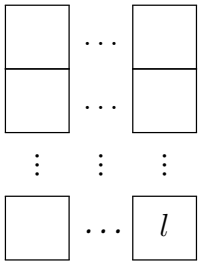
显然，若 T 只有一个方格，则结论成立。对 T 的方格数进行归纳，并假设该结论对所有小于 n的整数都成立。

$(C_n) \implies (C_n')$ ：设 l 为 T中的最大整数。填有 l 的方格在 T中构成一个水平~条带。令 L 表示这个含有 $\|L\|$ 个方格的水平条带。由此可知， $T := T \setminus L$ 是形状和权均唯一的。

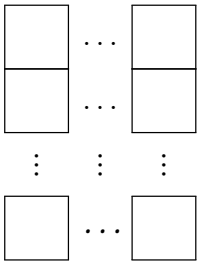
~根据归纳法，T 满足（$C'_{n-\|L\|}$），我们验证 T 满足（C'_n）。对于 T中的任意两列，有以下七种情形需要考虑，如下所示：



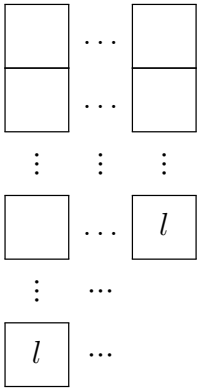
情形 1



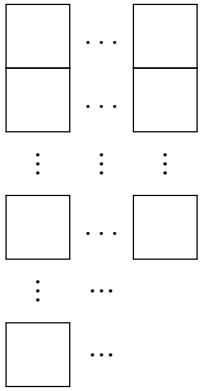
案例 2



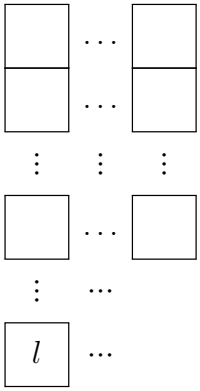
案例 3



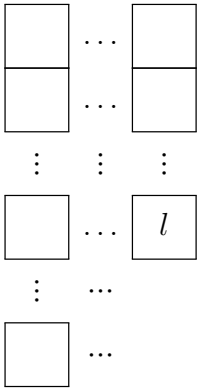
案例 4



案例5



情形 6



情形 7

设 $[\lambda'_i]$ 和 $[\lambda'_j]$ 分别表示上图中左侧的列和右侧的列。

情形 *1*： $\lambda'_i = \lambda'_j$, $l \in [\lambda'_i]$, $l \in [\lambda'_j]$。根据归纳法，$[\lambda'_j] \setminus \{l\}$ 可通过至多改变一个值从 $[\lambda'_i] \setminus \{l\}$ 得到。因此，$[\lambda'_i]$ 和 $[\lambda'_j]$ 也同样如此。

案例 *2*： $\lambda'_i = \lambda'_j$, $l \notin [\lambda'_i]$, $l \in [\lambda'_j]$。根据归纳法，$[\lambda'_j] \setminus \{l\}$ 是 $[\lambda'_i]$ 的子集。因此，将 $[\lambda'_i]$ 中不属于 $[\lambda'_j] \setminus \{l\}$ 的唯一元素改为 l，即可得到 $[\lambda'_j]$。

案例 *3*： $\lambda'_i = \lambda'_j$, $l \notin [\lambda'_i]$, $l \notin [\lambda'_j]$。根据归纳法，$[\lambda'_j]$ 可通过至多改变一个值从 $[\lambda'_i]$ 得到。

案例 *4*： $\lambda'_i > \lambda'_j$, $l \in [\lambda'_i]$, $l \in [\lambda'_j]$。根据归纳法，$[\lambda'_j] \setminus \{l\}$ 是 $[\lambda'_i] \setminus \{l\}$ 的子集。因此，$[\lambda'_j]$ 是 $[\lambda'_i]$ 的子集。

案例*5*： $\lambda'_i > \lambda'_j$, $l \notin [\lambda'_i]$, $l \notin [\lambda'_j]$。根据归纳法，$[\lambda'_j]$ 是 $[\lambda'_i]$ 的子集。

情形 *6*： $\lambda'_i > \lambda'_j$, $l \in [\lambda'_i]$, $l \notin [\lambda'_j]$。如果 $\lambda'_i > \lambda'_j + 1$，那么根据归纳法，$[\lambda'_j]$ 是 $[\lambda'_i] \setminus \{l\}$ 的子集。因此，$[\lambda'_j]$ 是 $[\lambda'_i]$ 的子集。

如果 $\lambda'_i = \lambda'_j + 1$，那么根据归纳法，有两种可能：$[\lambda'_j] = [\lambda'_i] \setminus \{l\}$，或者 $[\lambda'_j]$ 是通过改变一个值从 $[\lambda'_i] \setminus \{l\}$ 得到的。如果 $[\lambda'_j] = [\lambda'_i] \setminus \{l\}$，那么 $[\lambda'_j]$ 是 $[\lambda'_i]$ 的子集。我们证明这就是唯一的可能性。

否则，假设对于某个 $i < j$， $\lambda'_i = \lambda'_j + 1$ 和 $[\lambda'_j] \neq [\lambda'_i] \setminus \{l\}$。我们先来看一个例子：

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	2	6
2	2	2	2	2	3	3	
3	3	3	3	4	4	4	
4	4	4	5	5	5	5	
5	6	6	6	6	6	6	
6	7	7					
7							

图表 1

→

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	2	6
2	2	2	2	2	3	3	
3	3	3	3	4	4	4	
4	4	4	5	5	5	6	
5	5	6	6	6	6	7	
6	6	7					
7							

图表 2

显然，上述杨表具有相同的形状和权。此外，请注意，限制在形状 (8，7， 7，7， 7，1，0) 上的图表 1 满足 $C'_{8+7+7+7+7+1}$。

设 $i=2, j=5$，那么 $\lambda'_i=6=\lambda'_j+1$ 和 $[\lambda'_2]\setminus\{7\}\neq[\lambda'_5]$。注意，将图表 1 中圈出的整数 (5，6，7，7，6) 逆时针移动后，便得到图表 2。

为了一般性地实现这一点，设第 s 列为满足条件 $T(\lambda'_i, s)=l$ 且长度为 λ'_i 的最左侧列。设第 S 列为满足条件 $T(\lambda'_j, S)<l$ 且长度为 λ'_j 的最右侧列。根据我们的假设，s 和 S 均存在。此外，$s\le i$ 和 $S\ge j$。设第 m 列为长度为 λ'_i 的最右侧列。因此，$i\le m<j$。

若 $T(\lambda'_j, s)<T(\lambda'_j, S)$，则移动整数

$$(T(\lambda'_j,S),\underset{\substack{\parallel\\ l}}{T(\lambda'_i,s)},\underset{\substack{\parallel\\ l}}{T(\lambda'_i,s+1)},\ldots,\underset{\substack{\parallel\\ l}}{T(\lambda'_i,m)})$$

在杨表中逆时针移动将生成一个新的杨表。容易验证，我们在此情形下只是在交换 $T(\lambda'_j, S)$ 和 $T(\lambda'_i, s)=l$。要证明这会得到一个新的杨表，只需证明若 $s>1$，则 $T(\lambda'_i, s-1)\le T(\lambda'_j, S)$；因为 $T(\lambda'_j, S+1)=l$ 若 $\lambda'_{S+1}=\lambda'_j$，就能确保将 $T(\lambda'_j, S)$ 替换为 l 的有效性。由归纳法、S 的定义以及 $T(\lambda'_j, s)<T(\lambda'_j, S)$，可得 $[\lambda'_S]\subsetneq[\lambda'_{s-1}]$，$[\lambda'_s]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_{s-1}]$ 且 $\mathrm{Card}([\lambda'_S]\cup([\lambda'_s]\setminus\{l\}))\ge\lambda'_i$。然而，$\max\{[\lambda'_S]\cup([\lambda'_s]\setminus\{l\})\}=T(\lambda'_j, S)$。因此，$T(\lambda'_i, s-1)\le T(\lambda'_j, S)$。

一般而言，由于 $[\lambda'_j]\neq[\lambda'_i]\setminus\{l\}$，必然存在最小的 $h\in\{0、1、\ldots\ldots、\lambda'_j-1\}$，使得 $T(\lambda'_j-h, s)<T(\lambda'_j-h, S)$。我们刚刚证明了，当 $h=0$ 时，进行上述逆时针移动会得到一个新的杨表。对于 $h>0$，我们将证明移动这些整数：

$$\begin{aligned}(T(\lambda'_j-h,S),T(\lambda'_j-h+1,s),T(\lambda'_j-h+2,s),\ldots,T(\lambda'_i,s),T(\lambda'_i,s+1),\ldots,\\ T(\lambda'_i,m),T(\lambda'_j,S),T(\lambda'_j-1,S),\ldots,T(\lambda'_j-h+1,S))\end{aligned}$$

在杨表中进行逆时针移动会得到一个新的杨表。

注意，

$$\{T(\lambda'_i,s),T(\lambda'_i,s+1),\ldots,T(\lambda'_i,m)\}=\{l\},$$

只需证明：若列数大于 S，则新杨表从第 S 列到第 $(S+1)$ 列弱递增；若 $s>1$，则从第 $(s-1)$ 列到第 s 列弱递增。

根据归纳法，当列数多于 S 时，$[\lambda'_{S+1}]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_S]$。若 $\lambda'_{S+1}<\lambda'_j-h$，则证明完毕。否则，我们断言，对于所有 $\max\{\lambda'_j-\lambda'_{S+1},1\}\leq h'\leq h$，$T(\lambda'_j-h'+1,S)\leq T(\lambda'_j-h',S+1)$。事实上，根据归纳法，$[\lambda'_{S+1}]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_S]$，$[\lambda'_{S+1}]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_s]\setminus\{l\}$；根据我们的假设，$[\lambda'_S]\neq[\lambda'_s]\setminus\{l\}$；再根据 h 的定义，我们有 $T(\lambda'_j-h,S)\notin[\lambda'_s]$，且 $T(\lambda'_j-h,S)>\max\{T(1,s)\ T(2,s)\ ...,T(\lambda'_j-h,s)\}$。因此，$T(\lambda'_j-h,S)<T(\lambda'_j-h,S+1)$，且 $T(\lambda'_j-h,S+1)\in[\lambda'_S]\cup\{l\}$。由此可得 $T(\lambda'_j-h+1,S)\leq T(\lambda'_j-h,S+1)$。由于$T(\lambda'_j-h+1,S+1)>T(\lambda'_j-h,S+1)$，且 $T(\lambda'_j-h+1,S+1)\in[\lambda'_S]\cup\{l\}$，由此可得$T(\lambda'_j-h+2,S)\leq T(\lambda'_j-h+1,S+1)$。同理，对于所有 $\max\{\lambda'_j-\lambda'_{S+1},1\}\leq h'\leq h$，$T(\lambda'_j-h'+1,S)\leq T(\lambda'_j-h',S+1)$。我们已经证明，新杨表从第 S 列到第 $(S+1)$ 列确实是弱递增的。

