arXiv:2301.06513v1 [math.DG] 16 Jan 2023

次黎曼与 RCD 情形下的渐近平均值调和函数

TOMASZ ADAMOWICZ[1], ANTONI KIJOWSKI，及 ELEFTERIOS SOULTANIS[2]

摘要。我们研究次黎曼与 RCD 情形下弱渐近平均值调和与强渐近平均值调和（AMV-调和）函数。我们证明，在具有消失度量测度边界的非坍缩 RCD 空间中，Cheeger 调和函数是弱 AMV 调和的；而在 Carnot 群中，弱 AMV 调和性等价地刻画了次拉普拉斯意义下的调和性。

对于二阶齐性 Carnot 群，我们证明了一个 Blaschke–Privaloff–Zarembatype 定理。我们还讨论了黎曼流形和亚历山德罗夫曲面情形下的类似结果。

关键词：渐近平均值性质、Blaschke-Privaloff-Zaremba定理、Carnot群、调和函数、狄利克雷型、Korevaar–Schoen 能量、平均值性质、度量测度边界、Sobolev空间、合成曲率下界。

数学主题分类（*2010*）：主要分类：31E05；次要分类：53C23、35R03。

1. 引言

调和函数理论中的一个关键问题，是寻找调和性的各种刻画。欧氏情形下的平均值性质就是一个特别有力的例子。遗憾的是，离开欧几里得空间后，调和函数很少满足平均值性质。例如，在黎曼流形情形下，已知该性质仅在平坦或秩一对称的流形上，以及维数为 2–5 的情形下成立，参见 [1] 中关于 Lichnerowicz 猜想的相关讨论及其中的参考文献。然而，事实证明，欧氏情形之外一个恰当的变体是渐近平均值（*amv*）性质

$$\Delta_r u \xrightarrow{r\to 0} 0, \quad \Delta_r u(x) := \frac{u_{B_r(x)} - u(x)}{r^2}. \tag{1}$$

在黎曼流形上，对于调和函数 u，式 (1) 中的收敛是局部一致的。然而，对于任意度量测度空间，$X = (X, d, \mu)$ 上的局部可积函数，式 (1) 中的 r-拉普拉斯算子 都可以定义，其中 $u_{B_r(x)}$ 表示 u 在以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的球 $B_r(x)$ 上的平均值。因此，amv 性质可以在非常一般的框架下表述（注意，mv 性质也可以用消失的 r-拉普拉斯算子以同样一般的方式表述，见定义 1.1 及 [1, 27]）。简要地说，r-拉普拉斯算子出现在几何群论中用图 [18], 逼近黎曼流形的逼近问题 [34], ，也与有界变差函数 [22, 定理 1]有关。此外，它还与 p-调和型方程和随机博弈 [40, 41, 9], 有关，也出现在 Carnot 群的研究中；例如，r-拉普拉斯算子及其与次椭圆调和函数的关系已在 [3, 25, 26]中得到研究。

关于一般度量测度空间上的 amv 函数的最新研究，读者可参阅 [42,43] ，尤其是 [2] ，其中我们聚焦于倍增度量测度空间中具有 amv 性质的函数，并证明了它们的局部 Hölder 正则性以及其放大极限的 mv 性质。至于

[1]T. Adamowicz 获得波兰国家科学中心（NCN）资助，项目编号为 UMO-2017/25/B/ST1/01955。[2]E. Soultanis 获得瑞士国家科学基金会资助，项目编号为 182423。

一个重要的特殊情形，在 [2] 中，我们考察了带权欧氏情形，并找到了 amv-调和函数所满足的椭圆型偏微分方程。

1.1. **主要结果**。 本文继续对 [2] 中相关问题的研究，并通过考察次黎曼和 RCD 情形中具有 amv 性质的函数来补充其中的结果。与 [2] 一样，我们考虑两种渐近平均值调和（AMV-调和）函数的概念，它们源于对式 (1) 中极限的不同理解。更确切地说，我们定义如下的强 和弱 AMV 调和性。

定义 1.1 （参见 [2] 中的定义 1.1）。 设 $X = (X, d, \mu)$ 为一个度量测度空间。

(1) 若函数 $u \in L^1_{loc}(X)$ 满足

$$\lim_{r\to 0} \|\Delta_r u\|_{L^\infty(K)} = 0$$

对任意紧集 $K \subset X$;

(2) 若度量测度空间 X 上的函数 $u \in L^2_{loc}(X)$ 满足

$$\lim_{r\to 0} \int_X \varphi \Delta_r u \mathrm{d}\mu = 0$$

对每个紧支撑的 Lipschitz函数 φ。

关于 RCD 空间的理论（包括具有一致 Ricci下界和维数上界的黎曼流形的 GH极限（即 *Ricci*极限空间），以及配备适当维数的 Hausdorff测度的 Alexandrov空间），我们首先请参阅第3节第 3.3 小节及其中的参考文献。

关于 RCD(K, N) 空间 $X = (X, d, \mu)$ 的边界 ∂X，请参阅定义 3.2；并回忆一下， X若满足 $\mu = \mathcal{H}^N$（即 N-Hausdorff测度），则称为非坍缩 。下文中，调和 函数指 Cheeger 能量的连续局部极小化者，参见定义 2.1。

定理 1.1。 设$\Omega \subset X$ 是非坍缩 $RCD(K, N)$空间 $X = (X, d, \mathcal{H}^N)$ 中的一个区域，并假设<*style*>$\Omega \cap \partial X = \varnothing$。那么，Ω 中的（*Cheeger*）调和函数是Ω中的弱 *AMV* 调和函数。

特别地，定理 1.1 意味着，无边界亚历山德罗夫空间上的调和函数是弱 AMV 调和的。对于局部 Lipschitz 连续函数，定理 1.1 中的逆命题也成立，见注 3.3。

尚不清楚在定理 1.1 的情形下，调和函数是否也是强 AMV-调和的（相关的较弱结论见 [44, 推论 3.5] ）。要得到这样的结果，需要对以相邻点为中心的球的 $\mathcal{H}^N$- 测度变化率有非常好的控制：权重的存在（例如弱 非坍缩 RCD 空间的情形，见 [24]）排除了调和函数甚至具有弱 amv 性质的可能性，见 [2, 第 6] 节。

在 Carnot 群中，齐次性性质发挥作用，确保了强 amv 性质所需的良好控制。通过二阶泰勒展开，我们的下一个定理证明了配备齐次伪范数且单位球足够正则的 Carnot 群中，调和函数与强 AMV 调和函数等价。

为陈述该定理，回顾一下，一个 s 步 Carnot 群 $\mathbb{G}$ （其李代数为 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ ）可与 $\mathbb{R}^m$ 等同，其中 $m = v_1 + \cdots + v_s$ 且 $v_i := \dim V_i$，对于 $i = 1$，....., s（关于 Carnot 群的更多细节，参见第 3.2 节）。我们用 $z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(s)})$ 表示 $\mathbb{G}$ 中的坐标，其中$z^{(i)} \in \mathbb{R}^{v_i}$。我们考虑 $\mathbb{G}$ 上的一个伪范数 ρ，使得

$$\rho(z) := F(\|z^{(1)}\|, z'), \quad z = (z^{(1)}, z') \in \mathbb{G}, \tag{2}$$

对于某个 $F\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-v_1} \to \mathbb{R}$ 在原点之外是 C^1 且具有 $\partial_1 F > 0$ 。

定理 1.2。 设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 是齐性维数为 Q 、配备满足 (2) 的伪范数 ρ 的 *Carnot* 群 $\mathbb{G}$ 中的一个开区域。如果 Ω 表示度量测度空间 $(\Omega, \rho, \mathcal{H}^Q)$，其中 $\mathcal{H}^Q$ 是 $\mathbb{G}$上的 *Haar* 测度，那么对于函数 $u \in HW^1_{,loc}{}^2(\Omega)$，以下条件等价。

(i) u 是强 *AMV* 调和的；

(ii) u 是弱 *AMV* 调和的；(iii) u 在Ω中满足 $\Delta_{\mathbb{G}} u = 0$ 。

在上述断言中， $HW^1_{,loc}{}^2(\Omega)$ 表示水平 Sobolev 空间， $\Delta_{\mathbb{G}}$ 是次椭圆拉普拉斯算子 (13)。定理 1.2 刻画了一大类伪范数的 AMV 调和性（两种意义下），具体而言，是满足 (2) 的伪范数，尤其包括 Koranyi 规范 (12)。参见 [26] ，其中给出了关于 Carnot 群上具有 Koranyi 规范的 p-调和函数的类似结果。我们注意到，次拉普拉斯方程的解已知满足某些加权平均值性质，见 [11, 第 5 章。5] 和 [3]。

本小节最后，我们将讨论范围限定在步数为 $s = 2$ 的 Carnot 群上，在此情况下我们能够得到一个 Blaschke–Privaloff–Zaremba (BPZ) 型定理。这类结果表明，在 r-拉普拉斯算子逐点为零的假设下，正则性可从连续提升至光滑，如 $r \to 0$ 所示。下述定理考虑 Carnot 群上的 Koranyi 规范 (12)。

定理1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 是步数为2 的 *Carnot* 群 $\mathbb{G}$ 中的一个区域，配备规范距离 $d_{\mathbb{G}}$，并设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的连续函数

$$\lim_{r \to 0^+} \Delta_r f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

那么 f 是一个次椭圆调和函数，即对所有 $x \in \Omega$ ，都有

$$\lim_{r \to 0^+} \Delta_r f(x) = C \Delta_{\mathbb{G}} f(x) = 0,$$

其中 C 取决于 v_1 （水平层 V_1的维数）以及 $\mathbb{G}$的几何。

黎曼流形上的类似结果已广为人知（为方便读者，证明略述见命题4.2）。我们还得到了适用于亚历山德罗夫曲面的 BPZ 型结果（见命题4.4），以及适用于 Alexandrov空间的结果（见命题4.5）。总之，我们证明，连续性和强 AMV 调和性足以推出在某些奇异空间中相对于各种自然拉普拉斯算子的调和性。

1.2. **概述与策略**。 r-拉普拉斯算子 Δ_r 的一个缺点是它不具备自伴性：若不对底层空间的几何作进一步假设， $\Delta_r - \Delta_r^*$ 即r-拉普拉斯算子与其形式伴随算子之差（见第2.2节）不会以任何合理的意义趋于零。在 RCD 环境中，由于测度不具备平移不变性，我们工作的很大一部分都在于处理这一问题。我们通过引入度量测度空间 $X = (X, d, \mu)$ 中定义于局部可积函数 u 上的对称化 r-拉普拉斯算子来解决这一问题（详情见定义10）：

$$\widetilde{\Delta}_r u(x) := \frac{1}{2} \int_{B_r(x)} \left[\frac{1}{\mu(B_r(x))} + \frac{1}{\mu(B_r(y))} \right] \frac{u(y) - u(x)}{r^2} \mathrm{d}\mu(y), \quad x \in X. \tag{3}$$

在第3.1节中，我们研究对称化 r-拉普拉斯算子的基本性质，尤其是自伴性；正是这一性质使其成为在欧几里得背景之外研究的又一种拉普拉斯算子的可行候选。关键在于，对称化 r-拉普拉斯算子与（近似的）Korevaar–Schoen（KS）能量相联系，因此，如果 KS 能量在定义 2.2 的意义下是一个狄利克雷型，那么，对称化$\sim r$-拉普拉斯算子 $\Delta_r u$ 在适当的弱意义下收敛；当 $r \to 0$ 时，其极限为Korevaar–Schoen 拉普拉斯算子 $\Delta_{KS} u$的 u ，对于任意 $u \in D(\Delta_{KS})$，参见第 2.3 节和命题 3.2。由此可知，Korevaar–Schoen 能量的局部极小化子可刻画为这样一类函数：当 $r \to 0$ 时，其对称化 r-拉普拉斯算子在弱意义下为零。

