arXiv:2301.06589v1 [math.FA] 16 Jan 2023

度量空间的塑性对

V. Kadets 和 O. Zavarzina

Abstract. 我们研究具有如下性质的度量空间对（X，Y）：对于每个映射 $f\colon X \to Y$ 若存在点 x，$y \in X$ 满足 $d(f(x)\ f(y)) > d(x,\ y)$，则必存在 $\widetilde{x}$，$\widetilde{y} \in X$ 使得 $d(f(\widetilde{x})\ f(\widetilde{y})) < d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$。我们给出了这一性质及其一致版本的充分条件，这些条件以有限 ε-网和有限 ε-分离子集来表述。

1. 引言

定义 1.1. 若度量空间 X 上的每个非收缩双射从 X 到其自身都是等距映射，则称该空间为扩张-收缩塑性（或简称 EC-塑性空间）。

这一性质最初在 [5] 中提出并得到深入研究。该研究的出发点是这样一个事实：每个全有界度量空间都是 EC-塑性空间 [3]。实际上，全有界空间具有更强的性质 [5, 定理 1.1]或 [3, 命题 IV]„ 为方便起见，我们将在以下定义中将其形式化。

定义 1.2. 如果一个度量空间 X 满足以下条件，则称其为强塑性：对任意映射 $f\colon X \to X$，若存在点 $x, y \in X$ 满足$d(f(x)\ f(y)) > d(x, y)$，则存在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in X$ 使得$d(f(\widetilde{x})\ f(\widetilde{y})) < d(\widetilde{x}, \widetilde{y})$。

换言之，X 是强塑性的，当且仅当每个非压缩映射 $f\colon X \to X$ 都是等距嵌入（不一定是双射）。

还有其他 EC-塑性空间的例子，特别是每个严格凸巴拿赫空间的闭单位球 B_X 都是 EC-塑性的 [2, 定理 2.6]。所有巴拿赫空间的单位球是否都具有 EC-塑性，仍是一个未解决的问题。

2020 数学主题分类。47H094；54E40；46B04。关键词和短语。扩张-收缩塑性度量空间；非压缩映射；等距映射；全有界度量空间；单位球。项目初期，作者获得乌克兰国家研究基金会资助，该基金会经乌克兰国家预算拨款，资助项目为 2020.02/0096“ 无限维空间中的算子：几何、代数与拓扑之间的相互作用 ”。第一作者获得魏茨曼科学研究所（以色列）的紧急计划资助，该计划面向受乌克兰战争影响的科学家。

例 1.3. 希尔伯特空间 ℓ_2 的单位球 B_{ℓ_2} 不是强塑性的。因此，这是一个具有 *EC*-塑性但不具强塑性的自然例子。

证明。 事实上，对每个 $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots)\in B_{\ell_2}$，记

$$f(x)=\left(\sqrt{1-\|x\|^2},x_1,x_2,\ldots\right).$$

这定义了一个非收缩映射 $f\colon\ B_{\ell_2}\to B_{\ell_2}$，它不是等距映射，因为对于 $x=(0,\ 0,\ \ldots)$ 和 $y=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$，我们有

$$\|f(x)-f(y)\|=\sqrt{2}>1=\|x-y\|.\quad\square$$

下一个定义的提出受到了 [6, 7]的启发。

定义 1.4。 若度量空间 X 满足以下条件，则称其为一致强塑性 （一致 *EC*-塑性）：对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对每个 $f\colon X\to X$（分别地，对每个双射 $f\colon X\to X$），若存在 $x,\ y\in X$，使得 $d(f(x),\ f(y))>d(x,\ y)+\varepsilon$，则存在 $\widetilde{x},\ \widetilde{y}\in X$，使得 $d(f(\widetilde{x}),\ f(\widetilde{y}))<d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})-\delta$。

[7], 中由同一作者此前证明的主要结果，在 [6, Satz 1] 中加入 $f(X)$ 稠密这一额外假设后指出，每个全有界度量空间 X 都是一致强塑性的。此外，对 δ 的估计仅依赖于 X 中 ε-网的元素个数的最小值 $n(\varepsilon)$。具体而言，Nitka 证明了

$$\delta=\frac{2\varepsilon}{11\left(n(\frac{\varepsilon}{11})\left(n(\frac{\varepsilon}{11})-1\right)+2\right)}\tag{1.1}$$

可以使用。

本文主要致力于研究两个不同度量空间之间的映射的类似问题。

定义 1.5. 若一对度量空间 (X,Y) 满足：从 X 到 Y 的每个非收缩双射（映射）都是等距映射（分别为等距嵌入），则称其为*EC*-塑性（强塑性）。

不同巴拿赫空间的单位球对的 EC-塑性已在 [8] 中得到研究，并在 [1] 中进一步发展。特别是，已知要使一对单位球具有 EC-塑性，只需假设相应空间之一具有严格凸性。

上述性质的一致版本可以按如下方式表述。

定义 1.6. 设 (X,Y) 是一对度量空间。对于每个 $\varepsilon>0$，记 $\delta_{X,Y}(\varepsilon)$ 为满足以下条件的 $\delta\geqslant 0$ 的上确界：对于任意双射$f\colon\ X\to Y$，若存在 $x,\ y\in X$ 使得 $d(f(x),\ f(y))>d(x,y)+\varepsilon$，则存在 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in X$ 使得 $d(f(\widetilde{x}),\ f(\widetilde{y}))<d(\widetilde{x},\widetilde{y})-\delta$。函数$\varepsilon\mapsto\delta_{X,Y}(\varepsilon)$ 称为这对 (X,Y) 的可塑性模量。

若对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $\delta_{X,Y}(\varepsilon) > 0$，则称这对 (X, Y) 为 一致 *EC*-塑性 。

类似地，只需将“ 双射”一词替换为“映射”，我们便定义强塑性模量 $\delta^s_{X,Y}(\varepsilon)$，并称$(X, Y)$为一致强塑性，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，都有$\delta^s_{X,Y}(\varepsilon) > 0$。

我们的目标是证明：若 Y 的“大小”不大于 X 的“大小”，且这些空间全有界，那么根据上述“大小”一词的含义，数对(X, Y)是塑性的或强塑性的。我们也关注这类结果的一致版本及相应的定量估计。

注：对于 $X = Y$从[3, 6, 7] 和 [5] 出发的情形，此前已知的方法采用由以下对象生成的动力系统： $f: X \to X$（迭代序列 f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ...），但这对 $f: X \to Y$ 并无意义。因此，为了实现我们的目标，我们将采用另一种论证方法。