此外，根据定义，我们有

$$T(\lambda'_j-h,s)<T(\lambda'_j-h,S)<T(\lambda'_j-h+1,S)=T(\lambda'_j-h+1,s),$$

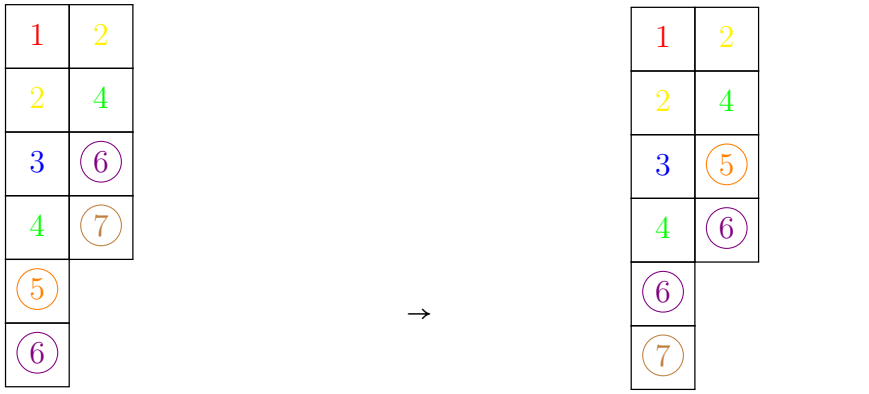
并且由于 $[\lambda'_S]\subsetneq[\lambda'_{s-1}]$，$[\lambda'_s]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_{s-1}]$，可得 $T(\lambda'_j-h+1,\ s-1)\leq T(\lambda'_j-h,\ S)$。与上面的论证类似，可以看出，对于所有 $2\leq h'\leq h+1$，都有 $T(\lambda'_j-h+h',\ s-1)\leq T(\lambda'_j-h+h'-1,\ s)$。因此，我们证明了新的杨表从第 $(s-1)$ 列到第 s 列弱递增。

情形 7：$\lambda'_i>\lambda'_j$，$l\notin[\lambda'_i]$，$l\in[\lambda'_j]$。我们证明这是不可能的。

反设不然，由归纳法可知 $[\lambda'_j]\setminus\{l\}\subset[\lambda'_i]$。记作 $[\lambda'_j]=(c_1<c_2<...<c_m<l)$，并记作 $[\lambda'_i]\setminus[\lambda'_j]=(x_1<x_2<...<x_{m'})$，$m'>0$。

我们首先研究 $j=i+1$ 的情形。如果 $x_{m'}>c_m$，那么交换 $x_{m'}$ 和 l 会得到一个新的杨表。矛盾。

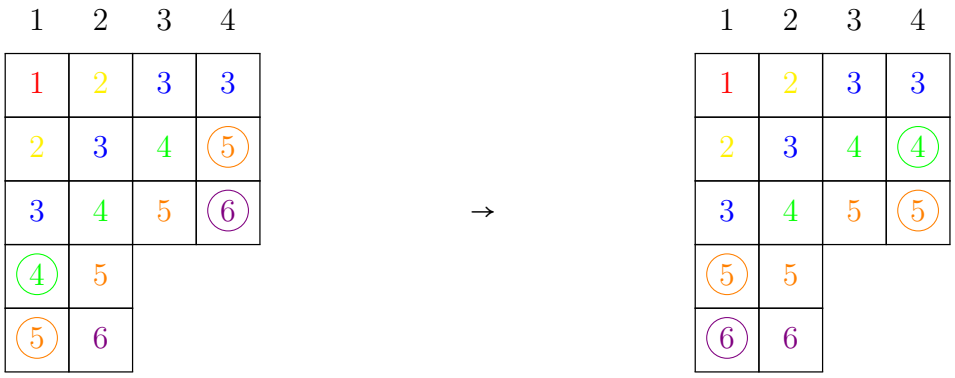
否则，$x_{m'}<c_m$。如果我们从$[\lambda'_i]$ 中取出 $x_{m'}$，同时不扰动$[\lambda'_i]$ 中的其他整数，将前一个 $x_{m'}$ 下方的每个整数上移一格，把 $[\lambda'_j]$ 中的 l 移到$[\lambda'_i]$的最后一个方格，最后将$x_{m'}$ 插入$[\lambda'_j]$中的适当位置。很容易验证，这种新的排列与剩余的杨表相容。这样我们就得到一个新的杨表。矛盾。



一个 $j=2=i+1$ 的例子，$\{c_1,\ ...\ ...,\ c_m\}=\{2、4、6\}$，$\{x_1,\ .....,\ x_{m'}\}=\{1、3、5\}$，$l=7$。注意，第一列中的 6 比第二列中的 6 低三层。一般而言，$x_{m'}$ 至少比第二列中大于 $x_{m'}$ 的最小整数低两层。

这个杨表是将圈出的整数（5、6、7、6）顺时针移动后，由左侧的杨表得到的。

现在我们研究 $j > i+1$的情形。对两列之间的距离（$j-i$）进行归纳。假设我们已证明，对于任意一个有 n 个方格的杨表，所有满足$0 < j-i < q$ 的（i、 j）数对都不可能出现情形 7，那么我们不妨假设集合{λ'_i、 λ'_{i+1}、..... λ'_j}的基数为二， j列是包含 l且长度为 λ'_j的最左列，并且 i列右侧所有长度为 λ'_i 的列都包含 l。再来看一个例子：



杨表 3　　**杨表 4**

在上述杨表中， $i=1$， $j=4$ 和 $l=6$。第 1 列右侧的每一列都是 $[\lambda'_1]\cup\{6\}$ 的子集。杨表 4 是将圈出的整数 (4，5，6，5) 顺时针移动后由杨表 3 得到的。

一般来说，若 $T(\lambda'_i,\ i) > T(\lambda'_j-1,\ j)$，则交换 $T(\lambda'_j,\ j) = l$和$T(\lambda'_i,\ i)$。根据归纳法，结果仍然是一个杨表。矛盾。

否则，令 $T(0,j)=0$，并令 h为满足 $T(\lambda'_j-h,j) < T(\lambda'_i-h+1,i)$ 的最小整数。然后我们移动这些整数：

$$(T(\lambda'_j-h+1,i),\ T(\lambda'_j-(h-1)+1,i),...,T(\lambda'_j,i),T(\lambda'_j,j),T(\lambda'_j-1,j),...,T(\lambda'_j-h+1,j))$$

在杨表中顺时针移动。由归纳法可知，对于所有 $q \geq j$， $[\lambda'_q]\setminus\{l\}\subsetneq[\lambda'_{i+1}]$。因此，我们的构造得到了另一个杨表。矛盾。

因此，情形 7 不可能成立，我们已经证明了必要性。

$(C'_n) \implies (C_n)$：用反证法证明。假设存在一个满足 (C'_n) 的杨表 T，但还存在另一个形状 λ 和权相同的杨表 $T'\neq T$。

按列长对 λ 的列进行分组，记作 $\lambda'_1=\cdots=\lambda'_{g_1} > \lambda'_{g_1+1}=\cdots=\lambda'_{g_1+g_2} > \cdots > \lambda'_{g_1+\cdots+g_{d-1}} > \lambda'_{g_1+\cdots+g_{d-1}+1}=\cdots=\lambda'_{g_1+\cdots+g_d}=\lambda'_{\lambda_1}$。考虑由 T 的最后 g_d 列构成的矩形杨表 $T|_{(d)}$。令 $\mu_{(d)}$ 为 $T|_{(d)}$ 的权。我们断言，$\mu_{(d)}$ 也是 $T'|_{(d)}$ 的权。

若不然，必存在一个整数 z，它在 $T|_{(d)}$ 中出现的次数多于在$T'|_{(d)}$中的次数，因为 $T|_{(d)}$和 $T'|_{(d)}$ 具有相同的形状。由于 T满足（C'_n）， z也出现在前$\sum_{i=1}^{d-1}g_i$列中。但 T的前 $\sum_{i=1}^{d-1}g_i$列中至多有 $\sum_{i=1}^{d-1}g_i$ z个，因为 T'也是一个杨表。矛盾。由此得出， $T|_{(d)}$ 和 $T'|_{(d)}$ 具有相同的权 $\mu_{(d)}$。

同样，我们得出结论：对于所有 $i=1,\ \cdots,\ d$，第 i 个矩形杨表 $T|_{(i)}$ 和 $T'|_{(i)}$ 具有相同的权。由此我们还可以得出， l 的所有位置都是固定的，因为 l 只能出现在每个矩形杨表最后一行的最后几个方格中。如果我们考虑去掉所有 l 后的杨表，那么很容易验证，这个较小的杨表满足 $(C'_{n-\|L\|})$，且其

形状中有 $(n - \|L\|)$ 个方格。由此可知，这个较小的杨表由其形状和权唯一确定。因此， $T = T'$，矛盾。所以， T 唯一确定。

□

3. Proving factorization

3.1. 三种矩形杨表。 一个有 m 列和 k 行的矩形杨表 T，当且仅当满足以下条件之一时，由其形状和权唯一确定：

(1) T 的所有列都相同。（第一类） (2) T 的所有列的交集的基数为 $(k-1)$。（第二类） (3) T 总共含有 $(k+1)$ 个不同的整数。（第三类）

这直接由命题 1.3 和命题 1.6 得出，后者的证明如下。定理 1.4 对三类矩形杨表分别成立后，一般情形可通过对 μ 中矩形块的数量作归纳得出。

命题 1.6 的证明。删除一个重复的集合不会改变类别。因此，不失一般性，我们可以假设 $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ 两两不同。如果 $m = 1$，则属于第一类情形。如果 $m = 2$，则同时属于第二类和第三类情形。假设$m \geq 3$。 $|S_1 \cap S_2| = k-1$ 和 $|S_1 \cup S_2| = k+1$。有两种情形： $S_3 \not\subset S_1 \cup S_2$ 和 $S_3 \subset S_1 \cup S_2$。假设 $S_3 \not\subset S_1 \cup S_2$。那么，对于某些互不相同的 a、b、c，有 $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = S_1 \backslash \{a\} = S_2 \backslash \{b\} = S_3 \backslash \{c\}$，因此 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = k-1$。如果其他任何一个 S_i 遗漏了 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 中的一个元素，那么它就必须包含所有的 a、b、c，且其大小为 $\geq (k-2) + 3 > k$。矛盾。因此在这种情形下 $\left|\bigcap_{i=1}^{m} S_i\right| = |S_1 \cap S_2 \cap S_3| = k-1$，所以属于第二类情形。现在假设 $S_3 \subset S_1 \cup S_2$。如果还有其他任何一个 $S_i \not\subset S_1 \cup S_2$，那么交换 S_3 和 S_i 后，就会像前一种情形一样导致矛盾。因此在这种情形下，任何 $S_i \subset S_1 \cup S_2$，所以 $\left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = |S_1 \cup S_2| = k+1$，从而属于第三类情形。

□

∞**3.2. Pieri 公式。** 回忆一下，对于分拆 η， e_η 表示 $\prod e_{\eta_i}$。分拆上存在支配偏序：若对任意 $i \geq 1$， $\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_i \geq \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_i$，则 $\chi \trianglerighteq \rho$。 $\chi \triangleright \rho$ 表示$\chi \trianglerighteq \rho$ 且 $\chi \neq \rho$。反复应用竖直 Pieri 公式 (1.1) 可得

$$e_{\mu'} = P_\mu + \sum_{\eta:\ \eta' \triangleright \mu'} c_\eta P_\eta$$

对于某些系数 c_η。因此，我们可以写成

$$P_\mu = e_{\mu'} + \sum_{\eta:\ \eta' \triangleright \mu'} (-c_\eta) P_\eta.$$

然而，对于任意 $\eta \triangleright \mu'$，我们有

$$P_\eta = e_{\eta'} + \sum_{\zeta:\ \zeta' \triangleright \eta'} (-c_\zeta) P_\zeta,$$

我们可以改写为

$$P_\mu = e_{\mu'} + \sum_{\eta:\ \eta' \triangleright \mu'} (-c_\eta) \left[e_{\eta'} + \sum_{\zeta:\ \zeta' \triangleright \eta'} (-c_\zeta) P_\zeta \right].$$

继续按照上述方法代入，直到经过有限步后，右侧变成初等对称函数的线性组合。由此得到

(3.1) $$P_\mu = e_{\mu'} + \sum_{\eta:\ \eta' \triangleright \mu'} d_{\eta'} e_{\eta'}$$

