arXiv:2301.06586v2 [math.CO] 6 Jan 2025

行列式的新公式及其张量秩和华林秩的界

RobinHouston、Adam P. Goucher 和 Nathaniel Johnston*

2024年5月27日

摘要

我们提出了一个新的行列式显式公式，其项数比通常的莱布尼茨公式少超指数级。作为该公式的直接推论，我们证明，$n \times n$ 阶行列式张量的张量秩不超过第n个贝尔数，这远小于此前已知的最佳上界（当$n \geq 4$时）。在非零特征的域上，我们得到了更紧的上界，并且还略微改进了已知的下界。特别地，我们证明，4×4 行列式在 $\mathbb{F}_2$ 上的张量秩恰好等于12。我们的结果还改进了$n \geq 17$时行列式的已知最佳华林秩上界，并导出了一族能够铺砌 $\mathbb{R}^n$的新轴对齐多胞体。

1 引言

矩阵$n \times n$ A 的行列式和积和式定义为

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) \quad \text{and} \quad \operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right), \tag{1}$$

分别，其中 S_n 是集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$上的对称群。矩阵的积和式还有许多其他显式公式，例如 Ryser 公式 [BR91]

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{S \subseteq [n]} \left(\operatorname{sgn}(S) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in S} a_{i,j} \right), \tag{2}$$

其中 符号函数$(S) = (-1)^{|S|+n}$，以及 Glynn 公式 [Gly10]

$$\operatorname{per}(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\delta} \left(\operatorname{sgn}(\delta) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_i a_{i,j} \right), \tag{3}$$

其中 s $\operatorname{gn}(\delta) = \prod_{k=1}^{n} \delta_k$，且外层求和遍历所有向量 $\delta \in \{-1, 1\}^n$，其中 $\delta_1 = 1$.

这些关于积和式的替代公式，尽管看起来比方程（1）的定义公式更复杂，但形式非常相似：它们各自都由若干个 n 项因子的乘积之和组成，其中每个乘积因子都是来自 A某一行元素的线性组合。方程（2）和（3）中的公式有一个优点：外层求和中的项数更少（$2^n - 1$

*Depa 新不伦瑞克省，加拿大 E4L 1E4

分别为 2^{n-1}，而不是定义方程（$n!$ 中的 1）的项数），因此可以通过更少的乘法运算来实现。

另一方面，尽管已知有许多计算矩阵行列式的方法，但其中大多数都无法给出比方程（1）的定义公式求和项更少的显式公式。例如，余子式展开只是方程（1）的因式分解形式，仍然包含$n!$ 项之和；而大多数数值方法（例如基于高斯消元或矩阵分解的方法）都是迭代式的（例如见 [Rot01], ），和 / 或需要对矩阵元素进行除法。据我们所知，在寻找更高效的行列式显式公式方面，唯一的进展源于这样一个事实：当$n = 3$时，已知有若干种方法可以将行列式写成仅含5项之和，而非$3! = 6$ 项之和（例如见 [Der16、IT16、KM21], 及其中的参考文献），例如

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & (a_{1,2}+a_{1,3})(a_{2,1}+a_{2,3})(a_{3,1}+a_{3,2}) \\ & - a_{1,2}a_{2,1}(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}) \\ & - a_{1,3}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3})a_{3,1} \\ & - (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})a_{2,3}a_{3,2} \\ & + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}.\end{aligned} \tag{4}$$

Derksen 注意到，将类似方程（4）的公式与余子式展开结合，可以将其推广为行列式的显式公式，适用于$n \times n$ 矩阵，且包含$(5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!$ 项之和 [Der16]。这是迄今已知求和项最少的公式，但在特征为 2 的域上例外，此时$\det(A) =$ 永久式(A)（因为 $-1 = 1$），而方程（2）中的 Ryser 公式仅为 $2^n - 1$ 项之和。[1]

我们的主要贡献是提出一个新的行列式显式公式（定理 2），改进了这两个界。我们的公式在 $n = 3$ 时恰好化为方程（4）中的 5 项公式；一般而言，它由恰好 B_n 项之和组成，其中 B_n 表示第 n 个贝尔数（即 $[n]$ 的划分数）。由于

$$\frac{B_n}{(5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!} \leq \frac{(4n/5)^n}{(\ln(n+1))^n (5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!} \leq \frac{n^n}{(\ln(n+1))^n n!} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{e}{\ln(n+1)}\right)^n,$$

对于所有 $n \geq 1$（上面的第一个不等式使用了界 $B_n \leq (4n/5)^n/(\ln(n+1))^n$，来自 [BT10]），我们的公式所含项数比此前已知的最佳公式少了超指数级。当在非零特征的域上运算时，我们的公式还能进一步简化（推论 11）；特别是当特征为 2 时，可得到一个 $(2^n - n)$ 项公式（推论 13），略优于 Ryser 的$(2^n - 1)$ 项公式。

1.1 张量秩

我们可以将$n \times n$ 域上的行列式 $\mathbb{F}$ 视为一个存在于$(\mathbb{F}^n)^{\otimes n}$中的张量，然后像研究任何张量一样对它提出问题。特别是，我们可以问它的张量秩是多少[Lan12]。也就是说，若用 $\det_{\mathbb{F}}^n \in (\mathbb{F}^n)^{\otimes n}$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上的$n \times n$ 行列式张量，那么使得存在 $\{\mathbf{v_{j,k}}\} \subset \mathbb{F}^n$ 的最小整数r 是多少

$$\det_{\mathbb{F}}^n = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{v_{1,k}} \otimes \mathbf{v_{2,k}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v_{n,k}}? \tag{5}$$

[1] Glynn 的 2^{n-1}项公式（方程（3）不适用于这种情形，因为在特征 2 下，我们无法除以 2。

我们用 Trank 表示张量秩（即最小的r），因此行列式的张量秩记作 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)$。

我们对张量秩的兴趣源于这样一个事实：本文中的每个行列式公式，都对应于方程（5）所示形式的张量分解，只需将公式中每次出现的 $a_{i,j}$ 替换为$\mathbf{e_i}$ （j-th $\mathbb{F}^n$的第 i 个张量因子中的第 j 个标准基向量）。例如，定义公式（1）对应于以下张量分解：

$$\det_{\mathbb{F}}^n = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(n)},$$

这表明 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq |S_n| = n!$。类似地，方程（4）中的 3×3 行列式公式立即给出 $\det_{\mathbb{F}}^3$ 的以下张量分解，这表明 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^3) \leq 5$:

$$\begin{aligned}\det_{\mathbb{F}}^3 = &(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) \otimes (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) \otimes (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) \\ &- \mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_1} \otimes (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) \\ &- \mathbf{e_3} \otimes (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) \otimes \mathbf{e_1} \\ &- (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) \otimes \mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e_2} \\ &+ \mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_3}.\end{aligned}$$

事实上，已知 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^3) = 5$ 在每个域上 [KM21], , 因此这个分解是最优的。当$n \geq 4$时，$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)$ 的精确值尚不清楚；截至目前，已知的最佳上界恰好就是我们先前讨论过的那些界：[2]

$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq (5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!$	对所有域 $\mathbb{F}$都成立，并且
$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^n - 1$	如果 $\mathbb{F}$ 的特征为 2。

我们的公式通过证明无论域 $\mathbb{F}$如何，张量秩 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq B_n$ （推论 3），以及当 $\mathbb{F}$ 的特征为 2 时，张量秩 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^n - n$（推论 13），改进了这些界。当 $n = 3$时，已知这些上界是紧的；我们还证明，当 $n = 4$ 且基域只有两个元素时，这些上界也同样是紧的（也就是说，在这种情况下，张量秩恰好为 $2^n - n = 12$；见定理 17）。当 $\mathbb{F}$ 具有任意非零特征时，我们还得到了其他一些（比 B_n更紧的）上界（推论 11 和 12）。

1.2 华林秩

行列式秩的另一种定义，是将其视为关于其作用所针对的矩阵的n^2 个条目的齐次多项式。也就是说，我们可以将行列式视为以下关于n 个n^2 个变量的 $\{x_{i,\ j}\}$ （我们稍微滥用了符号，使用 $\det_{\mathbb{F}}^n$ 同时表示这个多项式以及方程（5）中的张量；但具体指哪一个，总能根据上下文判断）：

$$\det_{\mathbb{F}}^n(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{n,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} \right). \tag{6}$$

[2]在[KM21] 中提到，$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^5) \leq 20$ 和 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^7) \leq 100$，但这些是排版错误；作者本意是 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^4) \leq 20$ 和 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^5) \leq 100$，它们由公式 $(5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!$ 得出。

我们关注这个多项式的华林秩。也就是说，满足以下条件的最小整数 r 是多少：存在若干线性形式 $\{\ell_k\} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^{n\times n}, \mathbb{F})$ 以及标量 $\{c_k\} \subset \mathbb{F}$，使得

$$\det_{\mathbb{F}}^{n} = \sum_{k=1}^{r} c_k \ell_k^n ? \tag{7}$$

我们将这个行列式多项式的华林秩记为 $\mathrm{Wrank}(\det_{\mathbb{F}}^{n})$。

例如，如果 $\mathbb{F}$ 的特征不等于 2，那么二次多项式 xy的华林秩为 2，因为

$$xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right),$$

是 2个线性形式的平方的线性组合，并且不可能将 xy 表示为仅一个线性形式的平方的线性组合（即标量倍数）。类似地，众所周知，如果 $\mathbb{F}$ 的特征为 0或严格大于 n，那么 n元多项式$x_1x_2\cdots x_n$ 的华林秩恰好为 2^{n-1}，如 [RS11]所示。[3] 将行列式公式中的每一项替换为 2^{n-1} 个不同的 n次线性形式幂的线性组合，我们立即得到行列式的张量秩与华林秩之间如下简单的关系（同样是众所周知的）：

引理 1. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为 p 的域。如果 $p = 0$ 或 $p > n$，则

$$\mathrm{Wrank}(\det_{\mathbb{F}}^{n}) \le 2^{n-1} \cdot \mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^{n}).$$

结合第张量秩(行列式$_{\mathbb{F}}^{n}$) 节中的界1.1，该引理告诉我们，若 $\mathbb{F}$ 是一个特征为0 或严格大于n 的域，则

$$\mathrm{Wrank}(\det_{\mathbb{F}}^{n}) \le 2^{n-1}(5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} n!. \tag{8}$$

在 [JT22], 的情形下，这个上界得到改进：当 $\mathbb{F}$ 还包含一个本原单位根（例如，若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$）时，上界为

$$\mathrm{Wrank}(\det_{\mathbb{F}}^{n}) \le n \cdot n!. \tag{9}$$

我们的公式通过证明华林秩(行列式$_{\mathbb{F}}^{n}$) $\le 2^{n-1} \cdot B_n$，改进了这些界，即使不要求存在本原单位根（推论3）。对于所有8，我们的界都严格优于（即更小于）不等式（$n \ge 4$）给出的界；对于所有9，也优于不等式（$n \ge 17$）给出的界。

1.3 论文结构

在第2节中，我们将介绍主要成果：一个关于矩阵行列式的新公式（定理2）。作为直接推论，我们得到了与域无关的行列式张量秩和华林秩新上界（推论3）。

我们给出了公式的两个独立证明。首先，我们在第 3 节给出组合证明。该证明的优点是相当机械（因而易于验证），但缺点是无法让人深入理解公式。其次，我们在第 4 节给出几何证明（本节完全可以独立于论文其余部分阅读，也可以跳过）。该证明的优点在于，它能够让人了解为什么 公式成立以及公式实际上是如何被发现的，但不太

[3]如果特征介于 2 和n 之间（含端点），那么$x_1x_2\cdots x_n$ 的华林秩是无穷大：它无法写成任意多个线性形式的n次幂的线性组合。

直接：对于 A 为空间中一个小开球内的所有 $n \times n$ 阶实矩阵，该结论均成立。这足以证明行列式多项式与定理 2中的多项式相等，从而在任意交换环上证明一般情形下的结果。该证明还展示了 $\mathbb{R}^n$ 的一些新的轴对齐多胞体铺砌，其中这些多胞体的 1-骨架可以自然地与有序部分划分的翻转图对应起来。

