arXiv:2301.06539v1 [math.AC] 16 Jan 2023

超曲面环中高度三 Gorenstein 理想的 Rees 代数方程

MATTHEW WEAVER

Abstract. 我们研究超曲面环中余维为 3 的完美 Gorenstein 理想的 Rees 代数。通过引入修正的雅可比对偶并应用递归算法，我们给出这些环的定义理想的极小生成集。得知定义方程后，我们进一步探究这些 Rees 代数的性质，例如Cohen-Macaulay性和Castelnuovo-Mumford正则性。

1. Introduction

本文考察一类特殊理想的 Rees 代数，并探究这些环的性质。对于 Noether环 R 中的理想 $I=(f_1,\dots,f_n)$，I 的 Rees 代数是分次子代数 $\mathcal{R}(I)$ $=R[f_1t,\dots,f_nt]=R\oplus It\oplus I^2t^2\oplus\cdots\subset R[t]$。从几何上看，$\mathcal{R}(I)$ 是沿闭子概形 $V(I)$ 对谱 Spec(R) 进行爆炸所得空间的齐次坐标环。存在一个自然的 R-代数满同态 $\Psi\colon R[T_1,\dots,T_n]\to\mathcal{R}(I)$，由 $\Psi(T_i)=f_it$ 给出。其核 $\mathcal{J}=\ker\Psi$ 是 $\mathcal{R}(I)$ 的定义理想，十分值得关注，因为 Ψ 诱导出一个同构 $\mathcal{R}(I)\cong R[T_1,\dots,T_n]/\mathcal{J}$。寻找 $\mathcal{J}$ 的极小生成集，即 $\mathcal{R}(I)$ 的定义方程，已成为一个基本问题，近年来受到广泛研究（例如参见 [25, 19, 24, 29, 16, 30, 9, 15, 5, 18, 3, 32]）。

尽管这一问题已得到广泛研究，但目前已知的 Rees 代数的定义方程仅适用于少数情形。由于 $\mathcal{J}$ 编码了 I生成集中的所有多项式关系，要彻底解决这一问题，就需要对 I 的结构及其 Syzygy有所了解。关于二阶完全理想的研究已取得许多成果；根据 Hilbert-Burch定理，这类理想由近方阵的极大子式生成 [6]。在多种不同假设下，人们对这些理想及其 Rees代数进行了研究（例如参见 [24, 25, 1, 5, 16, 22, 23, 32]）。此外，近年来，三阶完美Gorenstein理想及其 Rees代数也备受关注。与二阶完全理想类似，这些理想具有特定的结构和自由分解。根据 Buchsbaum-Eisenbud结构定理，这些理想由方交错矩阵的次极大 Pfaffian生成 [2]。人们在不同的设定下运用多种方法研究了这些理想的 Rees代数（例如参见 [15, 24, 19]）。

本文研究超曲面环中三阶完美Gorenstein理想的 Rees代数。尽管 Rees环的定义方程已得到广泛研究，但文献中的大多数结果都要求所讨论的理想属于 $k[x_1,\dots,x_d]$，即定义在域 k 上的多项式环。研究这一新设定下理想的 Rees代数有着很强的几何动机。由于 Rees 环是沿着 $V(I)$ 对 Spec(R) 进行爆炸的代数实现，

改变环会体现为对不同概形进行爆炸。近期，在确定超曲面环中二阶完美理想的Rees代数定义方程方面， [32]取得了进展。在此基础上，我们研究这些环中的三阶完美Gorenstein理想，并考察其 Rees代数的定义方程。

本文旨在将 Rees代数研究中的一项经典结果推广到超曲面环的设定。在 [24], Morey 考虑了 $k[x_1, \dots, x_d]$中的一个线性呈示的三阶完美Gorenstein理想。该理想的 Rees 环的定义方程由此得到，并且证明存在唯一一个非平凡方程，它可以确定为雅可比对偶矩阵的极大子式的最大公因式。在我们的设定中，我们证明这一结论不再成立，但经过修改并重复这一过程后，会出现类似的现象。主要结果 定理 5.2 和 定理 5.7 (a) 重述如下。

定理1.1. 设 $S = k[x_1, \dots, x_{d+1}]$ 为 k， $f \in S$为一个次数为 m的齐次多项式，且 $R = S/(f)$。设 I 为一个具有交错表示矩阵 φ （其项均为线性项）的三阶完美 Gorenstein R-理想。令 $\bar{\cdot}$表示模 (f) 的像。若 I满足 $G_d,\ I_1(\varphi) = (x_1, \dots, x_{d+1})$, 且 $\mu(I) = d+1$，则 $\mathcal{R}(I)$ 的定义理想 $\mathcal{J}$为

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{L}_m + \left(\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)\right)}$$

其中，数对 $(\mathcal{B}_m, \mathcal{L}_m)$ 是 $(B, \mathscr{L})$ 的 m^{th}最大公因式迭代；对于关于 $\underline{x} = x_1$、……、 x_{d+1} 和 $\mathscr{L} = (\underline{x} \cdot B)$ 的 B修正的雅可比对偶。此外， $\mathcal{R}(I)$ 几乎是 Cohen-Macaulay，当且仅当 $m = 1$时才是 Cohen-Macaulay。

传统上，人们通过使用与理想的表示矩阵相对应的雅可比对偶矩阵，来寻找 Rees 代数的非平凡方程。然而，在上述设定中，雅可比对偶并不足够，因此必须对这样的矩阵进行修改。沿用 [32], 中的构造，我们引入修正的雅可比对偶矩阵。随后，我们构造最大公因式迭代的递归算法，以求得 $\mathcal{J}$ 的方程。这种迭代过程类似于 [1, 5, 32] 中使用的方法。

现在我们介绍本文的组织结构。第2节简要回顾本文所需的理想的Rees代数相关预备知识。此外，我们重述Morey [24, 4.3]的结果，并介绍交错矩阵的雅可比对偶的一些性质。第3节开始研究超曲面环 $R = S/(f)$中 I 的Rees代数 $\mathcal{R}(I)$，其中 I 是一个线性呈示的三阶完美Gorenstein理想。我们在多项式环 S 中引入一个三阶完美Gorenstein理想 J ，并比较Rees代数 $\mathcal{R}(I)$与 $\mathcal{R}(J)$。我们还引入修正的雅可比对偶矩阵。第4节介绍最大公因子迭代的递归算法，该算法生成属于定义理想的方程。随后，我们给出一个充分条件，说明定义理想何时与通过该算法得到的理想相等。第5节证明该条件成立，并且最大公因子迭代方法生成 $\mathcal{J}$的极小生成集。随后研究 $\mathcal{R}(I)$的Cohen-Macaulay性和Castelnuovo-Mumford正则性等性质。

2. Preliminaries

现在我们介绍本文所需的约定和预备知识。

2.1. 理想的 Rees 代数。设 R 是一个 Noether 环， $I=(f_1,\ldots,f_n)$ 是一个具有正深度的 R-理想。存在一个自然的 R-代数齐次满同态

$$\Psi:\ R[T_1,\ldots,T_n]\longrightarrow \mathcal{R}(I)$$

由 $T_i\mapsto f_i t$ 给出。此映射诱导出一个同构

$$\mathcal{R}(I)\cong R[T_1,\ldots,T_n]/\mathcal{J}$$

对于 $\mathcal{J}=\ker\Psi$，它是 $\mathcal{R}(I)$ 的定义理想。此外， $\mathcal{J}$ 的任意极小生成元都称为 $\mathcal{R}(I)$ 的定义方程。映射 Ψ 经由自然映射通过对称代数 $\mathrm{Sym}(I)$ 分解

$$\sigma:\ R[T_1,\ldots,T_n]\longrightarrow \mathrm{Sym}(I)$$

其中，核 $\mathscr{L}=\ker\sigma$ 可由 I 的一个表示容易地描述。事实上，若 $R^m\xrightarrow{\varphi}R^n\to I\to 0$ 是 I 的任意表示，则 $\mathscr{L}$ 由线性形式 $\ell_1,\ldots,\ell_m$ 生成，其中

$$[T_1\ldots T_n]\cdot\varphi=[\ell_1\ldots\ell_m].$$

注意，若 R 是标准分次环，则上述各映射和理想都是双齐次的。由于 Ψ 经由 σ分解，因此有理想的包含关系$\mathscr{L}\subseteq\mathcal{J}$。这一包含关系通常是严格的；但若 $\mathscr{L}=\mathcal{J}$，我们就称 I 是线性型的。正如前面提到的， Ψ 经由 σ分解，因此存在一个自然的满同态 $\mathrm{Sym}(I)\to\mathcal{R}(I)$，其核为 $\mathcal{Q}=\mathcal{J}/\mathscr{L}$。通常用理想 $\mathcal{Q}$ 来衡量：当 I 不是线性型理想时，$\mathrm{Sym}(I)$与 $\mathcal{R}(I)$相差有多大。

现在我们介绍 $\mathcal{J}$中高次生成元的一个常见来源。设$R^m\xrightarrow{\varphi}R^n\to I\to 0$ 是如前所述的 I 的一个表示，则存在一个 $r\times m$ 矩阵$B(\varphi)$，它由 $R[T_1,\ldots,T_n]$ 中的线性项组成，且满足

$$[T_1\ldots T_n]\cdot\varphi=[x_1\ldots x_r]\cdot B(\varphi)$$

其中（$x_1,\ldots,x_r$）是一个包含 φ各项的理想。矩阵 $B(\varphi)$称为 φ相对于序列 $x_1,\ldots,x_r$ 的雅可比对偶。注意，$[x_1\ldots x_r]\cdot B(\varphi)=[\ell_1\ldots\ell_m]$，其中 $\ell_1,\ldots,\ell_m$ 是如前所述定义 $\mathrm{Sym}(I)$ 的方程。需要指出的是，一般来说，该矩阵并不唯一。然而，若 $R=k[x_1,\ldots,x_d]$ 且 φ的各项都是线性的，则存在一个 $B(\varphi)$，它相对于 $x_1,\ldots,x_d$，由 $k[T_1,\ldots,T_n]$ 中的线性项组成，并且是唯一的。

理想 I称为满足条件 G_s，如果对所有满足 $\dim R_{\mathfrak{p}}\le s-1$ 的 $\mathfrak{p}\in V(I)$，都有 $\mu(I_{\mathfrak{p}})\le\dim R_{\mathfrak{p}}$。等价地，当且仅当对所有 $1\le j\le s-1$，$\mathrm{ht}\,\mathrm{Fitt}_j(I)\ge j+1$时， I满足 G_s；其中，对于任意如上所述的表示 φ， $\mathcal{J}(I)=I_{n-j}(\varphi)$ 是 I 的Fitting理想。如果对所有 s， I 都满足 G_s，则称 I 满足 G_∞。

最后，我们介绍两个与 $\mathcal{R}(I)$相关的代数。I 的伴随分次环为 $\mathcal{G}(I)=\mathcal{R}(I)\otimes_R R/I\cong\mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)$。如果 R 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$、剩余域为 k的局部环，则 I 的特殊纤维环为 $\mathcal{F}(I)=\mathcal{R}(I)\otimes_R k\cong\mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$。其 Krull维数 $\ell(I)=\dim\mathcal{F}(I)$是 I的解析扩张度。

2.2. 三阶完全戈伦斯坦理想。 三阶完美Gorenstein理想的 Rees代数是有趣现象和反常现象的丰富来源。由于这些理想具有预先规定的结构和自由分解，因此是自然的研究对象。根据Buchsbaum-Eisenbud定理 $[2,\ 2_{\text{。}}\ 1]$, 这些理想由一个交错矩阵表示。此外，这些理想可以由此类矩阵的次极大Pfaffian生成。我们首先回顾 Morey 关于 Rees 代数方程研究的一项经典结果，并将其重述以供参考。

定理 2.1（[24, 4.3]）。设 $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 k 上的一个完美 Gorenstein I 理想，其级为 3，且具有由线性项组成的交错表示矩阵 R。若 φ 满足条件 I，且 G_d （ μ）I，则 $= d + 1$（ $\mathcal{R}$）的定义理想为

$$\mathcal{J} = \mathscr{L} + \left(\gcd I_d(B(\varphi))\right)$$

其中， B（φ）是相对于 φ 的 $\underline{x} = x_1$的雅可比对偶，....., 而 x_d 是 $\mathscr{L} =$（$\underline{x} \cdot B$（φ））。此外， $\mathcal{R}$（I）是 Cohen-Macaulay 的。

这里，gcd I_d（B（φ））表示雅可比对偶 B（φ）的 $d \times d$ 阶子式的最大公因子，其中的项属于 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$。虽然这一结果确实给出了定义理想的一个生成集，但就我们的目的而言，我们需要更精确地描述这个最大公因子是如何出现的。为了描述上述雅可比对偶的子式如何分解，我们引入克莱姆法则引理。

引理 2.2（[1, 4.3]）。设 R 是一个交换环， $[a_1 \ldots a_r]$ 是一个 $1 \times r$ 矩阵， M 是一个元素属于 R 的 $r \times (r-1)$ 矩阵。对于 $1 \leq t \leq r$，令 M_t 表示从 M 中删除第 t^{th} 行后得到的（$r-1$）$\times$（$r-1$）子矩阵，并设 $m_t =$ det M_t。则在环 $R/$（$\underline{a} \cdot M$）中

$$\overline{a_t} \cdot \overline{m_k} = (-1)^{t-k} \overline{a_k} \cdot \overline{m_t}$$

对所有 $1 \leq k$、$t \leq r$ 均成立。

由此，我们可以说明在 $B(\varphi)$的设定下，定理 2.1中的极大子式如何分解。

命题 2.3。 在定理 2.1的假设下，令 B_i 表示从 $B(\varphi)$中删除第 i^{th} 列后得到的子矩阵。存在一个多项式$g \in k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 使得对于所有 $1 \leq j \leq d+1$，均有$\det B_i = (-1)^{i+1} T_i \cdot g$。

