arXiv:2301.06540v1 [math.NA] 16 Jan 2023

适用于d维流形的双重傅里叶球面方法

Sophie Mildenberger* mildenberger@tu-berlin.de

Michael Quellmalz* quellmalz@math.tu-berlin.de

双重傅里叶球面（DFS）方法通过巧妙的技巧，将定义在单位球面上的函数变换到环面上，随后用傅里叶级数对其进行逼近，并可通过快速傅里叶变换高效求值。针对圆盘、球体和圆柱上的逼近问题，也出现了类似的方法。本文介绍一种适用于各种流形的广义 DFS 方法，涵盖上述所有情形以及旋转群等更多情形。该方法将定义在流形上的函数变换到同维环面上。我们证明，变换后的函数的傅里叶级数可以传回流形，并在流形上均匀收敛到原函数。特别地，对于流形上的 H¨older 连续函数，我们得到了解析收敛速率。

数学主题分类。41A65,42B05, 42C10,65T50

关键词。 双傅里叶球面方法，流形上的逼近，傅里叶级数。

1. 引言

流形上的逼近 在数学文献中，人们对逼近定义在流形上的函数抱有浓厚兴趣，参见例如 [11, 19, 27,45]。表示和数值处理此类函数的问题，作为应用出现在各个领域，包括天气预报 [8, 9, 29], 蛋白质对接 [37],生物学中的活性流体 [2], 地球科学 [20, 23], 和天体物理学 [21, 41]。

解决这一问题的一种方法是采用基于图册的方法：通过光滑坐标图将流形上的局部图映射到欧几里得空间，从而应用成熟的逼近论。随后，将局部近似组合成全局逼近。如果

*德国柏林工业大学数学研究所，MA 4-3，Straße des 17. Juni 136，D-10623 柏林，德国。Orcid： [0000-0002-2509-3114], [0000-0001-6206-5705]

存在重叠片，就会面临如何恰当地将它们融合的问题。为此，可能需要求解包含切空间投影的非线性方程 [45], ， [10, 11], 或采用单位分解方法 [28]。对于不重叠的局部图（例如计算机辅助设计中的局部图），则可能需要满足非线性光滑性条件，或采用复杂的局部图拼接方法 [7]。

另一种逼近流形上函数的方法是环境空间逼近方法，参见例如 [27, 35]。在这种方法中，嵌入子流形上的函数会被延拓到环境空间的某个子集，通常是流形的一个管状邻域[27, § 3.1]。然后，可以在 $\mathbb{R}^d$ 中逼近延拓后的函数，再将其限制回子流形。根据惠特尼嵌入定理 [26, 定理 6.15], ，只要 d足够大，任何流形都可以嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中，因此这种方法适用于一般流形。然而，环境空间逼近方法需要在维数可能更高的空间中求解一个逼近问题。

前面提到的两种方法的一个优点是具有普适性；它们适用于任何流形，即使对其底层几何知之甚少，参见例如 [35, 45]。然而，我们感兴趣的流形往往是已知的，而且相对简单。在这种情况下，可以改用专门针对该流形设计的逼近基。球谐函数[30] 就是一个典型例子，适用于各种应用，并且能够高效计算 [14, 25,33]。然而，这些算法在数值计算缔合勒让德函数时会遇到困难，参见 [43], ；其性能也不及环面上的快速傅里叶变换（FFT），参见 [38,第 5 章和 7]。

DFS 方法 双傅里叶球面 （DFS）方法通过将球面上定义的函数变换到环面上，再考察变换后函数的二维傅里叶级数，来表示这些函数。因此，可以利用快速傅里叶变换的高效性来逼近球面函数。经典 DFS 方法由 Merilees 于 1972 年提出 [29] ，此后得到广泛应用，例如 [4, 8,13, 16, 34, 36, 39, 46, 48, 49]。近期，我们证明了经典 DFS 方法的解析逼近性质 [31]。此后，人们还针对其他几何形状提出了 DFS 方法，例如圆盘 [47], 圆柱 [18], 球体 [3], 以及二维轴对称曲面 [32]。软件 *Chebfun* [15]使用 DFS 方法处理函数，并求解球面、圆盘和球体上的微分方程。

本文提出一种统一的方法来涵盖所有这些 DFS 方法，并展示其解析收敛性质。为此，我们定义了一种广义 DFS 方法，将上述所有流形作为其特例。设函数$f\colon\ \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ 定义在 $\mathbb{R}^{d'}$中的 d维子流形 $\mathbb{M}$ 上，基本思路是应用具有特定光滑性和对称性˜的坐标变换 $\phi\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$ ，从而得到定义在 d维环面上的（2π周期）函数 $f = f \circ \phi$

$$\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z}^d).$$

特别地，我们构造了 f 与变换后的函数 $\tilde{f}\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$之间的一一对应关系。该函数具有某些对称性，并且可以表示为d维傅里叶级数。

由于 ϕ具有施加的对称性，我们可以将环面 $\mathbb{T}^d$ 上的傅里叶基 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\cdot\rangle}$, $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$的线性组合，与流形 $\mathbb{M}$上的正交基联系起来。因此，我们可以通过在 $\mathbb{M}$ 上进行级数展开来近似原函数 f，该展开以环面上 f 的傅里叶级数为基础~。因此，可以利用快速傅里叶变换高效地计算和求值这一展开级数。

我们证明，广义 DFS 方法可将流形 $\mathbb{M}$ 上的某些光滑性类转换为环面上的相应光滑性类。因此， $\mathbb{M}$ 上 Hölder 连续函数的 DFS 级数表示，其收敛速率与环面上相应 Hölder 空间中函数的傅里叶级数收敛速率相当 $\mathbb{T}^d$。我们推导出相应常数的显式上界，这些上界取决于函数 f的光滑性类、流形 $\mathbb{M}$的维数 d 以及其环境空间的维数 d' 。

广义 DFS 方法融合了上述三种逼近方法的特点：它虽非基于图册，却确实需要将函数从流形变换到欧几里得空间的一个子集上，从而应用众所周知的傅里叶级数理论。我们对逼近速率的证明依赖于将 f 延拓到环境空间 $\mathbb{R}^{d'}$，但 DFS 方法本身并不需要构造此类延拓。为避免组合不同局部图所带来的复杂性，该方法转而依赖一种不一定能恰当捕捉流形拓扑的变换。因此，流形上的基函数可能在零测集上不光滑，例如球面的极点处。不过，在用于逼近足够光滑的函数时，该方法仍能确保相应级数展开快速一致收敛。

本文概要第2节中，我们定义环面及嵌入子流形上的 H¨older 空间和相关函数空间。第3节中，我们介绍广义 DFS 方法，并阐述其一些基本性质。第4 节致力于证明广义 DFS 方法保持 H¨older 空间，并给出相应半范数的上界。第5节中，我们通过 DFS 方法研究流形上函数的级数逼近。第5.1 节探讨 DFS 函数的傅里叶级数及流形上的相应级数；为此，我们需要考虑 DFS 函数的对称性。第5.2节中，我们研究前文所介绍级数绝对收敛的充分条件，并给出收敛速度的界。第6 节考察可应用 DFS 方法的各种流形。除了圆盘、球面、圆柱和球体这些众所周知的情形外，我们还考察旋转群、更高维的球面和球体，以及本身允许使用 DFS 方法的流形的乘积。

2. 嵌入流形和环面上的函数空间

本节概述全文所用的符号。设$d,\ d' \in \mathbb{N}$。记作 $[d] \coloneqq \{1, 2, ..., d\}$。对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d$，我们用

$$|\boldsymbol{x}| \coloneqq \sum_{j=1}^{d} |x_j| \text{ and } \|\boldsymbol{x}\| \coloneqq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}$$

分别为 1-范数和欧几里得范数。对于 $k \in \mathbb{N}_0$，我们设

$$B_k^d \coloneqq \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^d \mid |\boldsymbol{\beta}| \leq k\}.$$

定义 2.1 （$\mathbb{R}^d$中的函数空间）。设 $k \in \mathbb{N}_0$，且令 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和 $V \subset \mathbb{C}^{d'}$，其中若 $k > 0$，则假设 U 为开集。我们定义阶数为 k 的可微空间为

$$\mathcal{C}^k(U, V) \coloneqq \left\{ f \colon U \to V \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f \text{ exists and is bounded} \\ \text{and continuous for all } \boldsymbol{\beta} \in B_k^d \end{array} \right\}$$

其范数为

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(U,V)} \coloneqq \max_{\boldsymbol{\beta} \in B_k^d} \sup_{\boldsymbol{x} \in U} \left\| D^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) \right\|.$$

对于 $0 < \alpha < 1$，(k, α)-H¨older 空间为

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(U, V) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{C}^k(U, V) \;\middle|\; |f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(U,V)} \coloneqq \sup_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U,\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\beta} \in B_k^d,\, |\boldsymbol{\beta}| = k}} \frac{\left\| \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{y}) \right\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha}} < \infty \right\}$$

其范数为

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(U,V)} \coloneqq \|f\|_{\mathcal{C}^k(U,V)} + |f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(U,V)}.$$

最后，我们定义阶数为 k 的利普希茨空间

$$\mathrm{Lip}^k(U, V) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{C}^k(U, V) \;\middle|\; |f|_{\mathrm{Lip}^k(U,V)} \coloneqq \sup_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U,\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\beta} \in B_k^d,\, |\boldsymbol{\beta}| = k}} \frac{\left\| \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{y}) \right\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|} < \infty \right\}$$

其范数为

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}^k(U,V)} \coloneqq \|f\|_{\mathcal{C}^k(U,V)} + |f|_{\mathrm{Lip}^k(U,V)}.$$

这三个空间在赋予给定范数后，都是巴拿赫空间。我们将具有有界偏导数的光滑函数空间记为

$$\mathcal{C}^{\infty}(U, V) \coloneqq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(U, V).$$

环面 $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z}^d)$ 上相应的函数空间，可通过将 $\mathbb{R}^d$ 上的函数空间限制为 2π-周期函数得到：

定义 2.2（环面上的函数空间 $\mathbb{T}^d$）。设 $\mathcal{X}$ 是以下任意一种函数空间 $\mathcal{C}^k$，$\mathcal{C}^{k,\,\alpha}$，Lip^k 或 $\mathcal{C}^\infty$（见定义2.1），并设 $V \subset \mathbb{C}^{d'}$。我们将环面 $\mathbb{T}^d$ 上的相应函数空间定义为

$$\mathcal{X}(\mathbb{T}^d, V) \coloneqq \{f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d, V) \mid f(2\pi \boldsymbol{e}^j + \cdot) = f(\cdot) \text{ for all } j \in [d]\},$$

其中 $\boldsymbol{e}^j$ 表示 $j \in [d]$对应的第 j 个单位向量。

在上述任一定义中考虑标量值函数时，也就是说，当有 $V = \mathbb{C}$ 时，通常省略 V。

定义 2.3（嵌入流形上的函数空间）。设 $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 是一个带角点或不带角点的光滑嵌入子流形。对于 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，若 U 是 $\mathbb{R}^{d'}$ 中的一个开集，满足 $\mathbb{M} \subset U \subset \mathbb{R}^{d'}$，且有 $f^*\big|_{\mathbb{M}} = f$，则称 $f^*\colon U \to \mathbb{C}$ 是 f 的一个延拓。对于$k \in \mathbb{N}_0$，若 f^* 是 f的一个 $\mathcal{C}^k$-延拓，即它是 f的一个延拓且 $f^* \in \mathcal{C}^k(U)$，则称其为 $\mathcal{C}^k$-延拓半范数。f^* 的延拓半范数为

$$|f^*|^*_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} \coloneqq \sup_{\boldsymbol{\beta} \in B_k^{d'}} \left\| \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f^* \right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})}. \tag{1}$$

我们将 $\mathbb{M}$ 上的 k 阶可微空间定义为

$$\mathcal{C}^k(\mathbb{M}) \coloneqq \left\{ f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} \coloneqq \inf_{\substack{\mathcal{C}^k\text{-extensions} \\ f^* \text{ of } f}} |f^*|^*_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} < \infty \right\} \tag{2}$$

并记为 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \coloneqq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(\mathbb{M})$。

类似地，对于 $0 < \alpha < 1$，如果 f^* 是 f 的 $\mathcal{C}^{k,\,\alpha}$-延拓，且它是 f 的延拓并且 $f^* \in \mathcal{C}^{k,\,\alpha}(U)$，我们就称它为 f 的 $\mathcal{C}^{k,\,\alpha}$-延拓。此时，$\mathcal{C}^{k,\,\alpha}$-延拓半范数定义为

$$|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} \coloneqq |f^*|^*_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} + \sup_{\substack{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{M},\, \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\beta} \in B_k^{d'},\, |\boldsymbol{\beta}| = k}} \frac{\left\| \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f^*(\boldsymbol{\xi}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} f^*(\boldsymbol{\eta}) \right\|}{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|^\alpha}. \tag{3}$$

最后，我们将 $\mathbb{M}$ 上的 $(k,\ \alpha)$-H¨older 空间定义为

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M}) \coloneqq \left\{ f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} \coloneqq \inf_{\substack{\mathcal{C}^{k,\alpha}\text{-extensions} \\ f^* \text{ of } f}} |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} < \infty \right\}. \tag{4}$$

3. 广义 DFS 方法

我们以一种涵盖文献中已有推广（例如球体和圆柱）的方式，将经典 DFS 方法推广到其他流形，并得出与我们在 [31] 球面上所展示结果相类似的结论。

经典的双重傅里叶球面（DFS）方法将定义在球面 $\mathbb{S}^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ 上的函数变换到环面 $\mathbb{T}^2$，随后通过傅里叶级数对其进行表示。由此，函数 $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ 与 DFS 坐标变换相连接

$$\phi_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (\cos x_1 \sin x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_2),$$

它将球面覆盖两次。变换 $\phi_{\mathbb{S}^2}$ 是光滑的，变换后的函数 $f \circ \phi_{\mathbb{S}^2}$ 对于足够光滑的 f具有收敛的傅里叶级数，见 [31]。此外，我们有 $\phi_{\mathbb{S}^2}(x_1, x_2) = \phi_{\mathbb{S}^2}(x_1 + \pi, -x_2)$，对于 $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$，因此变换后的函数是块镜像中心对称（BMC）的，参见 [46, § 2。2], 如图1所示。

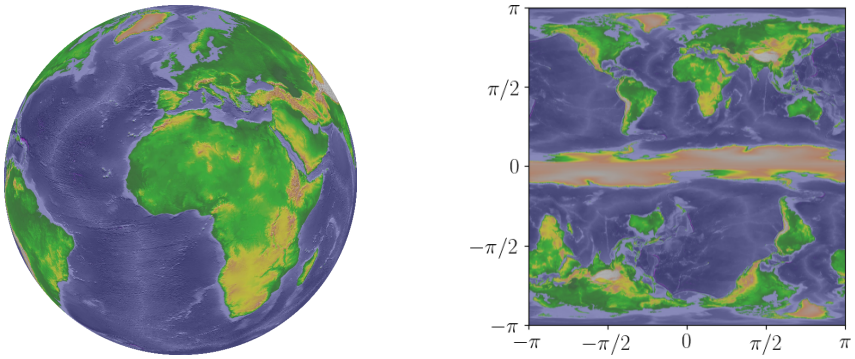


图 1：左：地球的地形数据 $f(\boldsymbol{\xi})$。右：DFS 函数 $f \circ \phi_{\mathbb{S}^2}($ $\boldsymbol{x})$.