其中 $d_{\eta'}$ 是其他一些系数。对于对称函数 f，若 $P_\lambda(f-g)$ 在麦克唐纳基展开中不含 P_ν，我们就称 $f \sim_{\lambda\nu} g$。由垂直 Pieri 公式 1.1 可知，当 η_1 大于 ν/λ 的非零行数时，$f \sim_{\lambda\nu} f + e_\eta$。

3.3. 具有相同列的矩形杨表。令 $\mu(=(M^K))$ 为具有 M 列和 K 行的矩形分拆。考虑杨表 T 的形状为 μ 且各列相同的情形。

由公式 3.1，我们有

$$P_{(M^K)} = e_K^M + \sum_{\eta:\eta_1 > K} c_\eta e_\eta,$$

其中 c_η 为系数。从现在起，为简便起见，我们用“$(j,\ k,\ m)$ ad”表示“$(j,\ k,\ m)$ 可容许”，用 $a_{j,\ k}^m$（分别用 $b_{j,\ k}^m$）表示 $a(j,\ k,\ m)$（分别表示 $b(j,\ k,\ m)$）。由此可得

$$c^\nu_{\lambda(M^K)}(q,t) = \prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}} \left(\frac{\frac{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-m}t^{k-j+1}}{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-m+1}t^{k-j}}}{\frac{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-m}t^{k-j}}{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-m+1}t^{k-j-1}}} \right).$$

另一方面，定理 1.4 声称

$$\begin{aligned}
\tilde{c}^\nu_{\lambda(M^K)}(q,t) &= \psi_T(q,t) \prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}} \left(\frac{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1} t X_j}{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}} X_j} \cdot \frac{X_k - q^{-a^m_{j,k}} t^{-1} X_j}{X_k - q^{-a^m_{j,k}-1} X_j} \right) \\
&= \prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}} \left(\frac{1 - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1+\lambda_j-\lambda_k} t^{1+k-j}}{1 - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}+\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j}} \cdot \frac{1 - q^{-a^m_{j,k}+\lambda_j-\lambda_k} t^{-1+k-j}}{1 - q^{-a^m_{j,k}-1+\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j}} \right) \\
&= \prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}} \left(\frac{1 - q^{-m+\lambda_j-\lambda_k} t^{1+k-j}}{1 - q^{-m+1+\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j}} \cdot \frac{1 - q^{-m+1+\lambda_j-\lambda_k} t^{-1+k-j}}{1 - q^{-m+\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j}} \right).
\end{aligned}$$

因此，$\tilde{c}^\nu_{\lambda\ (M^K)}(q,\ t) = c^\nu_{\lambda\ (M^K)}(q,\ t)$。由此可知，定理 1.4 对所有具有相同列的矩形杨表均成立。

3.4. 水平条带。设 T 是一个由 n 个方格组成、权为（$0 < d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$）的水平行。等价地，我们可以将其权写为（$1^{e_1}$，……，$N^{e_N}$），$e_N > 0$。

根据水平 Pieri 公式 1.2，我们有

$$P_\lambda \cdot P_{(r)} = \sum_{\lambda <_h \nu,\ |\nu|-|\lambda|=r} \frac{(q;q)_r}{(t;q)_r} \varphi_{\nu/\lambda} P_\nu,$$

其中，ν/λ 是一个由 r 个方格组成的斜形，且任意两个方格都不在同一列中，即一个水平条带，并且

$$\varphi_{\nu/\lambda} := \prod_{s \in C_{\nu/\lambda}} \frac{b_\nu(s)}{b_\lambda(s)}, \quad (a;q)_s := \prod_{i=1}^{s} (1 - aq^{i-1}).$$

与此同时，

(3.2) $$P_\lambda P_{(n)} = \sum_\nu c^\nu_{\lambda(n)}(q,t) P_\nu.$$

由于 P_ν 构成一组基，我们得出结论：只有当 P_ν 出现在 (3.2) 中时，$c^\nu_{\lambda(n)}(q,t)$ 才不为零，并且

$$c^\nu_{\lambda(n)}(q,t) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(1-q^{i+1})}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-tq^i)}\varphi_{\nu/\lambda}.$$

根据 $\varphi_{\nu/\lambda}$ 的定义，我们计算对应于原始分拆 λ 和水平杨表 T 的麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数如下

$$\begin{aligned} c^\nu_{\lambda(n)}(q,t) =& \frac{(q;q)_n}{(t;q)_n}\cdot\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{e_i-1}\frac{1-q^jt}{1-q^{j+1}}\right) \\ & \cdot\prod_{\substack{i=1\\ d_i>1}}^{n}\prod_{j=1}^{d_i-1}\frac{1-q^{\lambda_j+b(j,d_i,i)-(\lambda_{d_i}+a(j,d_i,i))-1}t^{d_i-j+1}}{1-q^{\lambda_j+b(j,d_i,i)-(\lambda_{d_i}+a(j,d_i,i))}t^{d_i-j}}\cdot\frac{1-q^{\lambda_j-(\lambda_{d_i}+a(j,d_i,i))}t^{d_i-j-1}}{1-q^{\lambda_j-(\lambda_{d_i}+a(j,d_i,i))-1}t^{d_i-j}} \\ =& \frac{(q;q)_n}{(t;q)_n}\cdot\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{e_i-1}\frac{1-q^jt}{1-q^{j+1}}\right)\cdot\prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}}\left(\frac{X_k-q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1}tX_j}{X_k-q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}}X_j}\cdot\frac{X_k-q^{-a^m_{j,k}}t^{-1}X_j}{X_k-q^{-a^m_{j,k}-1}X_j}\right), \end{aligned}$$

其中在最后一行中，我们用 d_i 替换 k，并用 i 替换 m。

在定理 1.4 中，声称

$$c^\nu_{\lambda(n)}(q,t) = \psi_T(q,t)\prod_{(j,k,m)\ \mathrm{ad}}\left(\frac{X_k-q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1}tX_j}{X_k-q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}}X_j}\cdot\frac{X_k-q^{-a^m_{j,k}}t^{-1}X_j}{X_k-q^{-a^m_{j,k}-1}X_j}\right).$$

只需证明

$$\psi_T(q,t) = \frac{(q;q)_n}{(t;q)_n}\cdot\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{e_i-1}\frac{1-q^jt}{1-q^{j+1}}\right) = \frac{(q;q)_n}{(t;q)_n}\cdot\prod_{i=1}^{N}\frac{(t;q)_{e_i}}{(q;q)_{e_i}}.$$

注意到

$$\psi_T(q,t) = \prod_{i=1}^{N-1}\frac{\frac{(t;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}{(q;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}}{\frac{\frac{(t;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}}{(t;q)_{e_{i+1}}}}{\frac{(q;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}}{(q;q)_{e_{i+1}}}}} = \prod_{i=1}^{N-1}\frac{(t;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}{(q;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}\cdot\frac{(t;q)_{e_{i+1}}(q;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}}{(t;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}(q;q)_{e_{i+1}}}.$$

容易验证

$$\prod_{i=1}^{N-1}\frac{(t;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}{(q;q)_{\sum_{j=1}^i e_j}}\cdot\frac{(t;q)_{e_{i+1}}(q;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}}{(t;q)_{\sum_{j=1}^{i+1}e_j}(q;q)_{e_{i+1}}} = \frac{(q;q)_n}{(t;q)_n}\cdot\prod_{i=1}^{N}\frac{(t;q)_{e_i}}{(q;q)_{e_i}}.$$

由此可知，定理 1.4 对所有只有一行的杨表都成立。

3.5. **第二类矩形块**。现在我们研究有 T 列、k 行的矩形杨表，其中所有列的权的交集的基数为 $(k-1)$。

例如，在下面的杨表中，{1，3} 是所有列的权的交集。

1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	4	5

一个带有$m = 4$、 $k = 3$的矩形杨表

定义 3.1 (内在)。 设 T 是一个任意的矩形杨表。如果 T 的某个方格中含有一个整数，而该整数出现在 T 的每一列中，则删除该方格，并将其下方的所有方格向上移动一格。所得矩形杨表称为 T 的内在杨表，记作 $Int(T)$。

例子。

1	1	2
2	2	3
3	4	4

T

$\Rightarrow$

1	1	3
3	4	4

Int(T)

断言 3.2. $P_{(m^k)}(1, ...,1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 的齐次次数 m 部分等于$P_{(m)}(x_k,..., x_{k+m-1})$。

证明。 假设。

$$P_{(m^k)}(x_1, ..., x_{k+m-1}) = \sum_T \psi_T(q,t) x_1^{T_1} \cdots x_{k+m-1}^{T_{k+m-1}},$$

其中 T 遍历形状为 (m^k) 的所有半标准杨表，且 $(1^{T_1}, ..., (k+m-1)^{T_{k+m-1}})$ 是杨表 T 的权。于是我们有

$$P_{(m^k)}(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1}) = \sum_T \psi_T(q,t) x_k^{T_k} \cdots x_{k+m-1}^{T_{k+m-1}}. \tag{3.3}$$

注意， $\sum_{i=k}^{k+m-1} T_i = m$ 蕴含 $\sum_{i=1}^{k-1} T_i = m(k-1)$。此外，由于对于所有 i， $T_i \le m$，我们知道，为了使 (3.3) 右侧的次数为 m， $T_1 = T_2 = \cdots = T_{k-1} = m$。因此， T 所有列的权的交集（对应于 (3.3) 中次数为 m 的项）为 $\{1, 2, ..., k-1\}$，其基数为 $(k-1)$。由此可知， T的内在杨 tableaux Int(T) 必须是权为 $(k^{T_k}, ..., (k+m-1)^{T_{k+m-1}})$ 的水平条带。根据 $\psi(q,t)$ 的定义，显然 $\psi_T(q,t) = \psi_{\mathrm{Int}(T)}(q,t)$。因此，我们得出结论：$P_{(m^k)}(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 的齐次次数为 m 的分量等于 $P_{(m)}(x_k, ..., x_{k+m-1})$。□

假设

$$P_{(m^k)}(x_1, ..., x_{k+m-1}) = \sum_\mu c_\mu e_\mu(x_1, ..., x_{k+m-1})$$

是 $P_{(m^k)}(x_1,..., x_{k+m-1})$ 的初等对称多项式展开。

命题 3.3. 对于每个 $\mu \vdash (m^k)$， 若 $e_\mu(1, ...,1, x_k, ..., x_{k+m-1})$中的最低单项式次数为 m，则 c_μ 等于 $P_{(m)}(x_1, ..., x_m)$ 的初等对称多项式展开中 $e_{\hat{\mu}}$ 的系数，其中 $\hat{}\mu = (\mu_1 - (k-1)..., \mu_m - (k-1))$。

证明。根据公式 3.1，我们可以假设 $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m \geq 0)$。若 $e_\mu(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 中的最低单项式次数为 m，则我们断言 $\mu_m \geq k-1$，因为否则 $e_\mu(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 中的最低单项式次数将不小于 $mk-[(m-1)(k-1)+(k-2)] = m+1$。因此，$\hat{}\mu = (\mu_1 - (k-1) ..., \mu_m - (k-1))$ 是一个有效的表达式。注意，$e_\mu(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 中的最低齐次次数项恰为 $e_{\hat{\mu}}(x_k, ..., x_{k+m-1})$，其次数为 m。对于一个 $\mu \vdash mk$，若它在 $P_{(m)}(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 的初等对称多项式展开中含有次数为 m 的项，则意味着 $e_\mu(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$ 中的最低单项式次数为 m。因此，由断言 3.2 可知

$$P_{(m)}(x_k, ..., x_{k+m-1}) = \sum_\mu c_\mu e_{\hat{\mu}}(x_k, ..., x_{k+m-1}),$$

其中 th 对满足最低单项式次数为

$$e_\mu(1, ..., 1, x_k, ..., x_{k+m-1})$$

m。由于将 μ 映射到 $\hat{}\mu$ 的映射，在恰有 m 个部分且每个部分不小于 $(k-1)$ 的 (m^k) 的分拆集合与 m 的分拆集合之间构成双射，因此只需进行变量替换 $x_i \mapsto x_{i-(k-1)}$、$k \leq i \leq k+m-1$，即可得出结论。□