在第5节中，我们研究了我们的公式对于非零特征域上行列式的张量秩意味着什么，并且得到了比与域无关的上界更紧的上界（推论11、12和13）。最后，在第6节中，我们（略微）改进了任意域上行列式张量秩的已知最佳下界（定理14），为有限域上的行列式提供了进一步的改进（定理15），并证明了 4×4 二元域上的行列式的张量秩恰好等于12 （定理17），从而说明了我们的公式在此情形下是最优的。

2 公式

在介绍行列式的公式之前，我们首先需要定义 $[n]$, 的部分划分这一概念。它是 $[n]$ 的互不相交的子集（称为部分）构成的集合。如果一个部分划分的并集是 $[n]$ ，那么它就是一个（非部分）划分。在没有单元素部分的 $[n]$ 的部分划分与 $[n]$, 的（非部分）划分之间存在自然的双射对应：对于一个划分，删去所有单元素集合；或者对于一个部分划分，将其中缺少的所有元素分别添加为单元素集合。例如，当 $n = 3$ 时，没有单元素部分的 $[n]$ 的部分划分有 5 个，而 $[n]$ 的划分也有 5 个，具体如下：

划分	不含单元素集的部分划分
$\{\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	$\{\{1,2\}\}$
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	$\{\{1,3\}\}$
$\{\{2,3\},\{1\}\}$	$\{\{2,3\}\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	$\{\}$

(10)

我们将 $[n]$ 的部分划分集合记为 $\mathrm{PP}(n)$。与 $[n]$ 的（非部分）划分会产生 $[n]$, 上的等价关系类似，部分划分会产生 $[n]$ 上的部分等价关系：这些关系是对称且传递的，但不一定自反。我们将由部分划分 P 诱导的部分等价关系记为 $\underset{P}{\sim}$。换言之，对于 i、$j \in [n], i \underset{P}{\sim} j$ 意味着 P 中有一个部分同时包含 i 和 j。此外，对于 $k \in [n], k \underset{P}{\sim} k$ 并不一定成立，因为 k 可能不属于P中的任何部分。

以上预备知识介绍完毕，现在我们给出适用于任意域的行列式公式：

定理 2. 设 A 是一个$n \times n$ 矩阵。那么

$$\det(A) = \sum_{P \in \mathrm{PP}(n)} \operatorname{sgn}(P) |P|! \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} \sum\limits_{j \underset{P}{\sim} i, j \neq i} a_{i,j} & \text{if } i \underset{P}{\sim} i; \\ a_{i,i} + \sum\limits_{j \underset{P}{\sim} j} a_{i,j} & \text{if } i \underset{P}{\not\sim} i, \end{cases} \tag{11}$$

其中 符号函数$(P) = \prod_{S \in P} (-1)^{|S|+1}$。

注意，量 符号函数(P) 等于具有循环类型 $\{|S|: \ S \in P\}$的置换的符号，这似乎是部分划分“符号”的一种相当自然的定义（例如，部分划分$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ 与置换 (1,2,3)(4,5)具有相同的符号）。尽管定理 2 所述的求和遍历所有$P \in \mathrm{PP}(n)$，但如果P 含有单元素部分 $\{i\}$，则该项在求和中等于 0，因为

$$\sum_{j \underset{P}{\sim} i, j \neq i} a_{i,j}$$

是一个空和。因此，公式 (11) 可以改写为对没有单元素部分的 $\mathrm{P} \in \mathrm{PP(n)}$ 求和。例如，如果 $\mathrm{n} = 2$，那么 $[\mathrm{n}]$ 有两个不含单元素集合的部分划分：$\mathrm{P}_1 = \{\{1,2\}\}$ 和 $\mathrm{P}_2 = \{\}$。我们可以计算出 $\mathrm{sgn}(\mathrm{P}_1) = -1$，$\mathrm{sgn}(\mathrm{P}_2) = 1$，$|\mathrm{P}_1|! = 1! = 1$ 以及 $|\mathrm{P}_2|! = 0! = 1$，因此定理 2 表明

$$\det(A) = -a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,2},$$

这当然与方程 (1) 中行列式的常用公式相同。当 $n = 3$ 时，方程 (5) 中不含单元素集合的部分划分恰好得到我们在方程 (4) 中看到的行列式五项公式。当 $n = 4$ 时，定理 2 给出以下行列式的15项公式（超越了先前最先进的公式，该公式有 20 项）：

$$\begin{aligned}
\det(A) = {} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} \\
& - (a_{1,2}+a_{1,3}+a_{1,4})(a_{2,1}+a_{2,3}+a_{2,4})(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,4})(a_{4,1}+a_{4,2}+a_{4,3}) \\
& + (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+a_{1,4})(a_{2,3}+a_{2,4})(a_{3,2}+a_{3,4})(a_{4,2}+a_{4,3}) \\
& + (a_{1,3}+a_{1,4})(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+a_{2,4})(a_{3,1}+a_{3,4})(a_{4,1}+a_{4,3}) \\
& + (a_{1,2}+a_{1,4})(a_{2,1}+a_{2,4})(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}+a_{3,4})(a_{4,1}+a_{4,2}) \\
& + (a_{1,2}+a_{1,3})(a_{2,1}+a_{2,3})(a_{3,1}+a_{3,2})(a_{4,1}+a_{4,2}+a_{4,3}+a_{4,4}) \\
& - a_{1,2}a_{2,1}(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3})(a_{4,1}+a_{4,2}+a_{4,4}) \\
& - a_{1,3}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3})a_{3,1}(a_{4,1}+a_{4,3}+a_{4,4}) \\
& - a_{1,4}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,4})(a_{3,1}+a_{3,3}+a_{3,4})a_{4,1} \\
& - (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})a_{2,3}a_{3,2}(a_{4,2}+a_{4,3}+a_{4,4}) \\
& - (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,4})a_{2,4}(a_{3,2}+a_{3,3}+a_{3,4})a_{4,2} \\
& - (a_{1,1}+a_{1,3}+a_{1,4})(a_{2,2}+a_{2,3}+a_{2,4})a_{3,4}a_{4,3} \\
& + 2a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3} \\
& + 2a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2} \\
& + 2a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

一般而言，由于B_n 个 $[n]$, 的划分，因此也有B_n 个 $[n]$ 的无单元素部分的部分划分，因此公式（B_n）中有（可能）非零项。这证明了以下推论的（a）部分（（b）部分则由引理11得出1）：

推论 3. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域。那么

（a） 张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq B_n$，且

(b) 如果 $\mathbb{F}$ 的特征为 0 或严格大于 n，那么 Waring 秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^{n-1} \cdot B_n$。

3 组合证明

现在我们给出定理 2 的一个组合证明。该证明通过穷举验证公式（11）展开为单项式的线性组合后，得到的量与定义公式（1）完全相同。更准确地说，设 $f\colon [n] \to [n]$ 是一个函数（不一定是置换）。我们的目标是证明，$a_{1,f(1)}a_{2,f(2)}\cdots a_{n,f(n)}$ 的系数在方程（11）中与在行列式定义公式（1）中相同。

为此，我们称部分划分 $P \in \mathrm{PP}(n)$ 与 f 代数相容，如果对于所有 $i \in [n],$，都满足以下两个性质：

(α) 若 $i \tilde{P} i$，则 $f(i) \neq i$ 且 $f(i) \tilde{P} i$；以及
(β) 若 $i \not\sim_P i$，则 $f(i) = i$ 或 $f(i) \tilde{P} f(i)$。

若我们用 $\mathrm{ACPP}(f)$ 表示与 f 代数相容的部分划分集合，那么方程 (11) 恰好表明，在行列式展开中，c_f 是 $a_{1,f(1)}a_{2,f(2)}\cdots a_{n,f(n)}$ 这一系数的系数，且其值等于

$$c_f = \sum_{P \in \mathrm{ACPP}(f)} \mathrm{sgn}(P)|P|!. \tag{13}$$

引理 4. 设 c_f 为将方程 (11) 右侧的多项式展开后，$a_{1,f(1)}a_{2,f(2)}\cdots a_{n,f(n)}$ 的系数。那么，若 f 是置换，则 $c_f = \mathrm{sgn}(f)$；否则，$c_f = 0$。

证明。为证明引理4（从而证明定理 2），现在分两种情况讨论。

情况 1：f 不是置换。

由于 f 不是满射，存在 $\mathrm{i} \notin \mathrm{range(f)}$。令 $\mathrm{j} = \mathrm{f(i)}$，并注意到 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$。任取 $\mathrm{P} \in \mathrm{ACPP(f)}$。注意 $\mathrm{j} \sim \mathrm{j}$；若 $\mathrm{i} \sim \mathrm{i}$，则有 $\mathrm{i} \sim \mathrm{j}$。若 P' 是通过从 j 所在部分中移除 i（若 $\mathrm{i} \sim \mathrm{i}$），或将 i 加入 j 所在部分（否则）得到的，则 $\mathrm{P}' \in \mathrm{ACPP(f)}$，且其符号与 P 相反。这在 ACPP(f) 上定义了一个对合，将每个代数相容的部分划分映射到符号相反的一个，因此 $\mathrm{c}_f = 0$。

情况 2：f 是一个置换。

我们可以将 f 写成若干长度至少为 2 的不相交循环的乘积：$f = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$。每个循环 $\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_\ell)$ 自然对应于一个子集 $S_\sigma := \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\} \subseteq [n]$（不过这种对应是多对一的，因为条目的顺序 σ 很重要，而在 S_σ 中则无关紧要）。类似地，我们可以由 f 构造部分划分 $P_f := \{S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \ldots, S_{\sigma_k}\}$。

如果 i_1 和 i_2 位于 f 的同一个循环中，那么对于任意 $P \in \mathrm{ACPP}(f)$，都有 $i_1 \tilde{P} i_2$。由此可得，$P \in \mathrm{ACPP}(f)$ 当且仅当 $P = P_f$，或者<style id='P 可以通过将其某些部分合并而得到 P_f。换句话说，存在对 $[k]$ 的一个（非部分）划分 $K = \{K_1, \ldots, K_m\}$，使得

$$P = \left\{ \bigcup_{i \in K_j} S_{\sigma_i} : j \in [m] \right\}. \tag{14}$$

若 $\left\{ {k \atop m} \right\}$ 表示 (k, m) 阶第二类斯特林数，那么 $\left\{ {k \atop m} \right\}$ 个 $[k]$ 的划分恰好有 m 个部分，因此恰有 $\left\{ {k \atop m} \right\}$ 个部分划分 P 具有形式（14），且恰有 m 个部分。每个划分有

$|P| = m$ 和符号函数$(P) = (-1)^{k+m}$ 符号函数(f)，因此方程（13）可以更明确地写为

$$\begin{aligned} c_f &= \sum_{P \in \mathrm{ACPP}(f)} \operatorname{sgn}(P)|P|! \\ &= \sum_{m=1}^{k} (-1)^{k+m} \operatorname{sgn}(f) \left\{ {k \atop m} \right\} m! \\ &= (-1)^k \operatorname{sgn}(f) \left(\sum_{m=1}^{k} \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^m m! \right). \end{aligned} \tag{15}$$

现在将$x = -1$代入众所周知的公式

$$\sum_{m=1}^{k} \left\{ {k \atop m} \right\} x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1) = x^k$$

可得

$$\sum_{m=1}^{k} \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^m m! = (-1)^k. \tag{16}$$

将方程（16）代入方程（15）的最后一行可得$cf = (-1)^{2k}$ 符号函数(f) =符号函数(f)，由此完成证明。 □

4 几何解释与证明

现在我们给出定理2 的另一种证明，这或许能让我们更深入地理解公式（11）为何成立。本节中我们取基域为 $\mathbb{R}$，但需指出，这并未损失一般性：在 $\mathbb{R}$ 上证明定理2，就能确立交换环$\mathbb{Z}[a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{n,n}]$中的两个多项式相等，因此该结论在任意交换环上也成立。