证明。将 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ 和 $\underline{T} = T_1, \ldots, T_{d+1}$ 分别记为两组不定元序列，我们断言 B(**φ**) $\cdot [\underline{T}]^t = 0$。由于 $[\underline{x}] \cdot B$(**φ**) $= [\underline{T}] \cdot \varphi$，我们有

$$[\underline{x}] \cdot B(\varphi) \cdot [\underline{T}]^t = [\underline{T}] \cdot \varphi \cdot [\underline{T}]^t = 0$$

因为 φ 是一个交错矩阵。由于 φ 由 $k[x_1, \ldots, x_d]$中的线性项构成， B(φ的各项属于 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$。因此可得 $B(\varphi) \cdot [\underline{T}]^t = 0$。现在对引理 2.2应用于 $[\underline{T}]$ 以及 B(φ的转置，可得

$$T_i \cdot (\det B_j) = (-1)^{i-j}\, T_j \cdot (\det B_i)$$

在 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 中对所有 $1 \leq i$、 $j \leq d+1$ 均成立，结论得证。 □

注意，命题 2.3 中的方程恰好是以下矩阵各子式的最大公因子： B(φ)， $g =$ 最大公因式 I_d(B(φ))，如定理 2.1所述。

3. Ideals of Hypersurface Rings

现在，我们开始研究 Rees代数 $\mathcal{R}(I)$，其中 I 是超曲面环中一个三阶完美Gorenstein理想。我们引入第二个理想 J，它也是三阶完美Gorenstein理想，并且与 I 密切相关。我们研究 Rees环 $\mathcal{R}(I)$ 和 $\mathcal{R}(J)$ 之间的关系，以及它们的定义理想。

设定 3.1. 设 $S = k[x_1, \ldots, x_{d+1}]$ 为 k一个无限域， $f \in S$为次数为 $m \geq 1$的齐次多项式，且 $R = S/(f)$。设 I 为一个完美 Gorenstein R理想，其级为 3，且具有表示矩阵 φ ，该交错表示矩阵在R中由线性项组成。进一步假设 I 满足条件 G_d，~~$\mu(I) = d+1$~~，且 $I_1(\varphi) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$。

注意， d 由 [2, 2可知必为偶数。2]沿着 [32], 的路径，我们立即回到多项式环，并得到一个与 S相关的 I理想，它同样是完美的 Gorenstein 理想，且级为三。

记号 3.2. 令 $\cdot$ 表示模理想 (f) 的像，并令 ψ 为一个由 S 中的线性项构成的 $(d+1) \times (d+1)$ 交错矩阵，其中 $I_1(\psi) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$，且满足 $\varphi = \overline{\psi}$。记 $[\ell_1 \ldots \ell_{d+1}] = [T_1 \ldots T_{d+1}] \cdot \psi$，我们考虑 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$-理想 $\mathscr{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}, f)$。

当然，这样的矩阵 ψ 存在，并且我们注意到它是唯一的，且当 $m \geq 2$ 时自动满足 $I_1(\psi) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$。若 $m = 1$，则 ψ 不唯一，但可以任选这样的矩阵。

命题 3.3. 存在一个完美的 Gorenstein S-理想 J，其级为 3，并由 ψ 表示。此外，J 是线性型。

证明。要证明 ψ 是一个级为 3 的完美 Gorenstein 理想的表示矩阵，只需证明 ht $\mathrm{Pf}_d(\psi) \geq 3$ by [2, 2.1]。注意，该理想在 R 中的像恰好是 φ的相应 Pfaffian子式理想。由于通过取 R，高度至多会降低，因此根据 [2, 2.1]，我们有 ht $\mathrm{Pf}_d(\psi) \geq$ ht $\mathrm{Pf}_d(\psi) =$ ht $\mathrm{Pf}_d(\varphi) = 3$，因为 I 是一个级为 3 的完美 Gorenstein 理想。于是第一个断言成立，并且这样的理想 J 存在。

要证明 J 是线性型，只需证明 J 满足 G_∞ by [9, 2.6]。然而，由于 $\mu(J) = d+1 = \dim S$，只需证明 J 满足 G_{d+1}。回忆第2节，该条件可以用 Fitting理想的高度来解释。重复前面的论证，注意 J 的 Fitting理想在 R 中的像是 I的相应 Fitting理想。此外，取 R时，这些理想的高度至多会降低。因此，对于所有 $1 \leq i \leq d-1$，都有 ht $\mathrm{Fitt}_i(J) \geq$ ht $\mathrm{Fitt}_i(I) \geq i+1$，因为 I 满足 G_d。由此可知， J 也满足 G_d。因此，要得出 J 满足 G_{d+1}，我们只需证明 J 的 d^{th} 个 Fitting理想的高度至少为、因而等于 $d+1$。然而，该理想是 $\mathrm{Fitt}_d(J) = I_1(\psi) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$，其高度显然为最大高度。□

由于 J是线性型，注意到 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$-理想 $(\ell_1, \ldots, \ell_{d+1})$ 恰好是定义 $\mathrm{Sym}(J) \cong \mathcal{R}(J)$ 的理想。此外，由于 $\varphi = \overline{\psi}$，可知 $\overline{\mathscr{L}}$ 是 $\mathrm{Sym}(I)$ 的定义理想。由此可见， $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]/\mathscr{L} \cong R[T_1, \ldots, T_{d+1}]/\overline{\mathscr{L}} \cong \mathrm{Sym}(I)$，因此 $\mathscr{L}$是定义 $\mathrm{Sym}(I)$ 的理想，它是 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 的商环。因此，定义 $\mathrm{Sym}(J)$ 和 $\mathrm{Sym}(I)$ 的 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$-理想之间存在明显的关系，因为这些理想仅相差生成元 f。自然地，我们可以问，定义

$\mathcal{R}(J)$ 和 $\mathcal{R}(I)$ 的理想之间是否存在类似的联系。在回答这个问题之前，我们先对 $\mathcal{R}(I)$ 的定义理想 $\mathcal{J}$ 提供另一种描述，然后引入一个定义 $\mathcal{R}(I)$ 的理想，作为 $S[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 的商环。

命题 3.4. 在以下假设下：设定 3.1 和 $\mathscr{L}$ 如 记号 3.2所述，$\mathcal{R}(I)$ 的定义理想满足 $\mathcal{J} = \mathscr{L} : (x_1,\dots,x_{d+1})^\infty$。

证明。由于 I 满足条件 G_d，对于任意非极大的齐次素R理想 $\mathfrak{p}$，$I_\mathfrak{p}$ 作为一个 $R_\mathfrak{p}$ 理想满足 G_∞，因此根据 [9, 2.6]，它属于线性型。于是$\mathcal{J}_\mathfrak{p} = \overline{\mathscr{L}}_\mathfrak{p}$ 对于任意这样的素理想 $\mathfrak{p}$ 均成立，因此商环 $\mathcal{Q} = \mathcal{J}/\overline{\mathscr{L}}$的支撑仅位于齐次极大 R理想 $(x_1,\dots,x_{d+1})$。因此，$\mathcal{Q}$ 被 $(x_1,\dots,x_{d+1})$ 的某个幂所湮灭，这说明 $\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathscr{L}} : (x_1,\dots,x_{d+1})^\infty$。然而，由于 $\overline{\mathscr{L}} \subseteq \mathcal{J}$，我们有包含关系 $\overline{\mathscr{L}} : (x_1,\dots,x_{d+1})^\infty \subseteq \mathcal{J}$；并且模掉 $\mathcal{J}$ 后，$(x_1,\dots,x_{d+1})$ 在 $\mathcal{R}(I)$ 中的像是一个正深度理想。□

关于上述证明中 $(x_1,\dots,x_{d+1})\mathcal{R}(I)$ 的级的陈述，源于 R与 $\mathcal{R}(I)$ [14][7, 1.5] 的伴随素理想之间众所周知的对应关系。

注意，与命题 3.4 的证明中一样，$\mathcal{Q} = \mathcal{J}/\overline{\mathscr{L}}$是自然双齐次映射 $\mathrm{Sym}(I(\delta)) \to \mathcal{R}(I)$ 的核，其中 $\delta = \frac{d}{2}$ 是 I的生成元的次数（回想一下，d是偶数）。将 $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_{d+1})$记作齐次极大 S-理想，命题 3.4 中对 $\mathcal{J}$ 的描述表明，$\mathcal{Q} \cong H^0_\mathfrak{m}(\mathrm{Sym}(I(\delta)))$，即 $\mathrm{Sym}(I(\delta))$ 的支撑在 $\overline{\mathfrak{m}}$上的零次局部上同调模。因此，$\mathcal{Q}$ 仅集中在有限多个次数上，所以我们可以使用 [20] 中发展的工具来界定这些次数。

命题 3.5. 在设定 3.1的假设下，$\mathcal{J} = \mathscr{L} : (x_1,\dots,x_{d+1})^m$。

证明。显然，$\mathscr{L} : (x_1,\dots,x_{d+1})^m \subseteq \mathcal{J}$，由命题 3.4可知，因此我们只需证明反向包含。为了证明 $\overline{\mathfrak{m}}^m\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathscr{L}}$，只需证明 $\overline{\mathfrak{m}}^m\mathcal{Q} = 0$，其中 $\mathcal{Q}$ 如上所述。如前所述，$\mathcal{Q} \cong H^0_\mathfrak{m}(\mathrm{Sym}(I(\delta)))$ 因此，在 $\overline{x_i} = (1,0)$ 和 $T_i = (0,1)$ 次的双分次 $R[T_1,\dots,T_{d+1}]$下，我们可以写成

$$\mathcal{Q}_{(*,q)} = \bigoplus_p \mathcal{Q}_{(p,q)} \cong H^0_\mathfrak{m}\big(\mathrm{Sym}_q(I(\delta))\big).$$

由于 $\mathcal{Q}$ 只存在于有限多个次数中，因此只需证明 $\mathcal{Q}$ 在双分次第一分量的次数超过$m-1$ 后为零。

由 [20, 3.8], 可知，对于所有 $p > b_0(\mathscr{D}^q_d) + a(R)$ 以及任意的 q，都有 $\mathcal{Q}_{(p,q)} = 0$，其中$\mathscr{D}^q_d$ 是由有限生成分次R-模组成的齐次复形 $\mathscr{D}^q_\bullet$ 的 d^{th} 模，其零次同调为 $H_0(\mathscr{D}^q_\bullet) \cong \mathrm{Sym}_q(I(\delta))$；$b_0(\mathscr{D}^q_d)$ 是 $\mathscr{D}^q_d$ 在 [20, 2.2], 中的最大生成元次数，而 $a(R)$ 是 R 的 a不变量。由于 R 是一个 Cohen-Macaulay k-代数，R的 a不变量为 $a(R) = \mathrm{reg}\ R - d$，其中 reg R表示 R的 Castelnuovo-Mumford正则性。由于 R 是由一个次数为 m的多项式定义的超曲面环，因此 $a(R) = \mathrm{reg}\ R - d = (m-1) - d$，所以我们只需证明对于任意 q，都有 $b_0(\mathscr{D}^q_d) \le d$。

由于 φ 是一个呈现 I 的 $(d+1)\times(d+1)$ 齐次交错矩阵，且为最小呈现，我们可以取

$$\mathscr{D}^q_\bullet(\varphi) : 0 \longrightarrow \mathscr{D}^q_d \longrightarrow \mathscr{D}^q_{d-1} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathscr{D}^q_1 \longrightarrow \mathscr{D}^q_0 \longrightarrow 0$$

为与 [21, 2.15, 4.7] 相关联的复形 φ。$\mathscr{D}_\bullet^q(\varphi)$ 的零次同调为 $H_0\big(\mathscr{D}_\bullet^q(\varphi)\big) \cong \mathrm{Sym}^q(I(\delta))$，因此我们可以考察此复形以及 $\mathscr{D}_d^q$ 的最大生成元次数。遵循 [21] 中对该复形的描述和记号，并在 [19]，中重述，注意到 φ 的各项都是线性的，对于所有 $1 \le r \le d$，我们有

$$\mathscr{D}_r^q = \begin{cases} K_{q-r,r} = R(-r)^{\beta_r^q} & \text{if } r \le \min\{q,d\} \\ Q_q = R(-(r-1)-\frac{1}{2}(d-r+2)) & \text{if } r = q+1 \le d,\ q \text{ odd} \\ 0 & \text{if } r = q+1,\ q \text{ even} \\ 0 & \text{if } r \ge \min\{q+2, d+1\} \end{cases}$$

对于某些非零贝蒂数 β_r^q。允许 $r = d$ 为偶数，上述表达式可简化为

$$\mathscr{D}_d^q = \begin{cases} K_{q-d,d} = R(-d)^{\beta_r^q} & \text{if } q \ge d \\ Q_q = R(-d) & \text{if } q = d-1 \\ 0 & \text{if } q \le d-2. \end{cases}$$

若 $\mathscr{D}_d^q = 0$，则根据约定，$b_0(\mathscr{D}_d^q) = -\infty$。此外，若 $\mathscr{D}_d^q \neq 0$，我们看到$b_0(\mathscr{D}_d^q) = d$。因此，对于任意 q，都有 $b_0(\mathscr{D}_d^q) \le d$，如所需。□

记号 3.6。根据 命题 3.5 的结果，记理想 $\mathcal{A} = \mathscr{L}:(x_1,\ldots,x_{d+1})^m = \mathscr{L}:(x_1,\ldots,x_{d+1})^\infty$ 属于 $S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$。

