arXiv:2301.06603v1 [math.FA] 16 Jan 2023

算子 Berezin 数不等式的若干推广

Mojtaba Bakherad[1], Monire Hajmohamadi[2], Rahmatollah Lashkaripour[3] 和 Satyajit Sahoo[4]

Abstract. 本文建立了若干 Berezin 数不等式的上界，包括 2×2 算子矩阵及其非对角部分的相关不等式。
在其他不等式中，文中证明了若 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$，则

$$\mathbf{ber}^r(T) \leq 2^{r-2}\left(\mathbf{ber}(f^{2r}(|X|)+g^{2r}(|Y^*|))+\mathbf{ber}(f^{2r}(|Y|)+g^{2r}(|X^*|))\right) - 2^{r-2}\inf_{\|(k_{\lambda_1},k_{\lambda_2})\|=1}\eta(k_{\lambda_1},k_{\lambda_2}),$$

其中

$$\eta(k_{\lambda_1},k_{\lambda_2}) = \left(\left\langle\left(f^{2r}(|X|)+g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}} - \left\langle\left(f^{2r}(|Y|)+g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

X, Y 是希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$上的有界线性算子，$r \geq 1$且 f, g是定义在 $[0,\infty)$上的非负连续函数，满足关系$f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$。

2010年数学主题分类。主要分类号 47A30；次要分类号 47A12、15A60、30E20。

1. Introduction and preliminaries

函数希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ 是定义在（非空）集合 Ω 上的复值函数构成的希尔伯特空间，并具有点求值连续这一性质，即对于每个 $\lambda \in \Omega$，映射 $f \mapsto f(\lambda)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的连续线性泛函。Riesz 表示定理保证，对于每个 $\lambda \in \Omega$，都存在唯一的元素 $k_\lambda \in \mathcal{H}$，使得对所有 $f \in \mathcal{H}$，$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle$。集合 $\{k_\lambda : \lambda \in \Omega\}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的再生核。若 $\{e_n\}$ 是函数希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，则 $\mathcal{H}$ 的再生核由 $k_\lambda(z) = \sum_n e_n(\lambda)e_n(z)$; 给出。对于 $\lambda \in \Omega$，令 $\hat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}$ 为 $\mathcal{H}$ 的归一化再生核。对于 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 A，由 $A(\lambda) = \langle Ak_\lambda, k_\lambda\rangle$ 在 Ω 上定义的函数 $\widetilde{A}$ 称为 A 的 Berezin 符号，该符号最初由 Berezin 引入。算子 A 的 Berezin 集和 Berezin 数定义如下

$$\mathbf{Ber}(A) := \{\widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega\} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{ber}(A) := \sup\{|\widetilde{A}(\lambda)| : \lambda \in \Omega\},$$

2010年数学主题分类。主要分类号 47A63；次要分类号 15A60。关键词与短语。Berezin 数；Berezin 符号；对角算子矩阵，非对角部分。

分别为。在近期的一些论文中，作者研究了若干 Berezin 数不等式。算子 A 和 B 的 Berezin 数满足以下性质：$\mathbf{ber}(\alpha A) = |\alpha|\mathbf{ber}(A)$ $(\alpha \in \mathbb{C})$，且 $\mathbf{ber}(A+B) \leq \mathbf{ber}(A) + \mathbf{ber}(B)$，以及 $\mathbf{ber}(A) \leq \|A\|$，其中 $\|.\|$ 是算子范数。本文中，算子矩阵 $T = \begin{bmatrix} S & X \\ Y & R \end{bmatrix}$ 是一个矩阵，其$S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$、$Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$和 $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$。
文中作者给出了算子矩阵非对角部分的一个上界，如下：

$$(\mathbf{ber}(T))^r \leq \frac{1}{4}\|h(f^2(|Y|)) + h(g^2(|Y|))\| + \frac{1}{4}\|h(f^2(|X|)) + h(g^2(|X|))\|, \quad (1.1)$$

其中 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ 和 f, g 是 $[0,\infty)$上的非负连续函数，使得 $f(t)g(t) = t$ $(t \in [0,\infty))$。

经典Young不等式指出，若 $p, q > 1$ 满足$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则对于正实数 a, b，有 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$。文中，作者给出了标量Young不等式的一个细化，如下：

$$\left(a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}\right)^m + r_0^m \left(a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)^m,$$