竖直 Pieri 公式作为四元组

注意，如果我们将 P_λ 与一列初等对称多项式相乘，并反复应用垂直 Pieri 公式 1.1，那么最终展开中的所需系数完全由一组四元组决定，例如 $(i, j, q_i, q_j)^\lambda$, $i < j$，它表示臂位于第 i 行、腿延伸至第 j 行的钩。q_i（分别为 q_j）表示在待附加的竖条（附加到第 j 行）之前，原杨表的第 i（分别为第 j）行已经附加的方格数。因此，我们可以用四元组表示相应的 ψ'。

注意，两个四元组 $(i, j, q_i, q_j)^\lambda$ 和 $(I, J, q_I, q_J)^\lambda$ 表示同一个元素

$$\mathbb{Q}(q, t, X_1, X_2, ...)$$

当且仅当 $0 = i - I = j - J = (q_i - q_j) - (q_I - q_J)$ 时成立。这可根据 ψ' 的定义轻易验证。

断言 3.4。定理 *1.4* 对所有具有 m 列和 k 行的矩形 T 均成立，并且所有列的权的交集的基数为 $(k-1)$。

证明。假设 $r_1 < \cdots < r_{k-1}$ 是 T 中所有列共有的整数，并且 $\mathrm{Int}(T)$ 的权为 $(1^{\mathrm{Int}(T)_1}, ..., l^{\mathrm{Int}(T)_l})$，其中 l 是 T 中的最大整数。定义集合 $L_{\mathrm{Int}} := \{i \in [l] : \mathrm{Int}(T)_i > 0\}$；$L_r := \{r_1, ..., r_{k-1}\}$；$L_0 := [l] \setminus (L_{\mathrm{Int}} \cup L_r)$。

对于杨表 T，我们将满足 $\{i, j\} \nsubseteq L_{\mathrm{Int}}$ 且 $(i, j) \notin L_0 \times L_{\mathrm{Int}}$ 的四元组 (i, j, q_i, q_j) 称为额外四元组。

当我们将 P_λ 乘以 $P_{(m^k)}$ 时，可以将 $P_{(m^k)}$ 写入其初等对称函数展开中。类似地，我们也可以对 $P_{(m)}$ 这样做。根据推论 3.3，我们能够识别公共因子，并比较这两个相关过程中的特有因子：即乘以初等对称函数序列的两个过程，或附加竖条的两个过程。归根结底，我们只需追踪由 e_κ 从 $P_{(m^k)}$ 得到的额外四元组，以及分别由 $P_{(m)}$ 得到的对应 $e_{\hat{\kappa}}$，因为若四元组不是额外的，它们就是相同的。显然，$\sum_{i=1}^{l} \mathrm{Int}(T)_i = m$。

对于杨表 T，额外四元组 (i, j, q_i, q_j) 可分为以下互不相交的类别

(1) $i \in L_{\mathrm{Int}}, j \in L_r$:

$$J_1 := \bigcup_{\substack{i\in L_{\mathrm{Int}}\\ j\in L_r\\ i<j}} \bigcup_{q_j=0}^{m-\mathrm{Int}(T)_i-1} \{(i,j,0,q_j)\}.$$

(2) $i \in L_0,\ \ j \in L_r$:

$$J_2 := \bigcup_{\substack{i\in L_0\\ j\in L_r\\ i<j}} \bigcup_{q_j=0}^{m-1} \{(i,j,0,q_j)\}.$$

对于杨表 Int(T)，额外四元组 (i，j，q_i，q_j) 为：

(a) $i \in L_r,\ \ j \in L_{\mathrm{Int}}$:

$$K := \bigcup_{\substack{i\in L_r\\ j\in L_{\mathrm{Int}}\\ i<j}} \bigcup_{q_j=0}^{\mathrm{Int}(T)_j-1} \{(i,j,0,q_j)\}.$$

现在我们考虑杨表 T(1') $i \in L_{\mathrm{Int}}$，$j \in L_r$ 的额外可容许三元组：

$$L_1 := \bigcup_{\substack{i\in L_{\mathrm{Int}}\\ j\in L_r\\ i<j}} \bigcup_{h\in[m]\setminus C(i)} \{(i,j,h)\},$$

其中，$C(i)$ 是 T 中包含 i的列的集合。

(2') $i \in L_0, j \in L_r$:

$$L_2 := \bigcup_{\substack{i\in L_0\\ j\in L_r\\ i<j}} \bigcup_{h=1}^{m} \{(i,j,h)\}.$$

类似地，杨表 Int(T) 的额外可容许三元组为

(a') $i \in L_r, j \in L_{\mathrm{Int}}$:

$$Q_{\vdots} = \bigcup_{\substack{i\in L_r\\ j\in L_{\mathrm{Int}}\\ i<j}} \bigcup_{h\in C(j)} \{(i,j,h)\},$$

其中，$C(j)$ 是 Int(T) 中包含 j 的列的集合。

容易看出，J_1, J_2 和 L_1, L_2 分别表示 1.4 右侧相同的因子，K 和 Q 也是如此。由于我们已经证明定理 1.4 对所有水平条带均成立，且 $\psi_T(q,t) = \psi_{\mathrm{Int}(T)}(q,t)$，故结论得证。□

3.6. 第三类矩形块。考虑矩形杨表有 m 列和 k 行，且杨表中有$(k+1)$个互不相同的整数的情形。

为求得此情形下的麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数，我们采用麦克唐纳多项式的“截断”表达式这一思路：$P_{(m^k)} := \sum_\mu c_{\mu'} e_{\mu'}$，其中 μ' 是 μ的共轭分拆，$c_{\mu'}$ 是系数，求和范围为所有满足 m^k的分拆

$\mu'_1 \le k+1$，因为根据垂直 Pieri 公式 1.1，所有满足 $\mu'_1 > k+1$ 的 $e_{\mu'}$在此情形下都不会对麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数有贡献。形式上，我们进行如下计算：

若将变量 $x_i \mapsto y_i^{-1}$ 替换为 $1 \le i \le k+1$，并将所有 $i > k+1$ 设为 $x_i = 0$，则由公式 3.1 可得

$$\begin{aligned} P_{(m^k)}(y_1^{-1},...,y_{k+1}^{-1})e^m_{k+1}(y_1,...,y_{k+1}) &= \sum_{\mu} c_{\mu'} \prod_{j=1}^{\ell(\mu')} e_{k+1-\mu'_j}(y_1,...,y_{k+1}) \\ &= \sum_{\mu} c_{\mu'} e_{\tilde{\mu'}}(y_1,...,y_{k+1}), \end{aligned}$$

其中 $l(\mu')$ 是 μ' 中部件的数量，而 $\tilde{\mu'}$ 表示 (m^{k+1}) 中 μ' 的集合论补集。

因此，我们得到

$$P_{(m^k)}(y_1,...,y_{k+1}) = e^m_{k+1}(y_1,...,y_{k+1}) \sum_{\mu} c_{\mu'} e_{\tilde{\mu'}}(y_1^{-1},...,y_{k+1}^{-1}).$$

另一方面，若考虑 $P_{(m^k)}$ 的单项式展开，并像上面一样进行变量替换，则可得

$$P_{(m^k)}(y_1^{-1},...,y_{k+1}^{-1})e^m_{k+1}(y_1,...,y_{k+1}) = \sum_{T} \psi_T(q,t) y_{i_m}\cdots y_{i_1}, \tag{3.4}$$

其中求和遍历形状为 (m^k) 的所有半标准杨表，而 y_{i_j} $(y_{i_m} \ge \cdots \ge y_{i_1})$ 表示列 $(m-j+1)$ 中缺失的元素。

断言 3.5. 方程 *(3.4)* 的右侧等于 $P_{(m)}(y_1,...,y_{k+1})$。

证明。 只需证明 $\psi_T(q,t)$ 等于 $P_{(m)}$ 中 $y_{i_m}\cdots y_{i_1}$ 的系数。回忆一下([Mac99])

$$P_{\lambda/\mu} = \sum_T \psi_T(q,t) x^T, \qquad \psi_T(q,t) = \prod_{i=1}^{r} \psi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}(q,t),$$

其中 $\psi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}$ 是 T 中第 i 个水平条带。对于水平条带 λ/μ，我们有

$$\psi_{\lambda/\mu} = \prod_{s \in R_{\lambda/\mu} - C_{\lambda/\mu}} \frac{b_\mu(s)}{b_\lambda(s)},$$

其中

$$b_\lambda(s) = \begin{cases} \dfrac{1-q^{a_\lambda(s)}t^{l_\lambda(s)+1}}{1-q^{a_\lambda(s)+1}t^{l_\lambda(s)}}, & s \in \lambda; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1	1	1	2
2	2	3	3
3	3	4	4
4	5	5	5
6	6	6	6

一个矩形杨表，其中$m = 4$, $k = 5$

根据 $\psi_T(q,\ t)$ 的定义，我们可以将所有不同的整数 $u_1 < \cdots < u_h$ 在 T 中重命名为 $1 < \cdots < h$，而不改变 $\psi_T(q,\ t)$ 的值。特别是在我们正在考虑的情形中，不失一般性，我们可以假设整数 t 只能出现在第 t 行或第 $(t-1)$ 行。因此，我们只需记录某个方格右侧的方格数，因为在每一步添加水平条带时，水平条带中的任何方格下方都没有方格，这意味着 $b_\lambda(s)$ 完全由臂长确定。

在以下计算中，假设存在z_k y_{i_j}，使得 $y_{i_j} = k$。我们用臂长表示相应的 b_λ（s）。令“$a \sim b$”表示

$$\prod_{a\le x\le b}\frac{1-q^x t}{1-q^{x+1}}.$$

计算得

$$\psi_T(q,t) = \prod_{j=1}^{k}\frac{0\sim(z_{j+1}-1)}{\sum_{l=1}^{j}z_l\sim(\sum_{l=1}^{j+1}z_l-1)}, \tag{3.5}$$

and

$$\psi_{(y_{i_1},\ldots,y_{i_m})}(q,t) = \prod_{j=1}^{k}\frac{0\sim(\sum_{l=1}^{j}z_l-1)}{z_{j+1}\sim(\sum_{l=1}^{j+1}z_l-1)}. \tag{3.6}$$

我们比较（3.5）和（3.6）中的相应项。若 $z_{j+1}\le\sum_{l=1}^{j}z_l-1$，则消去（3.6）中的重复项后，得到（3.5）中的相应项。同理，若 $z_{j+1}-1\ge\sum_{l=1}^{j}z_l$，则消去（3.5）中的重复项后，得到（3.6）中的相应项。若两者均不成立，则 $\sum_{l=1}^{j}z_l = z_{j+1}$，且（3.5）和（3.6）中的相应项显然相等。□

推论 3.6. 在 $P_{(m^k)}(y_1,\ldots,y_{k+1})$ 的展开中，任意 e_κ 的系数等于 $P_{(m)}(y_1,\ldots,y_{k+1})$的展开中，$\kappa$ 在矩形 (m^{k+1}) 中的集合论补形所对应的初等多项式的系数。

证明。 在断言 3.5 中，我们已经证明

$$P_{(m)}(y_1,\ldots,y_{k+1}) = P_{(m^k)}(y_1^{-1},\ldots,y_{k+1}^{-1})e_{k+1}^m(y_1,\ldots,y_{k+1}).$$

沿用断言 3.5 中的记号，我们有

$$P_{(m)}(y_1,\ldots,y_{k+1}) = \left(\sum_\mu c_{\mu'}e_{\mu'}(y_1^{-1},\ldots,y_{k+1}^{-1})\right)\cdot e_{k+1}^m(y_1,\ldots,y_{k+1}) = \sum_\mu c_{\mu'}e_{\tilde{\mu'}}(y_1,\ldots,y_{k+1}), \tag{3.7}$$