注意到 $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{J}$，因此 $\mathcal{A}$ 将 $\mathcal{R}(I)$定义为 $S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$ 的一个商环，因为 $S[T_1,\ldots,T_{d+1}]/\mathcal{A} \cong R[T_1,\ldots,T_{d+1}]/\mathcal{J} \cong \mathcal{R}(I)$。在本文的大部分篇幅中，理想 $\mathcal{A}$ 将是我们关注的对象。从某种意义上说，该理想是$\mathcal{R}(I)$的一个定义理想，并属于多项式环 $S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$，在该环中，冒号理想 $\mathcal{A} = \mathscr{L}:(x_1,\ldots,x_{d+1})^m$ 更容易研究。

我们沿用一条与传统方法平行的路径，通过使用 $\mathrm{Sym}(I)$的定义理想来近似 $\mathcal{R}(I)$ 的定义理想，不过现在改用理想 $\mathcal{A}$ 和 $\mathscr{L}$，而非 $\mathcal{J}$ 和 $\overline{\mathscr{L}}$。传统上，接下来会使用一个雅可比对偶矩阵；然而，由于我们已更新理想，也必须相应更新这样的矩阵。我们回顾 [32]中提出的修正的雅可比对偶这一概念。该矩阵与 $\mathscr{L}$的生成元以及序列 $x_1,\ldots,x_{d+1}$ 相关联。

在介绍这个对象之前，我们先给出定义它以及下一节中相关构造所需的记号。注意，$S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$ 自然地带有双分级，其中 $\deg x_i =$ 为 $(1,0)$，$\deg T_i =$ 为 $(0,1)$。

记号 3.7. 对于 $F \in (x_1,\ldots,x_{d+1})S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$，若其为非零双齐次多项式，令 ∂F 表示一个由双齐次元素组成的列，其双次数 $\deg F -$ 为 $(1,0)$，且满足 $[x_1,\ldots,x_{d+1}]\cdot\partial F = F$。约定当 $F = 0$ 时，∂F 由零组成。

一般而言，∂F 有许多种选择。正如记号所示，若 k 是特征零的域，则可利用微分为 ∂F 作出一个自然的选择。将 $\deg F = (r,*)$ 记作 $r > 0$，我们有欧拉公式 $r\cdot F = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot x_i$，注意到 r 是一个单位。因此，在这种设定下，可以选取 ∂F，使其元素为 $\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i}$。

定义 3.8. 令 $\mathscr{L}$ 和 ψ 如 记号 3.2中所示，取 修正的雅可比对偶 作为 ψ的 $(d+1)\times(d+2)$ 矩阵 $B = [B(\psi),\ |\partial f]$ 其中 $B(\psi)$ 是

雅可比对偶 ψ，其由 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$中的线性项组成，且 ∂f是对应于 f的一列，如 记号 3.7所示。此处 $|$表示通常的矩阵拼接。

注意到，矩阵乘积 $[x_1 \ldots x_{d+1}] \cdot B$ 的各项恰好是 $\mathscr{L}$ 的生成元。在下一节中，我们将运用修正的雅可比对偶及类似构造，在 $\mathcal{A}$ 中生成方程。不过现在，我们必须给出 $\mathcal{A}$ 的另一种描述。

沿用 [18], 中的方法，我们找到一个映射到 $\mathcal{R}(I)$ 的环，其核是一个高度为一的理想。我们取此环为 Rees代数 $\mathcal{R}(J)$，注意到 J 根据 命题 3.3是线性型。现在我们研究这些 Rees代数及其定义理想之间的关系。

3.1. 环 $\mathcal{R}(J)$中的理想。 在研究 $\mathcal{R}(J)$ 与 $\mathcal{R}(I)$ 之间的关系之前，我们先引入第三个、也是最后一个三阶完美Gorenstein理想。我们将看到，该理想满足 定理 2.1的假设。随后，我们将利用其 Rees代数的定义理想，给出 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{R}(J)$ 中的像的描述。首先，我们给出一个简短的引理，它常用于避免在分次环中出现某些理想。

引理 3.9. 设 $A = k[y_1, \ldots, y_n]$为 k上的无限域，且 J是由次数为 r的齐次元素生成的理想。假设 I_1，…，I_s是 A的理想，且其中没有一个包含 J。则存在一个次数为 r 的齐次元素 $z \in J$，使得对所有 $1 \leq j \leq s$，均有 $z \notin I_j$。

证明. 这是由一个众所周知的事实得出的：无限域上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并；然后在分次情形下应用中山引理即可。□

命题 3.10. 在 设定 3.1的假设下，设 $S' = k[x_1, \ldots, x_d] \cong S/(x_{d+1})$，并考虑矩阵 $\psi' = \psi S'$。经过适当的线性坐标变换，存在一个 S'-理想 J'，它是完美的 Gorenstein 理想，级为 3，其表示矩阵为 ψ'。此外， J' 满足 G_d。

证明。注意， ψ' 是一个交错（$d+1$）$\times$（$d+1$）矩阵，其元素属于 S'。根据 [2, 2. 1], ，此类理想的存在仅取决于 $\psi' = \psi S'$ 的 Pfaffian子式所生成理想的高度。此外，条件 G_d 取决于 ψ' 的子式理想的高度。因此，只需证明经过适当的坐标变换后，对所有 $2 \leq j \leq d$，都有 $\operatorname{ht} \operatorname{Pf}_d(\psi') \geq 3$，且 $\operatorname{ht} I_j(\psi') \geq d - j + 2$。注意，$\operatorname{Pf}_d(\psi') = \operatorname{Pf}_d(\psi)S'$，并且 $I_j(\psi') = I_j(\psi)S'$。回忆一下， J由 ψ 表示，且根据命题 3.3，它是线性型，因此满足 G_∞。

回忆一下， I 是 R 中一个高度为 3 的理想，而 R 的维数为 d。由于 d 是偶数，可得 $d \geq 4$，因此 $\dim S = d + 1 \geq 5$，从而 $\operatorname{ht} \operatorname{Pf}_d(\psi) = 3 < \dim S$。现在考虑行列式理想 $I_j(\psi)$，其高度至多为 d，其中 $2 \leq j \leq d$。$\operatorname{Pf}_d(\psi)$ 以及高度非最大的理想 $I_j(\psi)$ 各自只有有限多个非极大极小素理想，并且其中没有一个包含 $(x_1, \ldots, x_{d+1})$。因此，根据引理 3.9，存在一个线性形式不属于这些极小素理想中的任何一个。经过可能的线性坐标变换后，可假定 x_{d+1} 恰好是这个线性形式。

由此可见，$\operatorname{ht} \operatorname{Pf}_d(\psi') = \operatorname{Pf}_d(\psi) = 3$ 且 $\operatorname{ht} I_j(\psi') = \operatorname{ht} I_j(\psi) \geq d - j + 2$，对所有满足 $\operatorname{ht} I_j(\psi) \leq d$ 且 $2 \leq j \leq d$ 的 j 都成立。对于此范围内任意具有最大高度且满足 j 的理想 $I_j(\psi)$，在转到 $I_j(\psi)$ 时，其高度必定下降

至 S'。然而，若 ht $I_j(\psi) = d+1$，则 ht $I_j(\psi') =$ ht $I_j(\psi) - 1 = d \geq d-j+2$，因为 $2 \leq j \leq d$。□

注记 3.11。在 命题 3.10中，我们进行了线性坐标变换，并注意到，迄今引入的条件和构造均适用于这种变换。接下来，我们假定已进行了这样的线性调整，并且序列 x_1，……，x_{d+1} 已相应地重新编号。

注意，S'-理想 J' 满足定理 2.1 的假设，因此 $\mathcal{R}(J')$ 的定义方程已知。特别地，这些方程可以由雅可比对偶 $B(\psi')$ 描述，而它恰好是 $B(\psi)$ 的一个子矩阵。事实上，$B(\psi)$ 的各项属于 $k[T_1,\ldots,T_{d+1}]$，且 $B(\psi)$ 的最后一行对应于 x_{d+1}。因此，删除 $B(\psi)$ 的最后一行后，我们得到相对于 x_1，……，x_d 的 ψ' 的雅可比对偶，其中这些元素位于 S' 中。令 B' 表示删除最后一行后从 $B(\psi)$ 得到的这个子矩阵。根据命题 2.3，$B' = B(\psi')$ 的极大子式存在非平凡的最大公因子。

记号 3.12。回顾一下，根据命题 3.3，J 是线性型，因此 $\mathcal{R}(J) \cong S[T_1,\ldots,T_{d+1}]/\mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H} = (\ell_1,\ldots,\ell_{d+1})$，沿用记号 3.2。令 $\widetilde{\ }$表示在 $\mathcal{H}$模掉后，在 $\mathcal{R}(J)$中的像。和之前一样，令 B' 为删去 $B(\psi)$的最后一行后得到的 $d \times (d+1)$矩阵，并考虑 $S[T_1,\ldots,T_{d+1}]$-理想$\mathcal{K} = (\ell_1,\ldots,\ell_{d+1}) + (\text{gcd } I_d(B')) + (x_{d+1})$。

如前所述，我们可以将 B' 与雅可比对偶 $B(\psi')$视为相同，其中 ψ' 如命题 3.10所述。因此，B'的极大子式在 $k[T_1,\ldots,T_{d+1}]$中存在一个最大公因子。

命题 3.13. 环 $\mathcal{R}(J)$ 是一个维数为 $d+2$ 的 Cohen-Macaulay 整环，而理想 $\widetilde{\mathcal{K}}$ 和 $(\widetilde{x_1,\ldots},,x_{d+1})$ 是高度为 1 的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(J)$-理想。此外，$(\widetilde{x_1,\ldots},,x_{d+1})$ 是一个素理想。

证明。关于 $\mathcal{R}(J)$ 是维数为 $d+2$ 的整环这一断言 S 是维数为 $d+1$ 的整环，且 J 是一个具有正高度的理想 [31]，因此很容易得出。此外，J 根据 命题 3.3，是线性型，因此 $\mathcal{R}(J$根据 [9, 2是 Cohen-Macaulay 的。6]。此外，由于 J是线性型，其特殊纤维环为 $\mathcal{F}(J) \cong k[T_1,\ldots,T_{d+1}]$，因此 $(\widetilde{x_1\ldots},,x_{d+1})$ 确实是一个高度为 1 的 Cohen-Macaulay 素理想。

$\widetilde{\ }$要证明 $\mathcal{K}$ 是高度为 1 的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(J)$-理想，注意到 $\mathcal{K}$ 可以写成 $(\ell'_1,\ldots,\ell'_{d+1}) + ($ 最大公因式 $I_d(B')) + (x_{d+1})$，其中 $[\ell'_1\ldots\ell'_{d+1}] = [x_1\ldots x_d]\cdot B'$。注意到，根据命题 3.10 和定理 2.1，$(\ell'_1,\ldots,\ell'_{d+1}) +$(最大公因式 $I_d(B')$) 恰好是 $\mathcal{R}(J')$ 的定义理想。特别地，这个理想是高度为 d 的 Cohen-Macaulay 理想。由于 x_{d+1} 模此理想正则，因此可知 $\widetilde{\ }\mathcal{K}$ 的高度为 $d+1$，且它是 Cohen-Macaulay 的。因此，$\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{R}(J)$ 中一个高度为 1 的 Cohen-Macaulay 理想。□

命题 3.14。取 $\mathcal{K}$ 如 记号 3.12所示，对于任意正整数 i，有如下结论。

(a) $(x_1,\widetilde{\ldots,x_{d+1}})^i = (x_1,\widetilde{\ldots,x_{d+1}})^{(i)}$

(b) $(\widetilde{x_1\ldots},,x_{d+1})^{(i)} = (\widetilde{x_{d+1}^i})$:
$_{\mathcal{R}(J)}\ \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$(c) $\widetilde{\mathcal{K}}^{(i)} = (\widetilde{x_{d+1}^i})$:$_{\mathcal{R}(J)}$ (
$\widetilde{x_1\ldots},,x_{d+1})^{(i)}$

证明。 我们按照以下证明的思路进行 [1, 3。9]。
(a) 暂时将 x_i 的次数设为 1，将 T_i 的次数设为 0，我们看到 $\mathcal{G}\big((x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})\big) \cong \mathcal{R}(J)$，其中 $\mathcal{G}\big((x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})\big)$ 是 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})$ 的伴随分次环。由于 $\mathcal{R}(J)$ 是整环，因此对所有 i，都有 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^i = (x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$。

(b) 我们首先断言 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})\widetilde{\mathcal{K}} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})$。回忆 $\mathcal{K} = (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) + (\gcd I_d(B')) + (x_{d+1})$，其中 $[\ell'_1 \dots \ell'_{d+1}] = [x_1 \dots x_d] \cdot B'$。因此模 $\mathcal{H}$，$\widetilde{\ }$ 而言，我们有 $(\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})$。注意到 $B' = B(\psi')$，其中 ψ' 如命题 3.10 中所述，我们可以写成 $I_d(B') = (g')(T_1, \dots, T_{d+1})$，其中 $g' = \gcd(I_d(B'))$；这是由命题 2.3 得出的。由克莱姆法则可得 $(x_1, \dots, x_d)I_d(B') \subseteq (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1})$，因此

$$(x_1, \dots, x_d)(g') \subseteq (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) : (T_1, \dots, T_{d+1}).$$

然而，注意到 $(\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1})$ 是 $\mathrm{Sym}(J')$ 的定义理想，由命题 3.10 可知，因此 $\mathrm{ht}(\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) = d$ by [24, 2.1]。模去 $(\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1})$ 后，我们便看到 $(T_1, \dots, T_{d+1})$ 是一个正深度理想，它被 $(x_1, \dots, x_d)(g')$ 消去，因此 $(x_1, \dots, x_d)(g') \subseteq (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1})$。注意到 $(\ell'_1 \widetilde{\dots}, , \ell'_{d+1}) \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})$，于是可得 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})\widetilde{\mathcal{K}} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})$。