本节余下部分中，如果维数n 未知或大于 2，我们将使用三维术语（例如“体积”和“平行六面体”）。这n 个标准基向量记为$\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$。为方便记号，我们还定义$\mathbf{e_0}$ 为标准基向量之和的相反数，从而$\mathbf{e_0} + \mathbf{e_1} + \cdots + \mathbf{e_n} = 0$。

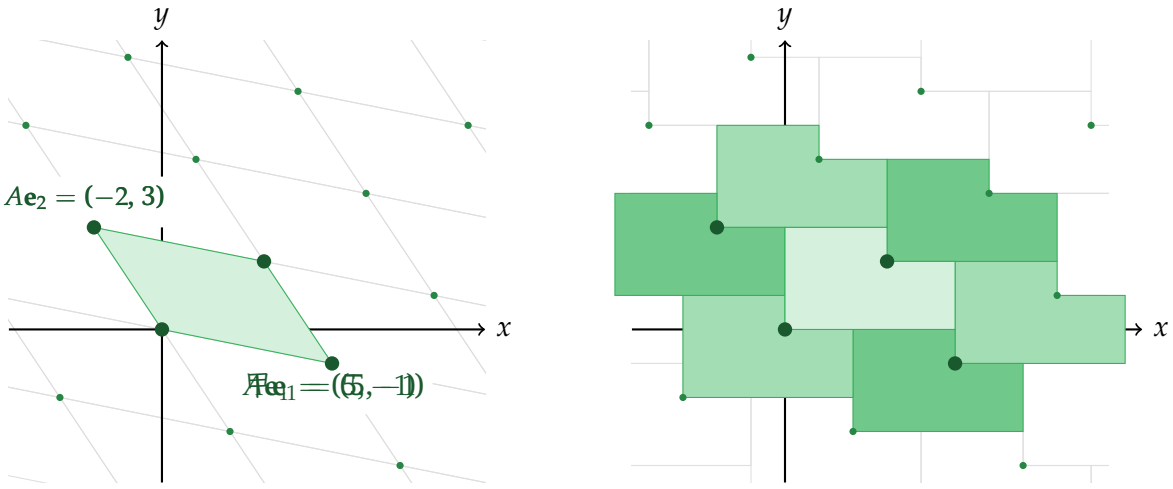
4.1 一般镶嵌

我们将矩阵 A 视为定义了 $\mathbb{R}^n$ 中的一个格，其中格点由矩阵各列的整数线性组合构成。更具体地说，这个格是

$$\Lambda_A := \{A\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n\}.$$

行列式与这个格之间通常的联系在于：以A 的各列 $\mathbb{R}^n$ 为边向量的平行六面体，可由格 Λ_A 中的平移像铺满，且其有向体积等于(A) (见图1a）。我们将通过构造一个多胞体来证明定理2，该多胞体的体积由方程（11）中的公式给出，同时也能铺满 $\mathbb{R}^n$（通过格 Λ_A 中的平移像），因此其有向体积也必定等于(A)(见图1b）。[4]

[4]过去曾有人使用这种技术来构造 $\mathbb{R}^n$ [Ste90], 的缺口立方体镶嵌；我们的镶嵌也将是轴对齐多胞体，但在其他方面会稍微复杂一些。



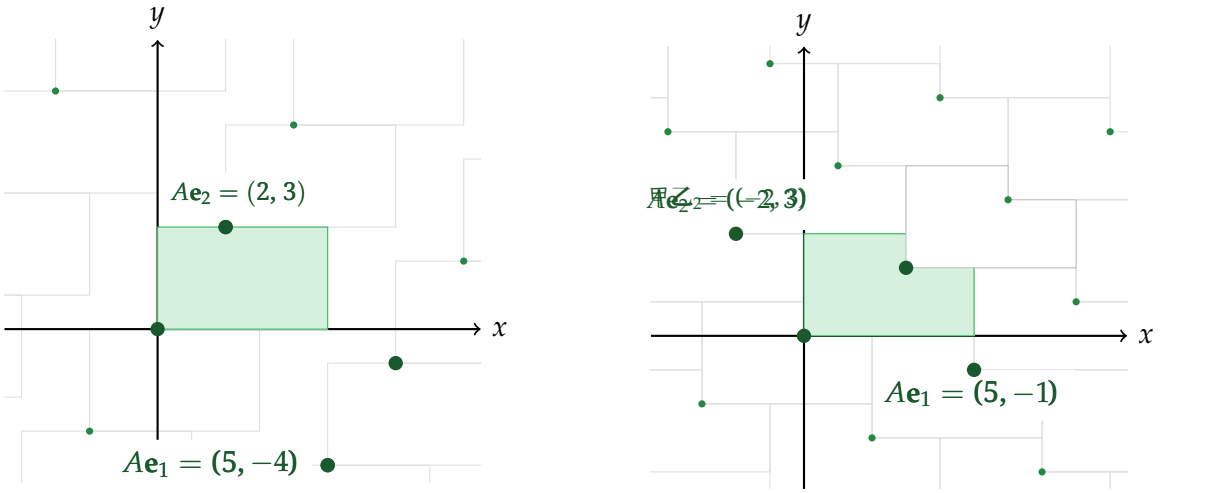
(a) 常见的平行四边形铺砌。　　(b) 我们的轴对齐多胞体铺砌。

图1： $\mathbb{R}^2$ 在同一格上的两种镶嵌，其中铺块的面积等于 $\det\left(\left[\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]\right) = 13$。

现在，我们暂不在每个格点放置通常的平行六面体，而是放置一个尺寸为$a_{1,\,1} \times a_{2,\,2} \times \cdots \times a_{n,\,n}$的长方体，并使其沿正方向延伸。也就是说，我们将长方体C_A定义为若干闭区间的笛卡尔积，这些闭区间的长度由A的对角线元素给出：

$$C_A := \prod_{i=1}^{n} [0, a_{i,i}],$$

并且我们考虑长方体集合 $\{C_A + \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \Lambda_A\}$。根据$A$的非对角元取值，这些长方体可能相互重叠，和/或彼此之间可能存在空隙（见图2）。



(a) 与 $\mathbb{R}^2$ 相对应的矩形装填（带有空隙）矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$。

(b) 与矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ 对应的 $\mathbb{R}^2$ 矩形覆盖（有重叠）。

图 2：由对角线元素分别为 5 和 3 的矩阵产生的两个 5×3 近似矩形镶嵌。阴影矩形为 C_A，其他矩形则是它在格 Λ_A 上的平移像。

由于这些立方体 体之间可能相互重叠，和/或留有空隙，因此通常不会构成有效的

镶嵌 $\mathbb{R}^n$。为了解决这些长方体可能相互重叠的问题，我们将F_A 定义为从C_A 中移除C_A 的副本后得到的轴对齐多胞体，这些副本是将A的列的非空子集之和[5] 平移后得到的。我们取闭包，使得F_A 包含其边界：

$$F_A := \overline{C_A \setminus \bigcup_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \left\{ x + \sum_{i \in S} A\mathbf{e_i} : x \in C_A \right\}}. \tag{17}$$

为了以类似的方式“修正”长方体之间可能存在空隙这一问题，在证明的余下部分，我们只考虑满足以下性质的矩阵 A：

（a）每个对角元 $a_{i,i}$ 都严格为正；

（b）每个非对角元素 $a_{i,j}$ （其中$i \neq j$）都严格为负；并且

（c）每一行的元素之和都严格为正，即A 是严格对角占优的。

这样做能大大简化证明的其余部分（例如，对于这些矩阵，行列式严格为正，因此它等于体积，而不是有向体积），而且不会造成任何一般性的损失。事实上，如果两个多项式在某个开集上相等，那么它们必定处处相等；由方程（1）给出的行列式定义公式，以及定理 2所述的公式，都是关于矩阵 n^2 个元素的多项式 A。因此，如果它们在某个开集上相等（例如，由条件（a）–（c）所描述的矩阵集合，甚至是即将给出的引理5所描述的更小集合），那么它们必定处处相等。

在下一节中，我们将证明，在满足条件（a）–（c）的前提下， Λ_A 中的向量所对应的F_A 的平移像会镶嵌环境空间 $\mathbb{R}^n$：它们的并集覆盖整个空间，且任意两个不同的平移像相交于一个零测度集合（即只在边界相交，或完全不相交）。我们还将证明，两个铺块$F_A + A\mathbf{u}$和$F_A + A\mathbf{v}$ 有公共边界，当且仅当差$\mathbf{u} - \mathbf{v}$ 是向量 $\{\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$的某个非空真子集之和；在这种情况下，我们称这两个平移像为“邻居”。这等价于$\mathbf{u} - \mathbf{v}$ 是一个非零向量，且其所有分量均属于 $\{0, 1\}$ 或均属于$\{0, -1\}$。每个铺块恰有 $2(2^n - 1)$ 个邻居。

这种镶嵌存在一种适当的 $(n+1)$-着色，其中 $F_A + Av$ 根据 v 的坐标之和模 $n+1$着色。注意，如果两个铺块 $F_A + Au$ 和 $F_A + Av$ 是邻居，那么 $u - v$ 的坐标之和属于 $[-n, -1] \cup [1, n]$，因此模 $n+1$非零，所以这两个铺块会被赋予不同的颜色。图 1b 展示了按这种方式着色的 F_A 及其邻居。

此外，该镶嵌与 $\mathbb{R}^n$ 通过对格$A_n^\star$ 取沃罗诺伊镶嵌而得到的[CS88]中定义的标准置换多面体镶嵌同胚。对于 $n = 2$，这是熟悉的六边形镶嵌；对于 $n = 3$，则是由截角八面体构成的镶嵌，其中心构成体心立方格。

4.2 证明本身

对于任意 $n \times n$ 矩阵 A，我们将考察五个不同的命题（每个命题的真假取决于A）：

- $P_1(A)$： $\det(A)$ 等于方程（11）所述的公式。
- $P_2(A)$：平移像 $\{F_A + \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \Lambda_A\}$ 两两之间的交集均为零测集。

[5]人们可能会想要移除 所有C_A 的平移像C_A，但请看图 1b 便知这样行不通；我们只想移除 C_A 右上顶点处的重叠，或者C_A左下角处的重叠，而不是两者都移除。

- $P_3(A)$：平移像 $\{F_A + \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \Lambda_A\}$ 覆盖整个 $\mathbb{R}^n$。
- $P_4(A)$：格 F_A 的体积等于方程（11）所描述的公式。
- $P_5(A)$：F_A 的体积等于 $\det(A)$。

$P_2(A)$、$P_3(A)$ 和 $P_5(A)$ 中任意两个均可推出第三个（这等价于以下断言：格 Λ_A tile 空间中，F_A 的平移由向量进行）。同样，$P_1(A)$、$P_4(A)$ 和 $P_5(A)$ 中任意两个均可推出第三个（根据等式的传递性）。我们在图 3 中总结了这些关系。

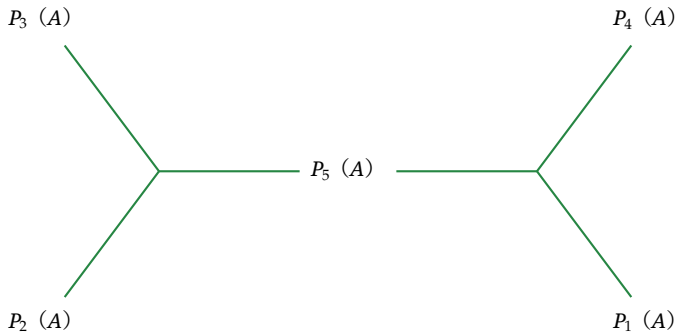


图 3：性质 $P_1(A)$–$P_5(A)$ 之间关系的概述。左侧 Y 形中的任意两个性质都能推出第三个，右侧 Y 形中的任意两个性质也都能推出第三个。

定理 2 等价于对所有矩阵 A，$P_1(A)$ 都成立。证明分两步进行：首先证明对于满足三个条件（a）–（c）的所有矩阵 A，$P_3(A)$ 和 $P_4(A)$ 都成立；然后证明对于典范矩阵 B 的一个小开邻域内的所有矩阵 A，$P_2(A)$ 都成立。由此可推出 $P_1(A)$ 在一个非空开集上成立，因此（由于这是两个多项式之间的等式）它普遍成立，从而完成定理 2 的证明。请注意，沿相反方向追溯这些蕴含关系可知，对于满足条件（a）–（c）的所有矩阵 A，$P_5(A)$ 和 $P_2(A)$ 都成立，而不只是对于我们直接证明 $P_2(A)$ 成立的那个小邻域内的矩阵。