由于 $\phi_{\mathbb{S}^2}$ 在 $(-\pi, \pi] \times (0, \pi) \cup \{(0, 0), (0, \pi)\}$ 上的限制是双射，环面上的 BMC 函数与去掉极点后的球面上的函数之间存在一一对应关系。这使得我们能够将变换后的函数 $f \circ \phi_{\mathbb{S}^2}$ 的傅里叶展开与 f 直接定义在球面上的级数展开联系起来，见 [31]。

我们对该方法进行推广的核心思想，是将定义在 d 维流形上的函数变换为环面 $\mathbb{T}^d$ 上的函数。随后，变换后的函数可以用傅里叶级数表示，从而能够通过环面上的快速傅里叶变换进行快速数值计算。为了确保其具有与经典情形相似的性质，我们对该变换施加光滑性和对称性假设。

定义 3.1. 设 $d, d' \in \mathbb{N}$，且设 $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 为一个 d 维光滑嵌入子流形，可以带有角点，也可以不带角点。我们称一个满射函数为

$$\phi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$$

如果 $\mathbb{M}$ 满足以下光滑性和对称性假设，我们称其具有 DFS 变换的广义 *DFS* 变换：如果 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，且对于所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}_0^d$ 和 $l \in [d']$，均有 a。我们称 ϕ 具有 DFS 变换的光滑性

$$\|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}} \phi_l\|_{C(\mathbb{T}^d)} \leq 1. \tag{5}$$

我们称 ϕ 具有 DFS 变换的对称性，如果首先，对于某个整数 $p \in \mathbb{N}_0$，平移向量 S$^i \in \{0, \pi\}^d$, $i \in [p]$ 以及反射映射

$$\mathrm{M}^i \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d,\ \mathrm{M}^i(\boldsymbol{x}) \coloneqq \mathrm{M}^i \boldsymbol{x}, \qquad i \in [p], \tag{6}$$

与某些对角元素属于 $\{-1, 1\}$ 的对角矩阵 $\mathbf{M}^i \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ 相关联，映射 ϕ 在对称函数下保持不变

$$s^i \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d,\ s^i(\boldsymbol{x}) \coloneqq \mathrm{S}^i + \mathrm{M}^i(\boldsymbol{x}), \qquad i \in [p], \tag{7}$$

即，$\phi \circ s^I = \phi$ 对所有 $I \subset [p]$均成立，其中函数的重复复合记作

$$s^{\{i_1, i_2, \ldots\}} \coloneqq \circ_{i\in\{i_1, i_2, \ldots\}} s^i \coloneqq s^{i_1} \circ \left(s^{i_2} \circ \ldots\right), \qquad \{i_1, i_2, \ldots\} \subset [p],$$

约定空复合为恒等映射。其次，为满足对称性条件，必须存在一个矩形集合 $D \subset \mathbb{T}^d$，它是 $\mathbb{T}^d/_\sim$ 的一组代表元，其中 $\sim$ 是等价关系 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y} \in \{s^I(\boldsymbol{x}) \mid I \subset [p]\}$，并且存在不交的可测子集 D_1，$D_2 \subset D$，使得

(i) $D^\circ = D_1^\circ$ 且 $\phi[D_2]$ 是闭的，

(ii) 限制映射 $\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2} \colon D_1 \dot\cup D_2 \to \mathbb{M}$ 是从不交并 $D_1 \dot\cup D_2$上的一个双射，

(iii) 逆映射 $\left(\phi\big|_{D_1}\right)^{-1} \colon \mathbb{M} \setminus \phi[D_2] \to D_1$ 是连续的，并且

(iv) 对所有 $\boldsymbol{x} \in D_1^\circ$，雅可比矩阵 $\nabla\phi(\boldsymbol{x})$ 均为满秩。

集合 D “呈矩形”是指它是 $\mathbb{T}^1$ 的连通子集的笛卡尔积，也就是说，它可以与 $\mathbb{R}^d$ 中的一个矩形等同。我们总是假设 p 取最小值，并将其称为 ϕ 的 对称数 。

对于 $f \colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，我们定义 f b 关于 ϕ 的广义 *DFS* 函数 y

$$\tilde f \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{M},\ \tilde f \coloneqq f \circ \phi.$$

由于矩阵 $\mathbf{M}^i$ 仅含整数元素，因此 $\mathbf{M}^i$ 与 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$ 的矩阵-向量乘积 (6) 可用 $\mathbb{R}^d$ 中 $\boldsymbol{x}$ 的任一代表元计算。作为环面上的函数，平移 S^i 和反射 $\mathbf{M}^i$ 均为自身的逆映射，且彼此可交换，因此无需考虑复合的顺序。我们有 $s^I(\cdot) = \sum_{i\in I} \mathrm{S}^i + \mathbf{M}^I(\cdot)$，并且上述定义的 $\sim$ 确实是 $\mathbb{T}^d$ 上的等价关系。由于 D 是 $\mathbb{T}^d/_\sim$ 的一组代表元，性质 (i) 和 (ii) 与 ϕ 的不变性假设共同表明，对称函数 s^i、 $i \in [p]$ 在复合意义下唯一。

注 3.2。我们考虑带角光滑子流形这一类，因为带角光滑流形的有限笛卡尔积仍是带角光滑流形；而带边界光滑流形则不具备这一性质，因为它们的乘积可能无法在恰当意义下具有光滑结构，参见 [26, 第 29]。因此，选择这一类流形使我们能够在第6.4节中，在圆柱等乘积流形上构造 DFS 方法。由于此类流形的角点集或边界可能为空，参见 [26, 第 26 页和第 417], 页，我们通常写作“带角或不带角”。

注 3.3。式（5）中的界有些任意，是由具体应用决定的。我们也可以改为允许偏导数具有任意一致界，即考虑 $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$，其中 $\tilde{\phi}[\mathbb{T}^d] = \mathbb{M}$ 且存在某个 $C > 0$ 使得 $\|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}} \tilde{\phi}_l\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)} \leq C$对所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}_0^d$ 和 $l \in [d']$均成立。这样，本文的结果便可应用于函数 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，方法是将其变换到缩放后的流形 $C^{-1}\mathbb{M}$上。

下一个引理给出了广义 DFS 变换的一些基本性质：由于ϕ 是满射，因此总存在一个右逆，并且可以根据定义 (ii) 中的条件，选取一个典范的右逆 3.1。根据(iii) 和(iv)，这个逆映射具有一定的正则性。

引理 3.4。设 $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 是一个带角点或不带角点的光滑嵌入子流形，具有广义 *DFS* 变换 $\phi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$。设 p、D、D_1、D_2和 s^i、$i \in [p]$如定义 *3.1* 所述。那么 ϕ 以如下意义均匀覆盖 $\phi[D_1^\circ]$：

$$s^I(D_1^\circ) \cap s^J(D_1^\circ) = \emptyset, \qquad I, J \subset [p] \ \textit{with}\ I \neq J. \tag{8}$$

此外，$\phi[D_2]$和 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_1^\circ]$在 $\mathbb{M}$ 中的测度为零，且 $\mathbb{T}^d \setminus \big(\bigcup_{I \subset [p]} s^I(D_1^\circ)\big)$ 在 $\mathbb{T}^d$中的测度为零。$\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2}$ 的逆映射在 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$ 上连续，并且在 $\mathbb{M}$ 去掉 $\phi[D_2]$后的流形内部光滑；也就是说，对于流形内部 $\mathbb{M}$中的任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$，存在 $\mathbb{M}$ 中 $\boldsymbol{\xi}$ 的一个邻域 U，使得$(\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2})^{-1}\big|_U \in \mathcal{C}^\infty(U)$。我们称 $\phi[D_2]$ 为奇异点集。

证明。对于 (8)，可以证明，对于所有 $\boldsymbol{x} \in D^\circ$ 和非空 $I \subset [p]$，$s^I(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$。此外，对于满足 $s^I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ 的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$，其中某个 $I \subset [p]$，必有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，因为 D 是 $\mathbb{T}^d/_\sim$的一组代表元，其中 $\sim$ 如定义 3.1 所述。因此，对于所有 $I \subset [p]$，我们有$s^I($ $D^\circ) \cap D^\circ = \emptyset$。显然，对于任意 $I \subset [p]$，集合 $s^I(D)$ 也是 $\mathbb{T}^d/_\sim$ 的一组代表元，并且由于 s^I 是一个微分同胚，$s^I(D^\circ)$ 是开集。因此，我们可以用相同的论证证明，对于所有满足 $I \neq J$ 的 $I, J \subset [p]$，$s^I(D^\circ) \cap s^J(D^\circ) = \emptyset$，这就是 (8)。

$\mathbb{T}^d$ 中矩形子集的边界在 $\mathbb{T}^d$中是零测集。因此，定义 3.1中的 (i) 蕴含 $D_2 \subset D \setminus D_1^\circ \subset \partial D$ 在 $\mathbb{T}^d$中是零测集。特别地，由于 ϕ 是光滑的，参见[26, 定理 6.9]，$\phi[D_2]$ 和 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_1^\circ] \subset \phi[\partial D]$ 在 $\mathbb{M}$ 中都是零测集。此外，对于所有满足 $I \neq J$的 I、$J \subset [p]$，我们有 $s^I(D_1^\circ) \subset s^I(D)$以及 $s^J(D_1^\circ) \cap s^I(D) = \emptyset$，其中我们使用了 (8) 以及 $s^I(D)$和 $s^J(D)$为矩形的事实。由于 D 是 $\mathbb{T}^d/_\sim$的一组代表元，我们得到

$$\mathbb{T}^d \setminus \Big(\bigcup_{I \subset [p]} s^I(D_1^\circ)\Big) = \bigcup_{I \subset [p]} \big(s^I(D) \setminus s^I(D_1^\circ)\big) \subset \bigcup_{I \subset [p]} s^I(\partial D),$$

是 $\mathbb{T}^d$ 中的零测集。

$\big(\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2}\big)^{-1}$ 在 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$ 可由定义（ii）和（iii）中的3.1立即得到。对于流形内部的光滑性，我们注意到，根据（i），集合 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$ 在 $\mathbb{M}$ 中是开集，因而是 $\mathbb{R}^{d'}$的带边界光滑子流形。由于同胚保持流形边界，（iii）意味着 $\phi[D_1^\circ]$是 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$ 的流形内部，特别地，$\phi[D_1^\circ]$ 是无边界的光滑子流形

的 $\mathbb{R}^{d'}$。类似地， D_1° 在 $\mathbb{T}^d$ 中是开集，因而是无边界的光滑流形。根据（iv）， $\nabla\phi$（$\boldsymbol{x}$）对所有 $\boldsymbol{x} \in D_1^\circ$都具有满秩，因此我们可以将反函数定理[26, 定理45] 应用于 $\phi\big|_{D_1^\circ}$ 我们得到 $\phi\big|_{D_1^\circ}$ 是局部微分同胚，特别是 $\phi\big|_{D_1^\circ}$ 的逆映射是光滑的，即其坐标表示是无穷次可微的，因而可以延拓为定义在$\phi[D_1^\circ] \subset \mathbb{R}^{d'}$ 的某个开邻域上的函数，且该函数具有各阶连续偏导数。然而，这些偏导数可能无界，因此我们只能得到 $\left(\phi\big|_{D_1^\circ}\right)^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$ 的局部性质，参见定义2.1和2.3。

□

与经典 DFS 方法的特殊情形一样，广义方法的对称性使 DFS 函数具有对称性。此外，环面上在 DFS 对称函数作用下保持不变的函数，与在流形上除去奇异点集后良定义的函数相对应。下面的引理将这一关系形式化；稍后我们将利用它，将环面上变换后的函数的级数逼近传回流形。

引理 *3.5.* 设 $\phi\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$ 是一个对称数为 p 的广义 *DFS* 变换，并设 D_1、 D_2 以及 s^i、 $i \in [p]$ 如定义 *3.1* 中所述。若某个函数 $g\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ 在对称函数 s^i 下保持不变，即对所有 $i \in [p]$ 都有 $g = g \circ s^i$，则称其为一个 *BMC* 函数（类型为 ϕ）。对于任意 $f\colon\ \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，其 *DFS* 函数 $\tilde{f}$ 都是一个 *BMC* 函数。反之，若 $g\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ 是一个 *BMC* 函数，则存在 $f\colon\ \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，使得

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \bigcup_{I \subset [p]} s^I[D_1].$$

所有此类 f的可能选择在 $\mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$上都一致。令 $f\colon = g \circ (\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2})^{-1}$，便得到唯一的 f，且它还满足 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} \in D_2$。

证明。根据定义 3.1，我们知道，对于任意 $i \in [p]$， ϕ 都是 s^i-不变的。因此，任何 DFS 函数都是 BMC 函数。根据定义 3.1 中的 (ii)，变换 ϕ 将$D_1 \dot\cup D_2$ 双射到 $\mathbb{M}$。特别地，函数 $f := g \circ (\phi\big|_{D_1 \dot\cup D_2})^{-1}$ 是良定义的，并且显然是唯一一个其 DFS 函数在 $D_1 \dot\cup D_2$ 上与 g 一致的函数选择。如果 g 是一个 BMC 函数，那么 f 和 g 在对称函数作用下均保持不变，因此该等式可推广到 $\cup_{I \subset [p]} s^I[D_1 \dot\cup D_2]$。反过来，如果对于 $\boldsymbol{x} \in D_1$， $\tilde{f}_1(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}_2(\boldsymbol{x})$，那么对于 $\boldsymbol{\xi} \in \phi[D_1] = \mathbb{M} \setminus \phi[D_2]$，我们有

$$f_1(\boldsymbol{\xi}) = (f_1 \circ \phi)\big((\phi\big|_{D_1})^{-1}(\boldsymbol{\xi})\big) = (f_2 \circ \phi)\big((\phi\big|_{D_1})^{-1}(\boldsymbol{\xi})\big) = f_2(\boldsymbol{\xi}).$$ □

我们需要以下命题，其证明见 [31, 第 7]页。

命题 3.6。设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 为开集， $V \subset U$，且 $g\colon\ U \to \mathbb{C}$。如果 g 在 V 上有界且利普希茨连续，那么对于所有满足以下条件的 $0 < \alpha < 1$， g 在 V 上是 α-*H¨older* 连续的：

$$|g|_{\mathcal{C}^\alpha(V)} \le \max\left\{|g|_{\mathrm{Lip}(V)}, 2\,\|g\|_{\mathcal{C}(V)}\right\}. \tag{9}$$

此外，如果 V是凸的，且 $g \in \mathcal{C}^1(U)$，那么 g 在 V*wit* 上是利普希茨连续的 h

$$|g|_{\mathrm{Lip}(V)} \le \|\nabla g\|_{\mathcal{C}(U,\mathbb{C}^d)}. \tag{10}$$

利用广义 DFS 变换的光滑性（5），我们可以立即得出以下性质。

推论 3.7. 设 $\phi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$ 是某个光滑嵌入子流形（可带或不带角点） $\mathbb{M}$ 的广义 *DFS* 变换，其中该子流形属于 $\mathbb{R}^{d'}$。那么，对所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}_0^d$ 和 $l \in [d']$，我们都有 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^d)$ 以及 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l \in \mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)$，且

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^d)} \leq \sqrt{d}, \tag{11}$$

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)} \leq 2\sqrt{d}. \tag{12}$$

4. DFS 函数的 H¨older 连续性

本节将证明，DFS 变换保持 H¨older-光滑性。更具体地说，它将函数空间 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})$ 和 $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})$ 映射到 H¨older 空间 $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ 中。我们将证明相应的范数界。在第 5节中，我们将利用这些结果得到 DFS 函数级数表示的收敛速率。本节中的结果仅要求 DFS 变换满足光滑性条件（5），是对 [31, § 4]中经典 DFS 方法相关工作的直接推广。

以下技术引理（证明见附录A）给出了向量值函数高阶偏导数的多元链式法则中加项数量的上界。

引理 4.1。 对于 d、$d' \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，设 $h\colon U \to V$ 和 $g\colon V \to \mathbb{C}$ 是分别定义在某些开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和 $V \subset \mathbb{R}^{d'}$ 上的 k 次连续可微函数。那么，对于任意 $\boldsymbol{\beta} \in B_k^d$，有

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(g \circ h) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}} \tag{13}$$

其中的常数取决于 $\boldsymbol{\beta}$，并满足

$$n \in \mathbb{N}_0,\ n \leq \tfrac{(k+d'-1)!}{(d'-1)!}, \tag{14}$$

$$m_i \in \mathbb{N}_0,\ m_i \leq k,\ i \in [n], \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i \in B_k^{d'},\ i \in [n], \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ij} \in B_k^d,\ i \in [n],\ j \in [m_i], \tag{17}$$

$$\ell_{ij} \in [d'],\ i \in [n],\ j \in [m_i]. \tag{18}$$

定理 4.2。 设 $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 是一个带角点或不带角点的光滑嵌入子流形，并且其上存在广义 *DFS* 变换 $\phi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$。对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})$，广义 *DFS* 函数 $\tilde{f} = f \circ \phi$ 对所有 $0 < \alpha < 1$ 均属于 $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。如果 $k + d' \geq 2$，则有

$$\left|\tilde{f}\right|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)} \leq \sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\,\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}, \tag{19}$$