其中，求和遍及截断初等˜对称多项式展开中出现的所有可能分拆 $P_{(m^k)}$，而 μ' 是矩形 (m^{k+1}) 中 μ' 的集合论补形。

另一方面，我们有 $P_{(m)}(y_1,\dots,y_{k+1})$ 的初等对称多项式展开：

$$P_{(m)}(y_1,\dots,y_{k+1}) = \sum_{\mu} d_{\tilde{\mu'}} e_{\tilde{\mu'}}(y_1,..,y_{k+1}), \tag{3.8}$$

其中，$d_{\tilde{\mu'}}$ 是系数，求和遍及所有满足 $\mu'_1 \le k+1$ 的分拆 $\mu \vdash m\times k$。这是因为这些分拆与 m 的所有分拆之间存在双射：在 (m^{k+1}) 中，它们互为集合论补集。比较 (3.7) 和 (3.8) 右侧的 $e_{\tilde{\mu'}}$ 系数，我们得出

$$d_{\tilde{\mu'}} = c_{\mu'},$$

这是因为初等对称多项式构成了对称多项式空间的一组基。因此，推论得证。□

下文考虑的所有矩形杨表 T 均由其权和形状唯一确定，具有 m 列和 k 行。

定义 3.7 (补). 若一个矩形杨表 T 有 m 列和 k 行，且包含$(k+1)$ 个互不相同的整数，那么每一列恰好缺少这$(k+1)$ 个整数中的一个。设 l 是 T 中的最大整数，列 j 缺少整数 y_j，$1 \le j \le m$，则权为 $(l+1-y_1, l+1-y_2, \dots, l+1-y_m)$ 的水平杨表称为 T 的补。我们将其记为 T^C。

定义 3.8 (反转)。设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 是一个分拆。假设一个矩形杨表T 有 m 列和 k 行，其中最大的整数为 l。对于任意 $N > \lambda_1$，定义λ 相对于 T和 N的反转为 $\lambda^N(T) = (N-\lambda_k, \dots, N-\lambda_1)$。

断言 3.9。如果 T 中的$(k+1)$ 个不同整数恰好是：1、2、...、$k+1$，那么对于任意给定的 $N > \lambda_1$，麦克唐纳-利特尔伍德-理查森系数 $c(\lambda, T, q, t)$ 与 $c(\lambda^N(T)\ T^C, q, t)$ 相等。

证明。根据推论 3.6，只需对每个分拆 κ （属于 (m^k)），在系数 $P_{\nu(T)}$ 中的每个加项与系数 $P_{\nu(T^C}$ 中的每个加项之间建立一个双射：前者来自 $P_\lambda \cdot P_{(m^k)}$ 的展开，是依次对以下初等对称多项式序列应用垂直 Pieri 公式 1.1 得到的：$e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \dots, e_{\kappa_m}$；后者来自 $P_{\lambda^N(T)} \cdot P_{(m)}$ 的展开，是依次对以下初等对称多项式序列应用垂直 Pieri 公式 1.1 得到的：$e_{k+1-\kappa_1}, e_{k+1-\kappa_2}, \dots, e_{k+1-\kappa_m}$。

假设在步骤 $s \in [m]$，长度为 κ_s 的竖条缺少 λ 中索引为 $v_1 < \dots < v_{l-\kappa_s}$ 的行。令 $V_s := \{v_1, \dots, v_{l-\kappa_s}\}$。令 $l(= k+1)$ 为 T 中的最大整数。由此竖条诱导的四元组集合为

$$\mathcal{S}_1 := \{(i,j,q_i,q_j)^\lambda : i \in V_s, j \in [l] \setminus V_s, i < j\}.$$

另一方面，假设在步骤 $s \in [m]$，$e_{k+1-\kappa_s}$ 并未缺少 $\lambda^N(T)$ 中索引为 $l+1-v_{l-\kappa_s} < \dots < l+1-v_1$ 的行。令 $W_s := \{l+1-v_{l-\kappa_s}, \dots, l+1-v_1\}$。那么，由此竖条诱导的四元组集合为

$$\mathcal{S}_2 := \{(I,J,p_I,p_J)^{\lambda^N(T)} : I \in [l] \setminus W_s, J \in W_s, I < J\}.$$

由于 $(I,\ J,\ p_I,\ p_J)^{\lambda^N(T)}$ 表示该因子

$$\begin{aligned}\frac{1-q^{\lambda^N(T)_I+p_I-(\lambda^N(T)_J+p_J+1)}t^{J-I+1}}{1-q^{\lambda^N(T)_I+p_I-(\lambda^N(T)_J+p_J)}t^{J-I}} &= \frac{1-q^{N-\lambda_{l-I+1}+p_I-(N-\lambda_{l-J+1}+p_J+1)}t^{J-I+1}}{1-q^{N-\lambda_{l-I+1}+p_I-(N-\lambda_{l-J+1}+p_J)}t^{J-I}}\\ &= \frac{1-q^{\lambda_{l-J+1}-\lambda_{l-I+1}+p_I-p_J-1}t^{J-I+1}}{1-q^{\lambda_{l-J+1}-\lambda_{l-I+1}+p_I-p_J}t^{J-I}}\\ (\text{change the variables } J=l+1-i, I=l+1-j) \qquad &= \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+p_{l+1-j}-p_{l+1-i}-1}t^{j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+p_{l+1-j}-p_{l+1-i}}t^{j-i}}\\ (p_{l+1-i}=s-q_i, p_{l+1-j}=s-q_j) \qquad &= \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+q_i-q_j-1}t^{j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+q_i-q_j}t^{j-i}},\end{aligned}$$

它与四元组 $(i,\ j,\ q_i,\ q_j)^\lambda$所表示的因子相同。因此，$\mathsf{S}_1$ 与 S_2之间存在双射。由于我们假设 T 中 $(k+1)$ 个互不相同的整数恰好为 1，2，..... $k+1$，因此，S_2 可以看作由 $P_{(m)}$ 的初等对称多项式展开中的一个加项按指定方式诱导出的四元组集合。

注：这种双射仅在 $l=k+1$ 时成立，原因是当 $l=k+1$ 时，$\sum_{i=1}^m(k+1-\kappa_s)=m$。若 $l>k+1$，则 $\sum_{i=1}^m(l-\kappa_s)>m$，因此我们无法断言“$\mathcal{S}_2$ 可以视为由初等对称多项式 $P_{(m)}$ 的展开中的某个加项所诱导的四元组集合”，因为附加在 $\lambda^N(T)$ 上的附加项会多于 m 个，但 $P_{(m)}$ 的初等对称多项式展开中的每个加项 $e_{\eta'}$ 都满足 $\eta'\vdash m$。□

推论 3.10. 定理 *1.4* 对所有具有 m 列和 k 行、且 T 为矩形的杨表均成立，其中 $(k+1)$ 是互不相同的整数。

证明。假设杨表 T 的第 $m-i+1$ 列缺少整数 $y_i,\ i\in[m]$，那么断言 3.5 表明 $\psi_T(q,t)=\psi_{(y_{i_1},\dots,y_{i_m})}(q,t)$。由于 $P_{(m)}$ 是对称多项式，因此可得 $\psi_{(y_{i_1},\dots,y_{i_m})}(q,t)=\psi_{(l+1-y_{i_m},\dots,l+1-y_{i_1})}(q,t)$。如果我们添加若干行小于 l、且从未在 T 中出现过的相同整数，使得这个新的杨表满足断言 3.9 的前提，那么当且仅当对于任意 $i\in[l]$，$(l+1-i)$ 不在 T^C 的第 c 列中时，i 才在 T 的第 c 列中。将这个新杨表记为 T^*。此外，对于 T^*，1.4 右侧中对应可容许三元组 $(i,j,t)^\lambda$ 的每个因子，都与对应可容许三元组 $(l+1-j,l+1-i,t)^{\lambda^N(T)}$、属于 T^C 的因子相同。因此，我们可以追踪那些仅由向 λ 添加竖条而产生、且不涉及 $\lambda^N(T)$ 的可容许三元组或四元组。我们关注与 T^* 相比，T 中新增和缺失的可容许三元组以及四元组。虽然下文可能会说“与 T^C 相比”，但读者应记住，这与“与 T^* 相比”是一回事。

将集合 $[l]=L_0\sqcup L_-$ 分拆，其中 L_- 是从未出现在 T中的整数集合。注意，如果 $L_-=\varnothing$，那么根据断言 3.9，我们就完成了。与 T^C相比，T还包含额外的可容许三元组

$$H_1:=\bigcup_{\substack{i\in L_-\\ j\in L_0\\ i<j}}\ \bigcup_{t\in[m]\setminus c(j)}\{(i,j,t)\},$$

其中，$c(j)$ 是 T 中不出现 j 的列的集合。注意，如果 $(i,\ j,\ t)\in H_1$，那么

$$a(i,j,t)=\begin{cases}t-1, & t<\min c(j)\\ t-1-\mathrm{Card}(c(j)), & t>\max c(j)\end{cases},\qquad b(i,j,t)=0.$$

与此同时，与 T^C 相比， T 缺少以下可容许三元组

$$H_2 := \bigcup_{j\in L_-} \{(y_{i_{m+1-t}}, j, t) : t \in [m], y_{i_{m+1-t}} < j\},$$

其中 $y_{i_{m+1-t}}$ 是 T 的第 t 列中 $(k+1)$ 个互异整数里唯一缺失的整数。注意，如果 $(i,\ j,\ t) \in H_2$，那么

$$a(i,j,t) = t - \min(c(i)), \quad b(i,j,t) = 0.$$

不过请注意，如果考察附加竖条过程中诱导出的四元组，那么与 T^C 相比， T 多出以下四元组

$$G_1 := \bigcup_{\substack{i\in L_-\\ j\in L_0\\ i<j}} \bigcup_{q_j=0}^{m-1-\mathrm{Card}(c(j))} \{(i,j,0,q_j)\}.$$

与此同时，与 T^C 相比， T 缺少以下四元组

$$G_2 := \bigcup_{\substack{i\in L_0\\ j\in L_-\\ i<j}} \bigcup_{q_j=0}^{\mathrm{Card}(c(i))-1} \{(i,j,0,q_j)\}.$$

容易看出， H_1（分别为 H_2）和 G_1（分别为 G_2）表示 1.4 右侧的相同因子。至此，证明完毕。□

3.7. **一般情形**。 设分拆 μ（$= \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$）的共轭分拆 μ' 的形状为

$$(\underbrace{k_1, ..., k_1}_{m_1}, \underbrace{k_2, ..., k_2}_{m_2}, \cdots\cdots, \underbrace{k_d, ..., k_d}_{m_d}).$$

令 μ^1 为一个有 m_1 列、 k_1 行的矩形块，并令 $\mu^0 = \mu \setminus \mu^1$ 为 μ 中 μ^1 的集合论补集。

断言 3.11. 定理 *1.4* 一般成立。

证明。 我们已经证明了 μ 中矩形块的数量为 $d = 1$ 的情形，接下来对 d 使用归纳法。

根据公式 3. 1、Pieri 公式 1.1 以及截断表达式的思路，我们知道 t

$$P_{\mu^1} \cdot P_{\mu^0} = P_\mu + \sum_{\eta'_1 > k_1} c^\eta_{\mu^0\mu^1}(q,t) P_\eta$$

它可以看作用 P_{μ^1} 乘以 P_{μ^0} ，其中 μ^1 有最长的列 k_1。针对分拆为 μ^1（一个矩形）的特殊情形应用公式 3.1，我们便得到上述求和中的 $\eta'_1 > k_1$。根据公式 3.1，我们还注意到 $\eta' \triangleright \kappa'$ 。