引理 5。考虑 $n \times n$ 矩阵

$$B := (n+1)I - J, \tag{18}$$

其中 J 是所有元素都等于 1 的矩阵。存在 N_ε，它是 B 的一个 ε 邻域，并具有如下性质：对于所有 $A \in N_\varepsilon$ 以及所有 $\mathbf{y} \neq \mathbf{z} \in \Lambda_A$，$(F_A + \mathbf{y}) \cap (F_A + \mathbf{z})$ 的交集测度为零（即，镶嵌中的任意两个铺块要么仅在边界处重叠，要么完全不重叠）。

在证明上述引理之前，我们指出，我们会将 ε 邻域 N_ε 选得足够小，使得每个 $A \in N_\varepsilon$ 都满足我们先前描述的三个条件（a）–（c）（这是可行的，因为 B 满足这三个条件，且这些条件定义了一个开集）。

B 是一个正定对称矩阵，其特征值为 1（重数为 1）和 $n+1$（重数为 $n-1$）。B 的奇异值等于其特征值，因此 B 的最小奇异值也等于 1。通过将 ε 选得足够小，我们可以确保每个 $A \in N_\varepsilon$ 的最小奇异值都大于 $\frac{1}{2}$。

具体而言，令 $\varepsilon_0 > 0$ 为一个常数（仅取决于 n），以确保每个 $A \in N_\varepsilon$ 都满足条件（a）–（c），且其最小奇异值大于 $\frac{1}{2}$。

引理 5 的证明。只需证明：当 $\mathbf{z} \in \Lambda_A$ 非零时，$F_A \cap (F_A + \mathbf{z})$ 是零测度集合。由于A严格对角占优，因而可逆，所以$\mathbf{z} \in \Lambda_A$ 非零等价于存在某个非零$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$，使得$\mathbf{z} = A\mathbf{v}$。

若 v 非零，且其所有分量均属于 $\{0,1\}$，或所有分量均属于 $\{0,-1\}$，那么根据公式（17）中 F_A 的构造，我们知道 $F_A \cap (F_A + Av)$ 的测度为零（我们称这 $2(2^n-1)$ 个 $F_A + Av$ 铺块为 F_A 的“邻居”；当 $n = 2$ 时，它们恰好是与图 1b 中中央阴影瓦片相邻的 6 个铺块）。现在我们的目标是证明，F_A 的每个非邻居与 F_A 的交集均为空。

为此，先考虑方程（B 18）中的矩阵。对于这个矩阵，我们所讨论的多胞体为

$$F_B = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : 0 \le x_i^{\uparrow} \le i \text{ for all } i \in [n]\right\},$$

其中 $x^{\uparrow} i$ 是 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 中第 i 小的分量（见图 4）。等价地，F_B 是将长方体 $[0,1] \times [0,2] \times \cdots \times [0,n]$ 的坐标作任意排列后所得的 n! 个像的并集。我们声称，若 $F_B + Bv$ 不是 F_B 的邻居，则 F_B 与 $F_B + Bv$ 不相交。

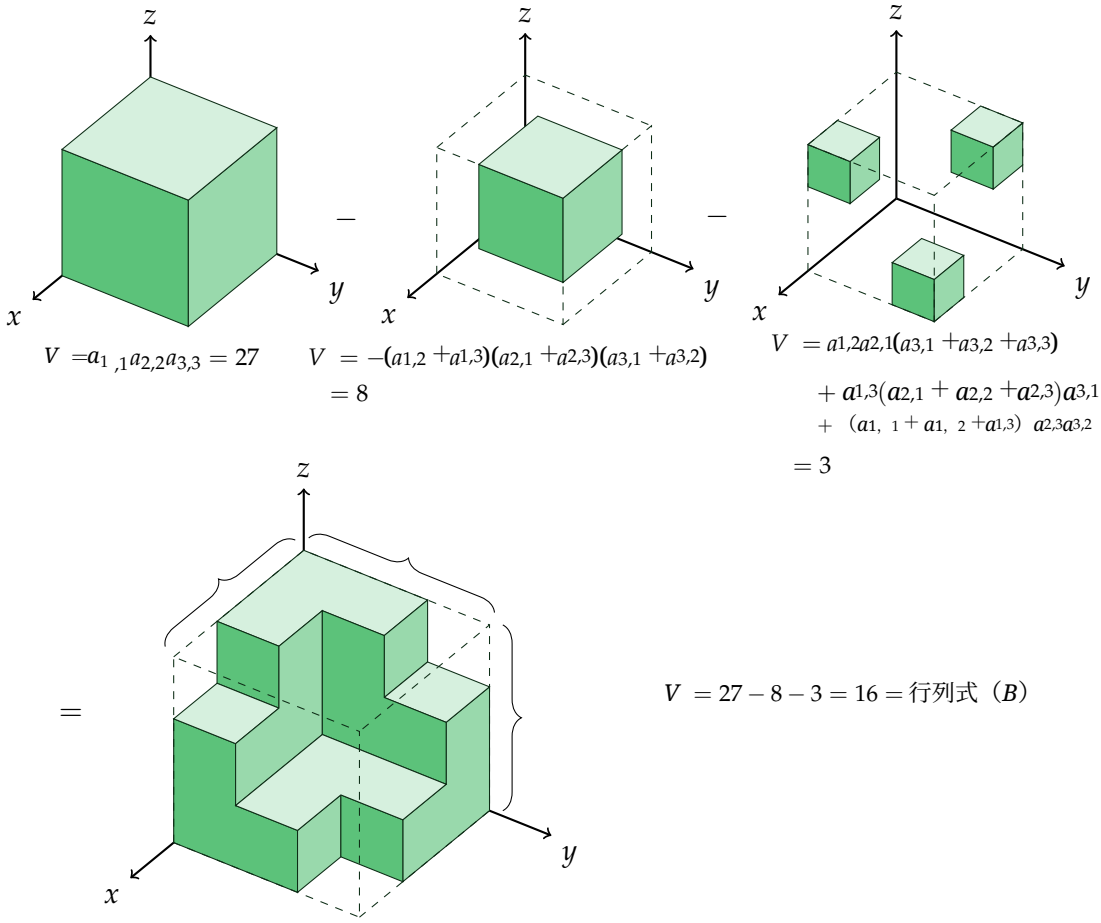


图 4：矩阵 B_B 的多胞体 $F = (n+1)I - J$，其中 $n = 3$。其体积等于 5个不同立方体体积的和与差，这些立方体对应于行列式的 5 项公式（4）。

为证明这一断言，假设$F_B + B\mathbf{v}$ 不是F_B的邻居。

首先，考虑存在指标 i 和 j 使得 $v_i - v_j \ge 2$ 的情形。于是 $(Bv)_i - (Bv)_j = (n+1)(v_i - v_j) \ge 2(n+1)$。因此，$(Bv)_i$ 和 $(Bv)_j$ 中至少有一个的绝对值为 $\ge n+1$，这意味着 $F_B + Bv$ 和 F_B 的边界立方体（两者的边长均为 n）互不相交。

这样便只剩下 $\mathbf{v}$ 的所有分量两两相差至多 1 的情形。换言之，存在 $c \in \mathbb{Z}$，使得对所有 i，都有 $\mathbf{v_i} \in \{c-1, c\}$；此外，至少存在一个这样的 j，使得 $\mathbf{v_j} = c$。

不失一般性，我们可以假设 c 为正（因为 $F_B + B\mathbf{v}$ 与 F_B 不相交，当且仅当 $F_B - B\mathbf{v}$ 与 F_B 不相交）。此外，如果 $c \in \{0,1\}$，那么这两个多胞体互为邻居，因此我们有 $c \geq 2$。

通过对坐标进行置换，我们可以假设 $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} = c$ 且 $\mathbf{v_{k+1}}, \ldots, \mathbf{v_n} = c-1$。然后我们可以计算得：

$$(B\mathbf{v})_1 = \cdots = (B\mathbf{v})_k = n - k + c$$

并且，由于 $c \geq 2$，这意味着 $(Bv)_i \geq n - k + 2$ 中至少有 k 个元素。因此，$Bv \notin F_B$，因为每个点 $x \in F_B$ 都至少有 $n - k + 1$ 个元素 $x_i \leq n - k + 1$。此外，由于 F_B 包含在正正交象限中，对于所有 $x \in F_B$，我们也有 $x + Bv \notin F_B$，由此证明这两个多胞体互不相交。

由于当它们不是邻居时，F_B 与 $F_B + Bv$ 的交集为空，且 B 的元素均为整数，因此非邻居 F_B 与 $F_B + Bv$ 之间的距离至少为 1。由于 F_A 与 $F_A + Av$ 的坐标关于 A 的元素连续，我们得出结论：存在 B 的某个 ε-邻域 N_ε，使得当 $A \in N_\varepsilon$ 且 $F_A + Av$ 不是 F_A 的邻居时，$F_A \cap (F_A + Av) = \emptyset$。

然而，ε 的具体取值可能取决于向量 $\mathbf{v}$，因此我们将其记为 $\varepsilon_{\mathbf{v}}$。为解决这个问题，注意到如果 $\|\mathbf{v}\| \geq 2K$，那么 $\|A\mathbf{v}\| > K$（因为 A 的最小奇异值至少为 1 2），所以只有有限多个 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$ 会使 $F_A \cap (F_A + A\mathbf{v})$ 可能非空：取 K 为 F_A 直径的一个上界；需要考虑的 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$ 仅限于半径为 $2K$ 的球内。将 ε 定义为 ε_0（在本证明开头定义）与这有限多个 $\varepsilon_{\mathbf{v}}$ 中的最小值，即完成证明。 □

引理 6. 若 A 满足上述条件（a）–（c），则 $F_A + \Lambda_A = \mathbb{R}^n$（即镶嵌中没有空隙）。

证明。首先注意，只需证明对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都存在 $z \in \Lambda_A$ 使得 $x + z \in C_A$。为此，回顾公式（17），F_A 是从 C_A 中移除其正方向上的紧邻邻居构造而成的，因此若 $x + z \in C_A$，则对某个二进制向量 $b \in \{0,1\}^n$，有 $x \in (F_A + Ab) - z$。由于 $Ab - z \in \Lambda_A$，这意味着 $x \in F_A + \Lambda_A$。

要找到 $\mathbf{z}$，首先选取某个 $\mathbf{z^{(0)}} \in \Lambda_A$，使 $\mathbf{y^{(0)}} := \mathbf{x} + \mathbf{z}${v15>的每个分量都非负（这样的 $\mathbf{z^{(0)}}$ 确实存在，因为 A 严格对角占优，因此可逆）。令 $k = 0$，并按如下方式进行归纳：

(i) 若对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $\mathbf{y^{(k)}}_i \leq a_{i,i}$，那么 $\mathbf{y^{(k)}} \in C_A$，因此我们可以选择 $\mathbf{z} = \mathbf{z^{(k)}}$，这样就完成了。

(ii) 否则，选取一个满足 $\mathbf{y^{(k)}}_i > a_{i,i}$ 的指标 $1 \leq i \leq n$，并令 $\mathbf{y^{(k+1)}}_i = \mathbf{y^{(k)}}_i - A\mathbf{e_i}$，且 $\mathbf{z^{(k+1)}}_i = \mathbf{z^{(k)}}_i - A\mathbf{e_i}$。将 k 增加 1，然后重复这些要点。