由此，对于任意正整数 i，我们有 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^i \widetilde{\mathcal{K}}^i \subseteq (\widetilde{x_{d+1}^i})$。在 $\mathcal{R}(J)$ 的高度为一的素理想处局部化后，可知 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)} \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}^i})$，因此 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}^i}) : \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$。像之前一样，将 $\mathcal{K} = (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) + (\gcd I_d(B')) + (x_{d+1})$ 写成这种形式，回顾一下，$(\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) + (\gcd I_d(B'))$ 是 $\mathcal{R}(J')$ 的定义理想。注意，由于 $\mu(J') > \dim S'$，J' 不是线性型，因此 $\gcd I_d(B')$ 在 $k[T_1, \dots, T_{d+1}]$ 中非零，故 $\widetilde{\mathcal{K}} \nsubseteq (x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})$。由于 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})$ 是 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$ 的唯一伴随素理想，因此 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$ 与 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$ 没有共同的伴随素理想。由此可得 $(\widetilde{x_{d+1}^i}) : \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)} \subseteq (x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$。

(c) 如前所述，我们有 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)} \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}^i})$，因此 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(i)} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}^i}) : \mathcal{R}(J)(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$。为证明反向包含，回想一下，$(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})$ 不是 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$ 的伴随素理想。由此并注意到 $\widetilde{x_{d+1}^i} \in \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$，可知 $(\widetilde{x_{d+1}^i}) : \mathcal{R}(J)(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)} \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$。□

结合命题 3.14的 (b) 和 (c) 两部分，可以说 $(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})^{(i)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(i)}$ 是相连 [12]。

推论 3.15。 $\mathcal{R}(J)$-理想 $\mathcal{K}$ 一般位置下为完全交，且是强 Cohen-Macaulay。

证明。回忆命题 3.13，$\mathcal{K}$ 是一个高度为一的 Cohen-Macaulay 理想。从命题 3.14 的证明中我们已经看到，$(x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})$ 不是 $\widetilde{\ }$ $\mathcal{K}$ 的伴随素理想。因此，如果 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{K}$ 的伴随素理想，根据命题 3.14，我们有 $(\widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}}$：$\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{p}} = (x_1 \widetilde{\dots}, , x_{d+1})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}(J)_{\mathfrak{p}}$。因此我们有 $\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}}$，于是 $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}}$，因为 $x_{d+1} \in \mathcal{K}$，这表明 $\mathcal{K}$ 一般位置下为完全交。

注意到 $\widetilde{\mathcal{K}}=(\widetilde{g'},\widetilde{x_{d+1}})$ 其中 $g'=$最大公因式 $I_d(B')$，因此 $\widetilde{\mathcal{K}}$是一个 Cohen-Macaulay 几乎完全交理想，根据 命题 3.13。此外，我们刚刚已经看到 $\mathcal{K}$ 一般位置下为完全交，因此它是一个强 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(J)$-理想，根据 [13, 2。2]。 □

现在我们给出 $\mathcal{R}(J)$-理想 $\mathcal{A}$的另一种描述。注意，这是 Rees代数诱导映射的核 $\mathcal{R}(J)\ \to\mathcal{R}(I)$。考虑分式理想 $\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$，并注意到根据 命题 3.14，它实际上是一个 $\mathcal{R}(J)$-理想，因为 $f\in(x_1,\dots,x_{d+1})^m$。

定理 3.16。在 $\mathcal{R}(J)$ 中，我们有 $\widetilde{\mathcal{A}}=\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$。

证明。令 $\mathcal{D}=\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$，我们首先证明 $\mathcal{D}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$。回顾一下，根据命题 3.13，$\mathcal{R}(J)$ 是一个整环。因此，对于任意 $a\in(x_1,\dots,x_{d+1})^m$，我们有等式 $\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}\cdot\widetilde{a}=\frac{\widetilde{a}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}\cdot\widetilde{f}$。注意到，根据命题 3.14，$\frac{\widetilde{a}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$ 是一个 $\mathcal{R}(J)$-理想，因此可得 $\mathcal{D}(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})^m\subset(\widetilde{f})=\widetilde{\mathscr{L}}$。于是$\mathcal{D}\subseteq\widetilde{\mathscr{L}}:(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})^m=\widetilde{\mathcal{A}}$，依照记号 3.6。

为证明这一包含关系实际上是等式，我们仿照[1, 3.10]的证明进行。回忆一下，$\mathcal{R}(J)$是一个 Cohen-Macaulay 整环，并注意到 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}$ 是一个高度为一的无混杂理想。等价地，作为一个$\mathcal{R}(J)$-模，$\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}$ 满足 Serre 条件 S_2。因此，由于 $\mathcal{D}\cong\widetilde{\mathcal{K}^{(m)}}$且条件 S_2 在同构下保持不变，$\mathcal{D}$ 也同样是一个高度为一的无混杂 $\mathcal{R}(J)$-理想。由 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{A}$可知，只需证明这些理想在 $\mathcal{D}$的关联素理想处局部相等，即可得出结论 $\widetilde{\mathcal{D}}=\mathcal{A}$。由于这些关联素理想的高度均为一，我们证明对任意高度为一的素 $\mathcal{R}(J)$-理想 $\mathfrak{p}$，都有 $\mathcal{D}_\mathfrak{p}=\mathcal{A}_\mathfrak{p}$。

由命题 3.13 可知，$(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$是$\mathcal{R}(J)$中的一个高度为一的素理想。若 $\mathfrak{p}\neq(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$，则可见 $\widetilde{\mathcal{A}}_\mathfrak{p}=\widetilde{\mathscr{L}}_\mathfrak{p}:(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})^m_\mathfrak{p}=(\widetilde{f})_\mathfrak{p}:\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}$，因此 $\mathcal{A}_\mathfrak{p}\subseteq(f)_\mathfrak{p}$，从而 $\mathcal{A}=(f)_\mathfrak{p}$，因为 $f\in\mathcal{A}$。此外，根据命题 3.14，并重复推论 3.15 证明中的论证，可得 $\mathcal{K}_\mathfrak{p}=(\widetilde{x_{d+1}})_\mathfrak{p}$，因此 $\mathcal{D}_\mathfrak{p}=(f)_\mathfrak{p}$ 也成立。

现在假设 $\mathfrak{p}=(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$，我们首先注意到 $\widetilde{\mathcal{A}}\not\subseteq(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$。事实上，$J$ 的解析扩张度为 $\ell(J)=d+1$，因为 $\mathcal{F}(J)\cong k[T_1,\dots,T_{d+1}]$，这一点我们在命题 3.13 的证明中已经看到。此外，根据 [29, 4.3]，我们有 $\ell(I)=d$。利用同构 $\mathcal{R}(I)\cong\mathcal{R}(J)/\mathcal{A}$ 并转到 $\mathcal{F}(I)$，可得 $\widetilde{\mathcal{A}}\not\subseteq(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$。由此，我们看到 $\widetilde{\mathcal{A}}_\mathfrak{p}=\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}$。

回顾命题 3.14 的证明可知，$\widetilde{\mathcal{K}}\not\subseteq(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})$，因此 $\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}_\mathfrak{p}=\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}$ 也成立。由此并结合命题 3.14，我们看到 $(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})_\mathfrak{p}=(\widetilde{x_{d+1}})_\mathfrak{p}:\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}$，因此 $(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})_\mathfrak{p}=(\widetilde{x_{d+1}})_\mathfrak{p}$。于是

$$\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}=\widetilde{\mathcal{A}}_\mathfrak{p}=\widetilde{\mathscr{L}}_\mathfrak{p}:(x_1,\widetilde{\dots,x_{d+1}})^m_\mathfrak{p}=(\widetilde{f})_\mathfrak{p}:(x_1,\widetilde{\dots,x_{d+1}})^m_\mathfrak{p}$$

因此 $(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})^m_\mathfrak{p}\subseteq(\widetilde{f})_\mathfrak{p}$。然而，由于 $f\in(x_1,\dots,x_{d+1})^m$，我们有 $(\widetilde{f})_\mathfrak{p}=(\widetilde{x_1\ \dots},,x_{d+1})^m_\mathfrak{p}=(\widetilde{x_{d+1}})^m_\mathfrak{p}$，故 $\mathcal{D}_\mathfrak{p}=\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}_\mathfrak{p}=\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}=\widetilde{\mathcal{A}}_\mathfrak{p}$。 □

回想一下，根据命题 3.5，理想 $\mathcal{A}$ 是一个饱和理想，可以写成 $\mathcal{A}=\mathscr{L}:(x_1,\dots,x_{d+1})^\infty=\mathscr{L}:(x_1,\dots,x_{d+1})^m$。我们以此结束

本节将证明， m 是使这个第二个等式成立的最小整数，也就是说，它是 $\mathcal{A}$的饱和指数。

命题 3.17. 在设定 3.1的假设下， m 是满足以下条件的最小整数： $\mathcal{A} = \mathscr{L}$: $(x_1, \ldots, x_{d+1})^m$。

证明。反设存在某个正整数 $i < m$ 使得 $\mathcal{A} = \mathscr{L}$: $(x_1, \ldots, x_{d+1})^i$。在 $\mathcal{R}(J)$ 中，我们于是有 $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathscr{L}}$: $(x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^i$。现在在 $\mathfrak{p} = (x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})$ 处局部化，并注意到 $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}(J)_{\mathfrak{p}}$，正如我们在定理 3.16 的证明中所见，我们有 $\mathcal{R}(J)_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{f})_{\mathfrak{p}}$: $(x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^i_{\mathfrak{p}}$，因此 $(x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^i_{\mathfrak{p}} \subseteq (\widetilde{f})_{\mathfrak{p}}$。由于 f 在 S 中的次数为 $m > i$，我们有 $f \in (x_1, \ldots, x_{d+1})^i$，因此 $(\widetilde{f})_{\mathfrak{p}} = (x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^i_{\mathfrak{p}}$。然而，$(\widetilde{f})_{\mathfrak{p}} = (x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^m_{\mathfrak{p}}$ 也成立，这一点我们在定理 3.16 的证明中已经见过。因此，在 $\mathcal{R}(J)_{\mathfrak{p}}$ 中，我们有 $(x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^i_{\mathfrak{p}} = (x_1 \widetilde{\ldots}, , x_{d+1})^m_{\mathfrak{p}}$。现在将其收缩回 $\mathcal{R}(J)$，并注意到根据命题 3.14，该理想的幂与符号幂相同，我们得到

$$(x_1, \widetilde{\ldots, x_{d+1}})^i = (x_1, \widetilde{\ldots, x_{d+1}})^{(i)} = (x_1, \widetilde{\ldots, x_{d+1}})^{(m)} = (x_1, \widetilde{\ldots, x_{d+1}})^m$$

这是不可能的。 □

4. GCD-ITERATIONS

本节中，我们提出一种递归算法，用于生成 $\mathcal{A}$中的方程。该算法改编自修正雅可比对偶迭代中使用的方法 [32] ，并且类似于 [5] 和 [1]中使用的方法。此过程由类似于修正的雅可比对偶的矩阵构造组成。本节首先研究这类矩阵的极大子式如何分解，其方式类似于命题 2.3的证明。

命题 4.1. 在设定 3.1 的假设下，设 C 是一个任意列，其$d+1$元素属于 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$，考虑矩阵 $\mathfrak{B} = [B(\psi) \mid C]$，其大小为（$d+1$）$\times$（$d+2$），并令 $\mathfrak{B}_j$ 表示从 $\mathfrak{B}$中删除第 j^{th} 列后得到的子矩阵。存在一个多项式 $\mathfrak{g} \in S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$，使得对所有 $1 \leq j \leq d+1$，均有 $\det \mathfrak{B}_j = (-1)^{j+1} T_j \cdot \mathfrak{g}$。特别地， $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{B}$的极大子式的最大公因子。

证明。 我们对命题 2.3的证明作如下修改。令 $\underline{x} = x_1, .., x_{d+1}$和 $\underline{T} = T_1, .., T_{d+1}$，注意到

$$[\underline{x}] \cdot B(\psi) \cdot [\underline{T}]^t = [\underline{T}] \cdot \psi \cdot [\underline{T}]^t = 0$$

由于 ψ是一个交错矩阵。又因 $B(\psi)$ 的元素属于 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$，可知 $B(\psi) \cdot [\underline{T}]^t = 0$。令 $[\underline{T} \mid 0]$ 表示行向量 $[T_1 \ldots T_{d+1}\, 0]$，并注意到 $\mathfrak{B} \cdot [\underline{T} \mid 0]^t = 0$。现在将引理 2.2 应用于 $[\underline{T} \mid 0]$ 以及 $\mathfrak{B}$的转置，可得

$$T_i \cdot (\det \mathfrak{B}_j) = (-1)^{i-j}\, T_j \cdot (\det \mathfrak{B}_i)$$

在 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 中对所有 $1 \leq i$、 $j \leq d+1$ 均成立，结论得证。 □

注 4.2. 注意， $\mathfrak{B}$ 有 $d+2$ 列，但我们有意省略了指标$j = d+2$ 在 命题 4.1中。将上文证明中的 引理 2.2 应用于此指标，只能说明 $\det B(\psi) = 0$。不过，利用克莱姆法则即可得知这一点，因为 $B(\psi) \cdot [\underline{T}]^t = 0$；或者注意到，根据 J是线性型命题 3.3。

根据 命题 4.1，现在可以引入最大公因子迭代方法。同样，在本节中，我们对 $S[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 采用双分次，规定 deg x_i $=(1,\ 0)$ 和 deg $T_i=(0,\ 1)$。