其中 $r_0 = \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\}$ and $m = 1, 2, \ldots$. 特别地，如果 $p = q = 2$，那么

$$\left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}\right)^2 \leq 2^{-m}(a+b)^m. \quad (1.2)$$

本文给出了算子矩阵非对角部分的 Berezin 数不等式的一些上界及其改进。此外，我们还给出了对角算子矩阵的 Berezin 数不等式。

2. 主要结果

为证明我们的结果，我们需要以下引理。

引理2.1. 设 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\Omega))$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2(\Omega)\ \mathcal{H}_1(\Omega))$, $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\Omega)\ \mathcal{H}_2(\Omega))$ 和 $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2(\Omega))$。则有以下结论：
(a) $\mathbf{ber}\left(\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\right) \leq \max\{\mathbf{ber}(S), \mathbf{ber}(R)\}$; (b) $\mathbf{ber}\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}(\|X\| + \|Y\|)$。

特别地，

$$\boldsymbol{ber}\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix}\right) \leq \|X\|. \quad (2.1)$$

(c) $\mathbf{ber}(S) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \mathbf{ber}(Re(e^{i\theta} S))$。

下一个引理可由正算子的谱定理和 Jensen 不等式推出。

引理 2.2. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$、$T \geq 0$ 和 $x \in \mathcal{H}$ 满足 $\|x\| \leq 1$。则当 $r \geq 1$ 时，(a) $\langle Tx,\ x\rangle^r \leq \langle T^r x,\ x\rangle$；当 $0 < r \leq 1$ 时，(b) $\langle T^r x,\ x\rangle \leq \langle Tx,\ x\rangle^r$。

引理 2.3. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 x、$y \in \mathcal{H}$ 为任意向量。若 f、g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，并满足关系式 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$，则

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \left\langle f^2(|T|)x, x\right\rangle \left\langle g^2(|T^*|)y, y\right\rangle.$$

现在，我们可以运用一些来自.....的思想来证明本节的主要结果。

定理 2.4. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$、$r \geq 1$ 和 f、g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，满足关系式 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$。则

$$(\boldsymbol{ber}(T))^r \leq \frac{2^r}{2}\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|))\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)),$$

and

$$(\boldsymbol{ber}(T))^r \leq \frac{2^r}{2}\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|X|) + f^{2r}(|Y^*|))\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(g^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)).$$

证明。对于任意 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2,$，令 $\hat{}k_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{bmatrix} k_{\lambda_1} \\ k_{\lambda_2} \end{bmatrix}$ 为 $\mathcal{H}(\Omega_1) \oplus \mathcal{H}(\Omega_2)$ 中归一化的再生核。于是

$$\begin{aligned}
&|\left\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\rangle|^r \\
&= |\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle + \langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|^r \\
&\leq (|\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle| + |\langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|)^r \qquad \text{(by the triangular inequality)} \\
&\leq \frac{2^r}{2}(|\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle|^r + |\langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|^r) \qquad \text{(by the convexity of } f(t) = t^r) \\
&\leq \frac{2^r}{2}\Big(\left(\left\langle f^2(|X|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle g^2(|X^*|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^r \\
&\quad + \left(\left\langle f^2(|Y|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle g^2(|Y^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^r\Big) \qquad \text{(by Lemma)} \\
&\leq \frac{2^r}{2}\big(\left\langle f^{2r}(|X|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle g^{2r}|X^*|k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left\langle f^{2r}(|Y|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle g^{2r}(|Y^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\big) \qquad \text{(by Lemma)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2^r}{2}\left(\left\langle f^{2r}(|X|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle+\left\langle g^{2r}(|Y^*|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\left\langle f^{2r}(|Y|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle+\left\langle g^{2r}(|X^*|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\qquad\text{(by the Cauchy-Schwarz inequality)}\\
&=\frac{2^r}{2}\left\langle (f^{2r}(|X|)+g^{2r}(|Y^*|))k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle (f^{2r}(|Y|)+g^{2r}(|X^*|))k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{2^r}{2}\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|X|)+g^{2r}(|Y^*|))\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|Y|)+g^{2r}(|X^*|)).
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{ber}^r(T)\leq\frac{2^r}{2}\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|X|)+g^{2r}(|Y^*|))\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(f^{2r}(|Y|)+g^{2r}(|X^*|)).$$