并且如果 $k+d'=1$，则 $|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}^1)} \le 2\|f\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{M})}$。此外，还有 $\tilde{f}\in\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{T}^d)$，其中

$$\|\tilde{f}\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{T}^d)} \le \frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}. \tag{20}$$

证明。我们首先证明

$$\|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{(k'+d'-1)!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{M})} \tag{21}$$

对所有 $k'\in\mathbb{N}_0$ 满足 $k'\le k+1$ 且对所有 $\boldsymbol{\beta}\in B_{k'}^d$，这也蕴含（20）。令 $f^*\in\mathcal{C}^{k'}(U)$ 为 $\mathcal{C}^{k'}$-延拓 f，其中 $U\subset\mathbb{M}$ 是定义 2.3中所述的某个开集。由于 ϕ 满足 $\phi[\mathbb{R}^d]=\mathbb{M}\subset U$，因此可将其视为函数 $\phi\colon\ \mathbb{R}^d\to U$。于是，我们可以对 4.1 引理应用于 $\tilde{f}=f^*\circ\phi$，并得到 $\tilde{f}\in\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{R}^d)$ 以及

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f} = \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(f^*\circ\phi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i}f^*\circ\phi\right)\prod_{j=1}^{m_i}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}}\phi_{\ell_{ij}}$$

对某些满足（14）至（18）的常数，其中 k'。这意味着，对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}(\boldsymbol{x})\right| &\le \sum_{i=1}^{n}\left|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i}f^*\circ\phi\right)(\boldsymbol{x})\right|\prod_{j=1}^{m_i}\left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}}\phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{x})\right| \\ &\underset{(1),(5)}{\le} n\,|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{M})} \underset{(14)}{\le} \frac{(k'+d'-1)!}{(d'-1)!}\,|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{M})}.\end{aligned}$$

由于此估计对任意 $\mathcal{C}^{k'}$-延拓 f^* 都成立，f，我们可以将右端的 $|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{M})}$ 替换为 $\|f\|_{\mathcal{C}^{k'}(\mathbb{M})}$，见（2）。这就证明了（21）。接下来，我们证明

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)} \le \sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})} \tag{22}$$

对所有 $\boldsymbol{\beta}\in B_k^d$。我们知道 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}$ 是连续可微的，并由（21）对 $k'=k+1$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}\right)\right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}\sqrt{\sum_{p=1}^{d}\left|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p+\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}\right)(\boldsymbol{x})\right|^2} \\ &\le \sqrt{d\left(\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}\right)^2} = \sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}.\end{aligned}$$

结合（10）可得（22）。将（21）用于 $k'=k$，结合（22）并应用（9），我们得出对所有 $\boldsymbol{\beta}\in B_k^d$，$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}$ 是 α-H¨older 连续的。我们得到

$$\begin{aligned}|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)} &\le \max\left\{|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)}, 2\|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}\right\} \\ &\le \max\left\{\sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}, 2\,\frac{(k+d'-1)!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k}(\mathbb{M})}\right\} \\ &\le \max\left\{\sqrt{d}, \frac{2}{k+d'}\right\}\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})},\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\|f\|_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}$。由于右侧与 $\boldsymbol{\beta}$ 无关，因此 f 是 (k, α)-Hölder 连续的，其中

$$|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\beta}\in B_k^d, |\boldsymbol{\beta}|=k} |\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq \max\left\{\sqrt{d}, \frac{2}{k+d'}\right\} \frac{(k+d')!}{(d'-1)!} \|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})}. \quad (23)$$

我们注意到 $\sqrt{d} \geqq 2/(k+d')$ 在 $k+d' \geq 2$ 时成立，否则我们有 $d = d' = 1$ 且 $k = 0$。因此，(23) 证明了该定理。 □

定理 4.3. 设 $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 是一个带角点或不带角点的光滑嵌入子流形，且存在广义 ϕ: $\mathbb{T}^d \to \mathbb{M}$。对于 $k \in \mathbb{N}$、$0 < \alpha < 1$ 和 $f \in \mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\mathbb{M})$，广义 *DFS* 函数 $\tilde{f} = f \circ \phi$ 属于 $\mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。若 $k + d' \geq 2$，则有

$$|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)} \leq 2\sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\,\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}, \quad (24)$$

而若 $k + d' = 1$，则 $|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^1)} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{M})}$。

证明。令 $f^* \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U)$ 为 f 的 $\mathcal{C}^{k,\alpha}$-延拓。我们先证明

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^* \circ \phi|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)} \leq \max\left\{\sqrt{d}\,d', 2\right\} |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} \quad (25)$$

对所有 $\boldsymbol{\gamma} \in B_k^{d'}$ 均成立。对于 $|\boldsymbol{\gamma}| = k$，根据延拓半范数的定义可知，因为对所有 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$，都有

$$\begin{aligned}
|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{x}) - \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{y})| &\underset{(3)}{\leq} |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\, \|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})\|^{\alpha} \\
&\leq |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} \left(\sum_{\ell=1}^{d'} |\phi_\ell(\boldsymbol{x}) - \phi_\ell(\boldsymbol{y})|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\underset{(11)}{\leq} |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})} \left(d\,d'\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\, \sqrt{d}\,d'\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

如果 $d = d' = 1$ 且 $k = 0$，则这证明了在 $k + d' = 1$ 情形下的结论 $|f|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^1)} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{M})}$。对于 $|\boldsymbol{\gamma}| < k$，我们有 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^* \in \mathcal{C}^1(U)$，因此 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^*$ 是限制 $\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^*\right)|_{\mathbb{M}}$ 的 $\mathcal{C}^1$ 延拓，并且

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^*\right)|_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{M})} &\leq |\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^*|^*_{\mathcal{C}^1(\mathbb{M})} = \max_{\ell\in[d']} \left\|\mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^\ell}\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^*\right)\right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \\
&\leq \max_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\in B_k^{d'}} \left\|\mathrm{D}^{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} f^*\right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} = |f^*|^*_{\mathcal{C}^k(\mathbb{M})} \leq |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}.
\end{aligned}$$

由（23），可知

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}} f^* \circ \phi|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)} \leq \max\left\{\sqrt{d}, \frac{2}{d'}\right\} \frac{d'!}{(d'-1)!}\, |f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})},$$

这表明（25）。与定理 4.2的证明一样，我们应用引理 4.1 可得 $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k\left(\mathbb{T}^d\right)$，并且对于 $\boldsymbol{\beta} \in B_k^d$ 我们得到

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \tilde{f} = \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \left(f^* \circ \phi\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}$$

对于满足条件（14）至（18）的某些常数。对于 $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$，应用三角不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \tilde{f}(\boldsymbol{y})\right| \leq & \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{x}) - \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{y})\right| \prod_{j=1}^{m_i} \left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{x})\right|}_{=:A} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{y})\right| \left|\prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{x}) - \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{y})\right|}_{=:B}.\end{aligned}$$

第一项求和可估计为

$$\begin{aligned}A &\underset{(5)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{x}) - \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} f^* \circ \phi\right)(\boldsymbol{y})\right| \underset{(25)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\sqrt{d}\, d', 2\right\} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha} \\ &\underset{(14)}{\leq} \frac{(k + d' - 1)!}{(d' - 1)!} \max\left\{\sqrt{d}\, d', 2\right\} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha}.\end{aligned}$$

此外，我们利用（3）将第二项求和上界为

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \left|\prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{x}) - \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{y})\right|.$$

利用望远镜求和，我们将最后一项求和改写为

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \left|\sum_{r=1}^{m_i} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ir}} \phi_{\ell_{ir}}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ir}} \phi_{\ell_{ir}}(\boldsymbol{y})\right) \prod_{j=1}^{r-1} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{x}) \prod_{j=r+1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} \phi_{\ell_{ij}}(\boldsymbol{y})\right|.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}B &\underset{(5)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{m_i} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ir}} \phi_{\ell_{ir}}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ir}} \phi_{\ell_{ir}}(\boldsymbol{y})\right| \\ &\underset{(12)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{m_i} |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \, 2\sqrt{d} \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha}.\end{aligned}$$

最后，界（14）和（15）给出

$$B \leq \frac{(k + d' - 1)!}{(d' - 1)!} 2k\sqrt{d} \, |f^*|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}^* \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha}.$$

我们结合对 A 和 B 的估计，得到

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{f}(\boldsymbol{y})\right| &\leq \frac{(k+d'-1)!}{(d'-1)!}\left(2k\sqrt{d}+\max\left\{\sqrt{d}\,d',2\right\}\right)|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\alpha}\\ &\leq \frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\,2\sqrt{d}\,|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\alpha}\,.\end{aligned}$$

最后一个等式对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{\beta}\in B_k^d$都成立，因此我们有

$$|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)}\leq 2\sqrt{d}\,\frac{(k+d')!}{(d'-1)!}\,|f^*|^*_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\,.$$

由于该结论不依赖于 $\mathcal{C}^{k,\alpha}$-延拓 f^* 对 f的选择，我们可以对所有此类延拓取下确界。根据 $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})$-范数在 (4) 中的定义，可得 (24)。

□

注 4.4。对于球面 $\mathbb{M}=\mathbb{S}^2$, [31, 定理 4.3] 指出$|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^k,\alpha}(\mathbb{T}^2)\leq(k+3)!\,\|f\|_{\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{S}^2)}$，其中 $f\in\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{S}^2)$。本文中的相应结果 (19) 将估计改进了因子 $\sqrt{2}$。另一方面， [31, 定理 4.5] 指出 $|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^k,\alpha}(\mathbb{T}^2)\leq(k+3)!\,\|f\|_{\mathcal{C}^k,\alpha}(\mathbb{S}^2)$，其中 $f\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{S}^2)$。将其与球面的 (24) 比较，我们发现新的普遍估计大了因子 $\sqrt{2}$。这是因为对于球面 DFS 变换，(12) 并非最优；事实上， [31, 引理 4.2] 证明了这一特殊情形下相应的估计。

5. 使用 DFS 方法进行级数展开

我们提出一种利用广义 DFS 方法表示函数的级数表示。在第 5.1 节中，我们探讨 DFS 函数的傅里叶级数的性质，并定义流形上的一种类似级数展开。在第5.2 节中，我们结合定理 4.2 和4.3 的结果与多维傅里叶分析的结果，证明 DFS 函数的傅里叶级数逐点收敛且一致收敛。

在本节中，设 $\mathbb{M}\subset\mathbb{R}^{d'}$ 是一个 d 维光滑嵌入子流形，可以带有角点，也可以不带角点，并且存在广义 DFS 变换 $\phi\colon\ \mathbb{T}^d\to\mathbb{M}$。对于函数 $f\colon\ \mathbb{M}\to\mathbb{C}$，我们将其广义 DFS 函数记作 $\tilde{f}=f\circ\phi\colon\ \mathbb{T}^d\to\mathbb{C}$。

5.1. 傅里叶级数与 DFS 方法

令 $L_2(\mathbb{T}^d)$ 表示 $\mathbb{T}^d$ 上平方可积复值函数构成的希尔伯特空间，该空间配备内积

$$\langle g,h\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)}\coloneqq(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}g(\boldsymbol{x})\,\overline{h(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad g,h\in L_2(\mathbb{T}^d)$$

以及诱导范数$\|g\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}\coloneqq\langle g,g\rangle^{1/2}_{L^2\ (\mathbb{T}^d)}$。由于复指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{n},\cdot\rangle},\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$ 构成其中的标准正交基，我们定义相应的傅里叶展开。

定义 5.1。 令 $g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ 和 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$。我们将 $\boldsymbol{n}$ 阶傅里叶系数 定义为g

$$c_{\boldsymbol{n}}(g) \coloneqq \left\langle g, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \cdot \rangle} \right\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)} = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi]^d} g(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令 Ω_h, $h \in \mathbb{N}$ 为由有界集构成的扩张序列，其并集穷尽 $\mathbb{Z}^d$。我们将 *h-th partial Fourier sum* of g 定义为

$$\mathrm{F}_{\Omega_h} g(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{\boldsymbol{n} \in \Omega_h} c_{\boldsymbol{n}}(g)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d,$$

并将 g 的傅里叶级数定义为 $\mathrm{F}g \coloneqq \lim_{h\to\infty} \mathrm{F}_{\Omega_h} g$。对于任意选取的扩张序列，这个极限在 $L_2(\mathbb{T}^d)$ 中都有定义良好，且 $\mathrm{F}g = g$ in $L_2(\mathbb{T}^d)$。如果对于所有由有界集构成且穷尽 $\mathbb{Z}^d$ 的扩张序列 Ω_h, $h \in \mathbb{N}$，部分和 $\sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega_h} a_{\boldsymbol{n}}$ 都在 $h \to \infty$ 时收敛，我们就称多重级数 $\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}}$ 收敛，参见 [24, p. 6]。

广义 DFS 方法通过其 DFS 函数 $\tilde{f}\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ 的傅里叶级数来表示函数 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$，即

$$\mathrm{F}\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} \rangle}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d. \tag{26}$$

~归根结底，我们感兴趣的是表示函数 f，而非其 DFS 函数 f。因此，自然会提出这样的问题：我们能否将傅里叶级数（26）与定义在$\mathbb{M}$ 上的级数联系起来。选取 D_1 和 D_2，如定义 3.1 中的 (ii) 所述。我们注意到，ϕ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的限制是双射，因此只需将其逆映射作用于基函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \cdot \rangle}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$。然而，这会导致展开中出现冗余，因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \cdot \rangle}$ 通常不是 BMC 函数，参见引理 3.5。为此，我们在 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 中定义一个由 BMC 函数组成的正交基，该基由函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \cdot \rangle}$ 的适当线性组合构成。为此，我们还需要选取 $\mathbb{Z}^d$ 中的一组合适指标。这样，我们便可在流形 $\mathbb{M}$ 上构造相应的基。

根据定义 3.1，我们回顾对称数 p、平移向量 S^i、反射映射 M^i以及在（s^i 7）中定义的对称函数 。注意，函数 M^i通过（$\mathbb{Z}^d$ 6）中的矩阵乘法，在 上定义良好。对于 $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$，我们设

$$\mathcal{M}(\Omega) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \left(\circ_{i\in I} \mathrm{M}^i\right)(\boldsymbol{n}) \in \Omega \text{ for some } I \subset [p] \right\},$$

以及对于 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$，$\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) \coloneqq \mathcal{M}(\{\boldsymbol{n}\})$。对于 $I \subset [p]$，我们引入映射

$$\mathrm{N}^I\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z},\ \mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) \coloneqq \sum_{i\in I} \sum_{j\in[d],\, \mathrm{S}^i_j = \pi} n_j$$

并记 $\mathrm{N}^i(\boldsymbol{n}) \coloneqq \mathrm{N}^{\{i\}}(\boldsymbol{n})$。对于 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$，我们定义

$$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} \coloneqq \begin{cases} 1, & \mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) \text{ is even for all } I \subset [p] \text{ with } \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \\ 0, & \mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) \text{ is odd for some } I \subset [p] \text{ with } \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}. \end{cases} \tag{27}$$

注意，如果反射 M^i 作用于两两不相交的变量集合，那么对于任意$I \subset [p]$，当且仅当 $\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ 时，$\mathrm{M}^i(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ 对所有 $i \in I$均成立。在这种情况下，我们因此只需检查所有 $i \in [p]$ 对应的 $\mathrm{N}^i(\boldsymbol{n})$ 的奇偶性，即可确定 $r_{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}}$。对于$J \subset [p]$ 和 $\boldsymbol{m} := \mathrm{M}^J(\boldsymbol{n})$，我们定义

$$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}} := (-1)^{\mathrm{N}^J(\boldsymbol{n})}\, r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}. \tag{28}$$

下一个引理将说明，因此 $r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}$ 在 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{n})$ 上定义良好。对于 $I, J \subset [p]$，我们用 $\#I$ 表示 I 的基数，并定义对称差

$$I \Delta J := (I \setminus J) \dot\cup (J \setminus I)\,.$$

引理 5.2. 设 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{n})$。则有

$$\boldsymbol{n}_{\#} := \#\{I \subset [p] \mid \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}\} = \#\{I \subset [p] \mid \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}\} \tag{29}$$

并且我们有

$$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}} = \frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I \subset [p],\\ \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}}} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}. \tag{30}$$