由于 A 的对角线元素均严格为正，显然 $0 \leq y^{(k+1)}\, i < y^{(k)}\, i$。然而，这样降低第 i 个分量的代价是增加其他分量（因为 A 的非对角线元素为负）。因此，上述归纳过程是否会终止并不明显。为证明它确实会终止，我们证明存在一个向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 和一个标量 $0 < d \in \mathbb{R}$，使得对所有 k 都有 $v \cdot y^{(k)} \geq 0$，且对所有 k 都有 $(v \cdot y^{(k)}) - (v \cdot y^{(k+1)}) \geq d$，这意味着该过程会在某个 $k \leq (v \cdot y^{(0)})/d$ 时终止。

为构造这样的**向量** 和标量，令$c \in \mathbb{R}$ 足够大，使$cI - A^T$ 的所有元素都严格为正。佩龙–弗罗贝尼乌斯定理告诉我们，存在一个严格为正的实特征值 λ ，以及与之对应的逐元素严格为正的特征向量$\mathbf{v}$，使得$(cI - A^T)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$。由于$\mathbf{v}$和$\mathbf{y^{(k)}}$ 均逐元素非负，因此对所有k都有$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}^{(\mathbf{k})} \geq 0$。此外，由于$(c - \lambda,\mathbf{v})$ 也是A^T的一组特征值–特征向量对，且A 严格对角占优（并且c 和 λ 均为实数），我们知道$c - \lambda > 0$。由此可得

$$\mathbf{v} \cdot (A\mathbf{e_i}) = (A^T\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e_i} = (c - \lambda)\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_i} = (c - \lambda)v_i > 0 \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq n.$$

若选择$d := (c - \lambda)\min_i\{v_i\} > 0$，则可得$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}^{(\mathbf{k})}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}^{(\mathbf{k+1})}) = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{e_i}) \geq d$，证明完毕。 □

引理 7。 如果 A 满足上述条件（a）–（c），那么 F_A 的体积由方程 (11)中的表达式给出。

证明。 长方体 C_A 的体积显然等于 $a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$，这是和式（11）中的一项（即对应于空部分划分的项）。现在我们使用容斥原理来说明，该和式中的其余各项对应于在按照方程（*17*）创建 F_A 时，通过平移 C_A 而移除的体积。

对于非空的$S \subseteq [n],$，集合

$$C_A \cap \left(C_A + \sum_{i \in S} A\mathbf{e_i} \right) \tag{19}$$

这是一个长方体，其第i条边长 ℓ_i 等于

$$\ell_i = \begin{cases} a_{i,i} - \sum_{j \in S} a_{i,j}, & \text{if } i \in S \\ a_{i,i} + \sum_{j \in S} a_{i,j}, & \text{if } i \notin S \end{cases} = \begin{cases} -\sum_{j \in S, j \neq i} a_{i,j}, & \text{if } i \in S \\ a_{i,i} + \sum_{j \in S} a_{i,j}, & \text{if } i \notin S. \end{cases}.$$

将这些边长相乘即可得到长方体的体积（19）。对于所有非空的 $S \subseteq [n]$，减去这一数量（即减去从C_A中移除、用于创建 F_A的所有这些长方体的体积），得到 F_A体积的以下公式（目前尚不正确）：

$$a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} - \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \prod_{i=1}^{n} \ell_i = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} - \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} -\sum_{j \in S, j \neq i} a_{i,j}, & \text{if } i \in S \\ a_{i,i} + \sum_{j \in S} a_{i,j}, & \text{if } i \notin S. \end{cases} \tag{20}$$

当 $n \leq 3$时，公式（20）与公式 (11) 相同，并且确实等于 F_A的体积。特别是，当 $n = 2$ 时，它表示图 1b 中阴影瓦片 F_A 的面积，即矩形 C_A 的面积 $a_{1,1}a_{2,2}$ 减去其右上顶点处矩形重叠区域的面积；而当 $n = 3$ 时，它表示 F_A 的体积，即长方体 C_A 的体积 $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ 减去另外 4 个长方体的体积（这些长方体在矩阵 $(n+1)I - J$ 的情形下如图 4 所示，其他满足 (a)–(c) 的矩阵也类似）。

然而，当 $n \geq 4$ 时，公式（20）并不完全正确，因为 C_A 的平移像之间存在重叠的重叠，因此从 C_A 中移除的某些体积在方程（20）中被重复移除。为纠正这一错误，我们采用容斥原理：先加回被多次减去的体积，再减去被多次加回的体积，依此类推。

例如，当 $n = 4$ 时，与子集 $S_1 = \{1,2\}$ 和 $S_2 = \{1,2,3,4\}$（即长方体 $C_A + A(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$ 和 $C_A + A(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4})$）相对应的长方体彼此重叠，因此公式（20）的结果偏小：它减去了长方体的体积

$$(C_A + A(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})) \cap (C_A + A(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}))$$

两倍（该体积等于 $a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}$）。事实上，恰有六个长方体的体积被公式（20）重复减去了两次，其中 $S_2 = \{1,2,3,4\}$ 和 S_1 是 S_2的任意一个二元素子集。要纠正这一错误，我们只需把这些长方体的体积加回去。与 $S_1 = \{1,2\}$ 和 $S_1 = \{3,4\}$ 对应的长方体体积相同，与 $S_1 = \{1,3\}$ 和 $S_1 = \{2,4\}$对应的长方体体积也相同，与 $S_1 = \{1,4\}$ 和 $S_1 = \{2,3\}$对应的长方体体积亦然，因此得到方程（12）中的最后三项（每项的系数均为 2）。

一般而言，k 个两两不同（但不一定互不相交）的子集 S_1, S_2,....., $S_k \subseteq [n]$ 满足

$$\bigcap_{j=1}^{k} \left(C_A + \sum_{i \in S_j} A\mathbf{e_i} \right) \tag{21}$$

当且仅当这些长方体之间存在包含链时，体积才非零。我们不失一般性地假设 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subseteq [n]$，且对所有 $1 \le \ell \le k$ 都有 $|S_\ell \setminus S_{\ell-1}| \ge 2$（为方便起见，我们定义 $S_0 = \emptyset$）。事实上，如果 $|S_\ell \setminus S_{\ell-1}| = 0$，那么 $S_\ell = S_{\ell-1}$；如果 $|S_\ell \setminus S_{\ell-1}| = 1$，那么方程 (21) 中对应于 $j = \ell - 1$ 和 $j = \ell$ 的两个长方体仅在边界处相交（对于某个 $i \in [n],$，有 $S_\ell \setminus S_{\ell-1} = \{i\}$，因此两个长方体在第 i 个坐标轴方向上相互错开 $a_{i,i}$，而这也正是它们在该方向上的宽度）。

方程 (21) 中所述交集对应的长方体的体积等于其边长的乘积，即

$$\prod_{i=1}^{n} \begin{cases} -\sum_{j \in S_\ell \setminus S_{\ell-1}, j \neq i} a_{i,j}, & \text{if } i \in S_\ell \setminus S_{\ell-1} \ (1 \le \ell \le k) \\ a_{i,i} + \sum_{j \in S_k} a_{i,j}, & \text{if } i \notin S_k. \end{cases} \tag{22}$$

现在通过使用容斥原理即可得出结果：将链 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subseteq [n]$与部分划分

$$P = \{S_1, S_2 \setminus S_1, S_3 \setminus S_2, \ldots, S_k \setminus S_{k-1}\},$$

并注意到，恰有 $k!$ 条不同的链 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subseteq [n]$ 可导出这一特定的部分划分（因为 P中各部分的顺序无关紧要）。[6] 定理 2的证明至此完成。

□

4.3 多胞体$\mathbf{F_A}$

对于满足条件（a）–（c）的 $n \times n$ 矩阵 A，我们在方程（F_A 17）中定义了：从原长方体 C_A 中减去平移后的长方体 C_A。本小节将研究多胞体F_A 及其 1-骨架（即其顶点及其间的1维边；见图 5），并将其描述为与一族组合对象相关联的翻转图。

首先，我们描述将作为图的顶点的组合对象。 $[n]$ 上的有序部分划分（OPP）定义为满足以下性质的关系$\preccurlyeq$：

[6]例如，这个部分划分有 $|P| = k$，且 $\operatorname{sgn}(P) = (-1)^{|S_k|+k}$，其中 $(-1)^k$ 源于 k 指明我们处于容斥原理的哪一层，而 $(-1)^{|S_k|}$ 源于 $|S_k|$ 指明乘积 (22) 中有多少项位于上分支（带负号）。如果 $S_k = [n]$，那么它就是一个（非部分）划分，并且该部分划分不含单元素集合，因为对于所有 $1 \le \ell \le k$，$|S_\ell \setminus S_{\ell-1}| \ge 2$。

(i) 传递性：若$x \preccurlyeq y$ 且$y \preccurlyeq z$，则$x \preccurlyeq z$。

(ii) 弱自反性：若$x \preccurlyeq y$，则$x \preccurlyeq x$ 且$y \preccurlyeq y$。

(iii) 弱连通性：若$x \preccurlyeq x$ 且$y \preccurlyeq y$，则$x \preccurlyeq y$ 或$y \preccurlyeq x$，也可以二者皆成立。

所有定义在 $[n]$ 上的有序部分划分的集合记为$\mathrm{OPP}(n)$，其数量由 [SKS96]给出。

“有序部分划分”这一名称指的是，这些关于 $[n]$ 的关系与由 $[n]$ 的两两不相交的非空子集构成的（有序、可以为空的）元组一一对应（也就是说，是对 $[n]$ 的部分划分，其中我们关心各部分的顺序）：

$$(X_1, X_2, \ldots, X_k),$$

其中，当$i \neq j$时$X_i \cap X_j = \emptyset$。这个集合元组与原关系的对应方式如下：当且仅当存在整数 $1 \leq i \leq j$，使得$x \in X_i$ 且$y \in X$时，$x \preccurlyeq y$。

对于每个 $z \in [n],$，我们定义一个函数 $f_z : \mathrm{OPP}(n) \to \mathrm{OPP}(n)$ 如下：

(1) 如果 $X_1 = \{z\}$，则丢弃 $X_1,$，得到元组 $(X_2, \ldots, X_k)$。

(2) 若$X_j = \{z \ \}$ 对于某个 $j \geq 2$，则将其合并到紧邻的前一部分中，得到元 le

$$(X_1, \ldots, X_{j-1} \cup \{z\}, X_{j+1}, \ldots, X_k).$$

(3) 如果 $z \in X_j \neq \{z\}$ 对于某个 $j \geq 1$，则将其拆分出来，作为紧接其后的独立部分，得到元组

$$(X_1, \ldots, X_j \setminus \{z\}, \{z\}, X_{j+1}, \ldots, X_k).$$

(4) 否则，如果 $z \not\in \bigcup_{j=1} X_j$，则将其作为第一个独立部分，得到元组

$$(\{z\}, X_1, \ldots, X_k).$$

对于每个$z \in [n],$，函数f_z 都是 $\mathrm{OPP}(n)$ 上的一个无不动点对合：若$f_z(\preccurlyeq) = \preccurlyeq'$，则$f_z(\preccurlyeq') = \preccurlyeq$。此外，若$x,y \in [n]$ 且$x \neq z$，则$x \preccurlyeq y$ 当且仅当$x \preccurlyeq' y$。

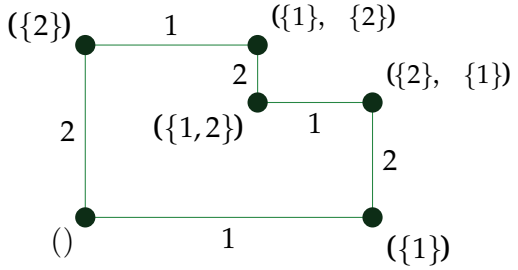
我们构造一个图（称为翻转图），其顶点为$\mathrm{OPP}(n)$ 的元素；若有序部分划分在对合f_z 下互换，则在它们之间连边，其中$z \in [n]$。所得翻转图是n-正则的，因为每个顶点对每个$z \in [n]$都有一条对应的边；我们声称此图同多胞体F_A 的1-骨架同构（见图5）。

命题8。设A 是一个满足条件（a）–（c）的$n \times n$ 矩阵。那么F_A的顶点与 $\mathrm{OPP}(n)$的元素一一对应。特别地，对应于有序部分划分$\preccurlyeq$ 的顶点$\mathbf{v}$的坐标为