算法 4.3。我们递归地定义由矩阵和理想组成的有序对。令 $\mathcal{B}_1=B$ 和 $\mathcal{L}_1=\mathscr{L}$ 分别为 B 修正的雅可比对偶以及记号 3.2 中的 $\mathscr{L}$。假设 $2\le i\le m$ 以及后续有序对 $(\mathcal{B}_1,\mathcal{L}_1)\dots,(\mathcal{B}_{i-1},\mathcal{L}_{i-1})$ 已通过归纳法构造。为构造 i^{th} 有序对 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{L}_i)$，令 $g_{i-1}=$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})$，并设

$$\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_{i-1}+(g_{i-1}),\qquad \mathcal{B}_i=[B(\psi)\,|\,\partial g_{i-1}]$$

其中 ∂g_{i-1} 是一个列向量，其元素为双齐次元素，且具有常数双次数，使得

$$g_{i-1}=[x_1\dots x_{d+1}]\cdot\partial g_{i-1}$$

如 记号 3.7中所述。我们将有序对 $(\mathcal{B}_i,\ \mathcal{L}_i)$ 称为 i^{th} 的最大公因子迭代，即 $(B,\ \mathscr{L})$。

注意到这些矩阵类似于修正的雅可比对偶，因此根据命题 4.1，便可理解这些最大公因式是如何出现的。回顾记号 3.7，按照约定，若 $g_{i-1}=0$ 则 ∂g_{i-1} 全由零组成。因此，下一个方程 g_i以及此后所有方程也都为零。最终将证明这些方程非零，但目前我们保留这种可能性。

命题 4.4。 在算法 4.3的设定下，若最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)\ \neq\ 0$ 对某个$1\le i\le m$成立，则其双次数为deg(最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i))\ =(m-i,i(d-1))$。

证明。由于这些方程是递归定义的，我们采用归纳法。在 $i=1$ 的情形下，注意到 $\mathcal{B}_1=[B(\psi)\ |\partial f]$，这是一个修正的雅可比对偶矩阵。注意到 $B(\psi)$ 由 $k[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 中的线性项组成，而 ∂f 由 $S[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 中双次数为 $(m-1,0)$ 的项组成，由此根据命题 4.1 得到初始断言。现在假设 $i\ge 2$，并且对所有 $1\le j\le i-1$，若这些方程非零，则 deg(最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_j)$) $=(m-j,j(d-1))$。

注意，如果 $g_i=$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$ 非零，那么 $g_{i-1}=$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})$ 也非零，因此根据归纳假设，deg $g_{i-1}=(m-i+1,(i-1)(d-1))$。于是，$\partial g_{i-1}$ 的各项都是双齐次的，双次数为 $(m-i,(i-1)(d-1))$。再次注意到，$B(\psi)$的各项双次数为 $(0,1)$，由命题 4.1 可得 deg(最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$) $=(m-i,i(d-1))$。□

注意，最大公因数迭代的方法经过 m 步后会在 算法 4.3中终止。如果 $g_m=$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$ 非零，那么根据命题 4.4，其双次数必为 $(0,m(d-1))$。因此，如记号 3.7中所述，不存在对应于 g_m 的列，所以该过程必定终止。如果 $g_m=0$，该过程可以继续，但之后的每个方程也都为零。因此，无论如何，在m^{th} 步后得到的理想都相同。

根据 记号 3.7，算法 4.3 中的矩阵并非唯一，因为最后一列通常有多种选择。不过，我们声称该算法生成的理想是良定义的。但首先，我们给出一个之后会频繁用到的简短引理。

引理 4.5（[1, 4.4]）。设 R是一个环，且 $\underline{a}=a_1,\dots,a_r$是一个 R-正则序列。若 B和 B' 是具有 r行的两个矩阵，并满足 $(\underline{a}\cdot B)\ =(\underline{a}\cdot B')$，则 $(\underline{a}\cdot B)+I_r(B)\ =(\underline{a}\cdot B')\ +I_r$({v20)。

有了这一点，我们现在证明由 算法 4.3 得到的理想是良定义的。

命题 4.6. 理想 $\mathcal{L}_i$ 和 $\mathcal{L}_i +$ （$I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$ 的最大公因式）对于 $1 \leq i \leq m$ 是良定义的。

证明. 我们用归纳法进行证明。对于 $i = 1$，注意到 $\mathcal{L}_1 = \mathscr{L}$ 显然是良定义的，因为它是 Sym(I) 的定义理想，而 Sym(I) 是 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 的商环。现在假设 B 和 B' 是 $\mathcal{B}_1$ 的两个候选项。换言之， B 和 B' 是两个修正的雅可比对偶矩阵。写作 $B = [B(\psi) \,|\, C]$ 和 $B' = [B(\psi) \,|\, C']$，其中 C 和 C' 是列，且满足 $[\underline{x}] \cdot C = f = [\underline{x}] \cdot C'$，如记号 3.7 和定义 3.8 中所述，其中 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_{d+1}$。根据命题 4.1，存在多项式 g 和 g'，属于 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$，使得 $\det B_j = (-1)^{j+1} T_j g$ 且 $\det B'_j = (-1)^{j+1} T_j g'$。这里， B_j 和 B'_j 分别表示从 B 和 B' 中删除第 j^{th} 列所得的子矩阵，其中 $1 \leq j \leq d+1$。我们必须证明 $\mathscr{L} + (g) = \mathscr{L} + (g')$，以完成归纳的初始步骤。如果 g 和 g' 都为零，则无需证明任何内容，因此不失一般性，我们可以假设 $g \neq 0$。

删去 B 和 B' 的首列，根据引理 4.5 ，我们有 $(\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}, f) + \det(B_1) = (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}, f) + \det(B'_1)$。因此，由命题 4.1，我们得到

$$(\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}, f) + (gT_1) = (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}, f) + (g'T_1). \tag{4.1}$$

由此可知， $gT_1 \in (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}, f) + (g'T_1)$。然而，回想一下，根据命题 4.4，$\deg f = (m, 0)$ 和 $\deg gT_1 = (m-1, d)$。因此可得， $gT_1 \in (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}) + (g'T_1)$。若 $g' \neq 0$，重复此论证可知，$g'T_1 \in (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}) + (gT_1)$ 同样成立。若 $g' = 0$，此包含关系显然仍成立。由此可将 (4.1) 改进为

$$(\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}) + (gT_1) = (\ell_2, \ldots, \ell_{d+1}) + (g'T_1). \tag{4.2}$$

因此我们有

$$(\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (gT_1) = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (g'T_1). \tag{4.3}$$

回忆一下， $\mathcal{H} = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1})$，如记号 3.12所示，由命题 3.13可知它是一个素理想。由于 $T_1 \notin \mathcal{H}$，可得 $(\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (g) = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (g')$，因此 $\mathscr{L} + (g) = \mathscr{L} + (g')$，如所需。

若 $m = 1$，则证明完成，因此假设 $m \geq 2$。对于归纳步骤，假设对于某个 $i \leq m$，所有 $1 \leq j \leq i-1$ 下的 $\mathcal{L}_j$ 和 $\mathcal{L}_j + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_j))$ 均有定义。在算法 4.3 的 i^{th} 步骤之前，设 B_{i-1} 和 B'_{i-1} 是两个最大公因子迭代矩阵。由归纳假设可得 $\mathcal{L}_{i-1} + (\gcd I_{d+1}(B_{i-1})) = \mathcal{L}_{i-1} + (\gcd I_{d+1}(B'_{i-1}))$，这表明 $\mathcal{L}_i$ 有定义。在 i^{th} 次迭代中，设 B_i 和 B'_i 是 $\mathcal{B}_i$ 的两个候选项。令 $g_{i-1} = \gcd I_{d+1}(B_{i-1})$ 和 $g'_{i-1} = \gcd I_{d+1}(B'_{i-1})$，则可写作 $B_i = [B(\psi) \,|\, \partial g_{i-1}]$ 和 $B'_i = [B(\psi) \,|\, \partial g'_{i-1}]$，其中 ∂g_{i-1} 和 $\partial g'_{i-1}$ 是记号 3.7 中的两列。写作 $g_i = \gcd I_{d+1}(B_i)$ 和 $g'_i = \gcd I_{d+1}(B'_i)$ 后，我们必须证明 $\mathcal{L}_i + (g_i) = \mathcal{L}_i + (g'_i)$。与之前一样，若 g_i 和 g'_i 均为零，则无需证明，因此不失一般性，可以假设 $g_i \neq 0$。

注意，由于 $g_i \neq 0$，我们也有 $g_{i-1} \neq 0$ 。据此，我们断言 $(\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (g_{i-1}) = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (g'_{i-1})$。在初始情形的证明中，我们已经看到 $i = 2$时这一结论成立。若 $i \geq 3$，注意，归纳假设中的等式 $\mathcal{L}_{i-1} + (g_{i-1}) = \mathcal{L}_{i-1} + (g'_{i-1})$ 表明

$$g_{i-1} \in \mathcal{L}_{i-1} + (g'_{i-1}) = (\ell_1, \ldots, \ell_{d+1}) + (f, g_1, \ldots, g_{i-2}) + (g'_{i-1}), \tag{4.4}$$

其中 g_1、……、g_{i-2} 是此前的方程，依照算法 4.3。

由于 $\mathcal{L}_{i-1}$ 定义良好且 g_{i-1} 非零，因此可知 $g_1,\dots,g_{i-2}$ 也都非零。因此 f, $g_1,\dots,g_{i-2}$ 的双次数的第一分量均至少为 $m-i+2$，依据 命题 4.4。此外，我们还有 $\deg g_{i-1} = (m-i+1,(i-1)(d-1))$，依据 命题 4.4。根据次数的考量，进而可知 (4.4) 可细化为

$$g_{i-1} \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_{i-1}). \tag{4.5}$$

类似的论证表明，如果 $g'_{i-1} \neq 0$，那么 $g'_{i-1} \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g_{i-1})$；而如果 $g'_{i-1} = 0$，则显然成立。因此，$(\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g_{i-1}) = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_{i-1})$，如所述。

利用上面的等式，我们可以写成 $g_{i-1} = u\cdot g'_{i-1} + y$ 其中 $u \in S[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 和 $y \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}$是双齐次元素。如果 $g'_{i-1} \neq 0$，由 命题 4.4以及次数的考量可知，u 必定是一个单位。如果 $g'_{i-1} = 0$，显然可以假设 u 是一个单位。由此，列 ∂g_{i-1} 可以改写为$\partial g_{i-1} = u\cdot\partial g'_{i-1} + \partial y$，其中 $\partial y = \partial g_{i-1} - u\cdot\partial g'_{i-1}$。因此，等式

$$(\ell_2,\dots,\ell_{d+1},g_{i-1}) = (\ell_2,\dots,\ell_{d+1},u\cdot g'_{i-1}+y)$$

并且引理 4.5 表明

$$(\ell_2,\dots,\ell_{d+1},g_{i-1})+\det(B_i)_1 = (\ell_2,\dots,\ell_{d+1},u\cdot g'_{i-1}+y)+\det[B(\psi)\,|\,u\cdot\partial g'_{i-1}+\partial y]_1.$$

由 命题 4.1 以及行列式的多重线性，我们得到

$$(\ell_2,\dots,\ell_{d+1},g_{i-1}) + (g_iT_1) = (\ell_2,\dots,\ell_{d+1},ug'_{i-1}+y) + (ug'_iT_1 + y'T_1), \tag{4.6}$$

其中 $y' =$最大公因式 $I_{d+1}([B(\psi)\,|\,\partial y])$，根据 命题 4.1。然而，回想一下$y \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$，因此 $y'T_1 =$行列式$[B(\psi)\,|\,\partial y]_1 \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$，由 引理 4.5 和注 4.2。由（4.6）可得

$$(\ell_1,\dots,\ell_{d+1},g_{i-1}) + (g_iT_1) = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1},g'_{i-1}) + (g'_iT_1), \tag{4.7}$$

注意到 u 是一个单位。

由上面的 (4.7)，我们有 $g_iT_1 \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1},g'_{i-1}) + (g'_iT_1)$。若 $g'_{i-1} \neq 0$，则其双次数为 $(m-i+1,(i-1)(d-1))$，因此使用命题 4.4 可得 $g_iT_1 \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_iT_1)$，因为 $\deg g_i = (m-i,i(d-1))$。若 $g'_{i-1} = 0$，则 $g'_i = 0$，因此 (4.7) 表明在这种情况下同样有 $g_iT_1 \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_iT_1)$。类似的论证表明 $g'_iT_1 \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g_iT_1)$。因此我们得到

$$(\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g_iT_1) = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_iT_1). \tag{4.8}$$

再次注意到 $\mathcal{H} = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$ 是素理想且 $T_1 \notin \mathcal{H}$，可得 $(\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g_i) = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) + (g'_i)$。因此 $\mathcal{L}_i + (g_i) = \mathcal{L}_i + (g'_i)$，因为 $(\ell_1,\dots,\ell_{d+1}) \subset \mathcal{L}_i$。□

命题 4.7. 存在理想的包含关系，$\mathcal{L}_m +$ (最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$) $\subseteq \mathcal{A}$。

证明。我们归纳地证明，对于 $1 \le i \le m$，$\mathcal{L}_i +$ 最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A}$。当 $i = 1$ 时，显然有 $\mathcal{L}_1 = \mathscr{L} \subset \mathcal{A}$。由克莱姆法则可得 $I_{d+1}(\mathcal{B}_1) = I_{d+1}(B) \subseteq \mathscr{L}$: $(x_1,\dots,x_{d+1}) \subseteq \mathcal{A}$。令 $g_1 =$最大公因式 $I_{d+1}(B)$，由命题 4.1 可得 $(g_1)(T_1,\dots,T_{d+1}) = I_{d+1}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{A}$。模 $\mathcal{A}$ 意义下，$(T_1,\dots,T_{d+1})$ 在 $\mathcal{R}(I)$ 中的像是一个正深度理想，它被 g_1 的像湮灭。因此 $g_1 \in \mathcal{A}$，从而 $\mathcal{L}_1 +$ (最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_1)$) $\subseteq \mathcal{A}$，这就完成了初始步骤。