特别是，$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}$ 由 (27) 和 (28) 定义良好。此外，对于 $I, J \subset [p]$，有

$$(-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) + \mathrm{N}^J(\boldsymbol{n})} = (-1)^{\mathrm{N}^{I\Delta J}(\boldsymbol{n})} \tag{31}$$

and

$$\mathrm{M}^I\left(\mathrm{M}^J(\boldsymbol{n})\right) = \mathrm{M}^{I\Delta J}(\boldsymbol{n}). \tag{32}$$

证明。对于 $I \subset [p]$ 和 $\ell \in [p]$，我们有

$$(-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) + \mathrm{N}^\ell(\boldsymbol{n})} = (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) \pm \mathrm{N}^\ell(\boldsymbol{n})} = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{N}^{I\cup\{\ell\}}(\boldsymbol{n})}, & \ell \notin I \\ (-1)^{\mathrm{N}^{I\setminus\{\ell\}}(\boldsymbol{n})}, & \ell \in I. \end{cases}$$

由此归纳地得到 (31)。类似地，由32) 可得

$$\mathrm{M}^I\left(\mathrm{M}^\ell(\boldsymbol{n})\right) = \begin{cases} \left(\circ_{i\in I\cup\{\ell\}} \mathrm{M}^i\right)(\boldsymbol{n}), & \ell \notin I \\ \left(\circ_{i\in I\setminus\{\ell\}} \mathrm{M}^i\right)(\boldsymbol{n}), & \ell \in I, \end{cases}$$

其中我们利用了反射 M^i 是自身的逆映射且彼此可交换。由（32），可知映射

$$\begin{aligned} \{I \subset [p] \mid \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}\} &\to \{I \subset [p] \mid \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}\} \\ I &\mapsto I\Delta J \end{aligned}$$

是自身的逆映射。特别地，这证明了（29）。

接下来，我们证明在 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$的情况下成立（^{J}（$\boldsymbol{n}$）对于某个 $J \subset [p]$ 且 N^{J}（$\boldsymbol{n}$）$= \boldsymbol{n}$为奇数，则

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} (-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})} = \frac{1}{2\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} (-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})} + (-1)^{\mathrm{N}^{I\Delta J}(\boldsymbol{n})}$$

$$\underset{(31)}{=} \frac{1}{2\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} \underbrace{(1+(-1)^{\mathrm{N}^{J}(\boldsymbol{n})})}_{=0}(-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})} = 0 \underset{(27)}{=} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}.$$

另一方面，如果对于所有满足 $\mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ 的 $I \subset [p]$，$\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})$ 都是偶数，那么

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} \underbrace{(-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})}}_{=1} = \frac{\boldsymbol{n}_{\#}}{\boldsymbol{n}_{\#}} = 1 \underset{(27)}{=} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}.$$

现在，令 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{n})$ 为任意值。对于满足 $\mathrm{M}^{J}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}$ 的 $J \subset [p]$，我们得到（30）b y

$$(-1)^{\mathrm{N}^{J}(\boldsymbol{n})} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} = (-1)^{\mathrm{N}^{J}(\boldsymbol{n})} \frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} (-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})}$$

$$\underset{(31)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}}} (-1)^{\mathrm{N}^{I\Delta J}(\boldsymbol{n})} = \frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^{I}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{m}}} (-1)^{\mathrm{N}^{I}(\boldsymbol{n})}.$$

注意，右侧与 J 无关。这证明 $r_{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{m}}$ 定义良好。

□

为构造 BMC基，我们选择一个同时满足以下条件的指标集 $\Omega_{\phi} \subset \mathbb{Z}^{d}$

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) \cap \mathcal{M}(\boldsymbol{m}) = \emptyset \text{ for all } \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \Omega_{\phi} \text{ with } \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{m} \tag{33}$$

and

$$\mathcal{M}(\Omega_{\phi}) = \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{d} \mid r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} \neq 0\}. \tag{34}$$

下一个定理证明这样的 $\Omega\phi$ 存在，并给出一个 BMC基。

定理5.3。 存在一个集合 $\Omega_{\phi} \subset \mathbb{Z}^{d}$ 满足 (33) 和 (34)。对于 $\boldsymbol{n} \in \Omega\phi$，函数

$$e_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{n})} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{x}\rangle}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^{d}, \tag{35}$$

是一个 *BMC* 函数，且

$$\|e_{\boldsymbol{n}}\|^{2}_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \#\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) \leq 2^{p}.$$

此外，$e_{\boldsymbol{n}}$、$\boldsymbol{n} \in \Omega\phi$ 构成 $L_2(\mathbb{T}^d)$ 中 *BMC* 函数子空间的正交基。对于任意 *BMC* 函数 $g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ 以及任意有限 $\Omega \subset\Omega\phi$，我们有

$$\mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)} g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{M}(\Omega)} c_{\boldsymbol{n}}(g)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle} = \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega} c_{\boldsymbol{n}}(g)\, e_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^{d}. \tag{36}$$

证明。我们首先构造一个满足ϕ （33）和（34）的 Ω。我们考虑有限集 $\boldsymbol{n} \sim \boldsymbol{m} \Leftrightarrow \mathcal{M}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{M}(\boldsymbol{m})$ 上的等价关系，并从相应的商空间中选取一个代表元集 Ω。然后定义

$$\Omega' \coloneqq \{\boldsymbol{n} \in \Omega \mid r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} \neq 0\}$$

and

$$\Omega_\phi \coloneqq \bigcup_{\boldsymbol{n}\in\Omega'} \left(\bigtimes_{j=1}^{d} \left(n_j + 2\,\mathrm{sgn}(n_j)\,\mathbb{N}_0\right) \right),$$

其中 $\times$ denotes为集合的笛卡尔积。对于 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$，我们有 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{M}(\boldsymbol{m})$ 或 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) \cap \mathcal{M}(\boldsymbol{m}) = \emptyset$。由于反射映射 M^i, $i \in [p]$ 只改变符号，因此我们有$\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{M}(\boldsymbol{m})$ 当且仅当 $|n_j| = |m_j|$ 对所有 $j \in [m]$ 都成立，并且 $\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{n}}) = \mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{m}})$，其中$\tilde{n}_j = \mathrm{sgn}(n_j)$ 和 $\tilde{m}_j = \mathrm{sgn}(m_j)$。因此，$\Omega_\phi$ 满足（33）。此外，我们注意到，$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$ 的值仅取决于 $\boldsymbol{n}$ 的哪些分量为零、哪些分量为奇数。特别地，对于所有 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{n})$，都有 $r_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}} = r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$；向 Ω'中加上偶整数可确保（34）成立。

现在我们证明，对于所有 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ 由（ $e_{\boldsymbol{n}}$）定义的函数35）是一个 BMC 函数。根据（30）以及 $\mathcal{M}$（$\boldsymbol{n}$）的定义，我们可以将 $e_{\boldsymbol{n}}$ 改写为

$$e_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{n})} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{\substack{I\subset[p],\\ \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{m}}} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{m},\cdot\rangle} = \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I\subset[p]} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}),\cdot\right\rangle}. \tag{37}$$

令 $\ell \in [p]$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$。对于定义 s^ℓ 中的对称函数 3.1，我们有 e

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, s^\ell(\boldsymbol{x})\rangle} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \mathrm{S}^\ell + \mathrm{M}^\ell(\boldsymbol{x})\rangle} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \mathrm{S}^\ell\rangle}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n}, \mathrm{M}^\ell(\boldsymbol{x})\rangle} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi \sum_{j\in[d], \mathrm{S}^\ell_j = \pi} n_j}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^\ell(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{x}\rangle} = (-1)^{\mathrm{N}^\ell(\boldsymbol{n})} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^\ell(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{x}\rangle}. \end{aligned} \tag{38}$$

对于 $I \subset [p]$，显然有 $\left(\mathrm{M}^i(\boldsymbol{n})\right)_j = \pm n_j$，因此

$$(-1)^{\mathrm{N}^\ell\left(\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})\right)} = (-1)^{\sum_{j\in[d], \mathrm{S}^\ell_j = \pi} \pm n_j} = (-1)^{\sum_{j\in[d], \mathrm{S}^\ell_j = \pi} n_j} = (-1)^{\mathrm{N}^\ell(\boldsymbol{n})}. \tag{39}$$

综上，利用 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n})$ 的定义可得

$$\begin{aligned} e_{\boldsymbol{n}}(s^\ell(\boldsymbol{x})) &\underset{(37)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I\subset[p]} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}), s^\ell(\boldsymbol{x})\right\rangle} \\ &\underset{(38)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I\subset[p]} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})} (-1)^{\mathrm{N}^\ell\left(\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})\right)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle \mathrm{M}^\ell\left(\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})\right), \boldsymbol{x}\right\rangle} \\ &\underset{(39)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I\subset[p]} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n}) + \mathrm{N}^\ell(\boldsymbol{n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle \mathrm{M}^\ell\left(\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})\right), \boldsymbol{x}\right\rangle} \\ &\underset{(31),(32)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I\subset[p]} (-1)^{\mathrm{N}^{I\Delta\{\ell\}}(\boldsymbol{n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle \mathrm{M}^{I\Delta\{\ell\}}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{x}\right\rangle} \underset{(37)}{=} e_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

这就证明了 $e_{\boldsymbol{n}}$ 是一个 BMC 函数。

傅里叶基 e 的正交归一性$^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\cdot\rangle}$， $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$结合（34），立即可得，对所有 $\boldsymbol{n}\in\Omega^{\phi}$，均有

$$\|e_{\boldsymbol{n}}\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}^2=\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{n})}\underbrace{r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}^2}_{=1}=\#\mathcal{M}(\boldsymbol{n})\le\#\mathcal{P}([p])=2^p,$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示幂集。

接下来，我们证明 $e_{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{n}\in\Omega^{\phi}$ 的正交性。设 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\Omega^{\phi}$，且 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{m}$。由（33）可得 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n})\cap\mathcal{M}(\boldsymbol{m})=\emptyset$。因此，对于任意 $I,J\subset[p]$，有 $\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})\neq\mathrm{M}^J(\boldsymbol{m})$，这意味着

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}),\cdot\rangle},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^J(\boldsymbol{m}),\cdot\rangle}\right\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)}=0,\qquad I,J\subset[p].$$

内积的双线性以及（37）立即推出 $\langle e_{\boldsymbol{n}},e_{\boldsymbol{m}}\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)}=0$。设 $g\in L_2(\mathbb{T}^d)$ 是一个 BMC 函数，且 $i\in[p]$。利用（38）、 s^i的性质以及变量替换，可得对于任意 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned}(2\pi)^d c_{\boldsymbol{n}}(g)&=\int_{\mathbb{T}^d}g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{T}^d}g(s^i(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\int_{\mathbb{T}^d}g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},s^i(\boldsymbol{x})\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(-1)^{\mathrm{N}^i(\boldsymbol{n})}\int_{\mathbb{T}^d}g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^i(\boldsymbol{n}),\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

除以（2π）^{d} 并应用归纳法可得

$$c_{\boldsymbol{n}}(g)=(-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\,c_{\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})}(g),\quad \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,I\subset[p].\tag{40}$$

现在可以证明（36）。取任意有限集 $\Omega\subset\Omega^{\phi}$。由（33）以及 $\mathcal{M}(\Omega)$ 的定义可知

$$\mathcal{M}(\Omega)=\dot{\bigcup_{\boldsymbol{n}\in\Omega}}\mathcal{M}(\boldsymbol{n}),$$

其中 $\dot\cup$ 表示不交并。对于 $\boldsymbol{n}\in\Omega$，有

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{n})}c_{\boldsymbol{m}}(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{m},\cdot\rangle}&\underset{(29)}{=}\frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}}\sum_{I\subset[p]}c_{\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})}(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}),\cdot\rangle}\\&\underset{(40)}{=}\frac{1}{\boldsymbol{n}_{\#}}\sum_{I\subset[p]}(-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\,c_{\boldsymbol{n}}(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}),\cdot\rangle}\underset{(37)}{=}c_{\boldsymbol{n}}(g)\,e_{\boldsymbol{n}}.\end{aligned}$$

这表明

$$\mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)}g=\sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega}c_{\boldsymbol{n}}(g)\,e_{\boldsymbol{n}}$$

特别地，这推出（36）。

我们证明 $e_{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{n}\in\Omega^{\phi}$ 的完备性。设 $g\in L_2(\mathbb{T}^d)$ 是一个 BMC 函数，使得 $\langle g,e_{\boldsymbol{n}}\rangle=0$ 对所有 $\boldsymbol{n}\in\Omega^{\phi}$ 均成立。我们需要证明 $c_{\boldsymbol{m}}(g)=0$ 对所有 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d$ 均成立，这

意味着 $g = 0$。设 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$。若 $r_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}} = 0$，则存在 $I \subset [p]$，使得 $\mathrm{N}^I(\boldsymbol{m})$ 为奇数且 $\mathrm{M}^I(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}$。由 (40) 可得 $c_{\boldsymbol{m}}(g) = -c_{\boldsymbol{m}}(g)$，因此 $c_{\boldsymbol{m}}(g) = 0$。若 $r_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}} \neq 0$，由 (34) 可知存在 $\boldsymbol{n} \in \Omega\phi$ 和 $J \subset [p]$，使得 $\mathrm{M}^J(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}$，由此得到

$$\begin{aligned} 0 = \langle g, e_{\boldsymbol{n}} \rangle &\underset{(37)}{=} \frac{1}{\boldsymbol{n}_\#} \sum_{I \subset [p]} (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})}\, c_{\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})}(g) \\ &\underset{(29),(40)}{=} \#\mathcal{M}(\boldsymbol{n})\, c_{\boldsymbol{n}}(g) \underset{(40)}{=} \underbrace{\#\mathcal{M}(\boldsymbol{n})\, (-1)^{\mathrm{N}^J(\boldsymbol{n})}}_{\neq 0}\, c_{\boldsymbol{m}}(g), \end{aligned}$$

这证明了完备性。 □

注 5.4. 对于在基 $e_{\boldsymbol{n}}$上的展开，可以使用依赖对称性的快速傅里叶变换变体替代标准快速傅里叶变换，从而降低计算成本。在一维情形下，离散余弦变换（DCT）和离散正弦变换（DST）[6] 分别是对具有偶对称性或奇对称性的实值函数进行快速傅里叶变换时的常见替代方法。类似地，如果傅里叶级数仅包含偶数阶或奇数阶项 [42]，也可以降低计算成本。高维中也存在依赖对称性的快速傅里叶变换变体，例如参见 [1]。这类算法通常由一维技术组合而成 [12, 44]，，例如采用行列法 [38, 第 5.3 章。5]。

函数 $e_{\boldsymbol{n}}$ 是上一定理中的 BMC 函数，因此，根据引理 3.5，它们对应于定义在流形 $\mathbb{M}$ 上、除去奇异点零测集后的函数。我们利用这种对应关系，在 $\mathbb{M}$上定义傅里叶级数的类似概念。

定义 5.5。 对于 $\boldsymbol{n} \in \Omega\phi$，我们定义 ***n-th DFS基函数***

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}) := e_{\boldsymbol{n}}\Big(\big(\phi|_{D_1 \dot\cup D_2}\big)^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \Big), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M}, \tag{41}$$

其中 $e_{\boldsymbol{n}}$ 如定理 5.3所述。设 Ω_h, $h \in \mathbb{N}$ 是 一个穷尽 Ω 的有界集扩张序列ϕ。对于 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ 其中 $\tilde f \in L_2(\mathbb{T}^d)$，我们定义 ***h-th* 部分*DFS*傅里叶和** of f 为

$$\mathrm{S}_{\Omega_h} f(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{\boldsymbol{n} \in \Omega_h} c_{\boldsymbol{n}}(\tilde f)\, b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M},$$

以及 f的***DFS* 傅里叶级数**，记作 $\mathrm{S}f := \lim_{h\to\infty} \mathrm{S}_{\Omega_h} f$。

基函数 $b_{\boldsymbol{n}}$ 在奇异点集 $\phi[D_2]$上可能并不光滑。尽管如此，我们将在后文证明，只要 f 足够光滑，$\mathrm{S}f$ 就在 $\mathbb{M}$ 上一致收敛。