本文结构如下。首先，在第 2节中，我们考察由有限个点组成的度量空间。通过这个例子，我们阐释一个非常简单的思路，稍作修改后，其变体将在后续更复杂的情形中发挥作用。当 $X = Y$ 为有限集时，我们给出最优定量估计。此外，我们还给出一个具有塑性但不具有一致塑性的度量空间的例子。随后，在第 3节中，我们考察由全有界空间构成的无限空间对的一般情形。

设 X 为一个度量空间， $A \subset X$ 为一个非空子集。下文用记号 $|A|$ 表示 A 的元素个数（该个数可能有限，也可能等于 $+\infty$），diam(A)表示 A的直径

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

回忆一下，度量空间 X 的子集 A 称为一个 ε-网，如果对每个 $x \in X$，都存在 $a \in A$ 使得 $d(x, a) < \varepsilon$。如果对每个 $\varepsilon > 0$，该空间都存在一个有限的 ε-网，则称该度量空间为全有界（或预紧）。

2. Plasticity in finite metric spaces

本节讨论有限度量空间。如果 $|X| > |Y|$，那么每个 $f: X \to Y$ 都不是单射，这意味着 (X, Y) 具有强塑性（也具有 EC- 塑性）。

在 $|X| = |Y| < \infty$ 的情形下，EC-塑性与强塑性相同。事实上，设 (X, Y) 是 EC-塑性的，且 $f: X \to Y$是一个使某两点之间的距离增大的映射。若f 是双射，则 EC-塑性意味着 f 会使另外某两点之间的距离减小（因为 F 不是等距映射，因此根据 EC-塑性，它不可能是非压缩的）。若 f 不是双射，则条件 $|X| = |Y| < \infty$ 意味着 f 不是单射，因此同样有 f 会使另外某两点之间的距离减小。

最后，若 $N = |X| < |Y| < \infty$，则 (X, Y) 的强塑性等价于以下性质：对于每个满足 $|Y| = N$ 的度量子空间 $E \subset Y$，对 (X, E) 而言，它是 EC-塑性的。

以上解释了为什么本节暂时不讨论强塑性，而将重点放在 EC-塑性上。此外，对于基数不同的有限空间 X，Y $|X| \neq |Y|$，X 与 Y 之间不存在双射，因此配对 $(X,\ Y)$ 显然具有 EC-塑性。因此，本节接下来要讨论的有趣情形是 $|X| = |Y| = N$，其中 N 是一个自然数。

2.1. **有限情形下的 EC-塑性**。

我们先来看一个简单却颇有启发性的注。对于有限度量空间 A，考虑以下量

$$\sigma(A) = \sum_{a,b \in A} d(a, b). \tag{2.1}$$

定理 2.1. 设 X、Y 为有限度量空间，满足 $|X| = |Y| = N \in \mathbb{N}$ 且 $\sigma(Y) \leqslant \sigma(X)$，则配对 $(X$、$Y)$ 具有 *EC*-塑性。此外，$(X$、$Y)$ 具有一致塑性，其中 $\delta_{X,\ Y}(\varepsilon) \geqslant \varepsilon \left(\binom{N(N-1)}{2} - 1 \right)^{-1}$ 对所有 $\varepsilon > 0$ 均成立。

证明。令 $f\colon X \to Y$ 为一个双射。固定 $\varepsilon > 0$ 并假设存在 $x, y \in X$，使得

$$d(f(x), f(y)) > d(x, y) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

记 $\varepsilon \left(\binom{N(N-1)}{2} - 1 \right)^{-1}$ 为 δ。我们的目标是证明存在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Y$，使得 $d(f(\widetilde{x})\ f(\widetilde{y})) < d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \delta$。反设

$$d(f(a), f(b)) \geqslant d(a, b) - \delta \tag{2.3}$$

对所有 $a, b \in X$ 均成立。于是，结合 f 的双射性以及条件（2.2）和（2.3），可推得

$$\begin{aligned}
\sigma(Y) &= \sum_{a,b \in X} d(f(a), f(b)) = d(f(x), f(y)) + \sum_{(a,b) \in X \times X \setminus \{(x,y)\}} d(f(a), f(b)) \\
&> d(x, y) + \varepsilon + \sum_{(a,b) \in X \times X \setminus \{(x,y)\}} (d(a, b) - \delta) \\
&= \sum_{a,b \in X} d(a, b) + \varepsilon - \left(\frac{N(N-1)}{2} - 1 \right) \delta = \sigma(X),
\end{aligned}$$

这就得到了所需的矛盾。 □

为了推广上述论证，我们再引入一个定义。

定义 2.2. 用 $\mathcal{M}_N$ 表示所有 N-点度量空间的集合。对于 $X, Y \in \mathcal{M}_N$，若映射 $f\colon X \to Y$不具有收缩性，且对某一对 $a, b \in X$ 严格增大了距离：$d(f(a)\ f(b)) > d(a, b)$，则称其为扩张。若函数 $\psi\colon \mathcal{M}_N \to [0, +\infty)$ 对每个满足存在扩张 $f\colon X \to Y$ 的 $X, Y \in \mathcal{M}_N$，都有 $\psi(Y) > \psi(X)$，则称其为适当测度。

根据这个定义，定理2.1 可以推广如下：

命题 2.3. 若 $\psi\colon \mathcal{M}_N \to [0, +\infty)$ 是一个适当测度，则每一对 X, $Y \in \mathcal{M}_N$ 满足 $\psi(Y) \leqslant \psi(X)$ 都是 *EC*-塑性的。

按照定理2.1的证明，可以很容易看出，由 (σ 定义的量2.1) 是一个适当测度。还有许多与 σ非常相似的适当测度。具体而言，固定一个严格递增函数 $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 满足 $g(0) = 0$，并对每个 $A \in \mathcal{M}_N$

$$\sigma_g(A) = \sum_{a,b \in A} g(d(a, b)), \tag{2.4}$$

便可定义一个适当测度。

若能明确描述所有适当测度，将会很有意义。此外，下面的问题也很有意思。

问题 2.4。 对于每一对 EC-塑性对 X，$Y \in \mathcal{M}_N$是否都存在一个适当测度 $\psi\colon \mathcal{M}_N \to [0, +\infty)$，使得 $\psi(Y) \leqslant \psi(X)$?