So,

$$P_\mu = P_{\mu^1} \cdot P_{\mu^0} - \sum_{\eta'_1 > k_1} c^\eta_{\mu^0\mu^1}(q,t) P_\eta.$$

由命题 1.3 和 $\psi_T(q,t)$ 的定义可知，对于形状和权均唯一的杨表 $T(\mu)$， $\psi_T(q,t)$ 关于 $T(\mu)$ 的矩形块具有乘法性:

$$\psi_{T(\mu)}(q,t) = \psi_{T(\mu^0)} \cdot \psi_{T(\mu^1)}(q,t).$$

我们首先计算 P_ν 在 $P_\lambda \cdot P_{\mu^1} \cdot P_{\mu^0} = (P_\lambda \cdot P_{\mu^1}) \cdot P_{\mu^0}$ 中的系数。我们断言，乘积 $P_\lambda \cdot P_{\mu^1}$ 中的中间麦克唐纳多项式 P_κ 必须对应于

杨表 $T(\mu^1)$，才能在 $P_\kappa \cdot P_{\mu^0}$ 的展开中得到 P_ν。否则，与 λ 相比，在乘以 P_{μ^1} 后总共会有 $(m_1 \times k_1)$ 个附加项。根据命题 1.3，必定存在一个包含于 $T(\mu^0)$ 中的整数 I，使得 κ 的第 I 行相较于 λ 多出超过 m_1 的附加项；或者存在一个包含于 $T(\mu^1) \setminus T(\mu^0)$ 中的整数 J，使得 κ 的第 J 行相较于 λ 多出超过 Card(J) 个附加项。其中，Card(J) 表示 J 在 $T(\mu^1)$ 中出现的次数，这也等于 J 在 $T(\mu)$ 中出现的次数。我们知道，后一种情形最终不会得到 P_ν，但前一种情形与公式 3.1 矛盾。

设杨表 $T(\mu^1)$ 的权为 $(1^{n_1},\ 2^{n_2},\ \ldots\ldots,\ )$，其中对于任意 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，n_i 是 i 在 $T(\mu^1)$ 中出现的次数。

因此，根据归纳法以及如下事实：当 T 是其形状和权唯一的杨表时，$\psi_T(q,\ t)$ 关于矩形块具有乘法性，我们计算由 $P_\lambda \cdot P_{\mu^1} \cdot P_{\mu^0}$ 诱导的 $P_\lambda \cdot P_\mu$ 展开中 P_ν 的系数 $\tilde{c}^\nu_{\lambda\mu}$：

$$\begin{aligned}
\tilde{c}^\nu_{\lambda\mu}(q,t) =& \psi_{T(\mu^1)}(q,t) \prod_{\substack{(j,k,m)^{T(\mu^1)} \\ m \le m_1}}{}_{\text{ad}} \left(\frac{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1} t X_j}{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}} X_j} \cdot \frac{X_k - q^{a^m_{j,k}} t^{-1} X_j}{X_k - q^{a^m_{j,k}-1} X_j} \right) \cdot \\
& \psi_{T(\mu^0)}(q,t) \prod_{\substack{(j,k,m)^{T(\mu^0)} \\ m \le m_2+\cdots+m_d}}{}_{\text{ad}} \left(\frac{X_k - q^{n_j-n_k-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1} t X_j}{X_k - q^{n_j-n_k-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}} X_j} \cdot \frac{X_k - q^{n_j-n_k+a^m_{j,k}} t^{-1} X_j}{X_k - q^{n_j-n_k+a^m_{j,k}-1} X_j} \right) \\
=& \psi_{T(\mu)}(q,t) \prod_{(j,k,m)^{T(\mu)}}{}_{\text{ad}} \left(\frac{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}-1} t X_j}{X_k - q^{-a^m_{j,k}+b^m_{j,k}} X_j} \cdot \frac{X_k - q^{a^m_{j,k}} t^{-1} X_j}{X_k - q^{a^m_{j,k}-1} X_j} \right).
\end{aligned}$$

为完成证明，我们论证 $\tilde{c}^\nu_{\lambda\mu}(q,\ t) = c^\nu_{\lambda\mu}(q,\ t)$。

回顾

$$P_\mu = P_{\mu^1} \cdot P_{\mu^0} - \sum_{\eta'_1 > k_1} c^\eta_{\mu^0\mu^1}(q,t) P_\eta.$$

只需证明，对于任意η，在上述恒等式中，$P_\lambda \cdot P_\eta$的麦克唐纳多项式展开中不存在满足$c^\eta_{\mu^0\mu^1}(q,\ t) \neq 0$ 的 P_ν。

事实上，由于 $\eta'_1 > k_1$，且每个 η 都必须包含 μ^1，我们可以推得

$$\sum_{i > m_1} \eta'_i < \sum_{j=2}^{d} k_j m_j. \tag{3.9}$$

注意，根据公式 3.1，我们有

$$P_\eta = \sum_{\kappa' \trianglerighteq \eta'} c_{\kappa'} e_{\kappa'},$$

其中 $c_{\kappa'}$ 是系数。特别地，对于所有 κ'，都有 $\kappa'_1 > k_1$，因为 $\eta'_1 > k_1$。为了在$P_\lambda \cdot e_{\kappa'}$中得到 P_ν，我们论证如下：

$$\sum_{i=m_1+\cdots+m_{d-1}+1}^{m_1+\cdots+m_d} \kappa'_i = k_d m_d.$$

根据命题 1.3，我们知道，出现在 μ 最右侧块中的每个整数，也必须出现在 μ 中长度更大的每一列中。此外，根据垂直 Pieri 公式 1.1，κ_i 中满足 $m_1 + \cdots + m_{d-1} + 1 \le i \le m_1 + \cdots + m_d$ 的部分必须能够提供足够多的方格，使得

所得形状为 ν，这可以转化为

$$\sum_{i=m_1+\cdots+m_{d-1}+1}^{m_1+\cdots+m_d} \kappa_i' \geq k_d m_d.$$

另一方面， $\kappa' \trianglerighteq \eta' \trianglerighteq \mu'$，由此可得

$$\sum_{i=m_1+\cdots+m_{d-1}+1}^{m_1+\cdots+m_d} \kappa_i' \leq k_d m_d.$$

因此，我们知道，$e_{\kappa_i'}$ 的 $m_1+\cdots+m_{d-1}+1 \leq i \leq m_1+\cdots m_d$ 在每一行中添加到 λ 的方格数，恰好等于 μ 的最右侧块（$m_d^{k_d}$）的权。

同理，可以依次论证，对于任意 $2 \leq j \leq d$，我们有

$$\sum_{i=m_1+\cdots+m_{j-1}+1}^{m_1+\cdots+m_j} \kappa_i' = k_j m_j.$$

由此可得

$$\sum_{i>m_1} \kappa_i' = \sum_{j=2}^{d} k_j m_j.$$

由于 $\kappa' \trianglerighteq \eta'$，且它们都是 $|\mu|$ 的分拆，我们知道

$$\sum_{j=2}^{d} k_j m_j = \sum_{i>m_1} \kappa_i' \leq \sum_{i>m_1} \eta_i'.$$

然而，这与 (3.9) 矛盾。因此，我们得出 $\tilde{c}^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ t) = c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,\ t)$。

□

4. Connection with Stanley's conjecture

回忆一下，

$$U(a,l) = 1 - q^{a+1}t^l, \quad L(a,l) = 1 - q^a t^{l+1}$$

分别是上钩长和下钩长。于是，等式 (1.4) 可以改写为以下形式

$$c^{\nu}_{\lambda\mu}(q,t) = \prod_{a,l,a',l'} \left(\frac{U(a,l)}{L(a,l)} \cdot \frac{L(a',l')}{U(a',l')} \right) \tag{4.1}$$

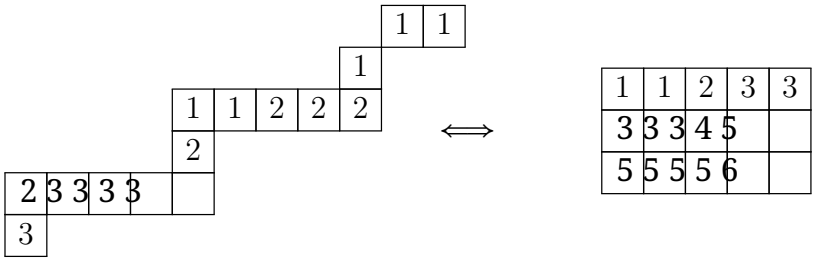
其中，乘积取遍所有适用的情形。注意，(4.1) 的一个有趣特点是，形如 U/L 的分数与形如 L/U 的分数数量相同。

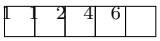
设 T 是形状为 μ、有 m 列和 k 行的第二类矩形唯一杨表。对任意整数 z，设 c_z 为 z 在 T 中出现的次数。假设相应的 Littlewood-Richardson 系数 $c(\lambda,\ T) = 1$。注意，当且仅当 $0 < c_z < m$ 时， $z \in \mathrm{Int}(T)$。此外， $c_z = m$ 等价于 z 出现在 T 的每一列中。下面给出一个引理。

引理 4.1。 在上述假设下，假设 $j-1$ 和 j 都曾作为某个由 T和 $i, j \in$ 构成的可容许三元组的第二项出现过，其中 $i < j-1$。那么

$$\begin{cases} (\lambda_{j-1} + m) - (\lambda_j + c_j) \geq c_i, & when\ c_{j-1} = m \\ \lambda_{j-1} - (\lambda_j + c_j) \geq 0, & when\ 0 < c_{j-1} < m \end{cases}.$$

下面的例子说明了这个引理。



一个例子，其中 $c_1 = 2$，$c_2 = 1$，$c_3 = 5$，$c_4 = 1$，$c_5 = 5$，$c_6 = 1$ 以及 Int(T) = 

假设 $c(\lambda, T(\mu)) = 1 > 0$ 和 T 在其形状和权下唯一，则 Littlewood-Richardson 杨表由 $T(\mu)$ 唯一确定。特别地，每一行的权都与假设 λ 的各行彼此相距很远时完全相同。也就是说，从左到右、从上到下，我们先在方格中填入整数 1，直到 1 用完；然后填入整数 2，直到 2 用完，.....