若 $m = 1$，则我们已完成证明，因此假设 $m \ge 2$ 且 $\mathcal{L}_j +$ (最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_j)$) $\subseteq \mathcal{A}$ 对所有 $1 \le j \le i-1$ 对于某个 $i \le m$。根据算法 4.3 和归纳法

假设，我们有 $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i-1} + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})) \subseteq \mathcal{A}$。因此，我们必须证明最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i) \in \mathcal{A}$。写作 $g_{i-1} = \text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})$，根据克莱姆法则可得

$$I_{d+1}(\mathcal{B}_i) \subseteq (\ell_1, \dots, \ell_{d+1}, g_{i-1}) : (x_1, \dots, x_{d+1}) \subseteq \mathcal{A} : (x_1, \dots, x_{d+1}) = \mathcal{A}$$

作为 $\mathcal{A} = \mathscr{L} : (x_1, \dots, x_{d+1})^\infty$。再次应用 命题 4.1，我们看到 $(g_i)(T_1, \dots, T_{d+1}) = I_{d+1}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A}$，其中 $g_i = \text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$。因此 $g_i \in \mathcal{A}$ 作为 g_i 在 $\mathcal{R}(I$中的像，消去了一个正深度理想，与之前一样。□

由包含关系 $\mathcal{L}_m + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_m)) \subseteq \mathcal{A}$，我们旨在找到足够的判据，以确保这是一个等式。回顾定理 3.16，可知 $\widetilde{\mathcal{A}} = \frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$。现在我们对算法 4.3 得到的理想给出类似的描述。根据命题 3.14，我们有 $(\widetilde{x_1 \ \dots}, , x_{d+1})\widetilde{\mathcal{K}} \subseteq (\widetilde{x_{d+1}})$，因此 $(\widetilde{x_1 \ \dots}, , x_{d+1})^i \widetilde{\mathcal{K}}^i \subseteq (\widetilde{x_{d+1}}^i)$。由此，我们可以对任意 $1 \leq i \leq m$ 考虑 $\mathcal{R}(J)$-理想 $\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^i}{\widetilde{x_{d+1}}^i}$。

定理 4.8。 在 设定 3.1 和 $\mathcal{K}$ 如 记号 3.12中所述，$\sim$有 $\frac{f\mathcal{K}^m}{\widetilde{x_{d+1}}^m} = (\mathcal{L}_m + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_m)))^\sim$ 属于 $\mathcal{R}(J)$。

证明。我们采用与 [1, 4.7] 的证明类似的方法。令 $D_i = \frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^i}{\widetilde{x_{d+1}}^i}$ 和 $D'_i = (\mathcal{L}_i + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_i)))^\sim$，显然，对于任意 $1 \leq i \leq m-1$，都有 $D_i \subseteq D_{i+1}$ 和 $D'_i \subseteq D'_{i+1}$。我们通过归纳法证明，对所有 $1 \leq i \leq m$，均有 $D_i = D'_i$。

设 $i = 1$。我们先证明 $D_1 \subseteq D'_1 = (\mathscr{L} + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(B)))^\sim$。正如命题 3.13 的证明中所指出的，$\mathcal{K}$ 可写为 $\mathcal{K} = (\ell'_1, \dots, \ell'_{d+1}) + (\text{最大公因式 } I_d(B')) + (x_{d+1})$，其中 B' 是从 $B(\psi)$ 中删去最后一行后得到的子矩阵，而 $[\ell'_1 \dots \ell'_{d+1}] = [x_1 \dots x_d] \cdot B'$。因此，模 $\mathcal{H}$ 而言，我们有 $(\ell'_1 \widetilde{\ \dots}, , \ell'_{d+1}) \subset (\widetilde{x_{d+1}})$，于是 $\widetilde{f}(\ell'_1 \widetilde{\ \dots}, , \ell'_{d+1}) \subseteq (\widetilde{f}) = \widetilde{\mathscr{L}}$。令 $g' = \overline{\text{最大公因式}}\ I_d(B')$，并回忆 B' 是 ψ' 的雅可比对偶，它是命题 3.10 中所述的交错矩阵；因此，根据命题 2.3 和命题 4.1，B' 的子式可按与 B 的子式类似的方式分解。分别用 B'_1 和 B_1 表示从 B' 和 B 中删去第一列后得到的子矩阵。根据克莱姆法则，在 $\mathcal{R}(J)$ 中，我们有 $\widetilde{\ \ \ \

正如推论 3.15 的证明中所指出的，回忆一下 $\widetilde{\mathcal{K}} = (\widetilde{g'}, \widetilde{x_{d+1}})$，其中 $g' =_{\sim}$ 最大公因式 $I_d(B')$。由于 $\widetilde{w_i} \in \widetilde{\mathcal{K}}$，需要考虑两种情形。若 $\widetilde{w_i} \in (\widetilde{x_{d+1}})$，则 $\frac{\widetilde{w'w_i}}{\widetilde{x_{d+1}}} \in D'_{i-1} \subseteq D'_i$，结论成立。因此我们可以假设 $w_i \in (g')$，只需取 $w_i = g'$ 即可。令 $(\mathcal{B}_i)_1$ 表示从 $\mathcal{B}_i$ 中删去第一列 $\sim$ $\sim$ 后得到的子矩阵。根据克莱姆法则，在 $\mathcal{R}(J)$ 中有 $\widetilde{x_{d+1}} \cdot \det(\mathcal{B}_i)_1 = \widetilde{g_{i-1}} \cdot \det(B')_1$，其中 $(B')_1$ 是从 B' 中删去第一列后得到的子矩阵，与前面一样。再次根据命题 2.3，$\det B'_1 = g' \cdot T_1$，且根据命题 4.1，$\det(\mathcal{B}_i)_1 = g_i \cdot T_1$，其中 $g_i =$ 最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$。再次注意到 $\mathcal{R}(J)$ 是一个整环，便可推出 $\widetilde{x_{d+1}} \cdot \widetilde{g_i} = \widetilde{g_{i-1}} \cdot \widetilde{g'}$。因此 $\frac{\widetilde{w'w_i}}{\widetilde{x_{d+1}}} = \frac{\widetilde{g_{i-1}} \cdot \widetilde{g'}}{\widetilde{x_{d+1}}} = \widetilde{g_i} \in D'_i$，这表明 $D_i \subseteq D'_i$。

为证明 $D'_i \subseteq D_i$，注意到 $\mathcal{L}_i = (\mathcal{L}_{i-1} + (\text{最大公因式 } I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})))^{\sim}$ 遵循 $\widetilde{\ }$ 算法 4.3。因此，根据归纳假设，$\mathcal{L}_i = D'_{i-1} = D_{i-1} \subset D_i$。此外，前面的论证表明 $\widetilde{g_i} = \frac{\widetilde{g_{i-1}} \cdot \widetilde{g'}}{\widetilde{x_{d+1}}}$，其中 $g_i =$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$、$g_{i-1} =$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_{i-1})$，以及 $g' =$最大公因式 $I_d(B')$。注意，根据归纳假设，$g_{i-1} \in D'_{i-1} = D_{i-1}$，且 $g' \in \mathcal{K}$。因此，$\widetilde{g_i} = \frac{\widetilde{g_{i-1}} \cdot \widetilde{g'}}{\widetilde{x_{d+1}}} \in D_i$，这表明$D'_i \subseteq D_i$。于是 $D'_i = D_i$，归纳证明得以完成。□

本节最后，我们给出一个必要且充分条件，用以判断最大公因子迭代理想是否与 $\mathcal{A}$ 相同。

推论 4.9。 在 设定 3.1的假设下，$\mathcal{A} = \mathcal{L}_m +$(最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$) 属于 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 当且仅当 $\widetilde{\mathcal{K}}^m = \widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}$ 属于 $\mathcal{R}(J)$。

证明。 结合 定理 4.8、命题 4.7和 定理 3.16，可得

$$\frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^m}{\widetilde{x_{d+1}}^m} = (\mathcal{L}_m + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)))^{\sim} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}} = \frac{\widetilde{f}\widetilde{\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}}^m}$$

注意到 $\mathcal{R}(J)$ 是一个整环，结论即得。 □

5. 主要结果

在 推论 4.9中，我们给出了一个条件，用于判断最大公因子迭代算法是否会生成 $\mathcal{A}$ 的生成集，其中该理想定义了 $\mathcal{R}(I)$ 作为 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ 的商环。本节将证明该条件成立，此外，这种迭代方法还能生成 极小 $\mathcal{A}$ 的生成集。我们还将研究 $\mathcal{R}(I)$ 的其他性质，例如 Cohen-Macaulay性和Castelnuovo-Mumford正则性。全文将始终沿用与 [1] 第5节相同的处理方式。

命题 5.1. 在 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$中，有 ht $I_d(B(\psi)) \geq 2$。

证明. 回顾一下，根据命题 3.3，J 是线性型，因此 Sym$(J) \cong \mathcal{R}(J)$。特别地，根据命题 3.13，Sym(J)是一个维数为 $d+2$的整环。由于 ψ由 S中的线性项构成，而 $B(\psi)$由 $k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$中的线性项构成，因此存在一个对称代数的同构 Sym$(J) \cong$ Sym$^{k[T]}(E)$，其中 $E =$coker $B(\psi)$。由于 Sym(J)是一个整环，根据[10, 6.8] ，我们有

$$d + 2 = \dim \operatorname{Sym}(J) = \dim \operatorname{Sym}_{k[T]}(E) = \operatorname{rank} E + \dim k[T_1, \ldots, T_{d+1}].$$

因此 rank $E = 1$，故根据[10, 6.8] ，我们有 ht $I_d(B(\psi)) \geq 2$。 □

现在我们给出本文的主要结果。

定理 5.2。 在满足设定 3.1的假设下，我们有

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}_m + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)).$$

此外， $\mathcal{J}$ $\mathcal{R}$（I）的定义理想满足

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{L}_m + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m))}$$

其中, $\overline{\cdot}$ 表示模（f）后的像。

证明。 我们按照以下证明中的方法进行 [1, 5。3]。由 推论 4.9，只需证明 $\widetilde{\mathcal{K}^m} = \widetilde{\mathcal{K}^{(m)}}$，即可得出 $\mathcal{A} = \mathcal{L}_m +$（最大公因式 I_{d+1}（$\mathcal{B}_m$））， 由此可得$\widetilde{\ }$，从而 $\mathcal{J} = \mathcal{L}_m +$（最大公因式 I_{d+1}（$\mathcal{B}_m$））。回顾一下， $\mathcal{K}$ 是一个强 Cohen–Macaulay $\mathcal{R}$（J）高度为一的理想，且一般位置下为完全交；这由命题 3.13 和 推论 3.15可知。因此，由 [27, 3。4], 只需证明

$$\mu(\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{p}}) \leq \operatorname{ht}\mathfrak{p} - 1 = 1$$

$\widetilde{\ }$对任意包含 $\mathcal{K}$ 且满足 $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 2$ 的素 $\mathcal{R}$（J）理想 $\mathfrak{p}$，即可得出 $\widetilde{\mathcal{K}^m} = \widetilde{\mathcal{K}^{(m)}}$。设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{R}$（J）中的这样一个素理想，并考虑两种情况。

回忆一下，$(\widetilde{x_1 \dots ,, x_{d+1}})$ 是一个素 $\mathcal{R}(J)$-理想，其高度为一，见 命题 3.13。若 $\mathfrak{p} \not\supseteq (\widetilde{x_1 \dots ,, x_{d+1}})$，重复 推论 3.15证明中的论证可得 $\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}}$。因此，此情形下结论成立。

现在假设 $\mathfrak{p} \supseteq (\widetilde{x_1 \dots ,, x_{d+1}})$。回忆一下，根据 $I_d(B(\psi))$，$\operatorname{ht} \geq 2$，见 命题 5.1 ，并且 $B(\psi)$ 的项属于 $k[T_1, \dots, T_{d+1}]$。因此，理想 $(x_1, \dots, x_{d+1}) + I_d(B(\psi))$ 的高度至少为 $d + 3$ in $S[T_1, \dots, T_{d+1}]$，故该理想在 $\mathcal{R}(J)\widetilde{\ }$ 中的像的高度至少为 3。由此可知 $\mathfrak{p} \not\supseteq I_d(B(\psi))$ as $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 2$。因此，存在 $B(\psi)$ 的某个 $d \times d$ 子式 w，使得 $\widetilde{w} \notin \mathfrak{p}$。

由于 $B(\psi)$ 是一个 $d + 1 \times (d + 1)$ 矩阵，因此该子式 w 是通过删除 i 行和 j $B(\psi$ 的第 $1 \leq i$ 行、第 $j \leq d + 1$ 列得到的。删除 j $B(\psi)$ 的第 引理 2.2 列并应用该引理，我们得到

$$\widetilde{x_{d+1}} \cdot \widetilde{w} = (-1)^{i-d-1}\widetilde{x_i} \cdot \widetilde{\det(B')_j}, \tag{5.1}$$

其中 $(B')^j$ 是通过删除 B' 的第 j 列得到的子矩阵。回想一下，$B' = B(\psi')$，其中 ψ' 如 命题 3.10 中所述。因此，由 命题 2.3 可得 $\det(B')^j = (-1)^{j+1}T_j \cdot g'$，其中 $g' =$ 最大公因式 $I_d(B')$。因此，(5.1) 化为

$$\widetilde{x_{d+1}} \cdot \widetilde{w} = (-1)^{i-d+j}\widetilde{x_i} \cdot \widetilde{T_j} \cdot \widetilde{g'}. \tag{5.2}$$

在 $\mathfrak{p}$ 处局部化后， $\widetilde{w}$ 变为单位，而 (5.2) 表明 $(\widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}} \in (\widetilde{g'})_{\mathfrak{p}}$。因此$\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{g'}, \widetilde{x_{d+1}})_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{g'})_{\mathfrak{p}}$，同样满足该断言。 □