因此，我们得到第一个不等式。为证明第二个不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)},\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\rangle\right|^r\\
&=|\left\langle Xk_{\lambda_2},k_{\lambda_1}\right\rangle+\left\langle Yk_{\lambda_1},k_{\lambda_2}\right\rangle|^r\\
&\leq(|\left\langle Xk_{\lambda_2},k_{\lambda_1}\right\rangle|+|\left\langle Yk_{\lambda_1},k_{\lambda_2}\right\rangle|)^r\qquad\text{(by the triangular inequality)}\\
&\leq\frac{2^r}{2}(|\left\langle Xk_{\lambda_2},k_{\lambda_1}\right\rangle|^r+|\left\langle Yk_{\lambda_1},k_{\lambda_2}\right\rangle|^r)\qquad\text{(by the convexity of } f(t)=t^r)\\
&\leq\frac{2^r}{2}\left(\left(\left\langle f^2(|X|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle g^2(|X^*|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^r\right.\\
&\quad\left.+\left(\left\langle g^2(|Y|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle f^2(|Y^*|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^r\right)\qquad\text{(by Lemma).}\qquad(2.2)
\end{aligned}$$

用与第一个不等式的证明类似的论证，我们得到第二个不等式，从而完成了定理的证明。□

定理包含以下一些特殊情形。

推论 2.5。设 $T=\begin{bmatrix}0&X\\Y&0\end{bmatrix}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)$、$0\leq p\leq 1$ 和 $r\geq 1$。则

$$\boldsymbol{ber}^r(T)\leq 2^{r-2}\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|X|^{2rp}+|Y^*|^{2r(1-p)})\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|Y|^{2rp}+|X^*|^{2r(1-p)})$$

and

$$\boldsymbol{ber}^r(T)\leq 2^{r-2}\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|X|^{2rp}+|Y^*|^{2rp})\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|Y|^{2r(1-p)}+|X^*|^{2r(1-p)}).$$

证明。对于 $f(t)=t^p$ 和 $g(t)=t^{1-p}$ $(0\leq p\leq 1)$，结论由定理立即得出。□

注 2.6. 在定理中取 $f(t)=g(t)=t^{\frac{1}{2}}(t\in[0,\infty))$ 和 $r=1$，可得以下结果：

$$\mathbf{ber}(\begin{bmatrix}0&X\\Y&0\end{bmatrix})\leq\frac{1}{2}\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(|X|+|Y^*|)\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(|Y|+|X^*|).$$

如果在定理中令 $Y=X$、$r=1$ 和 $f(t)=g(t)=t^{\frac{1}{2}}$，则可得到如下不等式的改进形式。

推论 2.7. 设 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$、$r \geq 1$ 和 f、g 是定义在 $[0,\infty)$ 上满足关系 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$ 的非负连续函数。则

$$\boldsymbol{ber}\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{ber}(|X| + |X^*|) \leq \|X\|$$

在下面的推论中，我们得到了对 的改进。

推论 2.8. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$。则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ber}(T) &\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|X| + |Y^*|)\boldsymbol{ber}^{\frac{1}{2}}(|Y| + |X^*|) \\ &\leq \frac{1}{2}\max\{\boldsymbol{ber}(|X| + |Y^*|), \boldsymbol{ber}(|Y| + |X^*|)\}.\end{aligned}$$

证明。在定理 中，代入 $r = 1$、$f(t) = g(t) = t^{\frac{1}{2}}$，并应用算术-几何平均不等式，可得到所需结果如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{ber}(T) &\leq \frac{1}{2}\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(|X| + |Y^*|)\mathbf{ber}^{\frac{1}{2}}(|Y| + |X^*|) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{ber}(|X| + |Y^*|) + \mathbf{ber}(|Y| + |X^*|)}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\max\{\mathbf{ber}(|X| + |Y^*|), \mathbf{ber}(|Y| + |X^*|)\}.\end{aligned}$$