证明。若 $j-1 \in \text{Int}(T)$，则 ν/λ 中第 $(j-1)$ 行与第 j 行都填有相同的整数。为了使 $c(\lambda, T) = 1 > 0$，两者不能重叠。由此可得 $\lambda_{j-1} - (\lambda_j + c_j) \geq 0$。

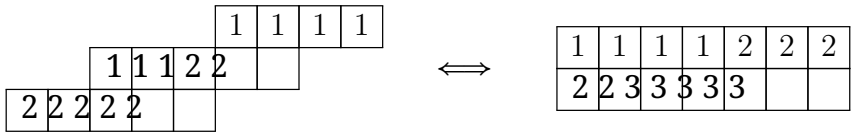
若 $j-1 \notin \text{Int}(T)$，则 ν/λ 中第 $(j-1)$ 行的最后 $\sum_{t<j-1} c_t$ 个方格与 ν/λ 中第 j 行的最后 $\sum_{t<j-1} c_t$ 个方格都填有相同的整数。为了使 $c(\lambda, T) = 1 > 0$，第 $(j-1)$ 行与第 j 行的最后 $\sum_{t<j-1} c_t$ 个方格不能重叠。由此可得 $(\lambda_{j-1} + c_{j-1}) - (\lambda_j + c_j) \geq \sum_{t<j-1} c_t \geq c_i$。□

设 T 是形状为 μ、有 m 列和 k 行的第三类矩形唯一杨表。对于任意整数 z，令 x_z 表示在 T 中缺少整数 z 的列数，其中 T 中共有 $k+1$ 个不同的整数。假设相应的 Littlewood-Richardson 系数 $c(\lambda, T) = 1$。类似地，我们有以下引理。

引理 4.2. 在上述假设下，若 $j-1$ 和 j 均属于 T，则

$$\lambda_{j-1} - \lambda_j \geq x_{j-1}.$$

下面的例子说明了这个引理。



一个包含 $x_1 = 3$、$x_2 = 2$、$x_3 = 2$ 和 $\lambda_1 - \lambda_2 = 3 \geq x_1$、$\lambda_2 - \lambda_3 = 2 \geq x_2$的例子。

证明。 ν/λ 的第（$j-1$）行中小于 $j-1$ 的整数个数等于

$$\sum_{t=1}^{j-2} m - \sum_{t=1}^{j-2} (m - x_t) = \sum_{t=1}^{j-2} x_t.$$

注意到 $\sum_{t=1}^{j-2} x_t < m - x_{j-1}$，我们得出第（$j-1$）行的最后 $m - \sum_{t=1}^{j-1} x_t$ 个方格由整数 $j-1$填充。

将 $j-1$ 替换为 j 后，我们知道，在 ν/λ 的第 j 行中，小于 j 的整数个数等于 $\sum_{t=1}^{j-1} x_t$，而最后 $m - \sum_{t=1}^{j} x_t$ 个方格由 j 填充。由于 $c(\lambda, T) = 1 > 0$，第 $(j-1)$ 行最后的 $m - \sum_{t=1}^{j-1} x_t$ 个方格与第 j 行不应有重叠。

由此可得

$$\sum_{t=1}^{j-1} x_t - (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \le \sum_{t=1}^{j-2} x_t.$$

因此， $\lambda_{j-1} - \lambda_j \ge x_{j-1}$. □

注：事实上，我们已经证明，在引理 *4.1* 或引理 *4.2* 的任一假设下， ν/λ 的每一行至多填入两个连续整数。

命题 *1.5* 的证明。 由于 $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$，只需证明 (4.1) 中形如$U/L$（分别为 L/U）的每个分数都会使 λ和 μ（分别为 ν）中的一个钩从 L翻转为 U（分别从 U 翻转为 L）。

首先，我们研究 μ 为矩形、具有 m 列和 k 行的情形。

设 T是 μ 上的一个杨表，其形状和权唯一。注意，根据 ψ_T的定义（q,t）、断言 3.5 和命题 1.6，我们可以找到一个杨表 H，其在$1 < 2 < \cdots < u$, $u \le m$中具有连续条目，且只有一行和 m列，使得 $\psi_T(q,t) = \psi_H(q,t)$。

令 n_i 表示 H 中小于或等于 i 的整数个数。根据 $\psi_H(q,\ t)$ 的定义，我们写作

$$\begin{aligned}\psi_T(q,t) = \psi_H(q,t) &= \prod_{i=2}^{u}\left(\prod_{j=0}^{n_{i-1}-1}\frac{L(j,0)}{U(j,0)}\cdot\prod_{j=n_i-n_{i-1}}^{n_i-1}\frac{U(j,0)}{L(j,0)}\right)\\ &= \left(\prod_{j=0}^{n_1-1}\frac{L(j,0)}{U(j,0)}\right)\cdot\left(\prod_{i=2}^{u-1}\prod_{j=0}^{n_i-n_{i-1}-1}\frac{L(j,0)}{U(j,0)}\right)\cdot\left(\prod_{j=n_u-n_{u-1}}^{n_u-1}\frac{U(j,0)}{L(j,0)}\right).\end{aligned} \tag{4.2}$$

注意， $n_1 + \sum_{i=2}^{u-1}(n_i - n_{i-1}) = n_{u-1} \le m.$这表明，应翻转 μ 最后一行中臂长等于 $n_u - n_{u-1}$，$n_u - n_{u-1} + 1$， ⋯， $n_u - 1$ 的方格，并翻转 ν 中一些腿长为零且对应臂长从零开始递增的方格。

我们还有

$$\begin{aligned}&\prod_{(i,j,w)\ -\text{admissible}}\left(\frac{X_j - q^{-a(i,j,w)+b(i,j,w)-1}tX_i}{X_j - q^{-a(i,j,w)+b(i,j,w)}X_i}\cdot\frac{X_j - q^{-a(i,j,w)}t^{-1}X_i}{X_j - q^{-a(i,j,w)-1}X_i}\right)\\ =&\prod_{(i,j,w)\ -\text{admissible}}\left(\frac{L(\lambda_i - \lambda_j - a^w_{i,j} + b^w_{i,j} - 1, j-i)}{U(\lambda_i - \lambda_j - a^w_{i,j} + b^w_{i,j} - 1, j-i)}\cdot\frac{U(\lambda_i - \lambda_j - a^w_{i,j} - 1, j-i-1)}{L(\lambda_i - \lambda_j - a^w_{i,j} - 1, j-i-1)}\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

若一对 (i,j) 出现在一个可容许三元组中，则根据命题 1.6，对于所有包含 (i,j) 的可容许三元组，相应的 $b^w_{i,j}$ 都相同。将包含 (i,j) 的可容许三元组个数记为 $N_{i,j}$。注意， $a^w_{i,j}$ 连续取值 0、1、...、 $N_{i,j}-1$.。表达式 4.3 括号中的第一个因子表明，应翻转 $N_{i,j}$ 个连续方格：$(i, \nu_j - N_{i,j}+1)$、$(i,\nu_j - N_{i,j}+2)$ ⋯、(i,ν_j)，它们位于 ν 的第 i 行。同时，第二个因子表明，应翻转 $N_{i,j}$ 个连续方格：(i,λ_j+1)、(i,λ_j+2) ⋯、$(i,\lambda_j+N_{i,j})$，它们位于 λ 的第 i 行。特别地，我们注意到，第一个因子中出现的腿长 $(j-i)$ 从不等于零。这意味着，由 $\psi_T(q,t)$ 中的因子引起的 ν 中的翻转，不会与 4.3 中第一个因子引起的翻转冲突。

事实上，根据引理 4.1 和引理 4.2，很容易看出，当 T 属于第二类时，我们必定会翻转 c_r；（相应地，当 T 属于第三类时，我们必定会翻转 x_{r+1}。）这些方格位于 ν 的第r行（或者，如果存在重叠，则位于紧接 r行下方的各行），其中 c_r， x_r的定义如下。具体说明如下：

如果 T 属于第二类，且各行彼此相距较远，那么显然结论成立。否则，若 $0 < c_r$, $c_{r+1} < m$，则由引理 4.1 的第二个不等式可知，有 c_r 个腿长为零的方格。接下来只需检查 $c_{r+1} = m$ 而 $0 < c_r < m$ 的情形。由于 $r+1$ 不会在 $\psi_T(q,\ t)$中贡献因子，我们可以自由翻转 r行下方含有 m个附加项的各行中的方格，直到遇到 r行下方第一个附加项少于 m 个的行。将这一行记为第 f行。引理 4.1 的第一个不等式告诉我们，若令 i 为 r，则 $(\lambda_{f-1}+m) - (\lambda_f + c_j) \geq c_r$。因此，我们可以翻转 r行下方那些含有 m个附加项的各行右下角的方格。

若 T 属于第三类，并且每一行彼此相距较远，那么我们就完成了。否则，由引理 4.2 可知，对于 $r,\ r+1 \in T$,

$$(\lambda_r + m - x_r) - (\lambda_{r+1} + m - x_{r+1}) \geq x_{r+1}$$

w这使我们能够翻转 ν 的第 r 行中腿长为零的 x_{r+1} 个方格 .

若 $r+1 \notin T$，且第 f 行是第 r 行以下第一个至少有一个附加项且少于m 个附加项的行（因为如果某个整数贯穿所有列出现，那么它就不会在 $\psi_T(q,\ t)$ 中贡献任何因子），那么由于 $x_f < m - x_r$，我们能够翻转 ν 的第 r 行中腿长为零的 x_f 个方格。

因此，从现在起，我们可以尽量少讨论 $\psi_T(q,t)$.

现在，我们可以根据上述思路推导所有细节。只需证明，在 4.2 和 4.3 中，只有那些对应于λ,μ,ν 中实际存在的臂长与腿长组合的分数会保留下来。我们来研究三种矩形杨表。

•T 属于第一类。设 T 的形状为 μ，有 m 列。设 i 是一个从未在 T中出现过的整数。那么，$\{(i,j,w) : j \in T, j > i, w \in [m]\}$中的元素都是第一项为 i的可容许三元组。

由于 $\psi_T(q,t) = 1$，我们不会翻转 μ中的任何方格。

对于 λ中的方格，我们可以自然地将 4.3 中形如 U/L 的因子视为从下往上翻转方格的翻转器。若所需的臂长与腿长组合不存在于 λ中，则当 λ 中不存在具有相应臂长与腿长组合的方格时，我们称 4.3 中的分数为虚构分数。腿长为 $j-i-1$ 的分数为虚构分数的一个必要条件是，第 $(j-1)$ 行和第 j 行都存在附加项。我们可以列出 λ 的所有虚构翻转器:

$$\left\{ \frac{U(a, j-i-1)}{L(a, j-i-1)} : \lambda_i - \lambda_j - m \leq a \leq \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 \right\}.$$

请注意，如果存在一个属于 λ 的虚拟翻转器，其对应的可容许三元组以前两个条目 $(i,\ j)$ 开头，那么 $j-1$ 也必须属于 T。

然而，以下腿长为 $j-1-i$ 的因子已在 4.3 中出现

$$\left\{ \frac{L(a, j-1-i)}{U(a, j-1-i)} : \lambda_i - \lambda_{j-1} - m \leq a \leq \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 \right\}.$$

由于

$$\lambda_i - \lambda_{j-1} - m \leq \lambda_i - \lambda_j - m \qquad \text{and} \qquad \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 = \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1,$$

我们知道，在 4.3 的约化形式中，不存在形式为 U/L 的虚拟翻转器。

对于 ν 中的方格，为了证明 L/U 的约化形式中不存在虚拟翻转器，我们注意到可能的虚拟翻转器为

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_j-m\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-m\le a\le \lambda_i-\lambda_j-1\right\}.$$

由于

$$\lambda_i-\lambda_j-m=\lambda_i-\lambda_j-m \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\le\lambda_i-\lambda_j-1,$$

我们知道，在 4.3 的约化形式中，不存在形如 L/U 的虚拟翻转器。因此，对于作为第一类矩形杨表的 μ，我们证明了这一断言。

•T 属于第二类。假设 T 位于形状为 μ、有 m 列的杨表上。设 c_z 为 z 在 T 中出现的次数。

根据表达式 4.2 和上述讨论，我们翻转 μ 和 ν 中对应的方格，无需进一步论证。

对于一对（i, j），它曾作为 T 的一个可容许三元组的前两个元素出现。根据 $c_j=m$ 或 $0<c_j<m$； $c_{j-1}=m$ 或 $0<c_{j-1}<m$； $c_i=0$ 或$0<c_i<m$，我们讨论八种情形。

（I）如果 $c_i=0$，所有虚拟的 U/L 翻转器都是

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-(\lambda_j+c_j)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_{j-1}-c_{j-1}\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

由于 $\lambda_j+c_j\le\lambda_{j-1}+c_{j-1}$，我们有

$$\lambda_i-\lambda_{j-1}-c_{j-1}\le\lambda_i-(\lambda_j+c_j) \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1=\lambda_i-\lambda_{j-1}-1,$$

并且我们知道，在 4.3 的约化形式中，不存在形式为 U/L 的虚拟翻转器。同时，所有虚拟的 L/U 翻转器都是

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-(\lambda_j+c_j)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-c_j\le a\le \lambda_i-\lambda_j-1\right\}.$$

由于

$$\lambda_i-\lambda_j-c_j=\lambda_i-\lambda_j-c_j \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\le\lambda_i-\lambda_j-1.$$

我们知道，4.3 的约化形式中没有虚拟翻转器。(II) 如果 $0<c_i<m$, $0<c_{j-1}<m$， $0<c_j<m$，所有虚拟 U/L 翻转器都

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-c_j\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，4.3 中出现了以下因子