注。 如果一对 EC-塑性对 X，$Y \in \mathcal{M}_N$ 存在一个非压缩的双射 $f\colon X \to Y$，那么可以选择 $\psi(X) := \sigma(X)$。事实上，

$$\psi(Y) = \sum_{a,b \in Y} d(a, b) = \sum_{x,y \in X} d(f(x), f(y)) = \sum_{x,y \in X} d(x, y) = \psi(X),$$

因为 f 是一个等距映射。因此，实际上，问题 2.4 仅在平凡 EC-可塑对 X，$Y \in \mathcal{M}_N$ 不存在非压缩的双射 $f\colon X \to Y$ 的情况下仍未解决。

2.2. $X = Y$ 的有限情形下一致可塑性。

本小节旨在给出引言中所承诺的、通过度量空间的元素个数来估计有限度量空间可塑性模量的最优估计。我们现在考虑的 $X = Y$ 情形允许对映射 f 进行迭代：$X \to Y$并考察元素所对应的轨道，从而得出比定理2.1更好的估计。

对每个 $N \in \mathbb{N}$，将 $M(N)$ 记为下列量：

$$M(N) = \begin{cases} k(k+1), & \text{if } N = 2k+1,\ k \in \{2,3,4,\ldots\} \\ (2k-1)(2k+1), & \text{if } N = 4k,\ k \in \{2,3,4,\ldots\} \\ (2k-1)(2k+3), & \text{if } N = 4k+2,\ k \in \{2,3,4,\ldots\} \\ N, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 2.5. $M(N)$ =最大值{最大值$_{l+m\leqslant N}\, LCM(l,m)$ $N\}$，其中 *LCM* 是两个自然数的最小公倍数的缩写。

证明。我们先比较不同N时的 N和 $\max_{l+m\leqslant N} LCM(l,m)$。众所周知，函数 $g(n) = n(N-n)$ 在 $n = N/2$ 时达到最大值。由于我们只关注自然 n，且 $LCM(n, N-n) = {}^{n}_{(N-n)GCD(n,N-n)}$，其中 GCD 是最大公约数的缩写，因此我们有

$$LCM(n, N-n) = \begin{cases} k(k+1), & \text{if } N = 2k+1 \\ (2k-1)(2k+1), & \text{if } N = 4k \\ (2k-1)(2k+3), & \text{if } N = 4k+2. \end{cases}$$

利用这一表示，还可以观察到 $LCM(n, N-n) \geqslant LCM(n, N-1-n)$，除非 $N = 6$。于是

$$\max_{l+m\leqslant N} LCM(l,m) = \begin{cases} k(k+1), & \text{if } N = 2k+1 \\ (2k-1)(2k+1), & \text{if } N = 4k \\ (2k-1)(2k+3), & \text{if } N = 4k+2 \\ 6, & \text{if } N = 6. \end{cases}$$

容易看出，$\max_{l+m\leqslant N} LCM(l,m) > N$，除非 $N = 3$、$N = 4$ 或 $N = 6$。因此，实际上，$\max\{\max_{l+m\leqslant N} LCM(l,m)\ N\} = M(N)$。□

定理 2.6. 设 X 是一个度量空间，且满足 $|X| \leqslant N \in \mathbb{N}$。那么$\delta_{X,}$ $_{X}(\varepsilon) \geqslant {}^{\varepsilon}_{M\ N()-1}$对所有 $\varepsilon > 0$ 均成立。

证明。固定 $\varepsilon > 0$ 和一个双射 $f\colon X \to X$。假设存在 $x,$ $y \in X$，使得 $d(f(x)\ f(y)) > d(x,y) + \varepsilon$。我们的目标是证明存在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in X$，使得 $d(f(\widetilde{x})\ f(\widetilde{y})) < d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - {}^{\varepsilon}_{M\ N()-1}$。

考虑元素 x 和 y 在 f 作用下的轨道 $O(x)$ 和 $O(y)$，并用 D 表示满足以下条件的最小 k：$f^k(x) = x$且 $f^k(y) = y$。若 $O(x) \neq O(y)$，则可得出结论：$D = LCM(i,j) \leqslant \max_{l+m\leqslant N} LCM(l,m)$，其中 i和 j分别表示 $O(x)$ 和 $O(y)$ 中元素的个数。若 $O(x) = O(y)$，即 $y \in O(x)$，反之亦然，则 $D \leqslant N$。现在可得出 $D \leqslant M(N)$，并用反证法。假设对每个 $a, b \in X$

$$d(f(a), f(b)) \geqslant d(a,b) - \frac{\varepsilon}{M(N)-1}.$$

特别是，这个不等式意味着对每个 $k \in \mathbb{N}$

$$d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)) \geqslant d(f^k(x), f^k(y)) - \frac{\varepsilon}{M(N)-1}$$

$$\geqslant d(f^k(x), f^k(y)) - \frac{\varepsilon}{D-1}. \tag{2.5}$$

迭代（2.5），得到

$$d(f^D(x), f^D(y)) \geqslant d(f(x), f(y)) - (D-1)\frac{\varepsilon}{D-1} = d(f(x), f(y)) - \varepsilon,$$

这与条件 $d(f(x)\ f(y)) > d(x,\ y) + \varepsilon$结合起来，推出

$$d(x,y) = d(f^D(x), f^D(y)) > d(x,y).$$

因此，我们得到了所需的矛盾。 □

定理 2.7。 前一定理中的估计无法改进。

证明。由于估计依赖于 N 和 ε，证明我们结论的例子也将依赖于 N 和 ε。

情形 1. $N \neq 3$，4，6. 现在引入

$$i = \begin{cases} k, & \text{if } N = 2k+1 \\ 2k-1, & \text{if } N = 4k \\ 2k-1, & \text{if } N = 4k+2. \end{cases}$$

and

$$j = \begin{cases} k+1, & \text{if } N = 2k+1 \\ 2k+1, & \text{if } N = 4k \\ 2k+3, & \text{if } N = 4k+2. \end{cases}$$

取一个集合 $X = \{x_1, ...x_i, y_1, ..., y_j\}$，并在其上定义函数 f如下

$$f(x) = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{if } x = x_k, 1 \leqslant k < i \\ x_1, & \text{if } x = x_i \\ y_{k+1}, & \text{if } x = y_k, 1 \leqslant k < j \\ y_1, & \text{if } x = y_j, \end{cases}$$

也就是说，$\{x_1, ...x_i\}$ 是 f作用下 x_1的轨道，$\{y_1, ..., y_j\}$ 是 f作用下 y_1 的轨道，并且 $M(N) = ij$。现在，我们按以下规则在X 上引入距离：

$$d(x,y) = \begin{cases} a, & \text{if } x = x_1, y = y_1 \\ a+\varepsilon, & \text{if } x = f(x_1), y = f(y_1) \\ d(f^{k-1}(x_1), f^{k-1}(y_1)) - \frac{\varepsilon}{M(N)-1}, & \text{if } x = f^k(x_1) \text{ and} \\ & y = f^k(y_1), 2 \leqslant k < ij \\ a, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中， $a \in \mathbb{R}$、 $a \geqslant \varepsilon$ 是一个固定数。根据这一定义，所有两两距离都属于区间 $[a, a+\varepsilon] \subset [a, 2a]$，这保证了三角不等式成立。

对于我们的度量空间 (X, d)，其中有 $|X| \leqslant N$，函数 f 的估计是准确的：f 在 ε 上增大了 x_1 与 y_1 之间的距离，但不会使 $M \overset{\varepsilon}{N}()-1$ 上任何距离的减小幅度超过……。