RCD 空间和 Carnot 群都具有这样的性质：Korevaar–Schoen 能量是一个狄利克雷型。对于 RCD 空间，这由 [28] 得出（在非坍缩情形下，也可由 Sturm 的工作 [52, 53] 得出）；而对于 Carnot 群，则由 [54] 推出。关于~精确表述，参见命题3.6和3.3。对于 Carnot 群（其中 $\Delta_r = \Delta_r$），这一观察导出了弱 AMV调和性与次椭圆调和性的等价性。我们指出，定理 1.2 中的新颖推论是：弱调和函数是次椭圆调和的；事实上，次椭圆调和函数的强 amv 性质可通过类似于 [26, 引理 4.1]中的直接计算得到。

~在 RCD 环境中，等式 $\Delta_r = \Delta_r$ 不再成立；而且在存在边界时，两个 r-拉普拉斯算子即使在渐近意义下也不一致（例如考察标准半平面即可看出这一点）。为绕开这个问题，我们采用 [32], 中引入的消失度量测度边界 这一概念；近期研究已在 [16] 中证明，该概念等价于[24]意义下无边界。在非坍缩 RCD 空间中，消失度量测度边界使我们能够在适当的弱意义下得到 $\Delta_r - \Delta_r$ 当 $r \to 0$ 时的渐近~消失，参见引理 3.8 和推论 3.9。由此即可证明定理 1.1。

定理1.3以及第4节中的 BPZ型定理，是通过修改 [49] 中的原始论证，使其适用于各种非光滑环境而得到的。关键工具是：对于奇异空间上的各种拉普拉斯算子概念，度量球边界上的连续数据所对应的狄利克雷问题的可解性，以及距离函数的拉普拉斯算子的下界。考察定理1.3的证明可知，对二阶的限制源于单位球 $B_{\mathbb{G}}$ 相对于 Koranyi规范的边界正则性问题：在二阶情形下， $B_{\mathbb{G}}$ 中连续边界数据对应的狄利克雷问题是否可解仍是一个开放问题。

致谢作者谨向 Ben Warhurst 致谢，感谢他就定理 1.2 进行的讨论。

2. 预备知识

2.1. 记号与约定。 本文中，度量测度空间 $X = (X, d, \mu)$ 是一个可分度量空间 (X, d)，并配备一个拉东测度 μ，该测度在球上有限且非平凡，即对于所有球 $B \subset X$，均有 $0 < \mu(B) < \infty$。

给定度量空间的一个子集 $F \subset X$ 以及 $r > 0$，记

$$N_r(F) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, F) < r\} \text{ and } \overline{N}_r(F) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, F) \leq r\}$$

F 的开 r-邻域与闭 r-邻域（注意，除非 X 是长度空间，否则 $\overline{N}_r(F)$ 未必是 $N_r(F)$ 的闭包）。对于 $x \in X$，我们分别用 $B_r(x) := N_r(\{x\})$ 和 $\overline{B}_r(x) := \overline{N}_r(\{x\})$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球与闭球。

度量空间之间映射 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 的 Lipschitz 常数为

$$\operatorname{LIP}(f) := \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(x))}{d_X(x, y)},$$

且逐点 Lipschitz 斜率为

$$\operatorname{Lip} f(x) := \limsup_{r \to 0} \sup_{0 < d(y,x) < r} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{r}, \quad x \in X.$$

如果 $x \in X$ 是一个孤立点，那么 $\operatorname{Lip} f(x) = 0$。

给定 $u \in L^1_{loc}(X)$ 以及一个 μ-可测集 $A \subset X$，且 $\mu(A) > 0$,

$$u_A = \fint_A u \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A u \mathrm{d}\mu$$

表示 u 在 A上的平均值。

2.2. **倍增测度与平均算子**。如果对于每个紧集 $K \subset X$，都存在 $r_K > 0$ 和一个常数 $C_K > 0$，使得可分度量空间 X 上的测度 μ 满足以下条件，则称其为局部倍增：

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq C_K \mu(B_r(x)) \tag{4}$$

对任意 $x \in K$ 和 $0 < r \leq r_K$。

设 (X, d, μ) 为一个度量测度空间，且 $r > 0$。给定一个局部可积函数 $u \in L^1_{loc}(X)$，记

$$A_r^\mu u(x) = A_r u(x) = \fint_{B_r(x)} u \mathrm{d}\mu, \quad x \in X,$$

u 的 r-平均函数。注意，$A_r u(x) = u_{B_r(x)}$。

我们将这两种记法交替使用，具体取决于我们是将平均值视为一个数，还是将其视为作用于函数空间上的算子。事实上，函数 $A_r u : X \to \mathbb{R}$ 是可测的，并且 A_r 定义了一个有界线性算子 $A_r : L^1(X) \to L^1(X)$，当且仅当 $a_r \in L^\infty(X)$，其中

$$a_r(x) = \int_{B_r(x)} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mu(B_r(y))}, \quad x \in X.$$

此外，在这种情况下，算子范数满足 $\|A_r\|_{L^1 \to L^1} = \|a_r\|_{L^\infty}$，参见 [4, 定理 3.3]。特别地，当 μ 是倍增测度时，这一结论成立。另一方面，根据勒贝格微分定理，以下结论成立

$$u(x) = \lim_{r \to 0} A_r u(x) \text{ for almost every } x \in X,$$

若 μ是无穷小倍增的，参见 [31, 注 3.429]。

若 X 作为度量空间是倍增的，则存在 $C > 0$，使得对于每个 $r > 0$和每个 $1 \leq p < \infty$都有 $\|A_r\|_{L^p \to L^p} \leq C$，参见 [4, 定理 35]。然而，$A_r$ 不是自伴算子；A_r 的形式伴随算子 A_r^* 为

$$(A_r^\mu)^* u(x) = A_r^* u(x) := \int_{B_r(x)} \frac{u(y)\mathrm{d}\mu(y)}{\mu(B_r(y))}, \quad x \in X,$$

对于 $u \in L^1_{loc}(X)$。事实上，利用富比尼定理直接计算可得

$$\int_X v A_r u \mathrm{d}\mu = \int_X u A_r^* v \mathrm{d}\mu, \quad u \in L^p(X),\ v \in L^q(X), \tag{5}$$

其中 $1/p + 1/q = 1$。

我们可以利用平均算子将 r-拉普拉斯算子表示为

$$\Delta_r u = \frac{A_r u - u}{r^2}, \quad u \in L^1_{loc}(X).$$

接下来，我们记

$$\Delta_r^* u := \frac{A_r^* u - u}{r^2}, \quad u \in L^1_{loc}(X), \tag{6}$$

r 拉普拉斯算子的形式伴随算子。注意，若 $A_r : L^p(X) \to L^p(X)$ 有界，则 $\Delta_r : L^p(X) \to L^p(X)$ 和 $\Delta_r^* : L^q(X) \to L^q(X)$ 均有界，其中 $1/p + 1/q = 1$。

注 2.1. 恒等式 (5) 与 (6) 推出如下关于 $u \in L^p(X)$ $v \in L^q(X)$ 的格林型公式，其中 $1/p + 1/q = 1$:

$$\int_X v \Delta_r u \mathrm{d}\mu = \int_X u \Delta_r^* v \mathrm{d}\mu.$$

$\Delta_r - \Delta_r^*$ 当 $r \to 0$ 时的渐近行为在第3节中发挥着重要作用。

注2.2。 虽然我们的 अधिकांश结果将针对度量测度空间表述，但也涵盖引言中开集 $\Omega \subset X$ 的情形。事实上，度量测度空间中的开子集 $\Omega \subset X$ 可以视为度量测度空间 $\Omega = (\Omega\ d|_\Omega, \mu|_\Omega)$。特别地，如果 X 是局部倍增的，那么 Ω也是局部倍增的。

2.3. **Cheeger 与 Korevaar–Schoen 能量及狄利克雷型**。 本节回顾度量测度空间中微积分的一些基本概念，这些概念是讨论 Cheeger 意义下的调和函数所需的，参见定理1.1和1.2。此外，我们还讨论 Korevar–Schoen 能量及其与狄利克雷型的关系。

度量测度空间微积分理论的奠基概念之一，是 p-弱上梯度和最小 p-弱上梯度，参见 [31, 第 5]章。与之相关的是区域 $\Omega \subset X$上的 Sobolev 空间的对应概念，即所谓的牛顿空间 $N^{1,\,p}(X)$以及局部牛顿空间 $N^{1,\,p}_{loc}(\Omega)$，关于这些空间及其更多性质的精确定义，参见 [31, 第 7] 章和 [10] 。

若 $X = \mathbb{R}^n$配备勒贝格测度和欧几里得距离，则 $N^{1,\,p}(\Omega)$（分别为 $N^{1,\,p}_{loc}(\Omega)$）与索伯列夫空间 $W^{1,\,p}(\Omega)$（分别为 $W^{1,\,p}_{loc}(\Omega)$一致，并且 $g_u = |\nabla u|$。

***Cheeger* 能量。**设 $X = (X, d, \mu)$ 为一个度量测度空间，且 $1 \leq p < \infty$。Cheeger [21]能量 $Ch_p : L^p(X) \to [0, \infty]$ 定义为斜率的 L^p-松弛。Shanmugalingam [51] 和 Ambrosio–Colombo—Di Marino [7] 证明，对于 $N^{1,\,p}$-函数，Cheeger 能量与最小 p- g_u 弱上梯度的 p-积分一致，即

$$Ch_p(u) = \frac{1}{p}\int_X g_u^p \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Cheeger 的定义 保证 Ch_p 关于 L^p-收敛是下半连续的 .