证明完毕。 □

应用不等式，我们得到如下定理。

定理 2.9. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ 和 f, g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，并满足关系式 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$. 那么对于 $r \geq 1$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ber}^r(T) \leq\ & 2^{r-2}\left(\boldsymbol{ber}(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)) + \boldsymbol{ber}(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|))\right) \\ & - 2^{r-2}\inf_{\|(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})\|=1} \eta(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}),\end{aligned}$$

其中

$$\eta(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}) = \left(\left\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac{1}{2}} - \left\langle\left(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

证明。对于任意 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2,$ ，设 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{bmatrix} k_{\lambda_1} \\ k_{\lambda_2} \end{bmatrix}$ 为 $\mathcal{H}(\Omega_1) \oplus \mathcal{H}(\Omega_2)$ 中的归一化再生核。则

$$
\begin{aligned}
&|\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}\rangle|^r \\
&= |\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle + \langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|^r \\
&\le \left(|\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle| + |\langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|\right)^r \qquad \text{(by the triangular inequality)} \\
&\le \frac{2^r}{2}\left(|\langle Xk_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle|^r + |\langle Yk_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\rangle|^r\right) \qquad \text{(by the convexity of } f(t) = t^r) \\
&\le \frac{2^r}{2}\left(\langle f^2(|X|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{r}{2}}\langle g^2(|X^*|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{r}{2}} + \langle f^2(|Y|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{r}{2}}\langle f^2(|Y^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{r}{2}}\right) \\
&\qquad\qquad \text{(by Lemma)} \\
&\le \frac{2^r}{2}\left(\langle f^{2r}(|X|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2r}(|X^*|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle f^{2r}(|Y|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2r}(|Y^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le \frac{2^r}{2}\left(\langle f^{2r}(|X|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle + \langle g^{2r}(|X^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(f^{2r}(|Y|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle + \langle g^{2r}(|Y^*|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^r}{2}\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\left(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{2^r}{4}\left(\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle + \langle\left(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle\right) \\
&\quad - \frac{2^r}{4}\left(\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\left(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\qquad\qquad \text{(by inequality)} \\
&\le \frac{2^r}{4}\left(\mathbf{ber}(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)) + \mathbf{ber}(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|))\right) \\
&\quad - \frac{2^r}{4}\left(\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|Y^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\left(f^{2r}(|Y|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

对所有单位向量 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{bmatrix} k_{\lambda_1} \\ k_{\lambda_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$取上确界，便得到所需的不等式。□

若将 $X = Y$ 代入定理，则得到如下结果。

推论 2.10。设 $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 以及 f、 g 是定义在 $[0, \infty)$ 上的非负连续函数，且满足关系式 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0, \infty))$。那么，对于 $r \ge 1$

$$\boldsymbol{ber}^r\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix}\right) \le 2^{r-1}\|f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|X^*|)\| - 2^{r-2}\inf_{\|(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})\|=1}\eta(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}),$$

其中

$$\eta(k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}) = \left(\langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\left(f^{2r}(|X|) + g^{2r}(|X^*|)\right)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

3. generalizations of Berezin number an operator

本节中，我们给出广义˜Aluthge 变换 T_t 的一些 Berezin 数不等式，并进一步给出一些推广已知不等式的不等式。

设 $T = U|T|$（U 是一个偏等距算子，且满足 $kerU = rang|T|^{\perp}$）为 T 的极分解。对于算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，广义 Aluthge 变换˜（记作 T_t）定义为

$$\tilde{T}_t = |T|^t U |A|^{1-t}, \qquad (0 \le t \le 1).$$

在下一个定理中，我们得到了非对角算子矩阵 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ 的广义 Aluthge 变换的 Berezin 数的上界。

定理 3.1. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$。则

$$\boldsymbol{ber}(\tilde{T}_t) \le \frac{1}{2}(\||Y|^t|X^*|^{1-t}\| + \||X|^t|Y^*|^{1-t}\|). \tag{3.1}$$

证明. 设 $X = U|X|$ 和 $Y = V|Y|$ 分别为算子 X 和 Y 的极分解。则

$$\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |Y| & 0 \\ 0 & |X| \end{bmatrix}$$