为了得到一个具有 $|X| = N$ 的例子，可以在上面构造的空间中人为添加 $N - ij$ 个 f 的不动点 $\{v_1, \dots v_{N-ij}\}$，并将缺失的距离 $d(x, y)$ 定义为 $2a$，条件是点 x，y 中至少有一个属于 $\{v_1, \dots v_{N-ij}\}$。

对于 $N = 3$，4，6，取集合 $Z = \{z_1, ..., z_N\}$，并在其上定义如下循环函数 g：

$$g(x) = \begin{cases} z_{k+1}, & \text{if } x = z_k, 1 \leqslant k < N \\ z_1, & \text{if } x = z_N. \end{cases}$$

这种情况下对应的度量为

$$p(x,y) = \begin{cases} a, & \text{if } x = z_1, y = g(z_1) \\ a+\varepsilon, & \text{if } x = g(z_1), y = g^2(z_1) \\ d(g^{k-1}(x_1), g^{k-1}(y_1)) - \frac{\varepsilon}{M(N)-1}, & \text{if } x = g^k(z_1) \text{ and} \\ & y = g^{k+1}(z_1), 2 \leqslant k < N \\ a, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

与之前一样， $a \geqslant \varepsilon$ 以确保三角不等式。对于度量空间 (X, p) 和映射 g，该估计是准确的。□

2.3.一个应用：EC-塑性并不意味着一致可塑性。

本小节旨在构造一个强塑性（因而也是 EC-塑性）的无限度量空间 X，它并非一致塑性。构造思路是将有限多个部分 X_n 拼接起来，其中每个部分都是一致塑性的，但它们在某个固定的 $\varepsilon > 0$ 处的一致可塑性模量会随着 n 趋于无穷而趋于零。

因此，固定 $\varepsilon_0 = 1$，并取一个 $\delta_n > 0$ 的趋零数列。考虑 $a_n = 1 + \frac{1}{10n}$， $n = 1, 2, \dots$。于是 $a_n \geqslant \varepsilon_0$，因此，根据定理 2.7 中的构造，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以（并且确实会）找到一个有限度量空间 X_n 和一个映射 $f_n: X_n \to X_n$，满足以下性质。

(1) $d(x, y) \in [a_n, a_n + 1]$ 对所有 x， $y \in X_n$ 均成立。(2) $d(f_n(x) f_n(y)) \geqslant d(x, y) - \delta_n$ 对所有 x， $y \in X_n$ 均成立。(3) 存在一对 x_n， $y_n \in X_n$，满足 $d(f_n(x_n) f_n(y_n)) = d(x, y) + 1$。

不失一般性，我们还可以假设存在 $e_n \in X_n$，使得对所有 $x \in X_n \setminus \{e_n\}$， $d(x, e_n) = a_n + 1$。这可以通过向 X_n 添加一个新点 e_n来实现，并将它到

旧点的距离定义为 $d(x, e_n) = a_n + 1$，然后按平凡规则 $f_n(e_n) = e_n$将 f_n扩展到这个更大的新空间。

此外，不失一般性，我们假设集合 X_n 两两不相交（否则，用适当的等距副本替换 X_n ）。

我们将所需的度量空间 X 定义为配备以下度量的 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$：在每个 X_n 上，度量继承自 X_n；对于满足 $n \neq m$ 的 $x \in X_n$、 $y \in X_m$，我们直接令 $d(x, y) = \frac{3}{2}$。接下来只需证明(A) X 不是一致塑性，但(B)它是强塑性。

(A). 对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $g_n : X \to X$ 如下：当 $x \in X_n$ 时， $g_n(x) = f_n(x)$；当 $x \in X \setminus X_n$ 时， $g_n(x) = x$。根据此定义，对于所有 x、$y \in X_n$，都有 $d(g_n(x) g_n(y)) \geqslant d(x, y) - \delta_n$；但存在一对 x_n、$y_n \in X_n$，使得 $d(g_n(x_n) g_n(y_n)) = d(x, y) + 1$。这表明，对于每个 $\varepsilon \in \in (0, 1)$, δ_X、 X (ε) $\leqslant \delta_n \longrightarrow 0$，因此 δ_X、 X (ε) $= 0$。

(B)。设 $f : X \to X$ 是一个非压缩映射。注意，当且仅当 $a, b \in X$ 都属于 X_1 时，$d(f(x) f(e_1)) \geqslant d(x, e_1) = a_1 + 1$ 对所有 $x \in X_1 \setminus \{e_1\}$ 都成立；但只要 $a, b \in X$ 中至少有一个不属于 X_1，就有 $d(a, b) < a_1 + 1$。这意味着 $f(X_1) \subset X_1$。由 f 的单射性及 X_1 的有限性可知， $f(X_1) = X_1$，且 f 在 X_1 上的限制是一个等距映射。

取补集可得 $f(\bigcup_{n=2}^{\infty} X_n) \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} X_n$；重复同样的论证，可得 $f(X_2) = X_2$，且 f 在 X_2 上的限制是一个等距映射。以类似的方式继续推理，我们证明了 f 是一个双射等距映射。

上面的例子是人为构造的。令人感兴趣的是，自然的 EC-塑性空间中是否也存在类似的例子。例如：

问题 2.8. 众所周知，希尔伯特空间 B_{ℓ_2} 的单位球ℓ_2 是 EC-塑性的，但不是强塑性的（见引言中的例子1.3）。 B_{ℓ_2} 是否具有一致塑性？是否存在 ℓ_2中的一致塑性非紧椭球？（参见 [9] 相关问题）。

3. Plasticity and uniform plasticity for pairs of totally bounded spaces

本节使用的主要技术工具，是用有限子集逼近全有界度量空间 X 。

3.1. 全有界空间对的可塑性。

我们使用以下记号

$$\alpha(X, \varepsilon) = \inf\{\sigma(A), \text{ where } A \text{ is } \varepsilon\text{-net in } X\},$$

其中 $\sigma(A)$，如同在 (2.1) 中，表示元素之间两两距离的总和。

在本小节中，我们给出以下一个可能结果的模型示例。

定理 3.1。 设 X, Y 是全有界度量空间，满足 $\alpha(X,\varepsilon) \leqslant \alpha(Y,\varepsilon)$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $f\colon X \to Y$ 都是非扩张满射。那么 f 是等距映射。特别地，数对 (Y, X) 是 *EC*-塑性。

证明。 我们用反证法。假设 f 不是等距映射。那么存在 $x_1, x_2 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2) - \varepsilon. \tag{3.1}$$