定义 2.1. 设 $\Omega \subset X$ 是度量测度空间中的一个区域。若连续函数 $u \in N^{1,\,2}_{loc}(\Omega)$ 对任意 $\varphi \in \mathrm{LIP}_c(\Omega)$ 都满足

$$Ch_2(u) \leq Ch_2(u + \varphi) \tag{8}$$

我们在定义中假设 Cheeger 调和函数是连续的。然而，在满足庞加莱不等式的道路连通倍增度量测度空间中，Cheeger调和函数的局部 Hölder 连续性（在更强的假设下为 Lipschitz 连续性）已得到证明，参见 [36, 定理 1.1]。

***Korevaar–Schoen* 能量。** 在 [35], 中，作者通过考察现称为*Korevaar–Schoen* 能量 的量，为度量测度空间 X 定义了一个 Sobolev 空间 $u \in L^2_{loc}(X)$:

$$E^2_{KS}(u) := \sup_{\varphi \in C_c(X), 0<\varphi\leq 1} \limsup_{r\to 0} \int_X \varphi(x) e^2_r(u) \mathrm{d}\mu, \tag{9}$$

其中，近似能量密度 $e^2_r(u)\mathrm{d}\mu$ 定义为

$$e^2_r(u)(x) = \frac{1}{2}\fint_{B_r(x)} \left|\frac{u(y) - u(x)}{r}\right|^2 \mathrm{d}\mu(y), \quad x \in X.$$

对于每个 $r > 0$，近似能量密度来自一个对称双线性形式 $e_r : L^2_{loc}(X) \times L^2_{loc}(X) \to L^1_{loc}(X)$, 其定义为

$$e_r(u, v)(x) = \frac{1}{2}\fint_{B_r(x)} \frac{u(y) - u(x)}{r}\frac{v(y) - v(x)}{r}\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in X,$$

其满足 $e_r(u, u) = e^2_r(u)$。此外，我们定义

$$E_r(u, v) := \int_X e_r(u, v)\mathrm{d}\mu.$$

Sobolev 空间 $KS^{1,2}(X)$ 由满足 $E_{KS}^2(u) < \infty$ 的函数 $u \in L^2(X)$ 构成，并赋予范数

$$\|u\|_{KS^{1,2}} = (\|u\|_{L^2}^2 + E_{KS}^2(u))^{1/2}$$

称为 *Korevaar–Schoen* 空间。若 X 是倍增度量测度空间，则连续嵌入 $M^{1,2}(X) \hookrightarrow KS^{1,2}(X) \hookrightarrow N^{1,2}(X)$ 成立。若 X 还完备且满足 2-庞加莱不等式，则这三个空间相等且范数等价，参见 [31, 定理 10.5。3]。

狄利克雷型。 我们沿用 [12, 第一部分] 的记号，并称定义在 $L^2(X)$上的狄利克雷型为下半连续二次泛函 $E\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$，其定义域 $\mathcal{F} \subset L^2(X)$ 是一个配备如下范数的希尔伯特空间：

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := (\|f\|_{L^2}^2 + E(f))^{1/2}, \quad f \in \mathcal{F},$$

满足

$$E(\min\{f,1\}) \le E(f), \quad f \in \mathcal{F}.$$

我们将与 E 相关联的双线性型记为 $\mathcal{E}\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$，并假设满足以下强局部性：若 $f, g \in \mathcal{F}$ 且 g 在 spt f 的某个邻域上为常数，则 $\mathcal{E}(f,g) = 0$.

型 $\mathcal{E}$ 具有一个生成元：自伴算子 $\Delta_{\mathcal{E}}$： $D(\Delta_{\mathcal{E}}) \to L^2(X)$，其区域为 $D(\Delta_{\mathcal{E}}) \subset \mathcal{F}$，并满足以下条件：

$$\int f \Delta_{\mathcal{E}} g \, \mathrm{d}\mu = -\mathcal{E}(f,g), \quad f \in \mathcal{F},\ g \in D(\Delta_{\mathcal{E}}).$$

我们称 $\Delta_{\mathcal{E}}$ 为与狄利克雷型相关联的拉普拉斯算子。此外，若 $\mathcal{E}$ 是正则的，则它具有场算子，即一个正、对称且连续的双线性算子 Γ： $\mathcal{F}\times\mathcal{F} \to L^1(X)$，满足

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_X \Gamma(f,g)\mathrm{d}\mu, \quad f,g \in \mathcal{F}, \text{ and}$$

$$\mathcal{E}(hf,g) + \mathcal{E}(f,hg) = \mathcal{E}(h,fg) + 2\int_X h\Gamma(f,g)\mathrm{d}\mu, \quad f,g,h \in \mathcal{F}\cap L^\infty(X).$$

我们可以将给定的狄利克雷型 E 在 $L^2(X)$ 上局部化到区域 $\Omega \subset X$。若存在一个序列 $(f_k) \subset \mathcal{F}$ 以及开集 $\Omega_k \subset \Omega$，使得 $\Omega_k \subset \mathrm{spt}(f_k)$、$\Omega = \bigcup_k \Omega_k$，且 $f_k = f$ 在 Ω_k上成立，则称 $f \in \mathcal{F}_{loc}(\Omega)$。由强局部性，我们可以定义场算子

$$\Gamma : \mathcal{F}_{loc}(\Omega)\times\mathcal{F}_{loc}(\Omega) \to L^1_{loc}(\Omega), \quad \Gamma(f,g) = \Gamma(f_k,g_k) \text{ on } \Omega_k,$$

其中 $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$，且 $f = f_k$ 和 $g = g_k$ 在 Ω_k上成立。相应地，我们可以对 $\Delta_{\mathcal{E}}$进行局部化，并用 $D(\Delta_{\mathcal{E}};\Omega)$ 表示局部化到 Ω 的 $\Delta_{\mathcal{E}}$ 的区域，参见 [12, 第 7] 节。

一般而言，Cheeger 能量和 Korevaar–Schoen 能量并不构成上述定义意义下的狄利克雷型。事实上，尽管 Cheeger 能量是下半连续的，但它未必是二次型。Korevaar–Schoen 能量一般既不是二次型，也不是下半连续的。

然而，在 RCD 空间和 Carnot 群中，Cheeger 能量是二次型，因此构成狄利克雷型。特别是在这些类别中，已知 Korevaar–Schoen 能量是 Cheeger 能量的常数倍，因此事后可知它定义了一个狄利克雷型，见 [28]。更精确的讨论请参见第3节。

具有 *Korevaar–Schoen* 狄利克雷形式的空间。Korevaar–Schoen 能量因其与对称化 r-拉普拉斯算子的密切联系，在本文中发挥着重要作用，见第3.1节。为了在第3节中统一处理弱amv-调和函数，我们对 Korevaar–Schoen 能量定义狄利克雷型的空间引入以下术语。

定义 2.2。设 $X=(X,d,\mu)$ 是一个局部紧度量测度空间。若 X 具有 Korevaar–Schoen 狄利克雷形式（简称 KS-狄利克雷型），则称之为具有 Korevaar–Schoen 狄利克雷形式；也就是说，若 E_{KS} 关于 L^2-收敛是下半连续的，并且对于所有 $u\in KS^{1,2}(X)$，存在一个可积函数 $e^2(u)$，满足

$$\lim_{r\to 0}\int_X \varphi e_r^2(u)\mathrm{d}\mu=\int_X \varphi e^2(u)\mathrm{d}\mu$$

对所有 $\varphi\in C_c(X)$。函数 $e^2(u)$ 称为 u 的能量密度。

根据前文的讨论（详见第3节），配备某些齐次范数的 RCD 空间和 Carnot 群具有 KS-狄利克雷型。Sturm [52, 53] 引入了 $MCP(K,N)$-空间这一类，其中包括 RCD 空间，并证明与 E_{KS}^2 密切相关的能量是 $MCP(K,N)$ 上的狄利克雷型。请注意，这里我们不考虑针对度量空间目标的映射，其 Korevaar–Schoen 能量极限的存在性和下半连续性。对于 RCD 和 MCP 空间，这一事实已为人所知；而对于 Carnot 群，据我们所知，这仍是一个开放问题。

如果 X 具有 KS-狄利克雷型，那么 E_{KS}^2 的区域是 $KS^{1,2}(X)$，而场算子由下式给出

$$e(u,v):=\frac{1}{4}[e^2(u+v)-e^2(u-v)]=\lim_{r\to 0}e_r(u,v),$$

其中，收敛是在测度的弱意义下进行的。我们用 $\mathcal{E}_{KS}$ 和 Δ_{KS} 表示与 E_{KS}^2 相关的双线性型及其生成元。

3. 对称化的 r-拉普拉斯算子与 AMV-调和函数

本节证明定理1.1和1.2。我们首先建立 Korevaar–Schoen 能量与对称化的 r-拉普拉斯算子之间的联系，从而确立这一普遍原理：局部极小化者对应于对称化的 r-拉普拉斯算子消失的函数，参见命题 3.2。

对于 Carnot 群，对称化的 r-拉普拉斯算子与 r-拉普拉斯算子一致。因此，一旦证明 Carnot 群具有 Korevaar–Schoen 狄利克雷形式（见命题 3.3），定理1.2便可直接由命题 3.2和二阶泰勒展开得出。

最后，我们考虑非坍缩RCD空间。在回顾其相关基本性质后，我们~~证明，度量测度边界为零意味着 Δ_r 和 Δ_r 渐近一致（引理 3.8）。由于根据 [28]，Korevaar–Schoen 能量是一个狄利克雷型，定理 1.1 得证。

3.1. 对称化 r-拉普拉斯算子与 Korevaar–Schoen 能量。在本小节中，$X=(X,d,\mu)$ 表示一个一般的度量测度空间。为定义对称化的 r-拉普拉斯算子，我们用 $k_r\colon X\times X\to\mathbb{R}$ 表示对称平均值核：

$$k_r(x,y)=\frac{1}{2}\chi_{[0,r]}(d(x,y))\left(\frac{1}{\mu(B_r(x))}+\frac{1}{\mu(B_r(y))}\right),\quad x,y\in X, r>0. \tag{10}$$

定义 3.1。设 $X=(X,d,\mu)$为一个度量测度空间，且 $r>0$。函数 $u\in L^1_{loc}(X)$的对称化 r-拉普拉斯算子定义为

$$\widetilde{\Delta}_r u(x)=\int_X k_r(x,y)\frac{u(y)-u(x)}{r^2}\mathrm{d}\mu(y),\quad x\in X.$$

设 $u\in L^1_{loc}(X)$且 $r>0$。直接计算可得以下恒等式（参见公式 (6)）。

$$\widetilde{\Delta}_r u=\frac{1}{2}\left(\Delta_r u+\Delta_r^* u-u\Delta_r^* 1\right),\quad x\in X. \tag{11}$$

此外，我们有以下基本恒等式（回顾第 2.3 节中 e_r 和 E_r 的定义）。

引理 3.1. 设 $u, v \in L^2_{loc}(X)$ 且 $r > 0$。那么

$$\Delta_r(uv) = u\Delta_r v + 2e_r(u,v) + v\Delta_r u$$

μ-几乎处处。特别地，有

$$(a) \qquad \int_X v\widetilde{\Delta}_r u \mathrm{d}\mu = -E_r(u,v)$$

and

$$(b) \qquad \int_X v(\Delta_r u - \widetilde{\Delta}_r u)\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}\int_X v(x) \fint_{B_r(x)} \frac{\delta_r(x,y)}{r}\frac{u(y)-u(x)}{r}\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

并且当 u， $v \in L^2(X)$ 时。这里

$$\delta_r(x,y) = 1 - \frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_r(y))}.$$

证明。 对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned}
&u(x)\Delta_r v(x) + 2e_r(u,v)(x) + v(x)\Delta_r u(x)\\
&= \fint_{B_r(x)} \frac{u(x)(v(y)-v(x)) + (u(y)-u(x))(v(y)-v(x)) + v(x)(u(y)-u(x))}{r^2}\mathrm{d}\mu(y)\\
&= \fint_{B_r(x)} \frac{u(y)v(y)-u(x)v(x)}{r^2}\mathrm{d}\mu(y) = \Delta_r(uv)(x),
\end{aligned}$$

从而证明了该断言中的第一个恒等式。结合注 2.1，恒等式 (11) 推出 (a)：事实上，我们有

$$\begin{aligned}
2\int_X v\widetilde{\Delta}_r u\mathrm{d}\mu &= \int_X v(\Delta_r u + \Delta_r^* u - u\Delta_r^* 1)\mathrm{d}\mu = \int_X (v\Delta_r u + v\Delta_r^* u - uv\Delta_r^* 1)\mathrm{d}\mu\\
&= \int_X (v\Delta_r u + u\Delta_r v - \Delta_r(uv))\mathrm{d}\mu = -2\int_X e_r(u,v)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

恒等式 (b) 可直接由以下观察得到

$$\Delta_r u(x) - \widetilde{\Delta}_r u(x) = \frac{1}{2}\int_{B_r(x)} \left[\frac{1}{\mu(B_r(x))} - \frac{1}{\mu(B_r(y))}\right]\frac{u(y)-u(x)}{r^2}\mathrm{d}\mu(y).$$