定理 5.6. 设 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ 满足 $\tilde f \in L_2(\mathbb{T}^d)$，且 $\Omega \subset \Omega\phi$ 为有限集。那么，部分*DFS*傅里叶和 $\mathrm{S}_\Omega f$ 由下式给出

$$\mathrm{S}_\Omega f(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)} \tilde f\Big(\big(\phi|_{D_1 \dot\cup D_2}\big)^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \Big), \qquad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M} \tag{42}$$

并且它是 $\mathbb{M}$ 上满足下列条件的唯一函数

$$\big((\mathrm{S}_\Omega f)\circ\phi\big)(\boldsymbol{x}) =: \widetilde{\mathrm{S}_\Omega f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)}\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in \bigcup_{I\subset[p]} s^I[D_1]\cup D_2. \tag{43}$$

特别地，这个等式在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处成立。此外，$\mathrm{S}_\Omega f$ 在 $\mathbb{M}\setminus\phi[D_2]$ 上连续，在 $\mathbb{M}^\circ\setminus\phi[D_2]$ 中光滑，其中 $\mathbb{M}^\circ$ 表示流形内部。~如果 $\mathrm{F}f$ 逐点收敛于 f，那么 $\mathrm{S}f$ 逐点收敛于 f。

~证明。 由引理 3.5可知， f 的 f DFS 函数是一个 BMC 函数。因此，由定理5.3 可得

$$\mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)}\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega} c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\, e_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d.$$

将 $\phi\big|_{D_1\dot\cup D_2}$ 的逆映射作用于等式两边，立即由 (41) 中 $b_{\boldsymbol{n}}$ 的定义得到 (42)。由于 $\mathrm{F}_{\mathcal{M}(\Omega)}f$ 是有限个 BMC 函数之和，因此也是一个 BMC 函数，我们可以再次应用引理 3.5 来证明 (43)。根据引理 3.4 可立即得到正则性。注意，对于任意一个由有界集组成、穷尽 Ω_ϕ 的扩张序列 Ω_h, $h\in\mathbb{N}$，序列 $\mathcal{M}(\Omega_h)$, $h\in\mathbb{N}$ 是一个由有界集组成、穷尽 $\{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d \mid r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}\neq 0\}$ 的扩张序列。由于 $\tilde{f}$ 是一个 BMC 函数，对于任意满足 $r_{\boldsymbol{n}}$、$_{\boldsymbol{n}}=0$ 的 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$，都有 $c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})=0$，因此结合 (36) 和 (42) 即可得到逐点收敛。

□

定理 5.7。 我们设 $g(\boldsymbol{x}) := \big|\det\big(\nabla\phi(\boldsymbol{x})\ \ \nabla\phi(\boldsymbol{x})\big)\big|^{1/2}$ 对于 $\boldsymbol{x}\in D_1^\circ$。令 $\tilde{L}_2(\mathbb{M})$ 表示由加权内积诱导的 L_2-空间

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\tilde{L}_2(\mathbb{M})} := \int_{\mathbb{M}} f_1(\boldsymbol{\xi})\,\overline{f_2(\boldsymbol{\xi})}\,\frac{2^{p-d}\pi^{-d}}{\big(g\circ(\phi\big|_{D_1^\circ})^{-1}\big)(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\omega(\boldsymbol{\xi}), \qquad f_1, f_2\colon\mathbb{M}\to\mathbb{C},$$

其中 $\mathrm{d}\omega$ 表示 $\mathbb{M}$ 上的曲面测度。集合 $b_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n}\in\Omega_\phi$ 构成 $L_2(\mathbb{M})$ 的正交~基，并且对于所有 $f\in L_2(\mathbb{M})$，都有~

$$c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f}) = \frac{\langle\tilde{f}, e_{\boldsymbol{n}}\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)}}{\|e_{\boldsymbol{n}}\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}} = \frac{\langle f, b_{\boldsymbol{n}}\rangle_{\tilde{L}_2(\mathbb{M})}}{\|b_{\boldsymbol{n}}\|^2_{\tilde{L}_2(\mathbb{M})}}, \qquad \boldsymbol{n}\in\Omega_\phi. \tag{44}$$

~特别地，任意 $f\in L_2(\mathbb{M})$ 的 *DFS* 傅里叶级数 Sf 在 $L_2(\mathbb{M})$ 中收敛，并且有 $Sf=f$。

证明。 根据引理 3.4，集合 $\mathbb{M}\setminus\phi[D_1^\circ]$ 在 $\mathbb{M}$ 中是零测集；并且根据定义 (iv) 中的 3.1，我们有 $g(\boldsymbol{x})\neq 0$ 对所有 $\boldsymbol{x}\in D_1^\circ$均成立。因此，我们可以对可定向子流形 $\phi[D_1^\circ]\subset\mathbb{M}$ 应用换元公式 [26,~命题 15。31]，从而对于 f_1, $f_2\in L_2(\mathbb{M})$ 得到等距映射

$$\begin{aligned}\langle\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\rangle_{L_2(\mathbb{T}^d)} &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\tilde{f}_1(\boldsymbol{x})\,\overline{\tilde{f}_2(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^{-d}\sum_{I\subset[p]}\int_{s^I[D_1^\circ]}\tilde{f}_1(\boldsymbol{x})\,\overline{\tilde{f}_2(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= 2^{p-d}\pi^{-d}\int_{D_1^\circ}\frac{f_1\big(\phi(\boldsymbol{x})\big)\,\overline{f_2\big(\phi(\boldsymbol{x})\big)}}{\big(g\circ(\phi\big|_{D_1^\circ})^{-1}\big)\big(\phi(\boldsymbol{x})\big)}\,g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \langle f_1, f_2\rangle_{\tilde{L}_2(\mathbb{M})},\end{aligned}$$

其中第二个等式中我们使用了（8），第三个等式中使用了 DFS 函数的 s^I–不变性。由于 $\tilde{b}_{\boldsymbol{n}} = e_{\boldsymbol{n}}$ 几乎处处成立于 $\mathbb{T}^d$，我们得到（44）。 □

5.2. 傅里叶级数的收敛性

在本小节中，我们最终获得流形 $\mathbb{M}$上 DFS 傅里叶级数的收敛性结果。在这里，我们紧密遵循 [31, § 5.2] 中的推导，并将其推广到高维。为简化记号，令 $\mathcal{C}^{k,1}(\mathbb{M}) := \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{M})$ 对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 成立，并对由 $\mathbb{T}^d$ 替代的 $\mathbb{M}$ 作相同处理。

引理 5.8。设 $k \in \mathbb{N}_0$、$0 < \alpha \leq 1$ 和 $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})$。令 $c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})$ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ 表示 f 的广义 *DFS* 函数 f 的˜傅里叶系数。那么，级数

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \left|c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\right|^b \tag{45}$$

对于所有满足 $b > 2d/\big(d + 2(k + \alpha)\big)$ 的 $b \in \mathbb{R}$，均收敛。

证明。如果 $\alpha < 1$，则可应用定理 4.3 得到 $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。根据 [24, 第 87], 页，这立即推出（45）对所有 $b > 2d/\big(d + 2(k + \alpha)\big)$ 均收敛。如果 $\alpha = 1$，我们选择 $0 < \varepsilon < 1$ 使得 $b > 2d/\big(d + 2(k + 1 - \varepsilon)\big)$。定理 4.2 随即给出$\tilde{f} \in \mathcal{C}^{k,1-\varepsilon}(\mathbb{T}^d)$，因此（45）的收敛性如前所述即可得到。 □

定理 5.9。设 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $0 < \alpha \leq 1$ 满足$2(k + \alpha) > d$。对于 $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})$，傅里叶级数F$\tilde{f}$ 一致收敛于 *DFS* 函数 $\tilde{f}$；对于Ω $\subset \mathbb{Z}^d$，有

$$\left\|\tilde{f} - \mathrm{F}_\Omega \tilde{f}\right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)} \leq \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega} \left|c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\right|.$$

此外，*DFS* 傅里叶级数Sf 在 $\mathbb{M}$上一致收敛于 f。对于Ω $\subset$Ω$_\phi$，得到

$$\left\|f - \mathrm{S}_\Omega f\right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \leq \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{M}(\Omega)} \left|c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\right|.$$

证明。对 $b = 1 > 2d/\big(d + 2\,(k + \alpha)\,\big)$ 应用引理 5.8，得到级数$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}|c_{\boldsymbol{n}}(f)|$ 收敛。因此，根据 [38, 定理 4。7]，傅里叶级数 F$\tilde{f}$ 一致收敛于 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{T}^d$上。对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$ 以及 Ω $\subset \mathbb{Z}^d$，得到

$$\left|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{F}_\Omega \tilde{f}(\boldsymbol{x})\right| = \left|\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle} - \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega} c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\right| \leq \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega} \left|c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\right|.$$

定理5.6 现在可直接得出第二个结论。 □

我们证明矩形部分傅里叶和与圆形部分傅里叶和这两个特殊情形下收敛速度的显式界 [24, 第 7 页及后续]。以下技术性引理的证明基于 [22,定理 3.2。16], 见附录 A。

引理 5.10。 设 $k \in \mathbb{N}_0$、 $0 < \alpha < 1$ 和 $g \in \mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。那么，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell \le |\boldsymbol{n}| < 2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)| \le 2^{d-\alpha}\, d^{k+\frac{3}{2}}\, \pi^\alpha\, 2^{\ell\left(\frac{d}{2}-(k+\alpha)\right)}\, |g|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)}\,. \tag{46}$$

定理 5.11. 设 $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \le 1$ 满足$2(k+\alpha) > d$，并设 $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})$。我们定义与 $\Omega_h = \{\boldsymbol{n} \in \Omega$*{v35}*相关的圆形部分 *DFS* 傅里叶和$\mathrm{K}_h f := \mathrm{S}_{\Omega_h} f$, $h \in \mathbb{N}$。有

$$\|f - \mathrm{K}_h f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \le M_{d,d',k,\alpha}\, \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{M})}\, h^{\frac{d}{2}-k-\alpha}, \tag{47}$$

其中

$$M_{d,d',k,\alpha} := \frac{2^{\frac{d}{2}+k+1-\lfloor\alpha\rfloor}\, d^{k+2}\, \pi^\alpha\, (k+d')!}{(1-2^{\frac{d}{2}-k-\alpha})\,(d'-1)!} \quad \textit{for } k+d' \ge 2 \tag{48}$$

并且 $M_{1,1,0,\alpha} := 2^{\frac{1}{2}+\lfloor\alpha\rfloor}\, \pi^\alpha/(1-2^{\frac{1}{2}-\alpha})$。这里， $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整为整数。

证明。 由定理 5.9，左侧可由其余傅里叶系数之和界定。注意到 $\mathcal{M}(\Omega_h)$ $= \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d \mid |\boldsymbol{n}| \le h, r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} \ne 0\}$。由此得到

$$\|f - \mathrm{K}_h f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \le \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, |\boldsymbol{n}|>h} |c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})| \le \sum_{\ell=\lfloor\log_2 h\rfloor}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(\tilde{f})|.$$

若 $\alpha < 1$，我们应用定理 4.2 得到 $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，因此由引理 5.10可得

$$\|f - \mathrm{K}_h f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \le 2^{d-\alpha}\, d^{k+\frac{3}{2}}\, \pi^\alpha\, |\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)} \sum_{\ell=\lfloor\log_2 h\rfloor}^{\infty} 2^{\ell\left(\frac{d}{2}-(k+\alpha)\right)}.$$

由于 $d/2-(k+\alpha) < 0$ 且 $2^{\lfloor\log_2 h\rfloor} \ge h/2$，我们可以计算几何级数

$$\sum_{\ell=\lfloor\log_2 h\rfloor}^{\infty} 2^{\ell\left(\frac{d}{2}-(k+\alpha)\right)} = \frac{2^{\lfloor\log_2 h\rfloor\left(\frac{d}{2}-k-\alpha\right)}}{1-2^{\frac{d}{2}-k-\alpha}} \le \frac{2^{k+\alpha-\frac{d}{2}}\, h^{\frac{d}{2}-k-\alpha}}{1-2^{\frac{d}{2}-k-\alpha}}.$$

定理 4.3 表明，若 $k+d' \ge 2$，则有 $|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^k,\alpha(\mathbb{T}^d)} \le 2\sqrt{d}\,(k+d')!\,(d'-1)!\,\|f\|_{\mathcal{C}^k,\alpha(\mathbb{M})}$；并且，若 $k+d' = 1$，则有 $|f|_{\mathcal{C}^0,\alpha(\mathbb{T}^1)} \le \|f\|_{\mathcal{C}^0,\alpha(\mathbb{M})}$。因此，综上可得 (47)。对于 $\alpha = 1$，我们利用定理 4.2 推得，对任意 $0 < \varepsilon < 1$，都有 $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{k,\,1-\varepsilon}(\mathbb{T}^d)$。取 ε 足够小，由与前面相同的论证可得

$$\|f - \mathrm{K}_h f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{M})} \le 2^{d-(1-\varepsilon)}\, d^{k+\frac{3}{2}}\, \pi^{1-\varepsilon}\, |\tilde{f}|_{\mathcal{C}^{k,1-\varepsilon}(\mathbb{T}^d)}\, \frac{2^{k+1-\varepsilon-\frac{d}{2}}\, h^{\frac{d}{2}-k-1+\varepsilon}}{1-2^{\frac{d}{2}-k-1+\varepsilon}}.$$

由 (19)，我们有 $|\tilde{f}|_{\mathcal{C}^k,1-\varepsilon(\mathbb{T}^d)} \le \sqrt{d}\,(k+d')!\,(d'-1)!\,\|f\|_{\mathcal{C}^k,1(\mathbb{M})}$，若 $k+d' \ge 2$ 且若 $k+d' = 1$，我们还有 $|f|_{\mathcal{C}^0,1-\varepsilon(\mathbb{T}^1)} \le 2\,\|f\|_{\mathcal{C}^0,1(\mathbb{M})}$。由于最后一个不等式右侧表达式的其余部分关于 ε连续，我们可以令 $\varepsilon \to 1$ 趋于极限，最终得到 $\alpha = 1$时的 (47)。

□

注 5.12。 定理 5.11 的类似结论 对于矩形部分傅里叶和 $\mathrm{S}_{\Omega_h} f$， $h \in \mathbb{N}$，以及与 $\Omega_h = \{\boldsymbol{n} \in \Omega_\phi \mid \|\boldsymbol{n}\|_\infty < h\}$相关的情形仍然成立。在附录 A中，我们证明在这种情况下，界 (46) 以及因此 (48) 中的常数对于$k + d' \geq 2$ 可以改进为

$$M^{\mathrm{rect}}_{d,d',k,\alpha} = \frac{2^{\frac{d}{2}+k+1-\lfloor\alpha\rfloor}\, d\, \pi^\alpha\, (k+d')!}{(1-2^{\frac{d}{2}-k-\alpha})\,(d'-1)!}.$$

6. 特定流形上的 DFS 方法

我们给出一般 DFS 方法的一些应用示例。此外，我们将文献中针对圆盘、球体和圆柱的 DFS 方法置于我们的广义描述框架下进行回顾，从而现在可以明确给出 DFS 基函数。

6.1. 区间

以下是我们一般框架的一个“玩具示例”：定义在一维流形 $\mathbb{M} = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ 上的广义 DFS 方法。我们很容易证明

$$\phi_{[-1,1]} \colon \mathbb{T}^1 \to [-1, 1],\ x \mapsto \cos x \tag{49}$$

是 $\mathbb{M}$ 的一个广义 DFS 变换，其对称数为 $p = 1$，对称函数为 $s^1(x) = -x$，$x \in \mathbb{T}^1$. 限制在 $D_1 := [0, \pi]$ 上时，映射 $\phi_{[-1,1]}$ 是双射，其连续逆映射由反余弦给出。导数 $\nabla\phi_{[-1,1]}(x) = \sin(x)$ 在 $D_1^\circ = (0, \pi)$ 中非零。我们设 $D_2 := \emptyset$。

我们有 $\mathcal{M}(n) = \{n, -n\}$ 并且 $\mathrm{N}^1(n) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立，因此我们可以设 $\Omega_{[-1,1]} := \mathbb{N}_0$。对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\xi \in [-1, 1]$，根据定义 5.5 可得

$$b_n(\xi) = e_n\Big(\big(\phi_{[-1,1]}\big|_{[0,\pi]}\big)^{-1}(\xi)\Big) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\arccos\xi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\arccos\xi} = 2T_n(\xi), & n \neq 0 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\arccos\xi} = T_0(\xi), & n = 0. \end{cases}$$