还存在有限的 $\frac{\varepsilon}{6}$-网，使得 X

$$\sigma(A) < \alpha(X, \frac{\varepsilon}{6}) + \frac{\varepsilon}{6}.$$

由于 f 是满射，对任意 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。存在 $a \in A$ 使得 $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{6}$。于是 $d(y, f(a)) < \frac{\varepsilon}{6}$。因此，$f(A)$ 是 $\frac{\varepsilon}{6}$-网，且包含于 Y。存在 $a_1, a_2 \in A$，使得

$$d(a_1, x_1) < \frac{\varepsilon}{6} \text{ and } d(a_2, x_2) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Then

$$d(f(a_1), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{6} \text{ and } d(f(a_2), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

最后，我们得到以下不等式链

$$\begin{aligned} d(f(a_1), f(a_2)) &\leqslant d(f(a_1), f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), f(a_2)) \\ &< d(f(x_1), f(x_2)) + \frac{2\varepsilon}{6} < d(x_1, x_2) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= d(x_1, x_2) - \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant d(x_1, a_1) + d(a_1, a_2) + d(a_2, x_2) \\ &- \frac{2\varepsilon}{3} < d(a_1, a_2) - \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{6} = d(a_1, a_2) - \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\sigma(f(A)) = \sum_{a,b \in A} d(f(a), f(b)) < \sum_{a,b \in A} d(a, b) - \frac{\varepsilon}{3} = \sigma(A) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

那么 $\sigma(f(A)) < \sigma(A) - \frac{\varepsilon}{3} < \alpha(X, \frac{\varepsilon}{6}) + \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{3} = \alpha(X, \frac{\varepsilon}{6}) - \frac{\varepsilon}{6} \leqslant \alpha(Y, \frac{\varepsilon}{6}) - \frac{\varepsilon}{6}$，这与 $\alpha(Y, \frac{\varepsilon}{6})$ 的定义矛盾。□

3.2. **全有界空间对的一致强可塑性**。

定理 3.1的一个能给出一致强可塑性的版本需要付出更多努力。我们通过使用极大的ε-分离集取代 ε-网，成功实现了这一目标。回想一下，在度量空间 A 中，带有 $|A| \geqslant 2$ 的集合 X 称为 ε-分离集，如果 A 中不同元素之间的所有两两距离都大于或等于 ε。为方便起见，由一个点组成的集合被视为对所有 ε都是 $\varepsilon > 0$-分离的。子集 $A \subset X$ 称为 极大的 ε-分离集，如果它不是任何其他 ε-分离子集的真子集，其中该子集属于 X。一个极大的

ε-分离集自动构成一个 ε-网。我们下面使用的基于 ε-分离的 $\alpha(X,\ \varepsilon)$ 替代形式是

$$s(X,\ \varepsilon)\ = \sup\{\sigma(B),\ \text{其中}\ B \neq \emptyset\ \text{是}\ X\}.\text{中的有限}\ \varepsilon\text{-分离集}$$

引理 3.2.设 $X,\ Y$ 是全有界度量空间，$\varepsilon > 0, s(X,\varepsilon) > s(Y,\varepsilon) - \varepsilon$，且 $f\colon X \to Y$是一个非压缩映射。设 $A, |A| \geqslant 2$是 X 中的一个 ε-分离集，使得

$$\sigma(A) > s(X,\varepsilon) - \varepsilon.$$

则 $f(A)$ 是 Y中的一个极大 ε-分离集。

证明。 $f(A)$的 ε-分离性是 f非压缩性的直接推论。我们来证明 $f(A)$是极大的。假设并非如此。那么我们至少可以向 $f(A)$中添加一个元素，从而得到 ε-分离集$\tilde{A}$。于是可得以下矛盾

$$\sigma(\tilde{A}) > \sigma(f(A)) + 2\varepsilon \geqslant \sigma(A) + 2\varepsilon > s(X,\varepsilon) + \varepsilon > s(Y,\varepsilon). \quad \square$$

定理 3.3. 设 X, Y 是全有界度量空间，且对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta \in (0,\varepsilon)$，使得 $s(X,\delta) > s(Y,\delta) - \delta > 0$。则 (X,Y) 是一个强塑性对。

证明。 我们将采用“反证法”。设 $f\colon X \to Y$ 是一个非压缩的函数。假设 f 不是等距嵌入。那么存在 $x_1,\ x_2 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$d(f(x_1), f(x_2)) > d(x_1, x_2) + \varepsilon. \tag{3.2}$$

根据定理的条件，存在 $\delta \in (0,\ \frac{\varepsilon}{6})$，使得 $s(X,\ \delta) > s(Y,\ \delta) - \delta > 0$。考虑 X中的一个有限 δ-分离集，使得

$$\sigma(B) > \max\{s(X,\delta) - \delta, 0\}.$$

由于 f 是非压缩的，且 $|B| \geqslant 2$，引理 3.2 推出 $f(B)$ 是 Y中的一个极大 δ-分离集。因此，它是 Y中的一个 δ-网，所以存在 $b_1,\ b_2 \in B$ 使得

$$d(f(b_1), f(x_1)) < \delta \text{ and } d(f(b_2), f(x_2)) < \delta.$$

然后，由于 f的非压缩性

$$d(b_1, x_1) < \delta \text{ and } d(b_2, x_2) < \delta.$$

因此，可以得到以下结果

$$\begin{aligned} d(b_1,b_2) &\leqslant d(b_1,x_1) + d(x_1,x_2) + d(x_2,b_2) < d(x_1,x_2) + 2\delta \\ &< d(f(x_1),f(x_2)) - \varepsilon + 2\delta \leqslant d(f(x_1),f(b_1)) \\ &+ d(f(b_1),f(b_2)) + d(f(b_2),f(x_2)) - \varepsilon + 2\delta \\ &< d(f(b_1),f(b_2)) - \varepsilon + 4\delta. \end{aligned}$$

这就是我们得到

$$\sigma(B) = \sum_{a,b\in B} d(a,b) < \sum_{a,b\in B} d(f(a),f(b)) - \varepsilon + 4\delta = \sigma(f(B)) - \varepsilon + 4\delta.$$

那么 $\sigma(f(B)) > \sigma(B) + \varepsilon - 4\delta > s(X,\ \delta) - \delta + \varepsilon - 4\delta = s(X,\ \delta) + \varepsilon - 5\delta \geqslant s(Y,\ \delta) + \varepsilon - 6\delta > s(Y,\ \delta)$。这与 $s(Y,\ \delta)$ 的定义矛盾。□

由上述定理很容易得到定理3.1的强塑性类比。

推论 3.4。设 X, Y 是全有界度量空间，且对每个 $\delta > 0$，都有 $s(X, \delta) \geqslant s(Y, \delta)$。那么 (X, Y) 是一个强塑性对。