推论 5.3. 对所有的 $1 \leq i \leq m$，我们有 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$ 的最大公因式 $\neq 0$。此外，$\mathcal{F}(I) \cong k[T_1, \dots, T_{d+1}]/(\mathfrak{f})$，其中 $\deg \mathfrak{f} = m(d-1)$。

证明。回顾算法 4.3，若对任意 $1 \leq i \leq m$ 都有 $\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_i) = 0$，则对所有 $i \leq j \leq m$ 都有 $\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_j) = 0$。因此，只需证明 $\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m) \neq 0$，即可验证第一个结论。由定理 5.2，我们有 $\mathcal{A} = \mathcal{L}_m + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m))$，并注意到 $\mathcal{L}_m \subset (x_1, \dots, x_{d+1})$，这由算法 4.3 和命题 4.4 得出。因此，$(x_1, \dots, x_{d+1}) + \mathcal{A} = (x_1, \dots, x_{d+1}) + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m))$，所以 $\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m) \notin (x_1, \dots, x_{d+1})$，因为正如定理 3.16 的证明中所述， $\mathcal{A} \not\subseteq (x_1, \dots, x_{d+1})$。特别地，$\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$ 非零，正如所声称的。

再次注意到，$(x_1,\dots,x_{d+1}) + \mathcal{A} = (x_1,\dots,x_{d+1}) + (\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m))$，且 $\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m) \neq 0$，由命题 4.4 可知，$\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$ 的双次数为 $(0, m(d-1))$。因此，$\gcd I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$ 是 $\mathcal{A}$ 中包含于 $k[T_1,\dots,T_{d+1}]$ 的唯一方程，即它是唯一的纤维方程。于是模去 $(x_1,\dots,x_{d+1}) + \mathcal{A}$ 后，我们看到 $\mathcal{F}(I)$ 确实是由一个次数为 $m(d-1)$ 的方程定义的超曲面环。□

根据 定理 5.2，最大公因数迭代法给出了 $\mathcal{A}$的一个生成集。现在我们断言这是一个极小生成集。回顾一下，关系型的 I 是 $T_1,\dots,T_{d+1}$下的定义理想 $\mathcal{J}$ 的 $\mathcal{R}(I)$ 的极小生成元的最高次数。记作 $\mathrm{rt}(I)$。

命题 5.4. 在定理 5.2的设定下，由 $\mathcal{A} = \mathcal{L}_m +$(最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$) 通过算法 4.3 得到的生成集是极小的。特别地，$\mu(\mathcal{A}) = d+m+2$ 且 $\mu(\mathcal{J}) = d+m+1$。此外，I 的关系型为 $\mathrm{rt}(I) = m(d-1)$。

证明。通过最大公因数迭代法得到的 $\mathcal{A} = \mathcal{L}_m +$ (最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_m)$) 的生成集为 $\{\ell_1,\dots,\ell_{d+1}, f, g_1,\dots,g_m\}$，其中 $g_i =$最大公因式 $I_{d+1}(\mathcal{B}_i)$，对于 $\mathcal{B}_i$，矩阵如算法 4.3 中所示。回顾一下，对于 $1 \le i \le d+1$，$\deg \ell_i = (1,1)$，因为 ψ由 S 中的线性项构成。此外，回顾 $\deg f = (m, 0)$。此外，根据推论 5.3 和命题 4.4，对于 $1 \le i \le m$，有 $\deg g_i = (m-i, i(d-1))$。据此，我们通过证明这些生成元中没有一个能由其他生成元表示，来说明上述生成集是极小的。

首先，回想记号 3.12 中的理想 $\mathcal{H} = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$ 是定义 $\mathrm{Sym}(J)$ 的理想。由于 $[\ell_1 \dots \ell_{d+1}] = [T_1 \dots T_{d+1}] \cdot \psi$和 ψ是 J的极小表示，故 $\ell_1,\dots,\ell_{d+1}$极小生成 $\mathcal{H}$。为了说明它们也是 $\mathcal{A}$ 的极小生成元，反设不然，并且不失一般性地假设 ℓ_1 不是 $\mathcal{A}$ 的极小生成元。因此，ℓ_1 可以写成其余生成元 $\ell_2,\dots,\ell_{d+1}, f, g_1,\dots,g_m$的线性组合。

若 $m \ge 2$，根据双分次两个分量的次数考虑，可知 ℓ_1可以用 $\ell_2,\dots,\ell_{d+1}$表示，这与 $\ell_1,\dots,\ell_{d+1}$极小生成 $\mathcal{H}$矛盾。在 $m = 1$的情形下，再次根据次数考虑，可知 ℓ_1可以用 $\ell_2,\dots,\ell_{d+1}, f$表示。若 $\ell_1 \in (\ell_2,\dots,\ell_{d+1})$，则会得到同样的矛盾，因此可知存在一个双次数为 $(0,1)$ 的元素b，使得 $b \cdot f \in \mathcal{H} = (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$。然而，回想命题 3.13，$\mathcal{H}$ 是一个素理想，因此 $b \in \mathcal{H}$ 或 $f \in \mathcal{H}$成立，而这两种情况根据次数考虑均不可能。

类似的论证表明，f 和 g_m 是极小生成元，因为它们的双次数分别为$(m, 0)$和$(0, m(d-1))$。现在假设对于某个 $i \le m-1$，g_i不是 $\mathcal{A}$ 的极小生成元，此时会出现高阶迭代。将 g_i 写成其余生成元的线性组合，由双分次两个分量中的次数考虑可知，$g_i \in (\ell_1,\dots,\ell_{d+1})$。因此，根据命题 4.6，算法 4.3 中的列 ∂g_i 可取为 $B(\psi)$ 各列的线性组合。于是，由注 4.2，$I_{d+1}(\mathcal{B}_{i+1}) = I_{d+1}(B(\psi)) = 0$，从而 $g_{i+1} = 0$，这与推论 5.3矛盾。

关于 $\mathcal{J}$ 的断言随即成立，因为 f 是 $\mathcal{A}$的极小生成元。最后，由于$\deg g_m = (0, m(d-1))$，可知 I的关系型为$\mathrm{rt}(I) = m(d-1)$。□

现在我们给出一个示例，说明最大公因数迭代的过程，以便为 $\mathcal{A}$ 提供一个极小生成集。我们指出，在计算机代数系统（如 Macaulay2 [8]）中执行该算法相当简单。

例5.5. 设 k 是一个无限域，令 $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$、 $f = x_5^3$ 和 $R = S/(f)$。考虑矩阵 φ，其元素属于 R，以及与之对应的矩阵 ψ，其元素属于 S：

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & \overline{x_1} & \overline{x_2} & 0 & \overline{x_4} \\ -\overline{x_1} & 0 & \overline{x_4} & 0 & \overline{x_3} \\ -\overline{x_2} & -\overline{x_4} & 0 & \overline{x_1} & \overline{x_5} \\ 0 & 0 & -\overline{x_1} & 0 & \overline{x_2} \\ -\overline{x_4} & -\overline{x_3} & -\overline{x_5} & -\overline{x_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \psi = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & 0 & x_4 \\ -x_1 & 0 & x_4 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_4 & -x_3 & -x_5 & -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\overline{\cdot}$ 表示模 (f) 的像。简单计算可得 $\operatorname{ht} \operatorname{Pf}_4(\varphi) \geq 3$，因此，根据 [2, 2.1]， $I = \operatorname{Pf}_4(\varphi)$ 是一个等级为 3 的完美 Gorenstein R-理想。此外，I 满足 G_4，因为 $\operatorname{ht} I_2(\varphi) = 4$、$\operatorname{ht} I_3(\varphi) = 3$，且 $\operatorname{ht} I_4(\varphi) = 3 \geq 2$，这些都很容易验证。因此，定理 5.2 的假设均已满足。

ψ 的雅可比对偶由 $k[T_1, T_2, T_3, T_4, T_5]$ 中的元素构成，具体为

$$B(\psi) = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & -T_4 & T_3 & 0 \\ -T_3 & 0 & T_1 & -T_5 & T_4 \\ 0 & -T_5 & 0 & 0 & T_2 \\ -T_5 & -T_3 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & -T_5 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

因此，我们可以构造修正的雅可比对偶，并执行最大公因数迭代方法。为方便记号，令 $W = T_1T_3T_5 - T_2T_3^2 - T_2^2T_5 - T_4T_5^2$，其恰好是 W =最大公因式 $I_4(B')$，遵循 记号 3.12。遵循算法 4.3，我们得到

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & -T_4 & T_3 & 0 & 0 \\ -T_3 & 0 & T_1 & -T_5 & T_4 & 0 \\ 0 & -T_5 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ -T_5 & -T_3 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & -T_5 & 0 & T_3 & x_5^2 \end{bmatrix} \qquad g_1 = \gcd I_5(\mathcal{B}_1) = x_5^2 W$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & -T_4 & T_3 & 0 & 0 \\ -T_3 & 0 & T_1 & -T_5 & T_4 & 0 \\ 0 & -T_5 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ -T_5 & -T_3 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & -T_5 & 0 & T_3 & x_5 W \end{bmatrix} \qquad g_2 = \gcd I_5(\mathcal{B}_2) = x_5 W^2$$

$$\mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & -T_4 & T_3 & 0 & 0 \\ -T_3 & 0 & T_1 & -T_5 & T_4 & 0 \\ 0 & -T_5 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ -T_5 & -T_3 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & -T_5 & 0 & T_3 & W^2 \end{bmatrix} \qquad g_3 = \gcd I_5(\mathcal{B}_2) = W^3,$$

其中子式的最大公因式如命题 4.1所述。

根据定理 5.2，我们有 $\mathcal{A} = \mathscr{L} + (g_1, g_2, g_3)$，且 $\mathcal{R}(I$的定义理想为$\mathcal{J} = \mathscr{L} + (g_1, g_2, g_3)$。注意， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{J}$ 都不是素理想，这正如预期，因为 R，因此 $\mathcal{R}(I$不是整环。

注 5.6。我们注意到，当 $m=1$ 时，定理 5.2 恢复了定理 2.1。经过坐标变换，可以假设因式分解后的方程 f 是一个不定元，记为 $f=x_{d+1}$。于是 $R\cong k[x_1,\dots,x_d]=S'$，因此 I 和 J' 是同一个理想，其中 $\varphi=\psi'$；这里采用命题 3.10 中的记号。回顾一下，记号 3.12 中的 $B(\psi)$ 的子矩阵 B'，是关于 $x_1,\dots,x_d$ 的雅可比对偶 $B'=B(\psi')$。此外，在这种情况下，修正的雅可比对偶 $B=[B(\psi)\mid \partial f]$ 是唯一的，且列 ∂f 除最后一个元素为 1 外，其余元素均为 0。因此，B 的子式的最大公因子——第一次且唯一一次最大公因子迭代——恰好是 $B'=B(\psi')$ 的子式的最大公因子。

5.1. 深度与 Cohen-Macaulay性。 在 定理 5.2的设定下，我们现在研究 Rees 环 $\mathcal{R}(I)$ 的 Cohen–Macaulay 性质，利用同构$\mathcal{R}(I)\cong S[T_1,\dots,T_{d+1}]/\mathcal{A}$。我们继续沿用 [1] 第 5 节的内容，并首先构造若干短正合列，它们不仅有助于研究 $\mathcal{R}(I)$ 的深度，也有助于研究其相对于各种分次的正则性。

令 $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_{d+1})$，并回忆 $\widetilde{\mathcal{K}}=(\widetilde{g'},\widetilde{x_{d+1}})$，其中 $g'=$ 最大公因式 $I_d(B')$.~ 此外，回忆 $\mathcal{K}$ 是一个强 Cohen-Macaulay 理想（由推论 3.15 得出），且 $\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)=(\widetilde{x_{d+1}}):\widetilde{\mathcal{K}}$（由命题 3.14 得出）。因此存在一个双分次 $\mathcal{R}(J)$-模的短正合列

$$0\longrightarrow \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\longrightarrow \mathcal{R}(J)(-1,0)\oplus\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\longrightarrow \widetilde{\mathcal{K}}\longrightarrow 0.$$

考虑对上面的序列应用 Sym(–) 函子所得的诱导序列。取 m^{th} 分次分量，得到

$$\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\otimes\mathrm{Sym}_{m-1}\big(\mathcal{R}(J)(-1,0)\oplus\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\big)\xrightarrow{\sigma}$$
$$\mathrm{Sym}_m\big(\mathcal{R}(J)(-1,0)\oplus\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\big)\longrightarrow \mathrm{Sym}_m(\widetilde{\mathcal{K}})\longrightarrow 0.$$

注意，由秩的考量可知，$\ker\sigma$ 是挠元。然而，它是无挠 $\mathcal{R}(J)$-模的子模，因此必为零。于是 σ 是单射，并且我们有短正合列

$$0\longrightarrow \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\otimes\mathrm{Sym}_{m-1}\big(\mathcal{R}(J)(-1,0)\oplus\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\big)\xrightarrow{\sigma}$$
$$\mathrm{Sym}_m\big(\mathcal{R}(J)(-1,0)\oplus\mathcal{R}(J)(0,-(d-1))\big)\longrightarrow \mathrm{Sym}_m(\widetilde{\mathcal{K}})\longrightarrow 0.$$

由于 $\widetilde{\mathcal{K}}=(\widetilde{g'},\ \widetilde{x_{d+1}})$，推论 3.15 的证明表明 $\widetilde{\mathcal{K}}$ 满足 G_∞。由于 $\widetilde{\mathcal{K}}$ 是~强 Cohen-Macaulay，根据 [9, 2。6] 它是线性型理想，因此 $\mathrm{Sym}_m(\mathcal{K})\cong\mathcal{K}^m$。因此，上面的短正合列可写为