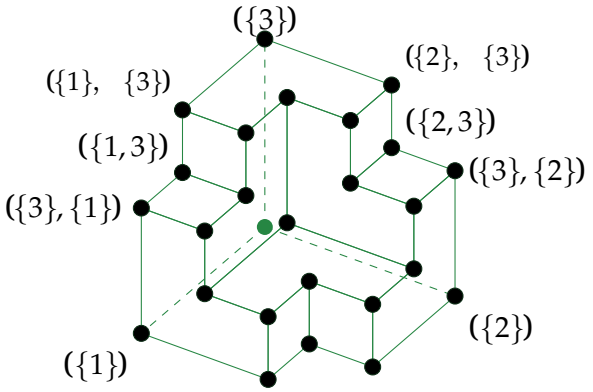
$$v_i = \sum_{j : i \preccurlyeq j} a_{i,j} \quad \textit{for all} \quad 1 \leq i \leq n.$$

证明。回想一下，我们最初通过从长方体 C_A 中减去其平移后的副本来定义 F_A：

$$F_A := \overline{C_A \setminus \bigcup_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \left\{ x + \sum_{i \in S} A\mathbf{e_i} : x \in C_A \right\}}. \tag{23}$$



(a) 二维多面体1-骨架 F_A，见图 1b，或等价地，OPP(2)的翻转图。边标记为使对合f_z 将其连接的 OPP 相互变换的z 。



（b）三维多胞体 1-骨架 F_B，来自图 4，或等价地，OPP（3）的翻转图。并非所有顶点都标有标签；前方的中心顶点是（{1,2,3}），而后方的中心顶点是（）。

图5：多胞体的1-骨架是其顶点以及它们之间的1-维边所组成的集合。命题8 和9 表明，多胞体1-骨架F_A 同构于一个图，其顶点是 $[n]$ 上的有序部分划分，而其边由对合f_z描述。

然而，C_A 本身可以写成

$$C_A = \overline{P \setminus \bigcup_{i\in[n]} \{x + A\mathbf{e_i} : x \in P\}},$$

其中，P 是正正交象限，由所有坐标均为非负数的向量组成。因此，即使将F_A 中每个C_A 的实例都替换为P，定义（23）仍然成立。

给定$\mathbf{v}$ F_A的一个顶点，注意到它是n 个面（余维为1的面）$f_1, f_2, \ldots, f_n$的交集，其中这些面属于F_A，而标准基向量$\mathbf{e_i}$ 垂直于面f_i。面f_i 必定包含在用于构造F_A的某个平移像的P 的一个面中；于是，顶点$\mathbf{v}$就是这n 个（不一定互不相同的）正正交象限P平移像交集的顶点。

因此，F_A 中出现的每个顶点，都对应于平移后的正正交象限交集的顶点；该顶点是相应平移后的C_A副本交集的最低顶点（就各坐标而言）。我们在引理7 的证明中计算F_A的体积时，已经刻画了这些交集，并将它们识别为 $[n]$, 的子集链；而这些子集链又可自然地对应于有序部分划分。[7]

□

命题9. 设A 为一个满足条件（a）–（c）的$n \times n$ 矩阵，且 $1 \le i \le n$。那么，$\mathbf{v}$和$\mathbf{w}$ 这两个F_A 的顶点由一条平行于标准基向量$\mathbf{e_i}$ 的边连接，当且仅当对应于 OPP(n) 的元素（按命题8中的对应关系）被对合f_i互换。

证明。从组合角度看，多胞体 F_A 不取决于矩阵 A 的选择（除了A满足条件（a）–（c）这一事实），因此不失一般性，假设其元素在 Q 上线性无关。

[7]在引理7 的证明中，我们忽略了包含单元素集合 $\{i\}$ 的部分划分，因为它们对应的交集测度为零。然而，在这里仍需将它们纳入考虑，因为它们对应于长方体C_A 边界面上的顶点（具体而言，是$v_i = a_{i,i}$的那些顶点）。

那么，$v_k = w_k$ 当且仅当 $\sum_{j:k\preccurlyeq j} a_{k,j} = \sum_{j:k\preccurlyeq' j} a_{k,j}$ 当且仅当

$$\{j : k \preccurlyeq j\} = \{j : k \preccurlyeq' j\}. \tag{24}$$

因此，当且仅当对所有 $\mathbf{e_i}$，方程（24）成立时，两个顶点才位于一条平行于基向量 $k \neq i$ 的直线上。

这意味着在 $[n] \setminus \{i\}$ 上诱导出的有序部分划分相同，因此原有的有序部分划分只能在i 所在的位置上有所不同。这也限制了i 相对于其他部分的位置，即

$$\{k \neq i : k \preccurlyeq i\} = \{k \neq i : k \preccurlyeq' i\}. \tag{25}$$

如果移除并重新插入i，则有两种可能：要么将其作为单独的单元素部分引入，要么不这样做（而是将其引入现有部分，或将其完全删除）。在这两种情况下，i 的位置均由方程（25）确定。其中一种情况对应于 $\preccurlyeq'=\preccurlyeq$，另一种则对应于 $\preccurlyeq'=f_i(\preccurlyeq)$。

由于F_A 是一个正交多胞体，因此，与给定顶点$\mathbf{v}$ 可能通过一条边相连的其他顶点至多有n 个，即将f_i 作用于 OPP（n） 中对应元素所得到的顶点。此外，正交多胞体中的每个顶点的度都必须为n，因此这些边全部存在。结论得证。

□

我们可以像图5a中那样，用$i \in [n]$ （满足$\preccurlyeq'=f_i(\preccurlyeq)$）的值为翻转图的边 $\{\preccurlyeq, \preccurlyeq'\}$ 标记。这样，F_A 的高维面便可以用这个图简洁地描述：平行于由基向量 $\{\mathbf{e_i} \ (i \in S\}$，其中$S \subseteq [n]$ 且 $|S| = r$）张成的线性子空间的r维面，恰好是仅取标签属于S的边所得到的子图的连通分支。

通过指定顶点坐标来描述F_A，比原先用平移后的C_A副本相减来定义更一般：这种描述可推广到任意方阵A，而不必要求A 满足条件（a）–（c）。不过请注意，由此得到的多胞体可能自相交，因此必须谨慎定义“体积”，使其等于 $\det(A)$。

5 非零特征域

对于域 $\mathbb{F}$，若其特征为 $p > 0$，公式 (11) 中的许多项都是 p 的倍数，因此等于零。这样一来，公式便得以简化，我们得到 $\det^n_{\mathbb{F}}$ 的张量秩上界也更加紧。具体而言，我们有定理 2 的以下变体：

定理 10. 设 A 是一个定义在特征为 $\mathbb{F}$ $p > 0$ 的域上的 $n \times n$ 矩阵。那么

$$\det(A) = \sum_{\substack{P\in \mathrm{PP}(n)\\ |P|\leq p-1}} \mathrm{sgn}(P)|P|! \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} \sum\limits_{j \underset{P}{\sim} i, j\neq i} a_{i,j} & \text{if } i \underset{P}{\sim} i; \\ a_{i,i} + \sum\limits_{j \underset{P}{\sim} j} a_{i,j} & \text{if } i \underset{P}{\not\sim} i, \end{cases} \tag{26}$$

其中 符号函数$(P) = \prod_{S\in P}(-1)^{|S|+1}$。

证明。 这个公式与定理 2给出的公式完全相同，只是此处求和所遍历的部分划分 P 受到限制，必须满足 $|P| \leq p - 1$。由于任何满足 $|P| \geq p$ 的项，其系数为 $|P|!$，它是 p的倍数，而在 0 中等于 $\mathbb{F}$，因此对 $|P|$ 施加这一限制不会改变求和的值。

□

为了计算和式（26）中非零项的数量，从而在 $\mathbb{F}$ 的特征为$p > 0$时，得到更紧的张量秩 $(\det_{\mathbb{F}}^n)$ 上界，我们需要引入另一个组合量。令 $B_{n,k}$ 表示 $[n]$ 的部分划分中恰好包含k 个部分且不含单元素集合的划分数量；等价地，它表示 $[n]$ 的划分中恰好包含k 个部分，且每个部分的大小都严格大于 1 的划分数量。方程（26）中的和恰好包含 $\sum_{k=0}^{p-1} B_{n,k}$ 个（可能）非零项，因此我们立即得到以下推论：

$p-1$推论 11. 设 $\mathbb{F}$ 是特征为 $p > 0$的域。那么张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq \sum B_{n,k}.k=0$

利用引理 1，我们也可以说，如果 $\mathbb{F}$ 的特征为 $p > n$，那么 $\mathrm{Wrank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} B_{n,k}$。然而，这并未优于推论 3，因为 $\sum_{k=0}^{p-1} B_{n,k} = B_n$ 只要 $p > n$ 就成立（事实上，只要 $p > \lfloor n/2 \rfloor + 1$ 就成立，因为除非某个部分划分含有一些单元素集合，否则任何部分划分都不能包含多于 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个部分）。

关于 $B_{n,k}$，已有许多性质和公式（参见 [Deu06,NRB20] 及其中的参考文献）。我们在此概述与本文最相关的性质：

(i) $B_{n,\ 0} = 1$。

(ii) $B_{n,1} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$，因为 $\binom{n}{k}$ 统计了 $[n]$的部分划分中有一个部分大小为 k 的数量。因此，如果 $\mathbb{F}$ 的特征为 2，则 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq B_{n,0} + B_{n,1} = 2^n - n$（我们将在第 5.1 节中更详细地讨论这一特殊情形）。

(iii) 当 $n \geq 2k \geq 2$ 时，递推关系 $B_{n,k} = (k+1)B_{n-1,k} + (n-1)B_{n-2,k-1}$ 成立。结合以下事实：对于所有 $n \geq 0$，$B_{n,0} = 1$；当 $n < 2k$ 时，$B_{n,k} = 0$，就可以利用这一递推关系计算所有 n 和 k 对应的 $B_{n,k}$。

(iv) 特别是，当k 取较小值时，我们有以下额外的显式公式：

$$
\begin{aligned}
B_{n,2} &= \frac{1}{2}\left(3^n - (n+2)2^n + (n^2+n+1)\right),\\
B_{n,3} &= \frac{1}{6}\left(4^n - (n+3)3^n + 3(n^2+3n+4)2^{n-2} - (n^3+2n+1)\right), \quad \text{and}\\
B_{n,4} &= \frac{1}{24}\left(5^n - (n+4)4^n + 2(n^2+5n+9)3^{n-1}\right.\\
&\qquad \left. - (n^3+3n^2+8n+8)2^{n-1} + (n^4-2n^3+5n^2+1)\right).
\end{aligned}
$$

(v) $B_{n,k} \leq (k+1)^n/k!$（此外，对于固定的k，我们有$B_{n,k} \sim (k+1)^n/k!$，因此这个不等式造成的损失并不太大）。为验证这个不等式，考虑从$P \in \mathrm{OPP}(n)$[8]中恰有k 个部分且没有单元素集合的元素构成的集合到集合 $\{0,1,2,\ldots,k\}^n$的以下函数f：

$$
\begin{aligned}
f(P) &:= (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)), \quad \text{where}\\
f_i(P) &= \begin{cases} 0 & \text{if } i \not\sim_P i,\\ j & \text{if } i \text{ is in the } j\text{-th part of } P. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由于 f (P) 完全确定了有序部分划分 P，因此 f 是单射，所以恰有 k 个部分且没有单元素集合的 OPP(n) 中，满足条件的 P 不超过 $|\{0,1,2,\ldots,k\}^n| = (k+1)^n \in$ 个。若忽略这 k 个部分的顺序，则可知 PP(n) 中恰有 k 个部分且没有单元素集合的成员不超过 $(k+1)^n/k!$，因此 $B_{n,k} \leq (k+1)^n/k!$。