证明。首先，如果 Y 只包含一个元素，那么非压缩映射 $f\colon X \to Y$ 只有在 X 也只包含一个元素时才可能存在，因此结论显然成立。如果 $|Y| \geqslant 2$，那么对于每个 $\delta \in \in (0, \operatorname{diam} Y)$，都有 $s(Y,\ \delta) \geqslant \operatorname{diam} Y$。因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，任意满足 $\delta \in \in (0, \min\{\varepsilon, \operatorname{diam} Y\})$ 的量均满足所需条件 $s(X,\ \delta) > s(Y,\ \delta) - \delta > 0$。□

请注意，引言中提到的关于所有全有界度量空间都具有强塑性的经典结果，是推论 3.4 的一个特例。

接下来要讨论空间对的统一强塑性，而这恰好是技术上最困难的一部分工作。

对于全有界度量空间 X，引入以下记号：

$$N_\varepsilon = N(X, \varepsilon) = \max\{|A|,\ \text{where } A \text{ is } \varepsilon\text{-separated set in } X\}$$

引理 3.5。设 X, Y 是全有界度量空间，且 $\varepsilon > 0$ 满足存在 $\delta = \delta(\varepsilon) < \text{最小} \left\{ N_{\frac{\varepsilon}{9}}^{\ \varepsilon\,(N_{\frac{\varepsilon}{9}}-1)-6},\ 9^{\ \varepsilon\,(N_{\frac{\varepsilon}{9}}+1)} \right\}$，以及 $\nu < \frac{\varepsilon}{18}$，使得

$$s\left(X, \frac{\varepsilon}{9}\right) \geqslant s\left(Y, \frac{\varepsilon}{9} - \delta\right) - \nu > 0. \tag{3.3}$$

设 $f\colon X \to Y$ 为一个函数。那么，若存在 $x, y \in X$ 满足 $d(f(x)\ f(y)) \geqslant d(x, y) + \varepsilon$，则存在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in X$ 满足 $d(f(\widetilde{x})\ f(\widetilde{y})) \leqslant d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \delta$。

证明。我们将通过矛盾进行论证。假设存在 $x,\ y \in X$ 使得

$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y) + \varepsilon, \tag{3.4}$$

并且对于每个 $\tilde{x},\ \tilde{y} \in X$

$$d(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) > d(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta. \tag{3.5}$$

存在一个有限的 $\frac{\varepsilon}{9}$-分离集 A，位于 X 中，使得

$$\sigma(A) > \max\left\{s\left(X, \frac{\varepsilon}{9}\right) - \mu, 0\right\}, \tag{3.6}$$

其中 $\mu = \frac{\varepsilon}{18} - \nu$。

断言。 $f(A)$ 是 Y 中的一个极大 $(\frac{\varepsilon}{9} - \delta)$-分离集。断言的证明。根据我们的建议 (3.5)，集合 $f(A)$ 是 $(\frac{\varepsilon}{9} - \delta)$-分离的。关键在于证明其极大性。假设$f(A)$ 不是极大的。那么我们可以向 $f(A)$ 中至少添加一个元素~，从而得到一个 $(\frac{\varepsilon}{9} - \delta)$-分离集 $A \subset Y$。我们用 n 表示 $f(A)$ 中元素的数量。我们有 $\frac{\varepsilon}{9} > \delta$，因此 $n = |A|$，因为 f 不能将 A 中的元素“粘合”起来，否则就会与条件 (3.5) 矛盾。注意，$|A| \leqslant N_{\frac{\varepsilon}{9}}$，且不等式 (3.6) 意味着$|\bar{A}| \geqslant 2$，所以 $n \in \left[2, N_{\frac{\varepsilon}{9}}\right]$。由此可得以下不等式链

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{A}) &\geqslant \sigma(f(A)) + \left(\frac{\varepsilon}{9} - \delta\right) n > \sigma(A) + \left(\frac{\varepsilon}{9} - \delta\right) n - \delta \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \sigma(A) + \frac{\varepsilon}{9} \cdot n - \delta \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sigma(A) + n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{9} - \delta \cdot \frac{(n+1)}{2}\right) \\
&> \sigma(A) + n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{9} - \frac{(n+1)\varepsilon}{18(N_{\frac{\varepsilon}{9}} + 1)}\right) \geqslant \sigma(A) + n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{9} - \frac{\varepsilon}{18}\right) \\
&= \sigma(A) + \frac{n\varepsilon}{18} > s\left(X, \frac{\varepsilon}{9}\right) - \mu + \frac{n\varepsilon}{18} \geqslant s\left(X, \frac{\varepsilon}{9}\right) + \frac{\varepsilon}{18} + \nu \\
&\geqslant s\left(Y, \frac{\varepsilon}{9} - \delta\right) - \nu + \nu + \frac{\varepsilon}{18} = s\left(Y, \frac{\varepsilon}{9} - \delta\right) + \frac{\varepsilon}{18}.
\end{aligned}$$

这个矛盾完成了该断言的证明。
现在可以得出，$f(A)$ 是 Y 中的 $(\frac{\varepsilon}{9} - \delta)$-网，因此存在$a_1$，$a_2 \in A$ 使得

$$d(f(a_1), f(x)) < \frac{\varepsilon}{9} - \delta, \text{ and } d(f(a_2), f(y)) < \frac{\varepsilon}{9} - \delta.$$

于是，根据（3.5），

$$d(a_1, x) < \frac{\varepsilon}{9} \text{ and } d(a_2, y) < \frac{\varepsilon}{9}.$$

最后，可以得到以下不等式链，这将帮助我们得出最终的矛盾

$$\begin{aligned}
d(a_1, a_2) &\leqslant d(a_1, x) + d(x, y) + d(y, a_2) < d(x, y) + \frac{2\varepsilon}{9} \\
&< d(f(x), f(y)) - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{9} = d(f(x), f(y)) - \frac{7\varepsilon}{9} \\
&\leqslant d(f(x), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + d(f(a_2), f(y)) - \frac{7\varepsilon}{9} \\
&< d(f(a_1), f(a_2)) - \frac{5\varepsilon}{9} - 2\delta.
\end{aligned}$$

现在我们有

$$\sigma(A)=\sum_{a,b\in A}d(a,b)<\sum_{a,b\in A}d(f(a),f(b))-\frac{5\varepsilon}{9}-2\delta+\delta\left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right)$$
$$<\sigma(f(A))-\frac{5\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon(n(n-1)-6)}{2(N_{\frac{\varepsilon}{9}}(N_{\frac{\varepsilon}{9}}-1)-6)}\leqslant\sigma(f(A))-\frac{\varepsilon}{18}.$$

Then

$$\sigma(f(A))>\sigma(A)+\frac{\varepsilon}{18}>s\left(X,\frac{\varepsilon}{9}\right)-\mu+\frac{\varepsilon}{18}$$
$$=s\left(X,\frac{\varepsilon}{9}\right)+\nu\overset{(3.3)}{\geqslant}s\left(Y,\frac{\varepsilon}{9}-\delta\right),$$