这里， T_n 表示由下式定义的第 n 阶 第一类切比雪夫多项式：

$$T_n(\xi) := \cos(n \arccos\xi), \qquad \xi \in [-1, 1].$$

˜与定理 5.7 中一样，变换 $\phi_{[-1,1]}$ 诱导出一个加权希尔伯特空间 $L_2(-1, 1)$，˜其中 f_1、$f_2 \in L_2(-1, 1)$ 的内积定义为

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\tilde{L}_2(-1,1)} := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f_1(\xi)\,\overline{f_2(\xi)}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^1} \tilde{f}_1(x)\overline{\tilde{f}_2(x)}\mathrm{d}x = \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2\rangle_{L_2(\mathbb{T}^1)}.$$

切比雪夫多项式 T_n, $n \in \mathbb{N}_0$ 构成该空间的一组正交基。 $f \in L(-1,1)$ 的第n项切比雪夫部分展开与 DFS 傅里叶和$S_{\{0,\dots,n\}} f$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 都一致。

注 6.1. 我们针对 d 维流形$\mathbb{M}$ 的广义 DFS 方法框架，依赖于将函数从 $\mathbb{M}$ 变换到 $\mathbb{T}^d$，随后对其进行傅里叶级数展开。相比之下，文献中讨论的一些类 DFS 方法，例如针对单位圆盘 [47], 、圆柱 [18], 和球体 [3], 的方法，采用了某些变量位于区间 $[-1,1]$ 而非环面 $\mathbb{T}^1$上的覆盖。这同样适用于我们的方法，因为一维切比雪夫级数与 DFS 傅里叶级数之间的联系很容易推广到多变量情形，从而得到混合傅里叶–切比雪夫级数。

6.2. 超球

我们定义 d维闭单位球

$$\mathbb{B}^d := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{u}\| \le 1\}.$$

设 $d \ge 2$。 $\mathbb{B}^d$ 的参数化由球坐标给出

$$\boldsymbol{\xi}(\rho, \boldsymbol{\lambda}) = \big(\xi_j(\rho, \boldsymbol{\lambda})\big)_{j=1}^d, \qquad \xi_j(\rho, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \rho\cos(\lambda_j)\prod_{\ell=1}^{j-1}\sin(\lambda_\ell), & j < d \\ \rho\prod_{\ell=1}^{d-1}\sin(\lambda_\ell), & j = d \end{cases}$$

对于 $\rho \in [0,1]$ 和 $\boldsymbol{\lambda} \in [0,\pi]^{d-2} \times [-\pi,\pi]$。将角变量 λ_j、 $j \in [d-2]$ 的定义域扩展至 $[-\pi,\pi]$，并用 $\cos x_1$ 替换径向变量 ρ，即可得到 $\mathbb{B}^d$ 的广义 DFS 变换 $\phi_{\mathbb{B}^d}$。对于 $j \in [d]$， $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$ 中 $\phi_{\mathbb{B}^d}$ 的第 j 个分量由下式给出

$$\big(\phi_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{x})\big)_j := \begin{cases} \cos(x_1)\cos(x_{j+1})\prod_{\ell=2}^{j}\sin(x_\ell), & j < d \\ \cos(x_1)\prod_{\ell=2}^{d}\sin(x_\ell), & j = d. \end{cases} \tag{50}$$

我们检验3.1 中对$\phi_{\mathbb{B}^d}$的定义要求。的光滑性显而易见。对称数为 $p = d$，对称函数由下式给出

$$\begin{aligned} s^1(\boldsymbol{x}) &= (-x_1, x_2, ..., x_d), && \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d, \\ s^2(\boldsymbol{x}) &= (x_1+\pi, x_2+\pi, x_3, ..., x_d), && \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d, \\ s^i(\boldsymbol{x}) &= (x_1, ..., x_{i-2}, -x_{i-1}, x_i+\pi, x_{i+1}, ..., x_d), && \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d,\ 3 \le i \le d. \end{aligned} \tag{51}$$

这些对称函数与集合

$$\begin{aligned} D_1 &= [0,\pi/2) \times (0,\pi)^{d-2} \times (-\pi,\pi], \\ D_2 &= \bigcup_{j=2}^{d-1} \Big([0,\pi/2) \times (0,\pi)^{j-2} \times \{0,\pi\} \times \{0\}^{d-j}\Big) \cup \{\pi/2\} \times \{0\}^{d-1}, \end{aligned}$$

视为 $\mathbb{T}^d$ 通过将 $\mathbb{R}^d$ 中的点与 $\mathbb{T}^d$中的等价类作典范识别，满足定义 (i)至(iv) 中的条件 3.1。为证明(iii)，注意到反余弦是连续的，并且对于 $\boldsymbol{x} \in D_1$，有 $\cos(x_1) = \|\phi_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{x})\| \ne 0$，且 $\sin(x_\ell) \ne 0$ 对所有 $\ell \in \{2,..,d-1\}$均成立。因此，由（50）可得，对于 $\boldsymbol{x} \in D_1$和 $j \in [d-1]$，有

$$\cos(x_{j+1}) = \frac{\big(\phi_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{x})\big)_j}{\cos(x_1)\prod_{\ell=2}^{j}\sin(x_\ell)} \quad \text{and} \quad \sin(x_d) = \frac{\big(\phi_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{x})\big)_d}{\cos(x_1)\prod_{\ell=2}^{d-1}\sin(x_\ell)},$$

这归纳地意味着 $\phi_{\mathbb{B}^d}\big|_{D_1}$ 的逆映射是连续的。此外，我们有$|\det \nabla \phi_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{x})| = \sin(x_1)\cos^{d-1}(x_1)\prod_{j=2}^{d-1}\sin^{d-j}(x_j) \neq 0$ 对于 $\boldsymbol{x} \in D_1^\circ$成立，这就是(iv)。对于$\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$，我们有

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) = \{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d \mid m_j = \pm n_j \text{ for } j < d \text{ and } m_d = n_d\},$$

$\mathrm{N}^1(\boldsymbol{n}) = 0$、$\mathrm{N}^2(\boldsymbol{n}) = n_1 + n_2$和 $\mathrm{N}^i(\boldsymbol{n}) = n_i$，对所有 $3 \le i \le d$均成立。由于反射 M^i作用于两两不相交的变量集合，我们注意到，$r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} = 0$ 当且仅当某个满足 $\mathrm{M}^i(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ 的 $i \in [d]$ 使得 $\mathrm{N}^i(\boldsymbol{n})$ 为奇数，也就是说，当且仅当 $n_1 + n_2$ 为奇数，或者对某个 $3 \le i \le d$，$n_{i-1} = 0$ 且n_i 为奇数。我们定义

$$\Omega_{\mathbb{B}^d} \coloneqq \left\{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^{d-1} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; n_1 + n_2 \text{ is even and } (n_{i-1} \neq 0 \text{ or } n_i \text{ is even for all } 3 \le i \le d)\right\}.$$

设 $\boldsymbol{n} \in \Omega_{\mathbb{B}^d}$。若 $n_1 = 0$，则令 $I_{\boldsymbol{n}} \coloneqq \{i \in \{3, \dots, d\} \mid n_{i-1} \neq 0\}$ 和 $J_{\boldsymbol{n}} \coloneqq I_{\boldsymbol{n}}$；否则令 $J_{\boldsymbol{n}} \coloneqq I_{\boldsymbol{n}} \cup \{1\}$。则映射 $I \mapsto \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})$ 是从 $J_{\boldsymbol{n}}$ 到 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n})$ 的双射。根据（28），我们有 $r_{\boldsymbol{n},\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})} = (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$，对所有 $I \subset [d]$均成立。由于 $\mathrm{N}^1(\boldsymbol{n}) = 0$，这就得到对于 $I \subset I_{\boldsymbol{n}}$，

$$r_{\boldsymbol{n},\mathrm{M}^{I\cup\{1\}}(\boldsymbol{n})} = r_{\boldsymbol{n},\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})} = (-1)^{\mathrm{N}^I(\boldsymbol{n})} = \prod_{i\in I}(-1)^{n_i}.$$

此外，对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$ 和 $j \in [d-1]$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_j x_j} + (-1)^{n_{j+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_j x_j} = \begin{cases} 2\cos(n_j x_j), & n_{j+1} \text{ is even} \\ 2\mathrm{i}\sin(n_j x_j), & n_{j+1} \text{ is odd.} \end{cases}$$

综上，由（35）可得基函数

$$\begin{aligned}
e_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{n})} r_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{x}\rangle} = \sum_{I\subset J_{\boldsymbol{n}}} r_{\boldsymbol{n},\mathrm{M}^I(\boldsymbol{n})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathrm{M}^I(\boldsymbol{n}),\boldsymbol{x}\rangle} \\
&= \sum_{I\subset I_{\boldsymbol{n}}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_1x_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1x_1}}{2^{1+\#I_{\boldsymbol{n}}-\#J_{\boldsymbol{n}}}} \Big(\prod_{i\in I_{\boldsymbol{n}}\setminus I} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_{i-1}x_{i-1}}\Big)\Big(\prod_{i\in I}(-1)^{n_i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_{i-1}x_{i-1}}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_dx_d} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_1x_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1x_1}}{2^{1+\#I_{\boldsymbol{n}}-\#J_{\boldsymbol{n}}}} \Big(\prod_{\substack{2\le j\le d-1\\ n_j\neq 0}} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_jx_j} + (-1)^{n_{j+1}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_jx_j}\big)\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_dx_d} \\
&= 2^{\#J_{\boldsymbol{n}}}\cos(n_1x_1)\Big(\prod_{\substack{2\le j\le d-1\\ n_j\neq 0\\ n_{j+1}\text{ even}}} \cos(n_jx_j)\Big)\Big(\prod_{\substack{2\le j\le d-1\\ n_j\neq 0\\ n_{j+1}\text{ odd}}} \mathrm{i}\sin(n_jx_j)\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_dx_d}.
\end{aligned}$$

令 $\rho \in [0,1]$，$\boldsymbol{\lambda} \in [0,\pi]^{d-2} \times [-\pi,\pi]$ 使得 $(\arccos(\rho)\ \boldsymbol{\lambda}) \in D_1 \cup D_2$。对于 $\boldsymbol{n} \in \Omega_{\mathbb{B}^d}$，根据式（ $b_{\boldsymbol{n}}$ 中的41）中的定义，我们得到

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}(\rho,\boldsymbol{\lambda})) = 2^{\#\{j\in[d-1]\mid n_j\neq 0\}} T_{n_1}(\rho)\Big(\prod_{\substack{j\in[d-2]\\ n_{j+1}\neq 0\\ n_{j+2}\text{ even}}} \cos(n_{j+1}\lambda_j)\Big)\Big(\prod_{\substack{j\in[d-2]\\ n_{j+1}\neq 0\\ n_{j+2}\text{ odd}}} \mathrm{i}\sin(n_{j+1}\lambda_j)\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_d\lambda_{d-1}}.$$

对于 $d \in \{2,3\}$ 的特殊情形，文献中已有 $\mathbb{B}^d$ 的 DFS 方法。下面，我们将更详细地讨论它们与我们的一般框架之间的联系。

圆盘 单位圆盘 $\mathbb{D} := \mathbb{B}^2$ 可以用极坐标参数化

$$\boldsymbol{\xi}(\rho,\lambda) = (\rho\cos\lambda, \rho\sin\lambda), \qquad (\rho,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{T}^1.$$

映射 $\boldsymbol{\xi}$ 关于角变量 λ是 2π 周期的，因此，单位圆盘上函数的级数展开可以直接通过极坐标下平移后的切比雪夫–傅里叶展开来实现，参见 [5, § 18.5]。1995 年，Fornberg [17]提出了另一种方法：通过将半径 ρ的定义域扩展至 $[-1,1]$，消除位于 $\rho = 0$ 处的边界。由此得到的扩展极坐标作用于 $[-1,1]\times\mathbb{T}^1$，并将圆盘覆盖两次。圆盘的类 DFS 方法包括将函数变换到扩展极坐标下，再通过切比雪夫–傅里叶级数展开，见[47]。将 $(\rho,\lambda) = (\cos x_1, x_2)$ 替换为 $(x_1,x_2) \in \mathbb{T}^2$，即可得到式 (50) 中的 DFS 变换 $\phi_{\mathbb{D}}$。这一替换改变了对称结构： $\phi_{\mathbb{D}}$ 覆盖圆盘四次而非两次，并满足

$$\phi_{\mathbb{D}}(x_1,x_2) = \phi_{\mathbb{D}}(-x_1,x_2) = \phi_{\mathbb{D}}(x_1+\pi,x_2+\pi), \qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{T}^2,$$

这与（51）中的对称函数一致。这如图2所示。

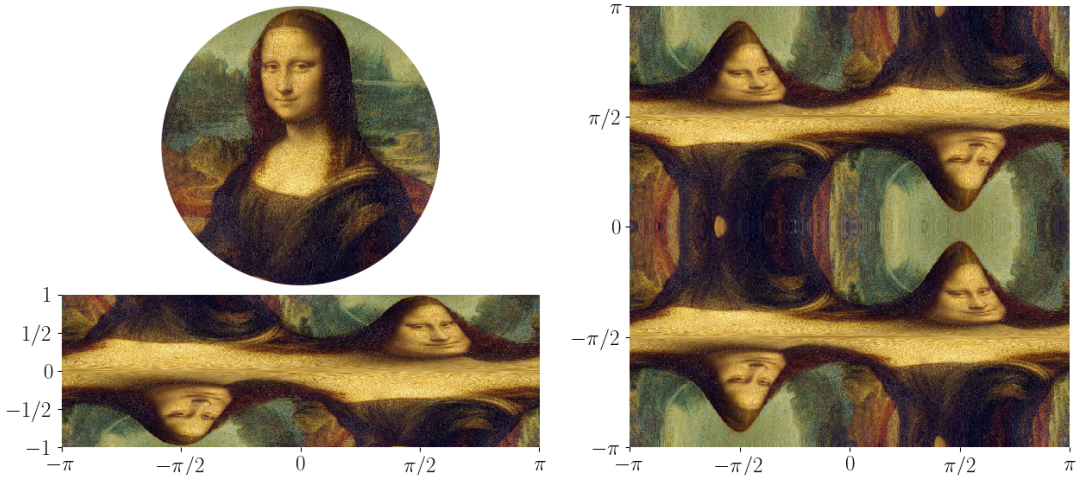


图 2：左上：蒙娜丽莎的圆盘形区域 $f(\boldsymbol{\xi})$。左下：扩展极坐标中的 $f(\boldsymbol{\xi}(\rho,\ \lambda))$。右：DFS 函数 $f\circ\phi_D(\boldsymbol{x})$。

设 $\boldsymbol{n}\in\Omega_{\mathbb{D}} := \{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z} \mid n_1+n_2$为偶函数$\}$。对于 $(\rho,\ \lambda)\in(0,\ 1]\times[-\pi,\pi]\cup\{(0,\ 0)\}$，有

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}(\rho,\lambda)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_2\lambda}\begin{cases}1, & n_1 = 0\\ 2\,T_{n_1}(\rho), & n_1\neq 0.\end{cases}$$

球体 三维球 $\mathbb{B}^3$ 由球坐标参数化

$$\boldsymbol{\xi}(\rho,\theta,\lambda) = (\rho\cos\theta, \rho\cos\lambda\sin\theta, \rho\sin\lambda\sin\theta), \qquad (\rho,\theta,\lambda) \in [0,1]\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi].$$

将半径的定义域 ρ 扩展到 $[-1,1]$，并将极角 θ 扩展到 $[-\pi,\pi]$，即可得到所谓的扩展球坐标。定义在球体上并以这些扩展球坐标表示的函数，随后可以展开为切比雪夫–傅里叶–傅里叶级数，参见 [3]。DFS 变换 $\phi_{\mathbb{B}^3}$ 由（50）通过将（ρ，θ，λ）=（$\cos x_1$，x_2，x_3）替换为（x_1，x_2，x_3）$\in \mathbb{T}^3$ 得到，由此将球体覆盖八次。