□

在具有 KS-狄利克雷型的空间中，用对称化的 r-拉普拉斯算子刻画 Korevaar–Schoen 能量的局部极小化子，是前述观察的直接推论。

命题 3.2。 设 X 是一个度量测度空间，其中 *Korevaar–Schoen* 能量 E^2_{KS} 按照定义 *2.2* 的意义存在。则对于函数 $u \in KS^1, {}^2_{loc}(\Omega)$，以下条件等价于其在区域 $\Omega \subset X$ 中满足：

(1) u 是 E^2_{KS} 在Ω中的局部极小化者；(2) 对于每个 $\varphi \in KS^1,$

$_2(\Omega)$ 且在Ω中具有紧支集的函数，我们有

$$\lim_{r\to 0}\int_X \varphi\widetilde{\Delta}_r u\mathrm{d}\mu = 0.$$

证明。 回顾一下，Ω 中 E^2_{KS} 的局部极小化者由以下性质刻画：对于任意在 Ω 中具有紧支集的 $\varphi \in KS^{1,}{}_2(\Omega)$，都有 $\mathcal{E}_{KS}(\varphi, u) = 0$。另请回顾， $\mathcal{E}_{KS}$ 的场算子为$e(u,v)$。由引理 3.1 及 Korevaar–Schoen 能量的存在性，这等价于

$$\lim_{r\to 0}\int_X \varphi\widetilde{\Delta}_r u\mathrm{d}\mu = 0.$$

□

注 3.1。 更一般地，我们有如下结论：若 $u \in D(\Delta_{KS}; \Omega)$，则

$$\int_X \varphi \Delta_{KS} u \mathrm{d}\mu = -\mathcal{E}_{KS}(\varphi, u) = \lim_{r \to 0} \int_X \varphi \widetilde{\Delta}_r u \mathrm{d}\mu$$

对于每个 $\varphi \in KS^{1,\,2}(\Omega)$，其在 Ω 中具有紧支集。

3.2. **Carnot 群**。 Carnot 群 $\mathbb{G}$ 是一个连通且单连通的幂零李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，并且具有步长为 $s \in \mathbb{N}$ 的分层

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

满足以下性质： $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ 对于 $j = 1$、.....、 $s-1$ 以及 $[V_1, V_s] = \{0\}$。 $v_i := \text{维 } V_i$，并令 $h_0 = 0$、 $h_i = v_1 + \cdots + v_i$ 和 $m = h_s$。 利用指数映射，每个步长为 s 的 Carnot 群 $\mathbb{G}$ 作为李群都同构于 $(\mathbb{R}^m, \cdot)$，其群运算由 Baker–Campbell–Hausdorff 公式给出。

此外 此外，分层引出了一族膨胀 $\delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$，其中 $t > 0$，定义如下

$$\delta_t(x_1, \ldots, x_m) = (t^{\sigma_1} x_1, \ldots, t^{\sigma_s} x_m),$$

其中，齐次度 σ_i 定义为 $\sigma_j := i$，其中 $h_{i-1} < j \leq h_i$。

若连续函数 $\rho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ 满足以下条件，则称其为 G 上的伪范数： ρ

(1) $\rho(\delta_r(x)) = r\rho(x)$，对任意 $r > 0$ 和 $x \in G$ 均成立；(2) $\rho(x) > 0$ 当且仅当 $x \neq 0$；(3) ρ 是对称的，即对任意 $x \in G$，$\rho(x^{-1}) = \rho(x)$。

伪范数在群上定义了一种伪距离。此类伪距离的例子包括 Korányi–Reimann（规范）距离以及以下距离：

$$|x|_{\mathbb{G}} := |(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})|_{\mathbb{G}} := \Big(\sum_{j=1}^{s} \|x^{(j)}\|^{\frac{2s!}{j}} \Big)^{\frac{1}{2s!}} \qquad \mathrm{d}_{\mathbb{G}}(x, y) := |y^{-1} \cdot x|_{\mathbb{G}}, \tag{12}$$

其中 $x^{(i)} = (x_{h_{i-1}+1}, \ldots, x_{h_i})$，适用于 $i = 1, \ldots, s$，而 $\|x^{(j)}\|$ 表示 $\mathbb{R}^{v_j}$ 中的欧几里得范数。我们注意到，采用上述记号， $\mathbb{G}$ 中的坐标可写成 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$ 的形式。

数 $Q := \sum_{i=1}^{s} i \dim(V_i)$ 称为 $\mathbb{G}$ 的齐性维数。勒贝格测度 $\mathcal{L}^m =: \mu$ 是 $\mathbb{G}$ 上的 Haar 测度。此外，对所有 $t > 0$，都有 $\mu(\delta_t(E)) = t^Q \mu(E)$，其中 $E \subset \mathbb{G}$ 为可测函数。特别地，对于任意左不变度量， $\mu(B(x, r)) = cr^Q$ （c 取决于度量的选择），且 $\mathbb{G}$ 的豪斯多夫维数等于 Q。

接下来介绍 Sobolev 空间。设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 为一个区域， $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个雅可比基，参见 [11, 第 1 章.3]。我们将水平 Sobolev 空间 $HW^{1,p}(\Omega)$ 定义为由可测函数 $u \in L^p(\Omega)$ 构成的空间，其中这些函数的分布意义下的水平导数 $X_j u$ 是 L^p-函数。我们将 u 的水平梯度记为

$$\nabla_H u = \sum_{j=1}^{v_1} (X_j u) X_j.$$

范数 $\|u\|_{1,p}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \| |\nabla_H u| \|_{L^p(\Omega)}^p$ 使 $HW^{1,p}(\Omega)$ 成为一个巴拿赫空间。我们还定义 C^2-函数 $u : \Omega \subset \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ 的水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{G}} u$，定义如下

$$\Delta_{\mathbb{G}} u := \sum_{j=1}^{v_1} X_j^2 u. \tag{13}$$

Ω 上 Sobolev 空间的各种不同定义彼此一致，因为该空间满足 1-庞加莱不等式，参见相关文献。这里提及，对于 Ω 上的函数，配备卡诺–卡拉西奥多里度量时，该函数是该函数的最小弱上梯度。

下文还将使用 Sobolev 函数在 Ω 中几乎处处的近似庞苏微分，它可视为 Carnot 群中的自然导数，并在函数与映射理论（例如拟共形分析）中发挥重要作用。关于庞苏微分与函数的水平梯度之间关系的以下性质，可见相关文献中的注记 3。另见推论 3。

$$Du_x(z) = \langle \nabla_H u(x), z^{(1)} \rangle, \quad z = (z^{(1)}, \dots, z^{(s)}) \in \mathbb{G}.$$

命题 3.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 是 *Carnot* 群中的一个区域，ρ是定义在 $\mathbb{G}$ 上的一个伪范数，其形式为

$$\rho(z) = F(\|z^{(1)}\|, z'), \quad z = (z^{(1)}, z') \in \mathbb{G}, \tag{14}$$

其中 $z' = (z^{(2)},\dots, z^{(s)})$ 且 $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-v_1} \to \mathbb{R}$ 在原点以外 C^1，并且 $\partial_1 F > 0$。那么，对每个 $u \in HW^{1,2}(\Omega)$，我们有

$$e^2(u) = c|\nabla_H u|^2$$

几乎处处成立，其中 c 是一个常数，仅依赖于 ρ、$\mathbb{G}$的数据，而 $e(u)$ 是 u的 *KS* 能量密度，参见定义 *2.2*。

注 3.2. 满足 (14) 的一类特殊齐次范数如下。考虑定义在 $\mathbb{R}^s$ 上的范数 N，其中 $\partial_1 N > 0$；以及定义在 V_i 上的范数 $\|\cdot\|_i$，$i = 2$、.....、s，这些范数不一定是欧几里得范数。函数

$$\rho(z) := N(\|z^{(1)}\|, \|z^{(2)}\|_2^{1/2}, \dots, \|z^{(s)}\|_s^{1/s}), \quad z = (z^{(1)}, \dots, z^{(s)}) \in \mathbb{G} \tag{15}$$

是一个齐次范数。该类包括 Korányi–Reimann 标尺 (12)。

证明。根据 由 [54, 定理 4.1], 的证明可知，KS 能量密度存在且满足

$$e(u)(x) = \fint_{B_\rho} |Du_x(z)|^2 \mathrm{d}z = \fint_{B_\rho} |\langle \nabla_H u, z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$ 成立。最后一个等式由上文关于庞苏微分的注释得出。这里，B_ρ 是关于伪范数 ρ 的单位球。

由于任意两个伪范数都等价（见 [11, 命题 5.1.4] 和 [3, 注释 2]），特别地，由 (12) 可得

$$\{z \in \mathbb{G} : |z|_{\mathbb{G}} \le 1/C\} \subset \{z \in \mathbb{G} : F(\|z^{(1)}\|, z') \le 1\} \subset \{z \in \mathbb{G} : |z|_{\mathbb{G}} \le C\}$$

结合关于 ρ 的假设，这一观察表明，对每个 $z' \in M$，其中 $M \subset \mathbb{R}^{m-v_1}$ 是一个有界（且闭）集合，函数 $F(\cdot, z')$ 可逆，因此存在一个连续函数 $G\colon M \to \mathbb{R}$，使得对每个固定的 z'

$$\{(z^{(1)}, z') \in \mathbb{G} :\ \rho(z^{(1)}, z') \le 1\} = \{(z^{(1)}, z') \in \mathbb{G} : \|z^{(1)}\| \le G(z')\}.$$

利用这一点并进行变量替换，我们计算得

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |\langle \nabla_H u, z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z^{(1)} &= \int_M \left(\int_{\{\|z^{(1)}\| \le G(z')\}} |\langle \nabla_H u(x), z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z^{(1)} \right) \mathrm{d}z' \\
&= \int_{\{z' \in M : G(z') \ge 0\}} G(z')^{2+k} \left(\int_{\{\|z^{(1)}\| \le 1\}} |\langle \nabla_H u(x), z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z^{(1)} \right) \mathrm{d}z' \\
&= c \int_{\{\|z^{(1)}\| \le 1\}} |\langle \nabla_H u(x), z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z^{(1)},
\end{aligned}$$

其中 c 是一个常数。事实上，由于 G 连续且 M 有界，G^{2+k} 的积分有限。于是，根据 [28, 引理 4.18]，我们有

$$\int_{\{\|z^{(1)}\| \le 1\}} |\langle \nabla_H u(x), z^{(1)} \rangle|^2 \mathrm{d}z^{(1)} = c(v_1) |\nabla_H u(x)|^2.$$

证明至此完成。 □

我们通过给出定理 1.2 的证明来结束本小节。

定理的证明 定理 *1.2*。 由命题 3.3 可知，能量密度 $e^2(u)$ 存在，且满足

$$e^2(u) = c|\nabla_H u|^2 \tag{16}$$

对每个 $u \in HW^{1,\,2}_{loc}(\Omega)$ 都成立。由于 $|\nabla_H u|$ 是度量测度空间 $(\Omega, \mathcal{H}^Q, d_{cc})$ 上 u 的最小弱上梯度（参见 [29, 命题 11.6 和定理 11.7]；对于光滑函数，该结论成立，并可通过逼近推出一般情形），因此 $u \mapsto E^2_{KS}(u) = \int_\Omega e^2(u)\mathrm{d}\mathcal{H}^Q$ 是下半连续的，故 KS 能量是定义 2.2 意义下的狄利克雷型。此外，由 [11, 第一部分第 1.5 节（A5）] $\Delta_{\mathbb{G}}$ 是与二次型 $u \mapsto \int_\Omega |\nabla_H u|^2 \mathrm{d}z$ 相关联的自伴算子。由此及式（16）可知，Δ_{KS} 是次拉普拉斯算子的常数倍 $\Delta_{\mathbb{G}}$。