这与 $s\left(Y,\frac{\varepsilon}{9}-\delta\right)$的定义矛盾。 □

由上述引理，我们可推出本节的主要结果。

定理 3.6. 设 X, Y 为全有界度量空间，使得对每个 $\delta>0$，都有$s(X,\delta)\geqslant s(Y,\delta)$。则 (X,Y) 是一致强可塑对。

证明。 取 $\varepsilon\in(0,\mathrm{diam}Y)$。我们的目标是证明存在 $\delta_0>0$具有以下性质：对于每个函数 $f\colon X\to Y$，若存在$x,y\in X$满足 $d(f(x),f(y))>d(x,y)+\varepsilon$，则存在 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in X$满足$d(f(\widetilde{x}),f(\widetilde{y}))<d(\widetilde{x},\widetilde{y})-\delta_0$。

首先注意，对于每个 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，都有 $s(Y,\varepsilon_2)\leqslant s(Y,\varepsilon_1)$，因为每个 ε_2-分离集也是 ε_1-分离集。也就是说， $s(Y,t)$ 是关于 t 的单调函数，其间断点至多可数。因此，我们可以选取 $\varepsilon_0\in(0,\varepsilon)$，使得 $s(Y,t)$ 在 $\frac{\varepsilon_0}{9}$ 处连续，并考虑

$$\nu(\delta)=s\left(Y,\frac{\varepsilon_0}{9}-\delta\right)-s\left(Y,\frac{\varepsilon_0}{9}\right).$$

那么，存在 $\Delta>0$，使得对于每个 $0<\delta<\Delta$，都有 $\nu(\delta)<\frac{\varepsilon_0}{18}$。我们取 $\delta_0=\min\left\{\Delta,\frac{\varepsilon_0}{N_{\frac{\varepsilon_0}{9}}\left(N_{\frac{\varepsilon_0}{9}}-1\right)-6},\frac{\varepsilon_0}{9\left(N_{\frac{\varepsilon_0}{9}}+1\right)}\right\}$。那么对于 ε_0、 δ_0 和 $\nu_0=\nu(\delta_0)$，条件成立

$$s\left(X,\frac{\varepsilon_0}{9}\right)\geqslant s\left(Y,\frac{\varepsilon_0}{9}\right)=s\left(Y,\frac{\varepsilon_0}{9}-\delta_0\right)-\nu_0>0,$$

其中最后一个不等式由条件保证 $\varepsilon_0<\varepsilon<$ 直径Y。接下来应用引理3.5。□

定理 3.6 的定量版本是引理 3.5。从某种意义上说，它与达到尖锐界限相距不远。这一点可由定理 2.7中情形 1 构造的例子说明。在该例子中，空间各元素之间的两两距离都属于区间 $[a,2a]$, $a>\varepsilon$，因此空间 X 本身就是一个有限的 ε-分离子集，其中包含 $N=|X|$ 个元素。因此， $s(X,t)$

在 $t \leqslant \varepsilon$ 时为常数，且 $N_{\frac{\varepsilon}{9}} = N$。在这种情况下，对于较大的 N引理3.5 with $X = Y$ 表明，每个 $\delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{N\,\overline{N-1()-6}}$ 都可以使用，但在这个例子中，没有比 $\frac{N}{2}$ $(\frac{N}{2}-1)$ 更大的量可以作为 $\delta(\varepsilon)$。因此， $\delta(\varepsilon)$ 上下估计之比约为 4，这还算不错。

另一方面，引理 3.5 陈述中的估计看起来不够优雅，因为它们依赖于函数的连续性$s(Y, \varepsilon)$。若能按照 Nitka 的思路（1.1）给出更优雅的表述就好了。当然，我们对$X \neq Y$ 所作的推广，可能无法像（1.1）那样用简洁的术语来表述。至少，Nitka 的证明无法推广到 $X \neq Y$，因为它使用了由 f 生成的动力系统： $X \to X$ （迭代序列），这对 f 来说毫无意义： $X \to Y$。

3.3. 全有界空间对的强塑性与一致强可塑性之间的关系。

在小节 2.3 中，我们给出了一个强塑性度量空间 X 的例子，但它并非一致强塑性。对于不同度量空间组成的空间对，构造此类例子要容易得多；此外，这类例子中的两个空间 X 和 Y 均可取为全有界空间。

例3.7. 考虑标准度量下的 $\mathbb{R}$ 的以下两个子空间： $X = [0,1] \cup \{3\}$ 和 $Y = [0,1) \cup \{4\}$。这对 (X, Y) 具有强塑性，但不具有一致强塑性。

证明。1. 强塑性。假设存在一个非压缩映射f： $X \to Y$。点 $3 \in X$ 具有如下性质：存在无穷多个点 $x \in X$，使得 $d(3, x) > 2$。由于 f 是非压缩的，对于 $f(3) \in Y$，也存在无穷多个点 $y \in Y$，使得 $d(f(3)\ y) > 2$。对此，唯一可能的情况是 $f(3) = 4$。因此， $f([0,1]) \subset [0,1)$，但对于非压缩映射，这不可能成立，因为应当有 $d(f(0)\ f(1)) \geqslant 1$，而在 $[0,1)$ 中不存在这样的点。

2. 一致强可塑性的缺失同样显而易见。定义函数 f_t： $X \to Y, t \in (0,1)$ 如下： $f_t(x) = tx$ 当 $x \in [0,1]$ 时，且$f_t(3) = 4$。对于这些函数和 $\varepsilon = 1/2, d(f_t(0)\ f_t(3)) > d(0,3) + \varepsilon$，但对于每个 $\widetilde{x}$， $\widetilde{y} \in X$ 我们都有 $d(f_t(\widetilde{x})\ f_t(\widetilde{y})) \geqslant d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - (1-t)$。因此，$\delta^s_{X,Y}(\varepsilon) \leqslant 1 - t$ 对于所有 $t \in (0,1)$，也就是说 $\delta^s_{X,Y}(\varepsilon) = 0$。□

对于紧空间对，情况则有所不同。

定理 3.8。 设 X、 Y 为紧致度量空间，且 (X, Y) 是强塑性对。那么 (X, Y) 是一致强可塑对。

证明。 反设 $(X,\ Y)$ 不是一致强可塑对。固定相应的 $\varepsilon > 0$，使得 $\delta^s_{X,\ Y}(\varepsilon) = 0$。于是