令 $(\rho,\ \theta,\ \lambda) \in (0,\ 1]\times(0,\ \pi)\times[-\pi,\pi]$，或 $(\rho,\ \theta,\ \lambda) = (0,\ 0,\ 0)$，或 $\rho \in (0,\ 1]$，$\theta \in \{0,\pi\}$且 $\lambda = 0$。对于 $\boldsymbol{n} \in \Omega_{\mathbb{B}^3} = \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{Z} \mid n_1 + n_2$ 为偶数且 n_3 在 $n_2 = 0\}$时为偶数的情形，我们有

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}(\rho,\theta,\lambda)) = 2^{\#\{j\in[2]\mid n_j\neq 0\}}\, T_{n_1}(\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_3\lambda} \begin{cases} \cos(n_2\theta), & n_3 \text{ is even} \\ \mathrm{i}\sin(n_2\theta), & n_3 \text{ is odd.} \end{cases}$$

6.3. 超球面

我们定义 d 维单位球面

$$\mathbb{S}^d := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|\boldsymbol{u}\| = 1\},$$

它是 $\mathbb{R}^{d'}$ 中的一个光滑子流形，其中 $d' = d+1$。球体 $\mathbb{B}^{d+1}$ 的这个子集可以通过将 $(d+1)$ 维球坐标限制到 $\rho = 1$来参数化。对 $\mathbb{S}^d$ 的 DFS 变换可通过将 $\phi_{\mathbb{B}^{d+1}}$ 中的 DFS 变换 (50) 限制到$x_1 = \arccos(1) = 0$而得到，即:

$$\phi_{\mathbb{S}^d} \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} \mapsto \phi_{\mathbb{B}^{d+1}}(0,\boldsymbol{x}).$$

容易证明，$\phi_{\mathbb{B}^{d+1}}$ 的 DFS 光滑性和对称性 $\phi_{\mathbb{S}^d}$会传递到 $\phi_{\mathbb{S}^d}$，因此 $\mathbb{S}^d$ 是一个 DFS 变换，其对称数为 $p = d-1$。通过类似于第 $\mathbb{B}^{d+1}$ 6.2 节中对 6.2的 DFS 方法所作的推导，我们可以设定

$$\Omega_{\mathbb{S}^d} := \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^{d-1} \times \mathbb{Z} \mid n_i \neq 0 \text{ or } n_{i+1} \text{ even, for all } i < d\}$$

并且对于所有 $\boldsymbol{n} \in \Omega_{\mathbb{S}^d}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} \in D_1 \cup D_2$，我们得到

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}(0,\boldsymbol{\lambda})) = 2^{\#\{j\in[d-1]\mid n_j\neq 0\}} \Big(\prod_{\substack{j\in[d-1]\\ n_j\neq 0\\ n_{j+1}\text{ even}}} \cos(n_j\lambda_j)\Big)\Big(\prod_{\substack{j\in[d-1]\\ n_j\neq 0\\ n_{j+1}\text{ odd}}} \mathrm{i}\sin(n_j\lambda_j)\Big)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_d\lambda_d},$$

其中

$$D_1 = (0,\pi)^{d-1}\times(-\pi,\pi], \qquad D_2 = \bigcup_{j=1}^{d-1}\Big((0,\pi)^{j-1}\times\{0,\pi\}\times\{0\}^{d-j}\Big).$$

6.4. 乘积流形

设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是某个 d_1 维流形 $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{R}^{d_1'}$ 和某个 d_2 维流形 $\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{R}^{d_2'}$ 的广义 DFS 变换。不难验证，

$$\phi\colon \mathbb{T}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \to \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2,\ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \phi(\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\boldsymbol{x}_1), \phi_2(\boldsymbol{x}_2))$$

定义乘积流形 $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \subset \mathbb{R}^{d_1'+d_2'}$ 的广义 DFS 变换。其光滑性显而易见，对称性如下：对于 $\ell \in \{1,2\}$，令 p_ℓ 表示对称数，$s_\ell^i, i \in [p_\ell]$ 表示对称函数，D_1^ℓ 和 D_2^ℓ 表示关于 ϕ_ℓ 的定义 3.1 中的子集。那么，对于 ϕ，集合 $D_1 \coloneqq D_1^1 \times D_1^2$ 和 $D_2 \coloneqq (D_1^1 \times D_2^2) \cup (D_2^1 \times D_1^2) \cup (D_2^1 \times D_2^2)$、对称数 $p_1 + p_2$以及对称函数 $s^i, i \in [p_1 + p_2]$可取为

$$s^i\colon \mathbb{T}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \to \mathbb{T}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2},\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \begin{cases} \big(s_1^i(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2\big), & i \le p_1 \\ \big(\boldsymbol{x}_1, s_2^{i-p_1}(\boldsymbol{x}_2)\big), & i > p_1. \end{cases}$$

令 $\Omega_\phi \coloneqq \Omega_{\phi_1} \times \Omega_{\phi_2}$，通过简单计算可得，对于所有 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) \in \Omega_\phi$，并且 th at

$$b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi}) = b_{\boldsymbol{n}_1}(\boldsymbol{\xi}_1)\, b_{\boldsymbol{n}_2}(\boldsymbol{\xi}_2), \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2.$$

圆柱 这一乘积结构的一个应用是圆柱 $C \coloneqq \mathbb{D} \times [-1,1]$，其中类 DFS 方法已在 [18]中推导得出。结合前面小节中关于圆盘$\mathbb{D}$ 和区间 $[-1,1]$ 的结果，我们可知

$$\phi_C\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1 \to C,\ (\boldsymbol{x}_1, x_2) \mapsto (\phi_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{x}_1), \phi_{[-1,1]}(x_2))$$

是 C 的 DFS 变换，其对称数为 3。对于 $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{T}^3 \cong \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$，乘积对称结构给出

$$\phi_C(x_1, x_2, x_3) = \phi_C(-x_1, x_2, x_3) = \phi_C(x_1 + \pi, x_2 + \pi, x_3) = \phi_C(x_1, x_2, -x_3).$$

设 $\boldsymbol{n} \in \Omega_C \coloneqq \Omega_{\mathbb{D}} \times \mathbb{N}_0 = \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \mid n_1 + n_2 \text{ 为偶函数}\}$。在柱坐标中，对于所有 $(\rho,\ \lambda,\ z) \in (0,\ 1] \times [-\pi, \pi] \times [-1,1]$，以及对于 $(\rho,\ \lambda) = (0,\ 0)$ 和$z \in [-1,1]$，有

$$b_{\boldsymbol{n}}(\rho\cos\lambda, \rho\sin\lambda, z) = 2^{\#\{j \in \{1,3\} \mid n_j \neq 0\}}\, T_{n_1}(\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_2\lambda}\, T_{n_3}(z).$$

6.5. 旋转群

三维旋转群

$$\mathrm{SO}(3) \coloneqq \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 1 \text{ and } A^{-1} = A^\intercal\}$$

可以用欧拉角进行参数化

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma), \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{T}^1 \times [0, \pi] \times \mathbb{T}^1,$$

其中

$$R_z(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{T}^1$$

分别描述绕 z轴和 y轴的旋转。旋转轴的选择和顺序存在不同约定，此处采用 zyz约定，参见 [40, 第 4]页。作者尚未发现文献中有使用 DFS 方法来近似 SO(3) 上函数的案例。不过，扩展第二个欧拉角的定义域 β 后，可得到 SO(3) 的广义 DFS 变换，符合我们的框架。由于定义3.1 要求子流形嵌入在欧几里得空间中，我们采用标准按列嵌入

$$\mathbb{R}^{3,3} \ni A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3} \mapsto (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) \in \mathbb{R}^9,$$

这是一个从配备弗罗贝尼乌斯范数的 $\mathbb{R}^{3\times3}$ 到 $(\mathbb{R}^9, \|\cdot\|)$ 的等距同构。我们将 SO(3) 的广义 DFS 变换定义为

$$\phi_{\mathrm{SO}(3)}(\boldsymbol{x}) \coloneqq R_z(x_1)R_y(x_2)R_z(x_3) \in \mathbb{R}^{3\times3} \cong \mathbb{R}^9, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^3.$$

我们需要验证 $\phi_{\mathrm{SO}(3)}$ 满足 DFS 变换的光滑性性质。通过显式计算矩阵乘积 $R_z(x_1)R_y(x_2)R_z(x_3)$ 并逐分量求偏导数可知，对于所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}_0^3$ 和 $\ell \in [9]$，偏导数 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_\ell$ 均存在，其中 ϕ_ℓ 表示 $\phi_{\mathrm{SO}(3)}$ 的第 ℓ 个分量。令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$。经过平移和变量互换后，$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_\ell$ 要么是余弦的乘积，因而一致有界于 1，要么具有如下形式

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l(\boldsymbol{x}) = \cos(x_1)\cos(x_2)\cos(x_3) + \sin(x_1)\sin(x_3).$$

在后一种情况下，如果 $\operatorname{sgn}\big(\cos(x_1)\cos(x_3)\big) = \operatorname{sgn}\big(\sin(x_1)\sin(x_3)\big)$，由三角不等式和差角公式可得

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l(\boldsymbol{x})| &\le |\cos(x_2)|\ |\cos(x_1)\cos(x_3)| + |\sin(x_1)\sin(x_3)| \\ &\le |\cos(x_1)\cos(x_3)| + |\sin(x_1)\sin(x_3)| \\ &= |\cos(x_1)\cos(x_3) + \sin(x_1)\sin(x_3)| = |\cos(x_1 - x_3)| \le 1. \end{aligned}$$

否则，我们将前面的论证应用于 $(-x_1, x_2 + \pi, x_3)$，得到

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l(x_1, x_2, x_3)| = |-\mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}}\phi_l(-x_1, x_2 + \pi, x_3)| \le 1.$$

这就证明了 (5)，即 $\phi_{\mathrm{SO}(3)}$ 满足 DFS 变换的光滑性。

还可以证明，$\phi_{\mathrm{SO}(3)}$ 满足 DFS 变换的对称性，其对称数为 $p = 1$，对称函数为

$$s^1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \pi, -x_2, x_3 + \pi), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3,$$

以及子集 $D_1 \coloneqq (-\pi,\ \pi] \times (0,\ \pi) \times (-\pi,\ \pi]$ 和 $D_2 \coloneqq (-\pi,\ \pi] \times \{0, \pi\} \times \{0\}$.对于 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^3$，我们有 $\mathrm{N}^1(\boldsymbol{n}) = n_1 + n_3$ 以及 $\mathcal{M}(\boldsymbol{n}) = \{\boldsymbol{n}, (n_1,\ -n_2,\ n_3)\}$。我们设

$$\Omega_{\mathrm{SO}(3)} \coloneqq \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \mid n_2 \neq 0 \text{ or } n_1 + n_3 \text{ even}\}.$$

令 $(\alpha, \beta, \gamma) \in D_1 \cup D_2$。则函数 $b_{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{n} \in \Omega^{\mathrm{SO}(3)}$ 为

$$b_{\boldsymbol{n}}\big(R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_1\alpha}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_3\gamma} \begin{cases} 1, & n_2 = 0 \\ 2\cos(n_2\beta), & n_2 \neq 0,\ n_1 + n_3 \text{ even} \\ 2\mathrm{i}\sin(n_2\beta), & n_2 \neq 0,\ n_1 + n_3 \text{ odd}. \end{cases}$$

致谢

我们感谢 Alex Townsend 建议研究 DFS 方法在不同流形上的收敛性。我们衷心感谢德国研究联合会（DFG）（STE 571/19-1，项目编号 495365311）通过 SFB F68（“跨尺度断层成像”）提供的资助，以及德国联邦教育与研究部（BMBF）通过“VI-Screen”项目（13N15754）提供的资助。

A. 附录

引理 *4.1* 的证明。 这是对 [31, 引理 4.1] 在更高维情形下的证明的推广。该引理的结论显然对 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 以及所有 k 均成立。若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{e}^p$ 对某个 $p \in [d]$ 成立，其中 $\boldsymbol{e}^p$ 表示第 p 个单位向量，我们可以应用链式法则得到

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(g \circ h) = \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p}(g \circ h) = \sum_{\ell=1}^{d} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^\ell} g \circ h\right) \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p} h_\ell,$$

因此，该结论对所有满足 $k \in \mathbb{N}$ 的情形都成立

$$n = d' = \frac{d'!}{(d'-1)!} \leq \frac{(d'+k-1)!}{(d'-1)!}.$$

对于 $k > 1$ 和 $|\boldsymbol{\beta}| > 1$，我们归纳地进行证明：设 $\boldsymbol{\beta}^+ = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}^p \in B_k^d$，其中 $p \in [d]$ 和 $\boldsymbol{\beta} \in B_{k-1}^d$。假设

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(g \circ h) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}},$$

对于满足（14）至（18）的某些常数 $k-1$。由于 g 和 h 均为 k 阶连续可微函数，其复合也为 k 阶连续可微函数，并由乘积法则可得

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}^+}(g \circ h) &= \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p}\left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(g \circ h)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p}\left((\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}\right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p}(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}}_{=:A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h)\, \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p}\left(\prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}\right)}_{=:B}. \end{aligned}$$

由于根据我们的假设，对于所有 i，$\mathrm{D}^{\gamma_i} g$ 和 h 均连续可微，因此我们可以对 A 的每一项应用链式法则，得到

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h\right) \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{d'} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^\ell + \boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h\right) \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p} h_\ell \prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}.$$

同样，我们知道对于所有 i 和 j，$D^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}$ 连续可微，因此可以应用乘积法则来简化 B。由此得到

$$B = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h\right) \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p} \left(\prod_{j=1}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{m_i} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i} g \circ h\right) \mathrm{D}^{\boldsymbol{e}^p + \boldsymbol{\mu}_{ir}} h_{\ell_{ir}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{m_i} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}} h_{\ell_{ij}}.$$

合并所得的各项求和，并重新标记常数，得到

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}^+} (g \circ h) = \sum_{i=1}^{n^+} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}_i^+} g \circ h\right) \prod_{j=1}^{m_i^+} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\mu}_{ij}^+} h_{\ell_{ij}^+},$$

其中，对于所有 $i^+ \in [n^+]$ 和 $j^+ \in [m_{i^+}^+]$，都存在 $i \in [n]$、$j \in [m_i]$ 和 $\ell \in [d']$，使得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_{i^+}^+ = \boldsymbol{e}^\ell + \boldsymbol{\gamma}_i \text{ or } \boldsymbol{\gamma}_{i^+}^+ = \boldsymbol{\gamma}_i &\underset{(16)}{\Longrightarrow} \left|\boldsymbol{\gamma}_{i^+}^+\right| \leq k, \\
m_{i^+}^+ = 1 + m_i \text{ or } m_{i^+}^+ = m_i &\underset{(15)}{\Longrightarrow} m_{i^+}^+ \leq k, \\
\boldsymbol{\mu}_{i^+ j^+}^+ = \boldsymbol{e}^p,\ \boldsymbol{\mu}_{i^+ j^+}^+ = \boldsymbol{\mu}_{ij},\ \text{or } \boldsymbol{\mu}_{i^+ j^+}^+ = \boldsymbol{e}^p + \mu_{ij} &\underset{(17)}{\Longrightarrow} \left|\boldsymbol{\mu}_{i^+ j^+}^+\right| \leq k, \\
\ell_{i^+ j^+}^+ = \ell_{ij} \text{ or } \ell_{i^+ j^+}^+ = \ell &\underset{(18)}{\Longrightarrow} \ell_{i^+ j^+}^+ \in [d'],
\end{aligned}$$

并且根据（14），我们有

$$n^+ = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{d'} 1 + \sum_{r=1}^{m_i} 1\right) = n \left(d' + \max_{i=1}^{n} m_i\right) \leq n \left(d' + (k-1)\right) \leq \frac{(d'+k-1)!}{(d'-1)!}.$$

因此，我们找到了满足（13）至（18）的常数，其中 $\boldsymbol{\beta}^+$ 和 k。 □

引理的证明 *5.10*。我们基本遵循 [22, 定理 3.216] 的证明。为方便读者，我们在此重现证明，因为 [22] 没有明确给出常数，而且采用了不同的约定。具体而言，他们使用 1-周期函数和多重指标的欧几里得范数，而非我们工作中的 2π-周期函 ℓ_1数和 ℓ_1-范数，因此需要对证明作一些小调整。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\left(\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d,\, 2^\ell \leq |\boldsymbol{n}| < 2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)|\right)^2 \leq \left(\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d,\, 2^\ell \leq |\boldsymbol{n}| < 2^{\ell+1}} 1^2\right) \left(\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d,\, 2^\ell \leq |\boldsymbol{n}| < 2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)|^2\right).$$

我们记 $\|\boldsymbol{n}\|_\infty := \sup_{j\in[d]} |n_j|$。对于第一个因子，有

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}} 1^2 \le \#\{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d \mid |\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}\} \le \#\{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d \mid \|\boldsymbol{n}\|_\infty<2^{\ell+1}\} \le 2^{\ell d+2d}.$$

显然，对 $\{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d \mid 2^\ell\le\|\boldsymbol{n}\|_\infty<2^{\ell+1}\}$ 求和时同样成立该界 .