[8]请注意，$\mathrm{OPP}(n)$ 是有序部分划分的集合，其定义见第4.3节。

总之，结合推论 11，以上所有观察和公式得出以下推论（当 $p \geq 7$ 时结论稍弱，但更易于计算和使用）：

推论 12。设 $\mathbb{F}$ 是一个特征为$p > 0$的域。

(a) 若 $p = 2$，则张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^n - n$。(b) 若 $p = 3$，则张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq \frac{1}{2}\left(3^n - n2^n + (n^2 - n + 1)\right)$。(c) 若 $p = 5$，则张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq \frac{1}{24}\left(5^n - n4^n + 2(n^2 - n + 9)3^{n-1} - (n^3 - 3n^2 + 14n - 16)2^{n-1} + (n^4 - 6n^3 + 17n^2 - 20n + 9)\right)$。

(d) 一般而言，张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq p\sum_{k=1} k^n (k-1)!$。特别地，张量秩$(\det_{\mathbb{F}}^n) \in O(p^n)$。

5.1 永久张量的秩

Glynn 公式（3）表明，只要域的特征不为 2^{n-1}，永久张量的张量秩至多为2。当特征为2时，积和式张量与行列式张量相同，其秩目前已知的最佳上界为 $2^n - n$，如推论12所述（优于 Ryser 公式（ $2^n - 1$ ）得出的2）。下面的推论稍微阐明了在特征为 $2^n - 2$ 时，行列式和积和式的这一n项公式的形式。我们注意到，下面推论中的“”表示集合上的对称差运算，而$\ominus\text{per}_{\mathbb{F}}^n$ 指的是行列式张量$\text{per}_{\mathbb{F}}^n = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{e}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\sigma(n)}$:

推论 13. 设A 是一个$n \times n$ 矩阵，其元素属于特征为 2 的域 $\mathbb{F}$。那么

$$\text{per}(A) = \det(A) = \sum_{S \subseteq [n]} \left(\prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in S \ominus \{i\}} a_{i,j} \right). \tag{27}$$

特别地，每当S 是一个单元素集时，内层求和为空，因此 $\text{Trank}(\text{per}_{\mathbb{F}}^n) = \text{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \leq 2^n - n$。

上述推论可直接通过将 $p = 2$ 代入定理 10，并舍弃所有来自含有两个或更多部分的部分划分的项得到。仅含零个或一个部分的部分划分与 S 的子集 $[n]$, 构成双射，由此得到结果。

当 $n \leq 3$ 时，推论 13给出的公式与我们之前见过的与域无关的公式相同（忽略符号，因为 $-1 = 1$ 在特征 2下）。第一个非平凡情形出现在 $n = 4$ 时。此时，得到的公式有 12 项；它与方程（12）中展示的公式相同，但少了最后 3 项（即系数为 2的项）。

6 张量秩下界

到目前为止，我们介绍的所有结果都给出了张量秩(行列式$_{\mathbb{F}}^n$) 和 张量秩(永久式$_{\mathbb{F}}^n$) 的上界。另一方面，关于张量秩(行列式$_{\mathbb{F}}^n$) 和 张量秩(永久式$_{\mathbb{F}}^n$) 在 $n \geq 4$ 时的最佳已知下界由 Derksen 给出 [Der16], , 他证明了:

$$\text{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad \text{and} \quad \text{Trank}(\text{per}_{\mathbb{F}}^n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{28}$$

（他只针对 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 陈述了这些界，但他的证明适用于任意域。）[9]

已知的上界表明，这个关于积和式的下界至多只能提高 $\Theta(\sqrt{n})$ 倍，且这一结论适用于任意域。特别地，若 $\mathbb{F}$ 的特征不等于2，则由 Glynn 公式（3）可得

$$2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sim\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\leq \mathrm{Trank}(\mathrm{per}_{\mathbb{F}}^n)\leq 2^{n-1}.$$

同样，推论 13 告诉我们，若 $\mathbb{F}$ 的特征为 2，则有

$$2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sim\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\leq \mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)=\mathrm{Trank}(\mathrm{per}_{\mathbb{F}}^n)\leq 2^n-n.$$

不过，我们仍然可以做一些小幅改进。具体而言，我们对 Derksen的分析稍作细化，将这些下界提高 1：

定理 14. 设 $\mathbb{F}$ 为任意域。则 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)\geq\binom{n\lfloor n/2\rfloor}{}+1$，且 $\mathrm{Trank}(\mathrm{per}_{\mathbb{F}}^n)\geq\binom{n\lfloor n/2\rfloor}{}+1$。

证明。我们先回顾$(\mathbb{F}^n)^{\otimes s}$的反对称子空间 $\mathcal{A}$ 的定义：[10]

$$\mathcal{A}:=\mathrm{span}\left\{\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{e}_{i_{\sigma(1)}}\otimes\mathbf{e}_{i_{\sigma(2)}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_{\sigma(s)}}:1\leq i_1<i_2<\cdots<i_s\leq n\right\}. \tag{29}$$

我们只证明定理陈述中涉及 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)$的不等式；关于$\mathrm{Trank}(\mathrm{per}_{\mathbb{F}}^n)$ 的界可用类似方法证明，只需在整个证明中忽略符号，并从“反对称子空间” $\mathcal{A}$的定义（29）中省略 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ [11]

众所周知，对于 $\det_{\mathbb{F}}^n$ 的任意T 矩阵扁平化，都有 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)\geq\mathrm{rank}(T)$。我们选择$T$为通过将$(\mathbb{F}^n)^{\otimes n}$ 划分为$(\mathbb{F}^n)^{\otimes\lfloor n/2\rfloor}\otimes(\mathbb{F}^n)^{\otimes\lceil n/2\rceil}$而得到的扁平化，并将其视为一个$n^{\lfloor n/2\rfloor}\times n^{\lceil n/2\rceil}$ 矩阵。该矩阵T 的列张成了$(\mathbb{F}^n)^{\otimes\lfloor n/2\rfloor}$的反对称子空间 $\mathcal{A}$，其维数为$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$，因此

$$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}}^n)\geq\mathrm{rank}(T)=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}, \tag{30}$$

得到了 Derksen 的下界。

为证明不等式（30）实际上是严格的（从而完成证明），注意，对任意形如

$$\det_{\mathbb{F}}^n=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{v_{1,k}}\otimes\mathbf{v_{2,k}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v_{n,k}},$$

我们有

$$T=\sum_{k=1}^{r}\left(\mathbf{v_{1,k}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{\lfloor\mathbf{n/2}\rfloor,\mathbf{k}}\right)\left(\mathbf{v}_{\lfloor\mathbf{n/2}\rfloor+\mathbf{1,k}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v_{n,k}}\right)^T. \tag{31}$$

[9]当 $n\in\{5,7\}$ 属于 [KM21]时，存在一些更好的下界。[10]反对称子空间还有其他定义（例如参见 [Joh21, Section 3.1.3], ），这些定义在特征不等于 2 的域上等价；但在特征 2 下，本证明中选择这一种定义十分重要。[11]例如，如果 $n=s=2$，这意味着 $\mathcal{A}=$张成空间$\{\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e_2}+\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e_1}\}$；这并不意味着它是对称子空间（它不包含 $\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e_1}$ 或 $\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e_2}$）。

特别地，这意味着 T 的值域（即 $(\mathbb{F}^n)^{\otimes \lfloor n/2 \rfloor}$ 的反对称子空间）包含在由 r 个初等张量 $v_{1,k} \otimes \cdots \otimes v_{\lfloor n/2 \rfloor,k} (1 \le k \le r)$ 张成的空间中。如果 $r \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$（反对称子空间的维数），那么这意味着这些初等张量都属于反对称子空间，这与反对称子空间中不含非零初等张量这一事实矛盾。[12] 因此我们得出 $r > \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，从而完成证明。 □

6.1 有限域上的更好下界

当 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的域时，我们可以进一步改进定理 14 中的论证，从而得到 $\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}_q}^n)$ 更好的下界。具体而言，我们有如下结论：

定理 15. 设 $q \ge 2$ 是一个素数幂，设 $n \ge 5$，并设 x 是方程 $\log_q(x+1) = x - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的（唯一）正实数解。那么

$$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}_q}^n) \ge \lceil x \rceil.$$

特别地，$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}_q}^n) \ge \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \log_q\left(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$。

在证明这一点之前，我们先建立一个关于反对称子空间元素的张量秩的有用引理：[13]

引理 16. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，n、s 是正整数，且 T 是 $(\mathbb{F}^n)^{\otimes s}$ 的反对称子空间中的非零元素。那么 $\mathrm{Trank}(T) \ge s$。

证明。若 $s = 1$，结论显然成立，因为每个非零张量的张量秩都为正。下文假设 $s \ge 2$。

我们将张量 T 视为从 $(\mathbb{F}^n)^s$ 到 $\mathbb{F}$ 的多重线性形式。根据假设，它非零，因此必定存在向量 $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s} \in \mathbb{F}^n$，使得 $T(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s})$ 非零。将其中一个向量乘以适当的标量，不失一般性，可假设 $T(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s}) = 1$。

注意，$\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s}\}$ 必须线性无关。否则，我们可以将其中一个向量写成其他向量的线性组合；不失一般性，设这个向量是 $\mathbf{x_1}$。也就是说，$\mathbf{x_1} = \alpha_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_s \mathbf{x_s}$，于是由第一个变量上的线性性可得：

$$T(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_s}) = \sum_{i=2}^{s} \alpha_i T(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_s}).$$

由反对称性可知，右侧每一项都为零，而左侧等于 1，因此得到矛盾。因此可得，$\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s}\}$ 确实线性无关。

对于固定的 $1 \le i \le s$，我们定义余向量 $\mathbf{y_i} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$：将 T 的前 $s-1$ 个自变量与 $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_s}\} \setminus \{\mathbf{x_i}\}$ 中的元素进行缩并，并作适当的符号变换：

$$\mathbf{y_i}(\mathbf{v}) := (-1)^{s-i} T(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{x_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x_s}, \mathbf{v})$$

注意，T 的反对称性意味着：

$$\mathbf{y_i}(\mathbf{x_j}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j; \\ 0 & \text{if } i \ne j. \end{cases}$$

[12] 对于积和式的情形，我们可以看到 $\mathcal{A}$ 不含非零初等张量 $\mathbf{v} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}$ 注意到此类张量有一个非零的“对角线”元素（也就是说，存在某个 i 使得 $(\mathbf{e_i} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e_i})^*(\mathbf{v} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}) \ne 0$），但反对称子空间 $\mathcal{A}$ 中的每个元素的对角线元素全都等于 0。 [13] 参见脚注 10。

等价地，若考虑由$\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_s}$张成的$V$空间，则余向量$\mathbf{y_1},\ldots,\mathbf{y_s}$构成$V^*$的一个基，具体来说，它们是$\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_s}$的对偶基。

因此，通过展平T得到的矩阵$(\mathbb{F}^n)^{\otimes s} = (\mathbb{F}^n)^{\otimes(s-1)} \otimes (\mathbb{F}^n)$的张量秩至少为$s$，因此 $\mathrm{Trank}(T) \geq s$。 □

定理 *15* 的证明。我们在定理 14 的证明中证明了，如果 $1 \leq s \leq n$ 并且

$$\det^n_{\mathbb{F}_q} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{v_{1,k}} \otimes \mathbf{v_{2,k}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v_{n,k}}$$

那么 $(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes s}$ 的反对称子空间必须包含于以下 r 个初等张量 $\mathbf{v_{1,k}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v_{s,k}}\,(1 \leq k \leq r)$ 张成的空间中。我们将把这一事实用于 $s = \lceil n/2 \rceil$（在定理 14 的证明中，我们改为使用 $s = \lfloor n/2 \rfloor$）。

令 $P:\ (\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil} \to (\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}/\mathcal{A}$ 是到$(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}$内部反对称子空间之商空间上的投影$(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}$。如果$(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}$的反对称子空间包含于$r$个初等张量$\mathbf{v_{1,j}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v_{\lceil n/2 \rceil,j}}\,(1 \leq j \leq r)$张成的空间中，那么该集合的张成空间

$$B := \left\{ P(\mathbf{v_{1,j}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v_{\lceil n/2 \rceil,j}}) : 1 \leq j \leq r \right\} \tag{32}$$