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i - \lambda_{j-1} - c_{j-1} + c_i \le a \le \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1\right\}.$$

由引理 4.1，我们知道

$$\lambda_i - \lambda_{j-1} - c_{j-1} + c_i \le \lambda_i - \lambda_j - c_j \qquad \text{and} \qquad \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 \le \lambda_i - \lambda_{j-1} + c_{j-1} - 1.$$

我们知道，不存在形式为 U/L 的虚拟翻转器。

与此同时，虚拟的 L/U 翻转子为

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i - \lambda_j - c_j + c_i \le a \le \lambda_i + c_i - \lambda_{j-1} - 1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i - \lambda_j - c_j \le a \le \lambda_i - \lambda_j - 1\right\}.$$

根据引理 4.1，我们知道

$$\lambda_i - \lambda_j - c_j \le \lambda_i - \lambda_j - c_j + c_i \qquad \text{and} \qquad \lambda_i + c_i - \lambda_{j-1} - 1 \le \lambda_i - \lambda_j - 1.$$

因此，4.3 的约化形式中没有虚拟翻转器。

(III) 若 $0 < c_i < m$, $0 < c_{j-1} < m$，$c_j = m$，则所有虚拟 U/L 翻转子均为

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i - \lambda_j - (m - c_i) \le a \le \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i - \lambda_{j-1} - c_{j-1} + c_i \le a \le \lambda_i - \lambda_{j-1} + c_i - 1\right\}.$$

由于 $\lambda_{j-1} + c_{j-1} \ge \lambda_j + m$，我们有

$$\lambda_i - \lambda_{j-1} - c_{j-1} + c_i \le \lambda_i - \lambda_j - (m - c_i) \qquad \text{and} \qquad \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 \le \lambda_i - \lambda_{j-1} + c_i - 1.$$

我们知道，不存在形式为 U/L 的虚拟翻转器。

与此同时，虚拟的 L/U 翻转子为

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i + c_i - \lambda_j - m \le a \le \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i - \lambda_j - (m - c_i) \le a \le \lambda_i - \lambda_j - 1\right\}.$$

由于

$$\lambda_i + c_i - \lambda_j - m = \lambda_i - \lambda_j - (m - c_i) \qquad \text{and} \qquad \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1 \le \lambda_i - \lambda_j - 1,$$

我们知道，4.3 的约化形式中不存在虚拟翻转器。(IV) 如果 $0 < c_i < m$, $c_{j-1} = m$，所有虚拟 U/L 翻转器都是

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i - \lambda_j - c_j \le a \le \lambda_i - \lambda_{j-1} - 1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_{j-1}-(m-c_i)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

根据引理 4.1，我们知道

$$\lambda_i-\lambda_{j-1}-(m-c_i)\le \lambda_i-\lambda_j-c_j \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1=\lambda_i-\lambda_{j-1}-1.$$

我们知道不存在形式为 U/L 的虚拟翻转器。

与此同时，虚拟 L/U 翻转子为

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i+c_i-\lambda_j-c_j\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-c_j\le a\le \lambda_i-\lambda_j-1\right\}.$$

因为

$$\lambda_i-\lambda_j-c_j\le \lambda_i+c_i-\lambda_j-c_j \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\le \lambda_i-\lambda_j-1,$$

我们知道，4.3 的约化形式中不存在虚拟翻转器。

•T 属于第三类。设 T 位于形状 μ 上，且有 m 列。设 x_z 为在 T的全部 $k+1$ 个不同整数中， T中不包含整数 z的列数。对任意可容许三元组，记作 $(i,\ j,\ w)$。我们根据 i 是否曾出现在 T中，讨论两种情形。(I) i 曾出现在 T中。我们发现，所有虚拟的 U/L 翻转器都是

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-x_i\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_{j-1}-x_i+x_{j-1}\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}+x_{j-1}-1\right\}.$$

由引理 4.2 可知

$$\lambda_i-\lambda_{j-1}-x_i+x_{j-1}\le \lambda_i-\lambda_j-x_i \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\le \lambda_i-\lambda_{j-1}+x_{j-1}-1.$$

并且我们知道，不存在形如 U/L的虚拟翻转器。

与此同时，虚拟的 L/U 翻转器是

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_j-x_i+x_{j-1}\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}+x_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-x_i\le a\le \lambda_i-\lambda_j-1\right\}.$$

由引理 4.2 可知

$$\lambda_i-\lambda_j-x_i\le \lambda_i-\lambda_j-x_i+x_{j-1} \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}+x_{j-1}-1\le \lambda_i-\lambda_j-1$$

因此，4.3 的约化形式中没有虚拟翻转器。

(II) i从未出现在 T中。我们发现，所有虚拟的 U/L 翻转子都是

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-(m-x_i)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，以下因子出现在 4.3 中

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_{j-1}-(m-x_i)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

由此可得

$$\lambda_i-\lambda_{j-1}-(m-x_i)\le \lambda_i-\lambda_j-(m-x_i) \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1=\lambda_i-\lambda_{j-1}-1.$$

我们知道，4.3 的约化形式中没有 U/L 翻转子。

与此同时，虚构的 L/U 翻转子为

$$\left\{\frac{L(a,j-1-i)}{U(a,j-1-i)} : \lambda_i-\lambda_j-(m-x_i)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

然而，4.3 中有以下因子

$$\left\{\frac{U(a,j-i-1)}{L(a,j-i-1)} : \lambda_i-\lambda_j-(m-x_i)\le a\le \lambda_i-\lambda_{j-1}-1\right\}.$$

So,

$$\lambda_i-\lambda_j-(m-x_i)=\lambda_i-\lambda_j-(m-x_i) \qquad \text{and} \qquad \lambda_i-\lambda_{j-1}-1=\lambda_i-\lambda_{j-1}-1.$$

由此可知，4.3 的约化形式中不存在虚拟翻转器。

N现在我们研究一般情形，即 T 不一定是矩形。

为了证明命题 1.5 成立，我们对 μ 中垂直块的数量使用归纳法。

由于我们已经处理了 μ 只有一个块的情形，假设我们已证明对所有垂直块数量少于 d 的 μ，命题 1.5 都成立，那么只需证明对有 d 个块的 μ，命题 1.5 也成立。将 μ 中最右边的块记为 μ_d，并将 μ_d 在 μ 中的集合论补集记为 μ_d^-。将形状为 μ（分别为 μ_d、μ_d^-）的对应唯一杨表记为T（μ）（分别为 T（μ_d）、T（μ_d^-））。将对应于 T（μ_d^-）的较大分拆记为 ν_d^-。归纳假设告诉我们

$$\left(\prod_{s\in\lambda}L(a(s),l(s))\right)\cdot\left(\prod_{s\in\mu_d^-}L(a(s),l(s))\right)\cdot\left(\prod_{s\in\nu_d^-}U(a(s),l(s))\right)\cdot c^{\nu_d^-}_{\lambda\mu_d^-}(q,t) \tag{4.4}$$

是一个关于 L,U 的多项式，并且形如 U 的因子个数等于形如 L 的因子个数，而 4.4 中最后一个因子则并入前三个因子，成为一串由其臂长和腿长刻画的翻转器。比较 4.4 和 1.5 以及定理 1.4。由于我们已在定理 1.4 一般情形的证明中指出，只要 T 是其形状和权唯一的，$\psi_T(q,t)$ 关于矩形块就是可乘的，因此我们只需设法将 4.3 中剩余的因子在 λ 和 ν 中实现为翻转器，并确保它们不会与现有翻转器冲突，最后将现有翻转器从 ν_d^- 移至 ν。

为了解决这一问题，我们注意到，对于 $T(\mu_d)$ 中的一个可容许三元组 (i,j,w)，根据 i 是否属于 $T(\mu_d)$，存在两种情形。

若 $i\in T(\mu_d)$，则 i,j会出现在 $T(\mu_d^-)$ 的每一列中，这意味着 i和 j不能作为 $T(\mu_d^-)$ 中任何可容许项的首项，因此新的翻转子不会与

现有翻转子冲突。此外， $a(i,j,w)^{T(\mu_d)}$ 和 $b(i,j,w)^{T(\mu_d)}$ 的取值分别与其对应项 $a(i,j,w)^{T(\mu)}$ 和 $b(i,j,w)^{T(\mu)}$ 相同。因此，我们可以像处理上文讨论过的矩形 μ 那样，翻转 λ,ν 中的钩子，并毫无困难地迁移现有钩子。

若 $i \notin T(\mu_d)$，则 ν_d^- 的第 i 行与 ν 的第 i 行长度相同。因此，迁移 ν_d^- 第 i 行中现有的钩子并不困难。注意， $b(i,j,w)^{T(\mu_d)} = b(i,j,w)^{T(\mu)}$。此外，由于最小的 $a(i,j,w)^T(\mu)$ 等于最大的 $a(i,j,w)^T(\mu_d^-)$ 加一，我们知道，只需将 ν 第 i 行中对应的钩子，以及 λ 中的对应钩子，从它们当前所在位置不断向右翻转即可。至此，证明完成。

□

References

[B00] A. S. Buch, 《饱和猜想》（据 A. Knutson 和 T. Tao）。附录由 William Fulton 撰写，Enseign. Math. (2) 46 (2000), no. 1-2, 43–60.[BZ90] A. D. Berenstein, A. V. Zelevinsky, 《权的重数何时等于 1？》，（俄文）Funk- tsional. Anal. i Prilozhen. 24 (1990), no. 4, 1–13, 96；英译本刊于 Funct. Anal. Appl. 24 (1990), no. 4, 259–269 (1991).[BZ92] A. D. Berenstein, A. V. Zelevinsky, 《 $sl(r+1)$ 的三重重数与伴随表示的外代数谱》，J. Algebraic Combin. 1 (1992), no. 1, 7–22.[F97] W. Fulton, 《杨表》，伦敦数学会学生教材，第 35 卷，剑桥大学出版社，1997.[KT99] A. Knutson, T. Tao, 《 $GL_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂巢模型。I. 饱和猜想的证明》，J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), no. 4, 1055–1090.[KTW04] A. Knutson, T. Tao, C. Woodward, 《 $GL_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂巢模型。II. 拼图确定 Littlewood-Richardson 锥的面》，J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 1, 19–48.[L61] D. E. Littlewood, 《关于某些对称函数》，Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 485–498.[LR34] D. E. Littlewood, A. R. Richardson, 《群特征标与代数》，Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, The Royal Society, 233 (721–730) (1934), 99–141.[Mac99] I. G. Macdonald, 《对称函数与霍尔多项式》，第二版。牛津大学出版社，1999.[N16] Y. Naqvi, 《Jack 多项式和麦克唐纳多项式的某些 Littlewood-Richardson 系数的乘积公式》，J. Algebraic Combin. 44 (2016), no. 3, 603–643.[S11] S. Sahi, 《插值多项式和麦克唐纳多项式的二项式系数与 Littlewood-Richardson 系数》，《表示论与数学物理》，359–369，Contemp. Math., 557, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.[St89] R. Stanley, 《Jack 对称函数的一些组合性质》，Adv. Math. 77 (1989), no. 1, 76–115.[Ste02] J. R. Stembridge, 《Littlewood-Richardson 法则的简明证明》，Electron. J. Combin. 9 (2002), no. 1, Note 5, 4 pp.[V06] R. Vakil, 《几何 Littlewood-Richardson 法则》。附录 A 与 A. Knutson 合著，Ann. of Math. (2) 164 (2006), no. 2, 371–421.[Y12] M. Yip, 《麦克唐纳多项式的 Littlewood-Richardson 法则》，Math. Z. 272 (2012), no. 3-4, 1259–1290.

(Konstantin Matveev) Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ,USA. E-mail: kosmatveev@gmail.com

(Yuchen Wei) Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA. E-mail: yuccwei@gmail.com