由于 u 对于任何紧含于 Ω 的区域中的充分小的 r（由 $\mathcal{H}^Q$ 的平移不变性），命题 3.2 蕴含 $u \in HW^{1,\,2}_{loc}(\Omega)$ 是弱 AMV 调和的，当且仅当 $\Delta_{\mathbb{G}} u = 0$，这表明 (ii)⇔(iii)。由于 (i)⇒ (ii) 显然成立，剩下证明 (iii)⇒(i)。

若 $\Delta_{\mathbb{G}} u = 0$，则 $u \in C^\infty(\Omega)$。现在我们可以完全仿照 [26, 引理 4.1] 的证明进行论证，从而得到

$$u(x) = u_{B_r(x)} + Cr^2 \Delta_{\mathbb{G}} u + o(r^2) \tag{17}$$

利用 [26, 引理 2.7] 的二阶泰勒展开：一阶项相互抵消，因为关于 ρ 的球 $B_r(x)$ 是对称的；而 [26, 引理 4.1] 证明中的计算在将 $S(\varepsilon, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$（采用 [26] 中的记号）替换为命题 3.3 证明中的集合 $\{\|z^{(1)}\| \le G(z')\}$ 后仍然成立。我们得到常数

$$C := \frac{1}{2v_1} \fint_{B_\rho} \|z^{(1)}\|^2 \mathrm{d}z$$

在（17）中，B_ρ 表示 ρ 的单位球。

最后我们注意到，（17）中的误差项 $o(r^2)$ 关于 x 局部一致（因为光滑函数的二阶泰勒展开也具有这一性质）。这意味着，当 $r \to 0$ 在 $x \in \Omega$ 中局部一致地趋于 $\to 0$ 时，$\Delta_r u(x) \to 0$，从而证明 (iii)⇒(i)。

□

3.3. RCD 空间。 RCD 空间源于对合成曲率下界的研究，这些下界最初是通过黎曼流形的 Wasserstein 空间中熵泛函的凸性来表述的，参见 [58, 52]。通过进一步要求 Cheeger 能量具有二次性质，可以得到相应曲率维数条件的黎曼理论（$CD(K,N)$-条件），见第 2.3 节。RCD 空间的概念由 Ambrosio–Gigli–Savare 提出并得到深入发展，参见 [8]。就第 2.3 节中引入的 Γ-微积分而言，度量测度空间 (X, d, μ) 上具有参数 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \ge 1$ 的 $RCD(K,N)$-条件可由 Bochner 不等式刻画。

$$\frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 \Delta g \mathrm{d}\mu \ge \int g\left(K|\nabla f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + \frac{1}{N}(\Delta f)^2\right)\mathrm{d}\mu$$

对于任意 $f \in D(\Delta)$，满足 $\Delta f \in W^{1,\,2}(X)$，以及任意 $g \in L^\infty(X) \cap D(\Delta)$。

RCD理论的基石之一是*Bishop–Gromov* 不等式，该不等式由 Sturm [53] 提出。为陈述该不等式，定义 $s_{K,\,N}$, $v_{K,\,N}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (对于 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \ge 1$) 如下

$$s_{K,N}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{N-1}{K}} \sin\left(t\sqrt{\frac{K}{N-1}}\right) & K > 0, \\ t & K = 0, \\ \sqrt{\frac{N-1}{-K}} \sinh\left(t\sqrt{-\frac{K}{N-1}}\right) & K < 0, \end{cases} \qquad v_{K,N}(r) := N\omega_N \int_0^r s_{K,N}(t)^{N-1}\mathrm{d}t,$$

其中 ω_N 是 $\mathbb{R}^N$ 中单位球的勒贝格测度。

定理 3.4 (参见 [53])。设 X 是一个 $RCD(K,\ N)$空间，其中 $K \in \mathbb{R}$ 且$N \geq 1$。那么对于任意 $x \in X$，函数

$$r \mapsto \frac{\mu(B_r(x))}{v_{K,N}(r)}$$

在区间 $\left(0, \pi\sqrt{\ \ ^{N-1}/_{\max\{K,0\}}}\right)$ 上单调不增。

注意，$v_{K,N}(r) = \omega_N r^N + O(r^{N+2})$（参见 [32]）。然而，尽管 N起着维数上界的作用，它不一定等于 X的 Hausdorff维数。

RCD 空间的可整流性于 [44] 中得到确立，并在 [14], 中得到改进，其中证明了 RCD 空间的维数恒定性。

定理 3.5 （[14]中的定理 3.8）。设（X，d，μ）是一个 $RCD(K,N)$空间，$K \in \mathbb{R}$ 且 $N \geq 1$。存在一个自然数 $n \leq N$，使得对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，$\mathbb{R}^n$（配备欧几里得范数和勒贝格测度）是 X 在 x 处唯一的切锥。

上面的数 n称为 X的本质维数，且 X 是 n-可求长的，这意味着 n等于 Hausdorff维数。本质维数出现在 Gigli–Tyulenev [28]的一项结果中，该结果指出，在 RCD 空间上，Korevaar–Schoen 能量是 Cheeger 能量的一个常数倍，因此构成一个狄利克雷型。

命题 3.6 （参见 [28] 中的定理 2.18 和命题 4.19）。设 X 是一个 RCD（K，N）空间，其中 $K \in \mathbb{R}$ 且 $N \geq 1$, 并设 n 是 X的本质维数。那么存在一个常数 $c = c$（K，n），使得若$\Omega \subset X$ 是一个区域，则对于任意 $u \in KS^{1,\ 2}(\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mu = cE_{KS}^2(u;\Omega),$$

其中 $|\nabla u|$ 是 u的最小弱上梯度。

我们指出，根据命题 3.6，E_{KS}^2的局部极小化者恰好是 Ch_2的局部极小化者。已知（参见 [36], ），在区域 Ω 上，Ch_2 的局部极小化者在 Ω 内局部 Lipschitz 连续，并且由方程 $\Delta u = 0$刻画。

接下来我们重点研究 非坍缩 RCD(K,N) 空间 $X = (X, d, \mathcal{H}^N)$。（关于较早提出的、略有不同的非坍缩 RCD 空间概念，参见 [33]。）作为上述结果的一个推论，非坍缩 RCD(K,N) 空间是 N-可求长的，且局部 Ahlfors N-正则。每个点 $x \in X$都有一个切锥（它是一个 RCD$(0,N)$ 空间），并且在一个满测度集合上，切锥唯一且与 $\mathbb{R}^N$ 等距同构。奇异集 $\mathcal{S}$定义为具有非欧几里得切锥的点集，可以用密度来刻画

$$\theta_r^N(x) = \frac{\mathcal{H}^N(B_r(x))}{\omega_N r^N}, \quad \theta^N(x) := \lim_{r\to 0} \theta_r^N(x) \tag{18}$$

如下：$\mathcal{S} = \{x \in X :\ \theta_N(x) < 1\}$。注意，根据定理 3.4，定义 θ^N 的极限存在，并且处处满足$\theta^N \leq 1$ 处处。

非坍缩 RCD 空间的边界 可以通过奇异集的最高维分层来定义。

定义 3.2 （参见 [24] 中的注 3.8 和 [32]中的定义 4.2）。RCD(K,N) 空间 X 的边界 ∂X 是该集合的闭包

$$\mathcal{S}^{N-1} \setminus \mathcal{S}^{N-2} = \{x \in X :\ \text{the half space } \mathbb{R}^N_+ \text{ is a tangent cone at } x\}.$$

最近已证明，∂X 是（$N-1$）可求长的，参见 [15]。此外，[16] 表明，如果某点的一个邻域不与边界相交，那么该点附近的度量测度论边界便消失。

定义 3.3 （ [32]中的定义 1.5）。 设 $X = (X, d, \mathcal{H}^N)$ 是 N-可求长的。若有符号拉东测度满足以下条件，我们称 X 具有消失的度量测度边界（在开集 $U \subset X$ 中）：

$$\mu_r := \frac{1 - \theta_r^N(\cdot)}{r} \mathrm{d}\mathcal{H}^N, \quad 0 < r \leq 1$$

在全变差范数下（一致地于 U 中）有界，并且当$r \to 0$时弱收敛至零（于 U 中）。

通过对度量进行适当的重新缩放，可以得到 [16, 定理 1.2] 的如下略微改写。

定理 3.7 （ [16]）。 设 X 是一个 $RCD(K, N)$空间。存在 $C = C(K, N)$，使得若 $x \in X$ 且 $B_{Cr_0}(x) \cap \partial X = \varnothing$，则

$$\lim_{r \to \infty} |\mu_r|(B_{r_0}(x)) = 0.$$

接下来，我们利用定理 3.7 得到 r-拉普拉斯算子与对称化 r-拉普拉斯算子之间的渐近联系。陈述之前，回顾

$$\delta_r(x, y) = 1 - \frac{\mathcal{H}^N(B_r(x))}{\mathcal{H}^N(B_r(y))}, \quad x, y \in X,\ r > 0.$$

引理 3.8。 设 X 是一个非坍缩 $RCD(K, N)$空间。那么

$$\lim_{r \to 0} \int_X \varphi(x) \fint_{B_r(x)} \left| \frac{\delta_r(x, y)}{r} \right| \mathrm{d}\mathcal{H}^N(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^N(x) = 0.$$

对每个 $\varphi \in C_c(X \setminus \partial X)$。

证明。 由于 spt $\varphi \subset X \setminus \partial X$，我们可以用有限个球 $B_{r_0}(x_i)$ 覆盖 spt φ，其中 $B_{2Cr_0}(x_i) \cap \partial X = \varnothing, i = 1, \dots M$。利用单位分解，我们可以假设 spt $\varphi \subset B_{r_0}(x_0)$，其中 $B_{2Cr_0}(x_0) \cap \partial X = \varnothing$，某个 $x_0 \in X$。注意（当 $r > 0$足够小时）我们有

$$|\delta_r(x, y)| = \left| \frac{(\theta_r^N(y) - 1) - (\theta_r^N(x) - 1)}{\theta_r^N(y)} \right| \leq C'(|\theta_r^N(y) - 1| + |\theta_r^N(x) - 1|), \quad x, y \in B_{r_0}(x_0), \tag{19}$$

其中 C' 是 $B_{2Cr_0}(x_0)$ 上的阿尔福斯正则性常数。因此

$$\begin{aligned}
&\int_X |\varphi| \fint_{B_r(x)} \left| \frac{\delta_r(x, y)}{r} \right| \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^N(x) \\
\leq & C' \int_X \varphi \left| \frac{\theta_r^N(x) - 1}{r} \right| \mathrm{d}\mathcal{H}^N(x) + C' \int_X |\varphi(x)| \fint_{B_r(x)} \left| \frac{\theta_r^N(y) - 1}{r} \right| \mathrm{d}\mathcal{H}^N(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^N(x) \\
= & C' \int |\varphi| \mathrm{d}|\mu_r + C' \int (A_r^* |\varphi|) \mathrm{d}|\mu_r|.
\end{aligned}$$