维数至多为 $r - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。由于我们是在 $\mathbb{F}_q$ 上工作，因此至多有

$$q^{r-\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} - 1$$

B 中的非零向量。

接下来注意到，B 中恰有 r 个元素（即，当 $i \neq j$ 时，向量 $P(v1,_i \otimes \cdots \otimes v_{\lceil n/2 \rceil,i})$ 和 $P(v1,_j \otimes \cdots \otimes v_{\lceil n/2 \rceil,j})$ 互不相同）。为说明这一点，我们应用引理 16：给定 $(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}$ 的反对称子空间中的任意张量 T，有 $\mathrm{Trank}(T) \geq \lceil n/2 \rceil \geq 3$，这意味着 $P(v1,_i \otimes \cdots \otimes v_{\lceil n/2 \rceil,i} - v1,_j \otimes \cdots \otimes v_{\lceil n/2 \rceil,j}) = 0$ never occurs。

由此可知，集合 B 恰好包含 r 个非零向量，但其数量也不超过 $q^{r-\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} - 1$ 个非零向量，因此必有 $r \leq q^{r-\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} - 1$。重新整理可得 $\log_q(r+1) \leq r - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。由于函数

$$f(x) := \log_q(x+1) - x + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

在 $(0,\infty)$ 上单调递减，$f(1) > 0$，且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$，我们得出恰有一个正数 $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ 满足 $f(\tilde{x}) = 0$。使 $\log_q(r+1) \leq r - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 成立的最小整数 $r \geq 1$ 为 $r = \lceil \tilde{x} \rceil$。定理中的“特别地”这一陈述源于以下事实：当 $x = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \log_q\left(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$ 时，$f(x) > 0$。 □

当 $n = 4$ 时，如果我们采用定理 15 证明中的相同推理，就必须稍加谨慎，因为在这种情况下 $\lceil n/2 \rceil = 2$，所以 $(\mathbb{F}_q^n)^{\otimes \lceil n/2 \rceil}$ 中存在秩为 2 的反对称张量，导致方程（32）中的集合 B 所含元素少于 r 个。因此，我们得到的不是不等式 $r \leq q^{r-\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} - 1$，而是较弱的不等式 $r/2 \leq q^{r-\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} - 1$，由此得到界

$$\mathrm{Trank}(\det^4_{\mathbb{F}_q}) \geq \begin{cases} 9 & \text{if } q = 2; \\ 8 & \text{if } q \in \{3,4\}; \\ 7 & \text{if } q \geq 5 \text{ is any other prime power.} \end{cases} \tag{33}$$

实际上，我们可以在 $n = 4$、$q = 2$ 情形下证明一个强得多的下界，与我们在定理 10 中得到的上界相匹配。具体而言，我们有如下定理，其证明借助计算机辅助完成，并将在下一个小节中介绍：

定理 17。在二元域上，4×4 阶矩阵的行列式和永久式的张量秩恰好为 12：

$$\mathrm{Trank}(\det_{\mathbb{F}_2}^4) = \mathrm{Trank}(\mathrm{per}_{\mathbb{F}_2}^4) = 12.$$

6.2 证明 $\det_4^{\mathbb{F}_2}$ 的张量秩为 12

定理 10 中的公式表明张量秩至多为 12，而我们已经证明其下界为 9。因此，只需证明行列式张量不可能表示为 $r \in \{9, 10, 11\}$ 个秩一张量之和。

反设不然。考虑展平 $(\mathbb{F}_2^4)^{\otimes 4} = (\mathbb{F}_2^4)^{\otimes 2} \otimes (\mathbb{F}_2^4)^{\otimes 2}$，可得

$$\det_4^{\mathbb{F}_2} = \sum_{i=1}^{r} A_i \otimes B_i$$

其中，每个 A_i 和 B_i 都是一个 4×4 秩一矩阵。回想一下，$\{A_i : 1 \le i \le r\}$ 的张成空间必须包含 $(\mathbb{F}_2^4)^{\otimes 2}$ 的（6 维）反对称子空间。

不失一般性，我们可以假设 $A_1 \le A_2 \le \cdots \le A_r$，其中 $\le$ 表示 $\mathbb{F}_2$ 上的 4×4 矩阵空间上的字典序。此外，给定 $\det_4^{\mathbb{F}_2}$ 的任意此类张量分解以及一个可逆矩阵 L，注意到行列式在 L 所指定的基变换下不变，因此我们也有

$$\det_4^{\mathbb{F}_2} = \sum_{i=1}^{r} LA_iL^T \otimes LB_iL^T.$$

通过应用适当的基变换 L，不失一般性地假设至少有一个矩阵——必然是字典序中最靠前的矩阵，因此根据定义为 A_1 ——在矩阵的最后一个或倒数第二个位置上有一个 1，其余位置均为 0：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们执行了回溯搜索[14]，以寻找满足这些约束的候选 r 元组 $(A_1, \ldots, A_r)$，其中各矩阵均为秩 1 矩阵。如果 6 维反对称子空间与初始片段 $(A_1, \ldots, A_s)$ 的张成空间的交集的秩小于 $6 - r + s$，那么 $(A_1, \ldots, A_r)$ 的张成空间就不可能包含该反对称子空间，因此我们可以剪去搜索树中的整个分支。

规模最大的搜索（$r = 11$）消耗了 357 核心小时的 CPU 时间；在 AWS r5a.24xlarge 实例上并行运行时，实际运行时间为 4 小时。总 CPU 时间会随着 r 的增大而迅速增长：

r	CPU 时间
9	7秒
10	22分钟
11	357小时

[14]源代码可在此处获取：https://gitlab.com/apgoucher/det4f2

结果表明，当$r \geq 9$时，确实存在一些由A_1、……、A_r构成的r元组秩 1 矩阵，其线性张成包含反对称子空间，因此还需要额外的方法来排除这些候选项。

引理 18. 假设 $\det_4^{\mathbb{F}_2} = \sum_{i=1}^r A_i \otimes B_i$ 且 r 是最小的。设$\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^4$ 是一对（不一定互异的）非零向量。那么指标集合 $\{i : \mathbf{u}^T A_i \mathbf{v} = 1\}$ 的大小不等于 1。

证明。反设存在唯一一个指标i 使得$\mathbf{u}^T A_i \mathbf{v} = 1$.

如果在第一个张量因子上用$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$对方程 $\det_4^{\mathbb{F}_2} = \sum_{i=1}^r A_i \otimes B_i$ 两边进行缩并，除求和中的i项外，其余各项都会消失，于是得到（用指标记号表示）

$$u^j v^k \det_4^{j,k,\ell,m} = (B_i)^{\ell,m}.$$

如果$\mathbf{u} = \mathbf{v}$，那么左边是全零矩阵，因此B_i也如此。但这意味着我们得到一个秩为$r - 1$的张量分解，与最小性矛盾。否则，$\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$，我们可以进行适当的基变换，使得不失一般性地，$\mathbf{u} = \mathbf{e_1}$ 且$\mathbf{v} = \mathbf{e_2}$。于是方程左边是秩 2 矩阵$\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e_4} + \mathbf{e_4} \otimes \mathbf{e_3},$，但右边的秩为 1，再次得到矛盾。

□

该引理排除了所有候选 9 元组和 10 元组，从而确立了 11 的张量秩下界；除基变换以及对矩阵 A_i 转置外，只剩下一个候选 11 元组：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&1&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 1&0&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0 \end{bmatrix}, A_{10} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, \text{ and } A_{11} = \begin{bmatrix} 1&1&\mathbf{1}&0\\1&1&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

在这个集合中，只有矩阵 A_8 和 A_{11} 的 (1, 3) 项非零；只有矩阵 A_5 和 A_{11} 的 (2, 3) 项非零。将方程 $\det_4^{\mathbb{F}_2} = \sum_{i=1}^r A_i \otimes B_i$ 两边与 $e_1 \otimes e_3$，缩并，可得 $B_8 + B_{11} = e_2 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_2$。类似地，将该方程两边与 $e_2 \otimes e_3$，缩并，可得 $B_5 + B_{11} = e_1 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_1$。

将这些秩 2 矩阵分别写成两个秩 1 矩阵之和，只有 6 种不同的方式。特别地，我们必须有

$$B_8, B_{11} \in \{\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e_4}, \mathbf{e_4} \otimes \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} \otimes (\mathbf{e_2} + \mathbf{e_4}), (\mathbf{e_2} + \mathbf{e_4}) \otimes \mathbf{e_2}, (\mathbf{e_2} + \mathbf{e_4}) \otimes \mathbf{e_4}, \mathbf{e_4} \otimes (\mathbf{e_2} + \mathbf{e_4})\}$$

and

$$B_5, B_{11} \in \{\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_4}, \mathbf{e_4} \otimes \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \otimes (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_4}), (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_4}) \otimes \mathbf{e_1}, (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_4}) \otimes \mathbf{e_4}, \mathbf{e_4} \otimes (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_4})\}.$$

注意到这两个集合不相交，因此 B_{11} 不可能同时属于这两个集合。这一矛盾排除了 $r = 11$的这一个候选解，从而完成了定理 17的证明。

致谢。 感谢 Dan Piker 在 Twitter 上进行的多次交流，以及提供的精美图示，其中一幅促使第一作者踏上了最终写成本文的道路。感谢 Zach Teitler 澄清了第 12 [节中关于华林秩22]的一些事实。N.J. 获得了 NSERC 探索基金 RGPIN-2022-04098 的资助。也感谢一位匿名审稿人提出的诸多有益修正和建议。

参考文献

[BR91] R. A. Brualdi 和 H. J. Ryser。《组合矩阵理论》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，1991 年。[BT10] D. Berend 和 T. Tassa。关于贝尔数及随机变量和的矩的改进界。《概率与数理统计》，30(2):185–205，2010 年。[CS88] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane。球堆积、格与群。数学科学基础丛书，290，1988 年。[Der16] H. Derksen。关于张量的核范数与奇异值分解。《计算数学基础》，16:779–811，2016 年。[Deu06] E. Deutsch。《在线整数数列百科全书》中的数列 A124324。https://oeis.org/A124324，2006 年。按行读取的三角形：T(n, k) 表示一个 n 元集合的划分中，大小为 $> 1 (0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor)$ 的块的数量。 [在线；访问于 12 月 9, 2022]。[Gly10] D. G. Glynn。方阵的积和式。《欧洲组合学杂志》，31(7):1887–1891，2010 年。[IT16] N. Ilten 和 Z. Teitler。行列式与积和式的乘积秩。《加拿大数学通报》，59(2):311–319，2016 年。[Joh21] N. Johnston。《高等线性代数与矩阵代数》。施普林格国际出版公司，2021 年。[JT22] G. Johns 和 Z. Teitler。行列式华林秩的改进上界。《交换代数杂志》，14(3):415–425，2022 年。[KM21] S. Krishna 和 V. Makam。关于积和式与行列式的张量秩。《电子线性代数杂志》，37:425–433，2021 年。[Lan12] J. M. Landsberg。《张量：几何与应用》。数学研究生教材。美国数学学会，2012 年。[NRB20] O. Nabawanda、F. Rakotondrajao 和 A. S. Bamunoba。扁平划分上的游程分布。《整数数列杂志》，23:20.9.6，2020 年。[Rot01] G. Rote。行列式与帕菲安的无除法算法：代数与组合方法，第 119–135 页。施普林格柏林海德堡，2001 年。[RS11] K. Ranestad 和 F.-O. Schreyer。关于对称形式的秩。《代数杂志》，346(1):340–342，2011 年。

[SKS96] N. J. A. Sloane、D. Knuth 和 N. Singer。《在线整数数列百科全书》中的数列 A000629在线整数数列百科全书。https://oeis.org/A000629，1996 年。由 $n+1$ 个带标签的珠子组成的划分项链数。 [在线；访问于 12 月 20, 2022]。[Ste90] S. Stein。缺角立方体铺砌 $\mathbb{R}^n$。离散数学，80(3):335–337，1990 年。[Tei22] Z. Teitler。单项式的华林秩及其对基域的依赖。MathOverflow，2022 年。网址：https://mathoverflow.net/q/434935。