(5.3)
$$0\to\bigoplus_{i=0}^{m-1}\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\big(-i,-(m-i)(d-1)\big)\to\bigoplus_{i=0}^{m}\mathcal{R}(J)\big(-i,-(m-i)(d-1)\big)\to\widetilde{\mathcal{K}^m}\to 0.$$

现在我们可以计算 $\mathcal{R}(I)$、$\mathcal{F}(I)$ 和 $\mathcal{G}(I)$ 的深度了。回顾一下，若诺特局部环 A 满足深度 $A\geq$ 维数 $A-1$，则称其为几乎 Cohen-Macaulay。

定理 5.7。 在 定理 5.2的设定下，
(a) Rees代数 $\mathcal{R}(I)$ 几乎 Cohen-Macaulay。此外，当且仅当 $m=1$ 时，$\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay。(b) 伴随分次环 $\mathcal{G}(I)$ 几乎 Cohen-Macaulay。此外，当且仅当 $m=1$ 时，$\mathcal{G}(I)$ 是 Cohen-Macaulay。

(c) 特殊纤维环 $\mathcal{F}(I)$ 是 Cohen-Macaulay。

证明。考虑短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \longrightarrow \mathcal{R}(J) \longrightarrow \mathcal{F}(J) \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

并回忆一下，根据命题 3.13， $\mathcal{R}(J)$ 是维数为 $d+2$ 的 Cohen-Macaulay 整环。此外，回忆一下，根据命题 3.3， J 是线性型，因此 $\mathcal{F}(J) \cong k[T_1, \ldots, T_{d+1}]$。比较 (5.4) 中 $\mathcal{R}(J)$-模的深度，可得 $\operatorname{depth} \mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \geq d+2$ ，因此 $\operatorname{depth} \mathfrak{m}\mathcal{R}(J) = d+2$，因为这是可能达到的最大深度。此~结合 (5.3) 表明 $\operatorname{depth} \mathcal{K}^m \geq d+1$。

我们还有短正合列

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{R}(J) \longrightarrow \mathcal{R}(I) \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

并注意到，根据定理 3.16、定理 5.2 和推论 4.9， $\widetilde{\mathcal{A}} = \frac{\widetilde{f\mathcal{K}}^{(m)}}{\widetilde{x_{d+1}^n}} = \frac{\widetilde{f\mathcal{K}}^m}{\widetilde{x_{d+1}^n}} \cong \widetilde{\mathcal{K}}^m$。比较 (5.5) 中各模的深度，可得 $\operatorname{depth} \mathcal{R}(I) \geq d$，因此 $\mathcal{R}(I)$ 是几乎 Cohen-Macaulay。当 $m = 1$ 时，Cohen-Macaulay性由注 5.6 和定理 2.1 得出。若 $m \geq 2$，则根据 [26, 3.1]， $\mathcal{R}(I)$ 不是 Cohen-Macaulay。因此在这种情况下 $\operatorname{depth} \mathcal{R}(I) = d$ ，这就证明了 (a) 部分。

对于接下来的部分，我们注意到，如果 $\mathcal{G}(I)$是 Cohen-Macaulay 的，那么它当然是几乎 Cohen-Macaulay 的。如果 $\mathcal{G}(I)$不是 Cohen-Macaulay 的，则由 [11, 3.12] 和 (a) 可得，$\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq \operatorname{depth} \mathcal{R}(I) - 1 \geq d-1$。因此， $\mathcal{G}(I)$是几乎 Cohen-Macaulay 的。(b) 的最后一个断言现在由 (a) 和 [26, 3.1]得出。

关于 $\mathcal{F}(I)$ 在 (c) 中具有 Cohen-Macaulay 性的断言显然成立，因为根据推论5.3，它是一个超曲面环。□

5.2. 正则性。现在，我们在$\mathcal{R}(I$的定理 5.2设定下考察其 Castelnuovo-Mumford正则性。我们沿用 [28]中给出的所有定义和约定。我们再次按照 [1] 第5节中的做法，并注意到可以通过短正合列轻松比较正则性 [6]。

再次使用同构 $\mathcal{R}(I) \cong S[T_1, \ldots, T_{d+1}]/\mathcal{A}$，并注意到 $\mathcal{R}(I)$ 上存在多个分次。我们考察相对于由 $S[T_1, \ldots, T_{d+1}]$-理想 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_{d+1})$、 $\mathfrak{t} = (T_1, \ldots, T_{d+1})$ 和 $\mathfrak{n} = (x_1, \ldots, x_{d+1}, T_1, \ldots, T_{d+1})$ 表示的分次的正则性。计算相对于 $\mathfrak{m}$ 的正则性时，我们令 $\deg x_i = 1$ 和 $\deg T_i = 0$。类似地，计算相对于 $\mathfrak{t}$ 的正则性时，我们令 $\deg x_i = 0$ 和 $\deg T_i = 1$。最后，计算相对于 $\mathfrak{n}$ 的正则性时，我们采用总分次，并令 $\deg x_i = 1$ 和 $\deg T_i = 1$。

定理 5.8。 在 定理 5.2 的设定下，我们有

$$\operatorname{reg}_{\mathfrak{t}} \mathcal{R}(I) = m(d-1) - 1, \quad \operatorname{reg}_{\mathfrak{m}} \mathcal{R}(I) = m-1, \quad \operatorname{reg}_{\mathfrak{n}} \mathcal{R}(I) \leq (m+1)(d-1) - 1.$$

Additionally, $\operatorname{reg} \mathcal{F}(I) = m(d-1) - 1$.

证明。关于 $\mathcal{R}(I)$ 相对于 $\mathfrak{t}$ 的正则性，众所周知，$\operatorname{rt}(I) - 1 \leq \operatorname{reg}_{\mathfrak{t}} \mathcal{R}(I)$ [28, 第2813-2814] 页。因此，利用命题 5.4，$\operatorname{reg}_{\mathfrak{t}} \mathcal{R}(I) \geq m(d-1) - 1$。类似地，通过比较命题 5.4 中 $\mathcal{A}$ 的极小生成元相对于 $\mathfrak{m}$ 的次数可知，$\operatorname{reg}_{\mathfrak{m}} \mathcal{R}(I) \geq m-1$。因此，只需证明 $\operatorname{reg}_{\mathfrak{t}} \mathcal{R}(I) \leq m(d-1) - 1$ 且 $\operatorname{reg}_{\mathfrak{m}} \mathcal{R}(I) \leq m-1$；我们将与剩余的不等式一并证明。我们再次使用序列 (5.4) 和 (5.5)。

回想一下， J 根据命题 3.3是线性型，因此 $\mathcal{R}(J) \cong \mathrm{Sym}(J)$ 是由 $\mathcal{H} = (\ell_1$、……、$\ell_{d+1})$ 定义的整环。此外，回想一下， $[\ell_1 \dots \ell_{d+1}] = [T_1 \dots T_{d+1}] \cdot \psi$ 且 ψ 是一个交错矩阵。因此，根据 [17]第6节可知， $\mathcal{R}(J)$ 的分次极小自由分解。此外，[17, 6中给出的分解。3] 适用于每一种分次，由此可知

$$\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}\mathcal{R}(J) = 0, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}\mathcal{R}(J) = 0, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}\mathcal{R}(J) = d-1.$$

由于 J 是线性型，其特殊纤维环是 $\mathcal{F}(J) \cong k[T_1, \dots, T_{d+1}]$。因此

$$\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}\mathcal{F}(J) = 0, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}\mathcal{F}(J) = 0, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}\mathcal{F}(J) = 0.$$

结合这一点及（5.4），我们便有

$$\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \le 1, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \le 1, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{m}\mathcal{R}(J) = d-1.$$

为方便起见，记

$$M = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\big(-i, -(m-i)(d-1)\big), \quad N = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathcal{R}(J)\big(-i, -(m-i)(d-1)\big)$$

对于（5.3）中的模。由上述不等式可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}M \le m(d-1)+1, && \mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}N = m(d-1) \\ &\mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}M \le m, && \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}N = m \\ &\mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}M \le (m+1)(d-1), && \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}N = (m+1)(d-1). \end{aligned}$$

现在利用（5.3），便可得

$$\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}\widetilde{\mathcal{K}}^m \le m(d-1), \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}\widetilde{\mathcal{K}}^m \le m, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}\widetilde{\mathcal{K}}^m \le (m+1)(d-1).$$

~ ~上述不等式、双分次同构 $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}^m(0,0)$ 以及序列（5.5）给出

$$\mathrm{reg}_{\mathfrak{t}}\mathcal{R}(I) \le m(d-1)-1, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{m}}\mathcal{R}(I) \le m-1, \quad \mathrm{reg}_{\mathfrak{n}}\mathcal{R}(I) \le (m+1)(d-1)-1.$$

如所述。

关于 $\mathcal{F}(I)$ 的正则性断言显然成立，因为 $\mathcal{F}(I)$ 是由 $m(d-1)$ 中一个次数为 $k[T_1, \dots, T_{d+1}]$ 的方程定义的超曲面环，根据 推论 5.3。 □

Acknowledgements

作者谨此感谢 Bernd Ulrich 和 Claudia Polini，就本文所呈现的结果进行了许多富有见地的交谈和讨论。使用 Macaulay2 [8] 对本项目给予了极大帮助。

References

[1] J.A. Boswell 和 V. Mukundan，Rees代数与几乎线性表示理想，J. Algebra 460 (2016)，102–127。[2] D.A. Buchsbaum 和 D. Eisenbud，有限自由消解的代数结构及余维3理想的一些结构定理，Amer. J. Math. 99:3 (1977)，447–485。[3] L. Bus´e、M. Chardin 和 A. Simis，Rees代数的消元与非线性方程，J. Algebra 324 (2010)，1314–1333。[4] A. Corso、L. Ghezzi、C. Polini 和 B. Ulrich，特殊纤维环的 Cohen-Macaulay性，Comm. Algebra 31 (2003)，3713–3734。[5] D. Cox、J. W. Hoffman 和 H. Wang，Syzygy 与 Rees代数，J. Pure Appl. Algebra 212 (2008)，1787–1796。

[6] D. Eisenbud，交换代数，Graduate Texts in Mathematics，第150卷，Springer- Verlag，纽约，1995。[7] D. Eisenbud、C. Huneke 和 B. Ulrich，什么是模的 Rees 代数？，Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003)，701–708。[8] D. Grayson 和 M. Stillman，Macaulay2，一种用于代数几何研究的软件系统，网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/ [9] J. Herzog、A. Simis 和 W. V. Vasconcelos，爆破环的逼近复形，J. Algebra 74 (1982)，466–493。[10] J. Herzog、A. Simis 和 W. V. Vasconcelos，爆破环的逼近复形 II，J. Algebra 82 (1983)，53–83。[11] S. Huckaba 和 T. Marley，与理想相关的某些分次环的深度公式，Nagoya Math. J. 133 (1994)，57–69。[12] C. Huneke，理想的链接与 Koszul 同调，Amer. J. Math. 104 (1982)，1043–1062。[13] C. Huneke，强 Cohen-Macaulay概形与剩余交，Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983)，739–763。[14] C. Huneke 和 I. Swanson，理想、环与模的整闭包，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 336，Cambridge University Press，剑桥，2006。[15] M. Johnson，第二解析偏差为一的理想及其 Rees代数，J. Pure Appl. Algebra 119 (1997)，171–183。[16] Y. Kim 和 V. Mukundan，定义某些图的方程，Michigan Math. J. 69 (2020)，675–710。[17] A. R. Kustin，Huneke-Ulrich偏差为二的Gorenstein理想的极小自由消解，J. Algebra 100 (1986)，265–304。[18] A. R. Kustin、C. Polini 和 B. Ulrich，有理正规滚动曲面与 Rees代数的定义方程，J. Reine Angew. Math. 650 (2011)，23–65。[19] A. R. Kustin、C. Polini 和 B. Ulrich，高度三 Gorenstein 理想的爆破代数定义方程，Algebra Number Theory 11 (2017)，1489–1525。[20] A. R. Kustin、C. Polini 和 B. Ulrich，局部上同调的次数界，Proc. Lond. Math. Soc. 121 (2020)，1251–1267。[21] A. R. Kustin 和 B. Ulrich，与几乎交替映射相关的一族复形及其在剩余交中的应用，Mem. Amer. Math. Soc. 95 (1992) no. 461。[22] N. P. H. Lan，关于线性呈示理想的 Rees代数，J. Algebra 420 (2014)，186–200。[23] N. P. H. Lan，关于三个变量中线性呈示理想的 Rees代数，J. Pure Appl. Algebra 221 (2017)，2180–2191。[24] S. Morey，余维二和三理想的爆破方程，J. Pure Appl. Algebra 109 (1996)，197–211。[25] S. Morey 和 B. Ulrich，低余维理想的 Rees代数，Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996)，3653–3661。[26] C. Polini 和 B. Ulrich，爆破代数具有 Cohen-Macaulay性的充要条件，Compositio Math. 119 (1999)，185–207。[27] A. Simis 和 W. V. Vasconcelos，余法模的 Syzygy，Amer. J. Math. 103 (1981)，203–224。[28] N. V. Trung，Rees代数与伴随分次环的 Castelnuovo正则性，Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998)，2813–2832。[29] B. Ulrich 和 W. V. Vasconcelos，线性呈示理想的 Rees代数方程，Math. Z. 214 (1993)，79–92。[30] W. V. Vasconcelos，关于 Rees代数的方程，J. Reine Angew. Math. 418 (1991)，189–218。[31] W. V. Vasconcelos，爆破代数的算术，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 195，Cambridge University Press，剑桥，1994。[32] M. Weaver，关于超曲面环上理想与模的 Rees 代数，(2021) *preprint* arXiv:2112.02148。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame IN 46556, USA
Email address: mweaver6@nd.edu