当 $r > 0$ 足够小时，我们有 spt$(A_r^* |\varphi|) \subset B_{r_0}(x_0)$；并且由于 $\mathcal{H}^N$ 是（局部）倍增的，我们进一步有 $\|A_r^* |\varphi|\|_\infty \leq C'' \|\varphi\|_\infty$。由此可得

$$\lim_{r \to 0} \left| \int_X \varphi(x) \fint_{B_r(x)} \left| \frac{\delta_r(x, y)}{r} \right| \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^N(x) \right| \leq \lim_{r \to 0} C''' \|\varphi\|_\infty |\mu_r|(B_{r_0}(x_0)) = 0$$

□

推论 3.9。 设 X 是一个具有消失度量测度边界的非坍缩 $RCD(K,\ N)$-空间。那么

$$\lim_{r\to 0}\left|\int_X \varphi(\widetilde{\Delta}_r u-\Delta_r u)\mathrm{d}\mathcal{H}^N\right|=0$$

只要 $u,\ \varphi\in$ LIP(Ω) 且 u 或 ϕ 在 Ω 中具有紧支集。

证明。 通过截断论证，我们可以假设 φ 和 u 在 Ω 中都具有紧支集。由引理 3.1 可得

$$\left|\int_X \varphi(\widetilde{\Delta}_r u-\Delta_r u)\mathrm{d}\mathcal{H}^N\right|\le\int_X|\varphi(x)|\,\mathrm{LIP}(u)\fint_{B_r(x)}\left|\frac{\delta_r(x,y)}{r}\right|\mathrm{d}\mathcal{H}^N(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^N(x).$$

结论现在由引理 3.8 得出。 □

定理 *1.1* 的证明。 设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 为调和函数。特别地， u 是局部 Lipschitz 的。由引理 3.6 u是 Ω 中 E^2_{KS} 的局部极小化者。定理 3.2 蕴含

$$\lim_{r\to 0}\int_\Omega \varphi\widetilde{\Delta}_r u\mathrm{d}\mu=0$$

对每个具有 Ω 中紧支集的 $u\in KS^{1,\ 2}$(Ω) 均成立。由此及推论 3.9 可得

$$\lim_{r\to 0}\int_X \varphi\Delta_r u\mathrm{d}\mu=0$$

对每个 $\varphi\in$ LIP$_c$(Ω)。 □

注 3.3. 由推论 3.9 和上述论证可知，若 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是局部 *Lipschitz* 连续的弱 AMV 调和函数，则 u 是 Cheeger 调和的。

4. 提升正则性：AMV 调和函数的 BPZ 定理

本节讨论 Blaschke-Privaloff-Zaremba 型定理（为简便起见，称为 BPZ 定理）。在其经典版本中，参见例如 [38, 定理 2.1.5], BPZ 定理断言，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，连续的逐点 AMV-调和函数局部满足拉普拉斯方程。因此，AMV-调和算子的逐点为零 $\lim_{r\to 0^+}\Delta_r$ 提升了 AMV-调和函数的正则性。下文将证明，二阶齐性 Carnot 群和黎曼流形上的 AMV-调和函数也具有这一性质。此外，我们还将证明亚历山德罗夫空间中 BPZ 定理的一个对应版本，并讨论弱意义下定义的 AMV-调和函数与亚历山德罗夫空间中拉普拉斯算子之间的关系。

4.1. **Carnot 群**。齐性 Carnot 群中的次椭圆拉普拉斯方程的解是C^∞，例如参见 [11, 第 5 节10] 中的讨论及其中的参考文献。使用第 3.2 节中的记号，我们定义以点 $p_0\in\mathbb{G}$为中心、半径为 $r>0$ 的开 Korányi–Reimann 球（规范球） $B(p_0,r)$，如下所示

$$B=B(p_0,r):=\{p:\in\mathbb{G}:|p^{-1}p_0|_{\mathbb{G}}<r\}.$$

由于根据 [20, 推论 1], , 规范球是二阶 Carnot 群中的 X-NTA域，因此由 Wiener 判据可知它们是正则域，并且对于连续边界数据，调和次椭圆方程的狄利克雷问题在 $B\subset\mathbb{G}$ 中存在经典光滑解，参见 [20] 中的 [23,定理 3.9] 以及第 409 页的讨论。然而， [30], 中证明了，对于 $\mathbb{H}_n$, Carnot-Carathéodory 距离下的 $n\ge 2$球在特征点处并不正则（参见 [10, 例 14.4]）。因此，鉴于我们在下文定理 4.1 的证明中所采用的方法，我们将讨论范围限定于二阶 Carnot 群，以及相对于齐性距离的球$d_{\mathbb{G}}$ ，如式（12）所示。我们还指出，规范球在一般的第 s 阶 Carnot 群中是否为 X-NTA域，仍是一个悬而未决的问题，参见 [20] 第 429 页上的猜想 1。

对于下一个定理，请回顾与 Koranyi 规范（12）相关的距离 $d_{\mathbb{G}}$，以及第 3.2 节中的水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{G}}u$（13）。

定理 4.1（Carnot 群中步长为 2 的 AMV-调和函数的 BPZ 定理）。设 $\Omega \subset \mathbb{G}$是步长为 $\mathbb{G}2$ 的 *Carnot* 群中的一个区域，该群配备了规范距离 $d_{\mathbb{G}}$，并设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的连续函数

$$\lim_{r\to 0^+} \Delta_r f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

那么 f 是一个次椭圆调和函数，即对于所有 $x \in \Omega$，都有

$$\lim_{r\to 0^+} \Delta_r f(x) = C\Delta_{\mathbb{G}} f(x) = 0,$$

其中 C 取决于 v_1（水平层 V_1的维数）以及 $\mathbb{G}$的几何。

常数 C 在 [26, 引理 4.1], 中计算得出，另见定理 1.2 的证明。我们还指出，同一引理表明，步长为 s的 Carnot 群中，C^2-函数也满足 Blaschke-Privaloff-Zaremba 定理。

证明。证明中，我们沿用 Privaloff 针对 $\mathbb{R}^n$情形提出的原始思路，见 [49,定理 II]。设 $p_0 \in \Omega$，且 $B = B(p_0, R)$ 是以 p_0 为中心、半径为 $R > 0$ 的规范球，并且 $B \subset \Omega$。上述讨论使我们可以推知，B 上的次椭圆狄利克雷问题在边界数据 f 下存在（唯一）解，记为 u，满足 $u \in C(\overline{B})$ 和 $u = f|_{\partial B}$。令$\phi = f - u$。则 $\phi \in C(\overline{B})$ 且 $\phi|_{\partial B} \equiv 0$。只要证明 $\phi \equiv 0$ 在 B中成立，即可证明所述结论。我们用反证法。具体而言，假设存在 $q \in B$ 使得 $\phi(q) \neq 0$，并且不失一般性地假设 $\phi(q) < 0$。定义 B上的如下函数

$$F(p) = \phi(p) + \frac{\phi(q)}{2}\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 - R^2}{R^2}\right),$$

其中 $\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|$ 表示点 $p^{-1}p_0 \in \Omega$ 的水平部分在 $\mathbb{R}^{v_1}$ 中的欧几里得长度（见 (12)）。

断言：有 $F \in C(\overline{B})$，$F|_{\partial B} \geq 0$并且有 $F(q) < 0$。事实上，若 $p \in \partial B(p_0, R)$，则$\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^4 + \|(p^{-1}p_0)^{(2)}\|^2 = R^4$ 当 $(p^{-1}p_0)^{(2)} \in \mathbb{R}^{m-v_1}$ 时，因此

$$\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 = \sqrt{R^4 - |(p^{-1}p_0)^{(2)}\|^2} \leq R^2.$$

因此 $F(p) \geq 0$。类似地，我们得到

$$F(q) = \phi(q)\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 + R^2}{2R^2}\right) < 0.$$

因此，根据该断言，存在 $q_1 \in \overline{B}$ 使得 $F(q_1) = \min_{\overline{B}} F$（事实上，$q_1 \in B$）。此外，对于所有 $r \leq d(q_1, \mathbb{H}_1 \setminus B)$，都有 $\Delta_r F(q_1) \geq 0$，并且通过直接计算可验证

$$\Delta_r F(q_1) = \Delta_r \phi(q_1) + \frac{\phi(q)}{2}\Delta_r\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 - R^2}{R^2}\right)(q_1).$$

因此，应用 Δ_r 的定义后，我们得到以下估计

$$0 \leq \Delta_r F(q_1) = \Delta_r f(q_1) - \Delta_r u(q_1) + \frac{\phi(q)}{2}\Delta_r\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 - R^2}{R^2}\right)(q_1). \tag{20}$$

于是，有

$$\frac{\phi(q)}{2}\Delta_{\mathbb{G}}\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2 - R^2}{R^2}\right)(q_1) = \frac{\phi(q)}{2R^2}\Delta_{\mathbb{G}}\left((p^{-1}p_0)_1^2 + \cdots + (p^{-1}p_0)_{v_1}^2\right)(q_1).$$

回顾一下，根据关于雅可比基的经典命题 $\{X_1,\dots,X_m\}$（见 [11, 推论 1.3.9]），任意点 $x\in\mathbb{G}$ 处的次椭圆拉普拉斯算子都可写为:

$$\Delta_{\mathbb{G}}=\sum_{j=1}^{v_1}X_j^2=\sum_{j=1}^{v_1}\left(\partial_j+\sum_{i=v_1+1}^{m}a_i^{(j)}(x)\partial_i\right)^2,$$

其中 $a_i^{(j)}$ 为多项式系数。因此，在我们的情形中，次拉普拉斯算子退化为 $\mathbb{R}^{v_1}$中的拉普拉斯算子。也就是说，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbb{G}}\left((p^{-1}p_0)_1^2+\cdots+(p^{-1}p_0)_{v_1}^2\right)(q_1)\\
&=\sum_{j=1}^{v_1}\left(\partial_j+\sum_{i=v_1+1}^{m}a_i^{(j)}(q_1)\partial_i\right)^2\left((p^{-1}p_0)_1^2+\cdots+(p^{-1}p_0)_{v_1}^2\right)\\
&=\sum_{j=1}^{v_1}\left(\partial_j+\sum_{i=v_1+1}^{m}a_i^{(j)}(q_1)\partial_i\right)\left(\partial_j\left((p^{-1}p_0)_1^2+\cdots+(p^{-1}p_0)_{v_1}^2\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{v_1}\left(\partial_{x_j}+\sum_{i=v_1+1}^{m}a_i^{(j)}(q_1)\partial_{x_i}\right)(2(p_0^{-1}p)_j)\quad\left(\text{by }(p^{-1}p_0)_1^2=(p_0^{-1}p)_1^2\text{ and [11, Proposition 3.2.1]}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{v_1}2\partial_{x_j}(p_0^{-1}p)_j=2v_1.
\end{aligned}\tag{21}$$

由于假设 f 逐点 AMV-调和，且 $u\in C^2(B)$，根据 AMV-调和函数的定义及 [26, 引理 4.1]，可知在 $r\to0^+$ 下有 $\Delta_r f(q_1)\to0$ 和$\Delta_r u(q_1)\to0$。此外，再次应用 [26, 引理 4.1] 并结合 (21)，我们得到

$$\lim_{r\to0^+}\frac{\phi(q)}{2}\Delta_r\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2-R^2}{R^2}\right)(q_1)=C\frac{\phi(q)}{2}\Delta_{\mathbb{G}}\left(\frac{\|(p^{-1}p_0)^{(1)}\|^2-R^2}{R^2}\right)(q_1)=\frac{Cv_1}{R^2}\phi(q)<0,$$