接下来，我们给出关于第二个因子的一个估计。令 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d$，其中 $2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}$。我们选择 $j\in[d]$，使得 $|n_j|=\|\boldsymbol{n}\|_\infty$。因此有 $0<\frac{2^\ell}{d}\le\frac{|\boldsymbol{n}|}{d}\le|n_j|\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}$。对所有 $-\pi\le t\le\pi$，$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right|\ge\frac{2}{\pi}|t|$ 都成立。因此，我们得到

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle\boldsymbol{n},\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\boldsymbol{e}^j\right\rangle}-1\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{n_j}{2^{\ell+1}}}-1\right| \ge \frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi\, n_j}{2^{\ell+1}}\right| \ge \frac{1}{d}. \tag{52}$$

现在，我们可以如下估计第二个因子

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)|^2 \le \sum_{j=1}^d \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}\\ |n_j|=\|\boldsymbol{n}\|_\infty}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)|^2$$

$$\underset{(52)}{\le} d^2 \sum_{j=1}^d \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}\\ |n_j|=\|\boldsymbol{n}\|_\infty}} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle\boldsymbol{n},\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\boldsymbol{e}^j\right\rangle}-1\right|^2 |c_{\boldsymbol{n}}(g)|^2 \frac{|n_j|^{2k}}{|n_j|^{2k}}.$$

当处处以 d^2 代替 $\|\boldsymbol{n}\|_\infty$ 时，右侧的因子 $|\boldsymbol{n}|$可以省略，因为此时（52）相应地可以用 1 来估计。利用微分恒等式 $c_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g) = (\mathrm{i}n_j)^k\, c_{\boldsymbol{n}}(g)$，参见 [38, 第 162], 页，以及不等式 $\frac{1}{|n_j|}\le\frac{d}{2^\ell}$，我们进一步估计

$$\le \frac{d^{2k+2}}{2^{2\ell k}} \sum_{j=1}^d \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}\\ |n_j|=\|\boldsymbol{n}\|_\infty}} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\langle\boldsymbol{n},\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\boldsymbol{e}^j\right\rangle}-1\right|^2 \left|c_{\boldsymbol{n}}\left(\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g\right)\right|^2.$$

如果我们将 $|\boldsymbol{n}|$ 替换为 $\|\boldsymbol{n}\|_\infty$，就能再次消去估计中 d 的幂。应用平移恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\, c_{\boldsymbol{n}}(g)$ $= c_{\boldsymbol{n}}\big(g(\cdot+\boldsymbol{x})\big)$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$（参见 [38, 第 162], 页），以及傅里叶系数的线性性，我们得到

$$\le \frac{d^{2k+2}}{2^{2\ell k}} \sum_{j=1}^d \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \left|c_{\boldsymbol{n}}\left(\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g\left(\cdot+\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\boldsymbol{e}^j\right)-\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g\right)\right|^2.$$

最后，由帕塞瓦尔恒等式 [38, 定理 4.5]可得

$$= d^{2k+2}\, 2^{-2\ell k} \sum_{j=1}^d \left\|\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g\left(\cdot+\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\boldsymbol{e}^j\right)-\mathrm{D}^{k\boldsymbol{e}^j}g\right\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}$$

$$\le d^{2k+2}\, 2^{-2\ell k}\, d \sup_{|\boldsymbol{\beta}|=k} \left|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}g\right|^2_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}^d)} \left|\frac{\pi}{2^{\ell+1}}\right|^{2\alpha}$$

$$\le d^{2k+3}\, 2^{-2\ell k-2\alpha(\ell+1)}\, \pi^{2\alpha}\, |g|^2_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)}.$$

综上可得

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^l\le|\boldsymbol{n}|<2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)| \le 2^{d-\alpha}\, d^{k+\frac{3}{2}}\, \pi^{\alpha}\, 2^{\ell\left(\frac{d}{2}-(k+\alpha)\right)}\, |g|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)}\,.$$

对于备注 5.12 中的矩形二进制求和，我们类似地得到

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d,\, 2^\ell\le\|\boldsymbol{n}\|_\infty<2^{\ell+1}} |c_{\boldsymbol{n}}(g)| \le 2^{d-\alpha}\, d^{\frac{1}{2}}\, \pi^{\alpha}\, 2^{\ell\left(\frac{d}{2}-(k+\alpha)\right)}\, |g|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)}\,. \qquad \square$$

参考文献

[1] R. Bernardini、G. Cortelazzo 和 G. A. Mian。《具有任意对称性的信号多维快速傅里叶变换算法》。*J. Opt. Soc. Am. A* 16.8（1999），第 1892–1908 页。 DOI: 10.1364/JOSAA.16.001892.[2] N. Boull ´ ˙ *An optimal complexity spectral method for Navier-Stokes* e、J. *simulations in the ball* 2021 2103 16638 Slomka 和 A. Townsend。. . arXiv: . .[3] N. Boull´e 和 A. Townsend。《球体中的函数计算》。*SIAM J. Sci. Comput.* 42.4（2020），第 C169–C191 页。 DOI: 10.1137/19M1297063.[4] J. P. Boyd。《球面边界问题与特征值问题中谱函数的选择：切比雪夫、傅里叶和缔合勒让德展开的比较》。*Mon. Weather Rev.* 106 8 1978 1184 1191 DOI 10 1175 1520 0493 1978 106<1184 >2 0 2 . （），第 – 页。： . / - ( ) :TCOSFO . .CO; .[5] J. P. Boyd。 *Chebyshev & Fourier Spectral Methods*。第 2 版。纽约：多佛出版社，2000。DOI: 10.1007/978-3-642-83876-7.[6] V. Britanak、P. C. Yip 和 K. Rao。*Discrete Cosine and Sine Transforms. General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations* 2006 DOI 10 1016 978 。牛津：学术出版社，. : . /B - 0-12-373624-6.X5000-0.[7] C.-P. Chen、Y. Chen 和 G. Subbarayan。《通过参数化拼接实现非匹配离散化子域的光滑耦合》。 *Comput. Methods Appl. Mech. Engg.* 373 (2021)，第 113519 页。DOI: 10.1016/j.cma.2020.113519.[8] H.-B. Cheong。《双重傅里叶级数在球面浅水方程中的应用》。*J. Comp. Phy.* 165.1（2000），第 261–287 页。 DOI: 10.1006/jcph.2000.6615.[9] J. Coiffier。*Fundamentals of Numerical Weather Prediction*。剑桥大学出版社，2011。DOI: 10.1017/CBO9780511734458.[10] O. Davydov 和 L. L. Schumaker。《利用投影鲍威尔–萨宾样条进行流形上的插值与散乱数据拟合》。 *IMA J. Num. Ana.* 28.4（2007），第 785–805 页。 DOI: 10.1093 / imanum/drm033.[11] Y. Dem'yanovich。《微分流形上函数局部逼近的估计》。 *J. Math. Sci.* 257 2021 DOI 10 1007 10958 021 05514 （）。： . /s - - -z.[12] M. Deville 和 G. Labrosse。《多维（正向和逆向）离散切比雪夫变换的计算算法》。*J. Comput. Appl. Math* 8.4（1982），第 293–304 页。 DOI: 10.1016/0771-050X(82)90055-9.[13] K. P. Drake 和 G. B. Wright。《一种用于 HEALPix 网格上球谐分析的快速精确算法及其在宇宙微波背景辐射中的应用》。 *J. Comput. Phys.* 416 2020 109544, 15 DOI 10 1016 2020 109544 （），第 。： . /j.jcp. . .[14] J. R. Driscoll 和 D. Healy。《二维球面上的傅里叶变换与卷积计算》。*Adv. in Appl. Math.* 15 （1994），第 202–250 页。 DOI: 10.1006/aama.1994.1008。

[15] T. A. Driscoll、N. Hale 和 L. N. Trefethen 编。 *Chebfun Guide*。牛津：Pafnuty Publications，2014。[16] B. Fornberg 和 D. Merrill。《球面上对流流动问题的有限差分方法与伪谱方法比较》。 *Geophys. Res. Lett.* 24.24（1997），第 3245–3248 页。 DOI: 10.1029/ 97GL03272.[17] B. Fornberg。《极坐标与球面几何中的伪谱方法》。

SIAM J. Sci. Com- 。

put. 16 5 1995 DOI 10 1137 0916061

（）。：./.[18] D. Fortunato 和 A. Townsend。《谱方法的快速泊松求解器》。

IMA J. Numer. Anal. 。

40 3 2020 1994 2018 DOI 10 1093 034

（），第 – 页。：./imanum/drz .[19] E. Fuselier 和 G. B. Wright。《利用受限正定核在嵌入子流形上进行散乱数据插值：Sobolev 误差估计》。 *SIAM J. Num. Ana.* 50.3（2012），第 1753–1776 页。 DOI: 10.1137/110821846.[20] C. Gerhards。《调和势向下延拓与局部逼近的结合》。 *Inverse Problems* 30.8（2014），第 085004 页，共 30 页。 DOI: 10.1088/0266-5611/30/8/085004.[21] P. Godon。《多方吸积盘潮汐效应的数值建模》。 *Astrophys. J.* 480.1（1997），第 329–343 页。 DOI: 10.1086/303950.[22] L. Grafakos。 *Classical Fourier Analysis*。第 2 版。第 249 卷。数学研究生教材。纽约：施普林格，2008。 DOI: 10.1007/978-1-4939-1194-3.[23] R. Hielscher、D. Potts 和 M. Quellmalz。《球面表面波层析成像中的奇异值分解》。载于：*New Trends in Parameter Identification for Mathematical Models*。B. Hofmann、A. Leitao 和 J. P. Zubelli 编。数学趋势丛书。巴塞尔：Birkh¨auser，2018，第 121–144 页。 ISBN: 978-3-319- 70823-2. DOI: 10.1007/978-3-319-70824-9_7.[24] V. P. Khavin 和 N. K. Nikol'skii。

Commutative Harmonic Analysis IV. Harmonic Analysis in 。第 $\mathbb{R}^n$ 42 1992 DOI 10 1007 978 3 卷。数学百科全书。柏林、海德堡：施普林格，.:./--662-06301-9.[25] S. Kunis 和 D. Potts。《快速球面傅里叶算法》。 *J. Comput. Appl. Math.* 161.1（2003），第 75–98 页。 DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00546-6.[26] J. M. Lee。 *Introduction to Smooth Manifolds*。第 218 卷。数学研究生教材。纽约：施普林格，2012。 DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.[27] L.-B. Maier。《嵌入子流形上的环境空间逼近》。 *Constr. Approx.* 52 (2020)。DOI: 10.1007/s00365-020-09502-5.[28] M. Majeed 和 F. Cirak。《使用基于流形的光滑基函数进行等几何分析》。*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 316 (2017)。《等几何分析：进展与挑战》专刊，第 547–567 页。 DOI: 10.1016/j.cma.2016.08.013.[29] P. E. Merilees。《伪谱逼近在球面浅水方程中的应用》。 *Atmosphere* 11.1（1973），第 13–20 页。 DOI: 10.1080/00046973.1973.9648342.[30] V. Michel。 *Lectures on Constructive Approximation. Fourier, Spline and Wavelet Methods on the , , , . Real Line the Sphere and the Ball* ¨ 2013 DOI 应用数值调和分析。巴塞尔：Birkhauser，.: 10.1007/978-0-8176-8403-7.[31] S. Mildenberger 和 M. Quellmalz。《双傅里叶球面方法的逼近性质》。 *J. Fourier Anal. Appl.* 28 (2022)。 DOI: 10.1007/s00041-022-09928-4.[32] P. W. Miller、D. Fortunato、C. Muratov、L. Greengard 和 S. Shvartsman。《细胞极化中的强迫性与自发性对称性破缺》。 *Nat. Comput. Sci* 2.8（2022），第 504–511 页。 DOI: 10.1038/s43588-022-00295-0.[33] M. J. Mohlenkamp。《一种球谐函数快速变换》。 *J. Fourier Anal. Appl.* 5 (1999)，第 159–184 页。 DOI: 10.1007/BF01261607。

[34] H. Montanelli 和 Y. Nakatsukasa。《球面上刚性偏微分方程的四阶时间步进》。 *SIAM J. Sci. Comput.* 40.1 (2018), A421–A451。 DOI: 10.1137/17M1112728。[35] S. Odathuparambil。《流形上的环境样条逼近》。博士论文。达姆施塔特：达姆施塔特工业大学，2016。[36] S. A. Orszag。《球面上的傅里叶级数》。 *Mon. Weather Rev.* 102.1 (1974), 第 56–75 页。 DOI: 10.1175/1520-0493(1974)102<0056:FSOS>2.0.CO;2。[37] D. Padhorny 等。《利用快速广义傅里叶变换在五维旋转流形上进行蛋白质对接》。 *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113.30 (2016), E4286–E4293。 DOI: 10.1073/pnas.1603929113。[38] G. Plonka、D. Potts、G. Steidl 和 M. Tasche。《*Numerical Fourier Analysis*》。Appl. Numer. Harmon. Anal. 巴塞尔：Birkhäuser，2018。 DOI: 10.1007/978-3-030-04306-3。[39] D. Potts 和 N. Van Buggenhout。《球面上的傅里叶延拓与采样》。2017 年于：*International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)* 2017，第 82 – 86 页。 DOI：10.1109/SAMPTA.2017.8024365。[40] D. Potts、J. Prestin 和 A. Vollrath。《旋转群上非等间距傅里叶变换的快速算法》。 *Numer. Algorithms* 52 (2009)。 DOI: 10.1007/s11075-009-9277-0。[41] J. E. Pringle。《天体物理学中的吸积盘》。 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 19.1 (1981), 第 137–160 页。 DOI: 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033。[42] L. Rabiner。《对称性在快速傅里叶变换计算中的应用》。 *IEEE Trans. Signal Process.* 27.3 (1979), 第 233–239 页。 DOI: 10.1109/TASSP.1979.1163235。[43] N. Schaeffer。《面向伪谱数值模拟的高效球谐变换》。 *Geochem., Geophys. Geosystems* 14.3 (2013), 第 751–758 页。 DOI: 10.1002/ggge.20071。[44] M. Servais 和 G. de Jager。《使用三维离散余弦变换（3 *Proceedings of the 1997 South African Symposium on Communications and Signal Processing. COMSIG '97* 1997，第 27 – 32 页。 DOI 10.1109/COMSIG.1997.629976。：）进行视频压缩》。载于：。第 – 页。：。/COMSIG. . .[45] B. Sober、Y. Aizenbud 和 D. Levin。《流形上的函数逼近：一种移动最小二乘方法》。 *J. Comput. Appl. Math.* 383 (2021), 第 113140 页。[46] A. Townsend、H. Wilber 和 G. B. Wright。《球面与极坐标几何中的函数计算 I：球面》。 *SIAM J. Sci. Comput.* 38.4 (2016), 第 C403–C425 页。 DOI: 10 .1137 / 15M1045855。[47] H. Wilber、A. Townsend 和 G. B. Wright。《球面与极坐标几何中的函数计算 II：圆盘》。 *SIAM J. Sci. Comput.* 39.3 (2017), 第 C238–C262 页。 DOI: 10 . 1137 / 16M1070207。[48] S. Y. K. Yee。《球面上的傅里叶级数研究》。 *Mon. Weather Rev.* 108.5 (1980), 第 676–678 页。DOI: 10.1175/1520-0493(1980)108<0676:SOFSOS>2.0.CO;2。[49] S. Yin、B. Li 和 X.-Q. Feng。《化学力学活性壳层的三维手性形态动力学》。 *Comput. Biol. Chem.* 199.49 (2022), e2206159119。 DOI: 10.1073/pnas.2206159119。