存在函数 $f_n\colon X \to Y$以及元素 x_n，$y_n \in X$、$n = 1$、2，.....，使得

$$d(f_n(x_n), f_n(y_n)) > d(x_n, y_n) + \varepsilon, \tag{3.7}$$

且对每个 $\widetilde{x}$，$\widetilde{y} \in X$

$$d(f_n(\widetilde{x}), f_n(\widetilde{y})) > d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \frac{1}{n}. \tag{3.8}$$

如有必要，取一个子列后，我们还可以假设 X中的序列（x_n）、（y_n）以及 Y中的序列（f_n（x_n））、（f_n（y_n））均有极限。记 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$、$y = \lim_{n\to\infty} y_n$、$u = \lim_{n\to\infty} f_n$（$x_n$）、$v = \lim_{n\to\infty} f_n$（$y_n$）以及 $\delta_n = d$（x_n，x）$+ d$（y_n，y）。由（3.7）可得

$$d(u, v) \geqslant d(x, y) + \varepsilon, \tag{3.9}$$

接下来，我们需要分别考虑两种情形。

情形 1： $x = y$。在这种情形下，我们引入 f_n的两个变体：g_n 和 h_n，如下所示：

$$g_n(z) = \begin{cases} f_n(z), & \text{if } z \notin \{x_n, x\} \\ f_n(x), & \text{if } z = x_n \\ f_n(x_n), & \text{if } z = x, \end{cases}$$

类似地

$$h_n(z) = \begin{cases} f_n(z), & \text{if } z \notin \{y_n, x\} \\ f_n(x), & \text{if } z = y_n \\ f_n(y_n), & \text{if } z = x. \end{cases}$$

根据三角不等式，(3.8) 可推出，对每个 $\widetilde{x}$，$\widetilde{y} \in X$

$$d(g_n(\widetilde{x}), g_n(\widetilde{y})) > d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \frac{1}{n} - \delta_n, \text{ and} \tag{3.10}$$

$$d(h_n(\widetilde{x}), h_n(\widetilde{y})) > d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \frac{1}{n} - \delta_n. \tag{3.11}$$

固定一个关于 $\mathbb{N}$ 的自由超滤子 $\mathfrak{F}$，并考虑 (g_n) 和 (h_n) 的 $\mathfrak{F}$-逐点极限 g，h：

$$g(z) = \lim_{\mathfrak{F}} g_n(z), \quad h(z) = \lim_{\mathfrak{F}} h_n(z).$$

(关于滤子、超滤子和紧致性的简要介绍，请参见 [4, 第 16 节。1]）。条件 (3.10) 和 (3.11) 表明 g 和h 均为非压缩映射，因此根据 (X, Y) 的强塑性，g和 h都是等距嵌入。根据构造，对于 $z \neq x$，我们有

$$g(z) = h(z) = \lim_{\mathfrak{F}} f_n(z). \tag{3.12}$$

这意味着 $g(x) = h(x)$。事实上，如果 x 不是一个孤立点，那么所需条件就是（3.12）在 $z \to x$时的极限情形；而如果 x 是一个孤立点，那么除有限多个之外，所有 x_n 和 y_n都等于

这些值都等于 x，因此对于除有限多个 $n \in \mathbb{N}$ 值之外的所有情况， $g_n(x) = h_n(x)$。

另一方面， $g(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f_n(x_n) = u$, $h(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f_n(y_n) = v$并且由于 $u \neq v$ （3.9）。

情形 2: $x \neq y$。在此情形下，不失一般性，我们还可以假设对每个 $n \in \mathbb{N}$， $x_n \neq y_n$。这使我们能够合并 g_n 和 h_n 的公式，并定义函数 $w_n : X \to Y$

$$w_n(z) = \begin{cases} f_n(z), & \text{if } z \notin \{x_n, x, y_n, y\} \\ f_n(x), & \text{if } z = x_n \\ f_n(x_n), & \text{if } z = x \\ f_n(y), & \text{if } z = y_n \\ f_n(y_n), & \text{if } z = y. \end{cases}$$

再次，固定 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子 $\mathfrak{F}$，并考虑极限函数

$$w(z) = \lim_{\mathfrak{F}} w_n(z).$$

再次，由三角不等式， （3.8）推出，对所有 $\widetilde{x}$， $\widetilde{y} \in X$

$$d(w_n(\widetilde{x}), w_n(\widetilde{y})) > d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \frac{1}{n} - \delta_n,$$

因此 w 是非压缩的。根据（X, Y）的强塑性，这意味着 w 是一个等距嵌入。另一方面，

$$d(w(x), w(y)) = \lim_{\mathfrak{F}} d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \overset{(3.7)}{\geqslant} \lim_{\mathfrak{F}} d(x_n, y_n) + \varepsilon = d(x, y) + \varepsilon,$$

这就得到了所需的矛盾。 □

以下问题仍未解决。

问题 3.9. 是否存在度量空间 X, Y，使得 X 是全有界的， Y 是紧致的，并且相应的配对 (X, Y) 具有强塑性但不具有一致强塑性?

Acknowledgements

作者感谢 Rainis Haller 和 Nikita Leo 就这一主题进行的有益讨论。

References

[1] C. Angosto、V. Kadets、O. Zavarzina，《非扩张双射、一致结构与多面体面》，J. Math. Anal. Appl. 471 (1-2)(2019) 38–52。[2] B. Cascales、V. Kadets、J. Orihuela、E.J. Wingler，《严格凸巴拿赫空间单位球的可塑性》，Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, F´ısicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas 110 (2)(2016) 723–727。[3] H. Freudenthal、W. Hurewicz，《伸长、缩短与等距变换》，Fund. Math. 26 (1936) 120–122。

[4] V. Kadets, 《泛函分析与测度论教程》。Andrei Iacob 俄译, Universitext, Cham, Springer。xxii, 2018, 539 页。[5] S. A. Naimpally、Z. Piotrowski、E. J. Wingler, 《度量空间中的可塑性》, J. Math. Anal. Appl. 313 (2006) 38–48。[6]W. Nitka, 《关于非等距映射的评论》, Colloquium Mathematicae 5 (1) (1957)28–31。[7] W. Nitka, 《深入研究河马》, Matematyka 5 (1998) 278–283。[8] O. Zavarzina, 《巴拿赫空间单位球之间的非扩张双射》, Ann. Funct. Anal. 9 (2) (2018)271–281。[9]O. Zavarzina, 《可分希尔伯特空间中椭球的线性扩张-收缩可塑性》, Matematychni Studii 51 (1)(2019) 86–91。

(卡德茨) ORCID: 0000-0002-5606-2679 Department of Mathematics Holon Institute of Technology (Israel) and School of Mathematics and In-formatics, V.N.Karazin Kharkiv National University (Ukraine)电子邮箱: vova1kadets@yahoo.com

(扎瓦尔齐娜) ORCID: 0000-0002-5731-6343 School of Mathematics and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University (Ukraine)电子邮箱: olesia.zavarzina@yahoo.com