因为上文假设 $\phi(q)<0$。因此，我们得到$0\le\frac{Cv_1}{R^2}\phi(q)<0$，这与我们的假设矛盾。定理得证。□

4.2. **黎曼流形**。为方便读者，我们概述 BPZ 定理在黎曼情形下的证明。论证与定理 4.1 的证明类似

命题 4.2 (流形上的 Blaschke-Privaloff-Zaremba 定理)。设$(M,\ g)$ 是一个 n 维黎曼流形，其里奇曲率下界为某个 $K\in\mathbb{R}$。进一步设$\Omega\subset M$ 是 M 中的一个区域，且 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 是Ω 上的连续函数，满足

$$\lim_{r\to0}\Delta_r f(x)=0,\quad x\in\Omega.$$

那么 f 在Ω中满足 *Beltrami-Laplace*方程。

证明。我们沿用定理 4.1 证明中的步骤，并采用反证法。固定 $z_0\in\Omega$ 和一个球 $B=B(z_0,R)\subset\Omega$，其中半径 $R>0$ 足够小，其取值将在下文确定。与定理 4.1 的证明一样，我们用 u 表示满足 $u\in C(\overline{B})$ 且 $u=f|_{\partial B}$ 的 B 上拉普拉斯－贝尔特拉米狄利克雷问题$\Delta_M u=0$的唯一解。这种 u 的存在性可由度量测度空间的一般理论推出，因为黎曼流形 M 的里奇曲率有下界，满足倍增条件和 1- 庞加莱不等式（详情见 [10,Chapter A.7] 和 [29] ）。

令 $\phi:=f-u$，并注意到 $\phi\in C(\overline{B})$ 和 $\phi|_{\partial B}\equiv0$。为证明这一断言，我们证明 $\phi\equiv0$ 属于 B。我们用反证法，假设存在 $y\in B$，使得$\phi(y)\neq0$，且不失一般性，假设 $\phi(y)<0$。

与定理 4.1 的证明类似，我们定义函数 F 如下

$$F(z) = \phi(z) + \frac{\phi(y)}{2}\left(\frac{\mathrm{dist}_M(z,z_0)^2 - R^2}{R^2}\right),$$

其中 $\mathrm{dist}_M(\cdot, z_0)$ 是到 $z_0 \in \Omega$ 的距离函数，该集合定义在 M 上的度量 g 中。对贝尔特拉米-拉普拉斯算子的直接计算（见 [37, 定理 4.1], 的证明）使我们得出

$$\Delta_M(\mathrm{dist}_M(z,z_0)^2) = 2 + 2H_{z_0}(z)\mathrm{dist}_M(z,z_0),$$

其中 $H_{z_0}(z)$ 表示 z 处 $\partial B(z_0, r)$ 的平均曲率，对于 $r = \mathrm{dist}_M(z, z_0)$。根据 [47], 中的讨论，当 $r \to 0$ 时，有 $H_{z_0}(z) = \frac{n-1}{r} - \frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{z_0}(v,v)r + O(r^2)$，渐近成立，其中$v \in S^{n-1} \subset T_{z_0}M$（注意，该公式是对零曲率情形下球面的平均曲率公式的扰动）。因此，取足够小的 R，从而使 $r < R$ 也足够小，我们得到 $\Delta_M(\mathrm{dist}_M(z,z_0)^2)$ 在 B 上满足 $> c > 0$。

与前一个定理的证明一样，我们找到 $y_m \in \overline{B}$，使得 $F(y_m) = \min_{\overline{B}} F$（事实上，$y_m \in B$）。为了得到矛盾，我们需要得出结论：当 $r \to 0^+$ 时，$\Delta_r f(y_m) \to 0$ 且 $\Delta_r u(y_m) \to 0$；参见（20）及其后的讨论。第一个收敛性结论成立，因为 f 是 AMV-调和的；第二个则由 [59] 中的断言（1）、第 6.32 章得出。事实上，根据 [59]，拉普拉斯–贝尔特拉米方程的解是光滑的（ [59, 第 6.32] 章的假设要求 M 是紧集，但我们只需要这一结果在局部成立）。与欧几里得论证类似，通过将 u 展开到二阶泰勒展开，可以证明 $\lim_{r\to 0^+} \Delta_r u(y_m) \leq \frac{1}{2(n+2)} \Delta_M u(y_m) = 0$，见 [60,推论 3.2.]。

因此，按照与前一个定理类似的推理，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{\phi(y)}{2}\Delta_r\left(\frac{\mathrm{dist}_M(z,z_0)^2 - R^2}{R^2}\right)(y_m) &\leq \frac{\phi(y)}{4(n+2)}\Delta_M\left(\frac{\mathrm{dist}_M(z,z_0)^2 - R^2}{R^2}\right)(y_m) \\ &\leq \frac{c\phi(y)}{4(n+2)R^2} < 0. \end{aligned}$$

这与我们的假设 $\phi(y) < 0$ 矛盾。因此，定理得证。

□

4.3. **亚历山德罗夫空间与曲面**。

亚历山德罗夫曲面的背景。 上述关于黎曼流形的讨论可以推广到可能非光滑曲面的情形，即具有有界积分曲率的闭Alexandrov曲面，参见例如 [55, 56, 50, 5]。特别地，结合 Lytchak-Stadler 的近期结果 [39, 定理 1.1] 以及 Petrunin 的结果 [48]，还可推出非坍缩 $RCD(K, 2)$ 空间的一个 BPZ 定理。

亚历山德罗夫曲面（S, d）是一个拓扑二维流形，配备长度度量 d，该度量诱导流形拓扑，并且按照 [57, 定义 2.1] 的意义具有有界积分曲率。亚历山德罗夫曲面具有曲率的概念，其为一个拉东测度，记作 ω。关于这一点及更多细节，感兴趣的读者可参阅 [56, 57]。这里提及，基于多面体逼近或高斯-博内定理，存在若干等价定义。此外，回顾一下亚历山德罗夫曲面的例子包括紧多面体曲面（欧几里得、双曲、球面或更一般的黎曼曲面）、局部 $CAT(0)$ 曲面、按照 Alexandrov 意义具有曲率下界的紧度量曲面（尤其是高斯曲率有下界的曲面的紧格罗莫夫–豪斯多夫极限，参见 [17, 39]），以及具有圆锥奇点的曲面，参见 [56, 57]。

设 (S, d) 是一个闭Alexandrov曲面（即无边界的紧曲面），配备度量 d 和曲率测度 ω。若对于所有 $\omega(\{x\}) < 2\pi$

$x \in S$。特别地，非正曲率测度的曲面以及所有光滑曲面都自动不含尖点。

根据 [55, 56], 如果 (S, h) 是一个闭黎曼曲面，那么我们用 $V(S, h)$ 表示函数 $v\colon\ S \to \mathbb{R}$ 使得 $\mu = \Delta_h v$ 是一个（带符号）测度的空间。利用 v 可以定义一个新的距离，记为 $d_{h,\ v}$，参见 [56, 命题 7.1]。于是，下面的结果将 Alexandrov曲面 与光滑几何联系起来，参见 [56, 定理 7.3]。

定理 4.3（Reshetnyak–Huber）。设 $(S,\ d)$ 是一个没有尖点且具有有界积分曲率的闭曲面。那么，存在 h 上的光滑黎曼度量 S 以及函数 $v \in V(S,\ h)$，使得 $d = d_{h,\ v}$。

事实上，该定理的精细版本允许我们表述为：S 上的距离 d 由（奇异）黎曼度量 $e^{2v}h$诱导，参见 [50, 定理 7.1.2] 以及 [6, 定理 2.6]。因此，由于在二维情形中调和性是一个共形不变量，d 与 h 之间的这一关系使我们能够在 (S, d) 的开子集上定义调和函数，即相对于度量 h而言为调和的函数。更确切地说，我们将 (S, d) 的 Laplace-Beltrami算子定义为

$$\Delta_S := \Delta_{(S,d)} := e^{-2v}\Delta_h. \tag{22}$$

命题 4.4. 设(S, d) 是一个无尖点且具有有界积分曲率的闭*Alexandrov*曲面，且 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$是区域 $\Omega \subset S$ 上的连续函数，满足

$$\lim_{r\to 0} \Delta_r f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

则 f 在Ω中满足 *Beltrami-Laplace*方程 $\Delta_S f = 0$。

证明与命题 4.2 的证明类似，因此我们只说明关键区别。与黎曼情形一样，我们用反证法，并将讨论局部化到球$B(z_0, R) \subset \Omega$上。接着，考虑与上述定理证明中类似的函数 ϕ 和 F。由 Reschetnyak–Huber 定理，我们可将讨论归结到带有共形平坦度量的平面上，并由 (22) 得到

$$\Delta_S \mathrm{dist}_S(z, z_0)^2 = e^{-2u}\Delta_{\mathbb{R}^2}\mathrm{dist}(z, z_0)^2 = 2e^{-2u} > 0.$$

从这里开始，推理完全沿用命题 4.2 的证明。

亚历山德罗夫空间的设定。另一个可以证明 BPZ型定理的设定是亚历山德罗夫空间。若 M 是一个局部紧完备长度度量空间，且其曲率下界是通过比较 M 中的测地三角形与具有相应常截面曲率的空间形式中的测地三角形来定义的，则称其为亚历山德罗夫空间，参见例如 [13, 17, 46]。事实证明，亚历山德罗夫空间的 Hausdorff维数总是整数，并且它定义了给定亚历山德罗夫空间的维数。此外，若一个 n维亚历山德罗夫空间中的点 M 的切锥与带标准度量的欧几里得 n空间等距，则称该点为正则点，参见例如 [6]中的第 7.1 节。非正则点称为奇异点；事实证明，M 中所有奇异点构成的集合的 Hausdorff维数不超过 $n - 1$。此外，所有正则点构成的集合包含于一个 DC_0 黎曼流形中，参见 [6] 中的定义 3.1 和 2.1。

设 $\Omega \subset M$ 是 Alexandrov 空间 M中的有界区域。对于半凹函数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$（参见 [61]中的预备知识），通过狄利克雷型定义的自然拉普拉斯算子 $\mathcal{L}_u$ 是一个有符号拉东测度，且其在 $\mathcal{L}_u$ 的勒贝格分解中的非奇异部分满足

$$\Delta u(x) = n \fint_{\Sigma_x} H_x u(\xi, \xi) d\xi, \tag{23}$$

对于几乎所有点 $x \in \Omega$，其中 H_x 表示佩雷尔曼海森矩阵，而 Σ_x 表示 x处的方向空间，参见 [48] 和 [61, 预备知识]。海森矩阵 H_x 的一个关键特征是，对于 Ω 中的半凹函数（或更一般的 DC 函数，参见 [6]），可以证明存在基于 H_x的二阶泰勒展开，参见 [61, 公式 (2.6)] 和 [6, 命题 7.5]。

上述观察使我们能够陈述 Alexandrov 空间中 BPZ 定理的以下变体。

命题 4.5 (Alexandrov空间中的 Blaschke-Privaloff-Zaremba 定理)。 设 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 是定义在 *Alexandrov* 空间 M 的区域 Ω 上的半凹函数。那么，对 u 的正则点集合中的所有 x （即，对 M 中几乎所有点），都有

$$\lim_{r\to 0^+} \Delta_r u(x) = \frac{1}{2(n+2)} \Delta u(x).$$

特别地，定义在Ω 上的半凹函数 u 是调和函数（按拉普拉斯算子 Δ 的意义），当且仅当对于 u 的每个正则点 x，都有$\lim_{r\to 0^+} \Delta_r u(x) = 0$ 。

这一观察的证明直接由 [61, 引理 2.3] 的证明得出。我们指出，该定理表明，对于一大类函数，渐近平均值拉普拉斯调和函数与相对于拉普拉斯算子 Δ 而言在 Alexandrov 空间中调和的函数相同。不过请注意，半凹函数是局部 Lipschitz 的。因此，在 Alexandrov 空间的情形下，命题 4.5 中所述的 AMV-调和函数刻画，比仅要求连续性的假设更强；而在 $\mathbb{R}^n$、Carnot群和流形上则不然（分别参见 [38,定理 2.1.5] 、定理 4.1 和命题 4.2）。最后需要指出，鉴于人们猜想无边界Alexandrov空间具有消失的度量测度边界（见 [32, 第 1.3] 节），且这一点对于二维Alexandrov空间已得到证明（见 [32] 中的定理 1.8），命题 4.5 中针对无边界 Alexandrov 空间 M 的刻画部分与我们的定理 1.1 有关。

参考文献

[1] T. ADAMOWICZ, M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, 《度量测度空间上的调和函数》, Rev. Mat. Complut. 32(1) (2019), 141–186.[2] T. ADAMOWICZ, A. KIJOWSKI, E. SOULTANIS, 《倍增度量测度空间中的渐近平均值调和函数》, 已投稿（2022年）。[3] T. ADAMOWICZ, B. WARHURST, 《Carnot–Carathéodory群上的平均值性质与调和性》, Potential Anal. 52 (3) (2020), 497–525. doi.org/10.1007/s11118-018-9740-4.[4] J. M. ALDAZ, 《几何倍增度量空间上平均算子的有界性》, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 44(1) (2019), 497–503.[5] L. AMBROSIO AND J. BERTRAND, 《曲率有下界的亚历山德罗夫曲面的正则性》, Anal. Geom. Metr. Spaces 2016; 4:282–287.[6] L. AMBROSIO, J. BERTRAND, 《DC微积分》, Math. Z. 288(3-4) (2018), 1037–1080.[7] L. AMBROSIO, M. COLOMBO, S. DI MARINO, 《度量测度空间中的索伯列夫空间：斜率的自反性与下半连续性》, Adv. Stud. Pure Math., 67 (2015), 1–58.[8] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ, 《黎曼Ricci曲率有下界的度量测度空间》, Duke Math. J., 163(7) (2014), 1405–1490.[9] A. ARROYO, J. LLORENTE, 《平面 p-调和函数的渐近平均值性质》, Proc. Amer. Math. Soc. 144(9) (2016), 3859–3868.[10] A. BJÖRN, J. BJÖRN, 《度量空间上的非线性势理论》, EMS Tracts in Mathematics, 17, European Math. Soc., Zurich, 2011.[11] A. BONFIGLIOLI, E. LANCONELLI, F. UGUZZONI, 《分层李群及其次拉普拉斯算子的势理论》, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2007.[12] N. BOULEAU, F. HIRSCH, 《维纳空间上的狄利克雷型与分析》, De Gruyter Studies in Mathematics, 14, Berlin, 1991. x+325 pp.[13] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, 《非正曲率度量空间》Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften[数学科学基础原理], 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.[14] E. BRUÉ, D. SEMOLA, 《通过拉格朗日流的正则性证明 $RCD(K, N)$空间维数的常数性》, Comm. Pure Applied. Math. 73(6) (2020), 1141–1204.[15] E.BRUÉ, A. NABER, D. SEMOLA, 《里奇曲率有下界空间的边界正则性与稳定性》, Invent. math. 228 (2022), 777–891.[16] E.BRUÉ, A. MONDINO, D. SEMOLA, 《里奇曲率有下界空间的度量测度边界》, arXiv:2205.10609。

[17] D. BURAGO, Y. BURAGO, S. IVANOV, 《度量几何教程》数学研究生教材，第33卷。美国数学会，普罗维登斯（2001）。[18] D. BURAGO, S. IVANOV, Y. KURYLEV, 《度量测度拉普拉斯算子的谱稳定性》, Israel J. Math. 232(1) (2019), 125– 158.[19] L. CAPOGNA, M. COWLING, 《Carnot群中的共形性与 Q-调和性》, Duke Math. J. 135(3) (2006), 455–479.[20] L. CAPOGNA, N. GAROFALO, 《Carnot-Carathéodory度量下Carnot-Carathéodory空间的NTA域中次椭圆方程非负解的边界行为》, J. Fourier Anal. Appl. 4(4-5) (1998), 403–432.[21] J. CHEEGER, 《度量测度空间上Lipschitz函数的可微性》, Geom. Funct. Anal. 9(3) (1999), 428–517.[22] A. CÓRDOBA, J. OCÁRIZ, 《关于广义拉普拉斯算子与极小曲面的一则注记》, arXiv:1812.07897，即将发表于Bull. Lond. Math. Soc., doi: 10.1112/blms.12314.[23] D. DANIELLI, 《非线性次椭圆方程解的边界正则性》, Indiana Univ. Math. J. 44(1) (1995), 269–286.[24] G. DE PHILIPPIS, N. GIGLI, 《里奇曲率有下界的非坍缩空间》, J. Éc. polytech. Math. 5 (2018), 613–650.[25] F. FERRARI, Q. LIU, J. MANFREDI, 《通过平均值性质刻画海森堡群上的p-调和函数》, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (7) (2014), 2779–2793.[26] F. FERRARI, A. PINAMONTI, 《通过渐近平均值公式刻画Carnot群中的q-调和函数》, Po- tential Anal. 42(1) (2015), 203–227.[27] M. GACZKOWSKI, P. GÓRKA, 《度量测度空间上的调和函数：收敛与紧性》, Potential Anal. 31, 203–214 (2009).[28] N. GIGLI, A. TYULENEV, 《强可整流空间上的Korevaar–Schoen能量》, Calc. Var. Partial Differential Equations 60(6) (2021), Paper No. 235, 54 pp.[29] P. HAJŁASZ, P. KOSKELA, 《索伯列夫度量庞加莱》, Mem. Amer. Math. Soc., 145 (2000).[30] W. HANSEN, H. HUEBER, 《幂零李群上次拉普拉斯算子的狄利克雷问题——正则性的几何判据》, Math. Ann. 276(4) (1987), 537–547. [31] J. HEINONEN, P. KOSKELA, N. SHANMUGALINGAM, J. TYSON, 《度量测度空间上的索伯列夫空间：基于上梯度的方法》, 新数学专著，第27卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015.[32] V.KAPOVITCH, A.LYTCHAK, A.PETRUNIN, 《亚历山德罗夫空间上的度量测度边界与测地流》, J. Eur. Math. Soc. 23, (2021), no. 1, 29–62.[33] Y. KITABEPPU, 《里奇曲率有下界的度量测度空间上的Bishop型不等式》, Proc. Amer. Math. Soc. 145(7) (2017), 3137–3151.[34] B. KLEINER, 《Gromov多项式增长群定理的新证明》, J. Amer. Math. Soc. 23(3) (2010), 815–829.[35] N. KOREVAAR, R. SCHOEN, 《度量空间目标上的索伯列夫空间与调和映射》, Comm. Anal. Geom. 1(3-4) (1993), 561–659.[36] P. KOSKELA, K. RAJALA, N. SHANMUGALINGAM, 《度量测度空间中Cheeger调和函数的利普希茨连续性》, J. Funct. Anal. 202(1) (2003), 147–173. [37] P. LI, 《几何分析》。剑桥高等数学研究，第134卷。剑桥大学出版社，剑桥，2012。x+406.[38] J. LLORENTE, 《平均值性质与唯一延拓》, Commun. Pure Appl. Anal. 14(1) (2015), 185–199.[39] A. LYTCHAK, S. STADLER, 《二维中的里奇曲率》, 即将发表于J. Eur. Math. Soc.[40] J. MANFREDI, M. PARVIAINEN, J. ROSSI, 《 p-调和函数的定义与性质》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 11(2) (2012), 215–241.[41] J. MANFREDI, M. PARVIAINEN, J. ROSSI, 《与拔河博弈相关的一类非线性抛物方程的渐近平均值刻画》, SIAM J. Math. Anal. 42(5) (2010), 2058–2081.[42] A. MINNE, D. TEWODROSE, 《度量测度空间中的渐近平均值拉普拉斯算子》, J. Math. Anal. Appl. 491(2) (2020), 124330.[43] A. MINNE, D. TEWODROSE, 《度量测度空间中的对称化与非对称化渐近平均值拉普拉斯算子》, arXiv:2202.09295.[44] A. MONDINO, A. NABER, 《里奇曲率有下界的度量测度空间的结构理论》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 21(6) (2019), 1809–1854.[45] R. MONTI, F. SERRA CASSANO, 《Carnot-Carathéodory空间中的曲面测度》, Calc. Var. Partial Differential Equations 13(3) (2001), 339–376.[46] Y. OTSU, T. SHIOYA, 《亚历山德罗夫空间的黎曼结构》, 《微分几何杂志》39(3) (1994), 629–658.[47] F. PACARD, X. XU, 《黎曼流形中的常平均曲率球面》, Manuscripta Math. 128(3) (2009), 275–295.[48]A. PETRUNIN, 《亚历山德罗夫与Lott–Villani–Sturm的相遇》, Münster J. of Math. 4 (2011), 53–64, http://cn.arxiv.org/abs/1003.5948v1.[49] I. PRIVALOFF, 《论调和函数》, Rec. Math. Moscou (Mat. Sbornik), 32 (1925), 464–471。

[50] YU. G. RESHETNYAK，有界曲率二维流形，载于几何学 *IV*，第70卷，《数学科学百科全书》，第3–163、245–250页。施普林格，柏林，1993年。[51] N. SHANMUGALINGAM，牛顿空间：将索博列夫空间扩展到度量测度空间，《Rev. Mat. Iberoamericana》16(2)（2000年），243–279。[52] K.-T. STURM，《度量测度空间的几何学 I》，《数学学报》196(1)（2006年），65–131。[53] K.-T. STURM，度量测度空间的几何学 *II*。《数学学报》196(1)（2006年），133–177。[54] K.-H. TAN，*Carathéodory*-卡诺空间之间的索博列夫类与水平能量极小化映射，《当代数学通讯》6(2)（2004年），315–347。[55] M. TROYANOV，黎曼曲面序列的集中紧致性原理，《庞加莱研究所年刊：非线性分析》，第8卷，第5期，（1991年），第419–441页。[56] M. TROYANOV，*Alexandrov*意义下的有界积分曲率曲面，法国数学会年度活动，1–18，2009年。[57] M. TROYANOV，*Alexandrov*有界积分曲率曲面，arXiv:2201.03354。[58] C. VILLANI，里奇曲率界的合成理论，《日本数学杂志》11(2)（2016年），219–263。[59] F. W. WARNER，可微流形与李群基础。*1971*年版的校订重印本，《数学研究生教材》第94卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1983年。[60] H.-C. ZHANG、X. ZHONG、X.-P. ZHU，映入奇异空间的调和映射的定量梯度估计，《中国科学：数学》62(11)（2019年），2371–2400。[61] H.-C. ZHANG、X.-P. ZHU，亚历山德罗夫空间上的丘成桐梯度估计，《微分几何杂志》91(3)（2012年），445–522。

T.A.：波兰科学院数学研究所，希尼亚德茨基街8号，华沙，00-656，波兰电子邮箱：tadamowi@impan.pl A.K.：度量空间分析部，冲绳科学技术大学院大学，冲绳，904-0495，日本电子邮箱：antoni.kijowski@oist.jp E.S.：拉德堡德大学，IMAPP，海恩达尔瑟韦赫135号，6525 AJ奈梅亨，荷兰电子邮箱：elefterios.soultanis@gmail.com