这是 T 的极分解。T 的广义 Aluthge 变换为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_t = |T|^t \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} |T|^{1-t} &= \begin{bmatrix} |Y|^t & 0 \\ 0 & |X|^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |Y|^{1-t} & 0 \\ 0 & |X|^{1-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & |Y|^t U |X|^{1-t} \\ |X|^t V |Y|^{1-t} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} \mathbf{ber}(\tilde{T}_t) &= \mathbf{ber}\left(\begin{bmatrix} 0 & |Y|^t U |X|^{1-t} \\ |X|^t V |Y|^{1-t} & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\le \frac{1}{2}(\||Y|^t U |X|^{1-t}\| + \||X|^t V |Y|^{1-t}\|). \qquad \text{(by Lemma)} \end{aligned}$$

由于，$|X^*|^2 = XX^* = U|X|^2U^*$，因此 $|X|^{1-t} = U^*|X^*|^{1-t}U$。于是，$\||Y|^t U|X|^{1-t}\| = \||Y|^t UU^*|X^*|^{1-t}U\| = \||Y|^t|X^*|^{1-t}\|$。同理，$\||X|^t V|Y|^{1-t}\| = \||X|^t|Y^*|^{1-t}\|$。因此

$$\mathbf{ber}(\tilde{T}_t) \le \frac{1}{2}(\||Y|^t|X^*|^{1-t}\| + \||X|^t|Y^*|^{1-t}\|).$$

□

定理 3.2。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\boldsymbol{ber}(T) \le \frac{1}{4}\||T|^{2t} + |T|^{2(1-t)}\| + \frac{1}{2}\boldsymbol{ber}(\tilde{T}_t), \tag{3.2}$$

其中 $t \in [0, 1]$。

ˆ证明。设 $k_\lambda \in \mathcal{H}$。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathtt{Re}\langle e^{i\theta}T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \mathtt{Re}\langle e^{i\theta}U|T|\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \mathtt{Re}\langle e^{i\theta}U|T|^t|T|^{1-t}\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \mathtt{Re}\langle e^{i\theta}|T|^{1-t}\hat{k}_\lambda, |T|^tU^*\hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{4}\|(e^{i\theta}|T|^{1-t} + |T|^tU^*)\hat{k}_\lambda\|^2 - \frac{1}{4}\|(e^{i\theta}|T|^{1-t} - |T|^tU^*)\hat{k}_\lambda\|^2 \\
&\qquad\qquad \text{(by the polarization identity)} \\
&\leq \frac{1}{4}\|(e^{i\theta}|T|^{1-t} + |T|^tU^*)\hat{k}_\lambda\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\langle(e^{i\theta}|T|^{1-t} + |T|^tU^*)\hat{k}_\lambda, (e^{i\theta}|T|^{1-t} + |T|^tU^*)\hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle(e^{i\theta}|T|^{1-t} + |T|^tU^*)(e^{-i\theta}|T|^{1-t} + U|T|^t)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle|T|^{2t} + |T|^{2(1-t)} + e^{i\theta}\tilde{T}_t + e^{-i\theta}(\tilde{T}_t)^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle|T|^{2t} + |T|^{2(1-t)}\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \frac{1}{4}\langle e^{i\theta}\tilde{T}_t + e^{-i\theta}(\tilde{T}_t)^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle|T|^{2t} + |T|^{2(1-t)}\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathtt{Re}(e^{i\theta}\tilde{T}_t)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\
&\leq \frac{1}{4}\||T|^{2t} + |T|^{2(1-t)}\| + \frac{1}{2}\mathbf{ber}(\mathtt{Re}(e^{i\theta}\tilde{T}_t) \\
&\leq \frac{1}{4}\||T|^{2t} + |T|^{2(1-t)}\| + \frac{1}{2}\mathbf{ber}(\tilde{T}_t).
\end{aligned}$$

对 $\lambda \in \Omega$ 取上确界，即得所需结果。 □

注记 3.3. 将 $t = \frac{1}{2}$ 代入定理中，可得 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。于是

$$\mathbf{ber}(T) \leq \frac{1}{2}\|T\| + \frac{1}{2}\mathbf{ber}(\tilde{T}_t) \tag{3.3}$$

由定理可得关于非对角算子矩阵$T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$的下一个结果。

推论 3.4. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$。于是

$$\boldsymbol{ber}(T) \leq \frac{1}{2}\max(\|X\|, \|Y\|) + \frac{1}{4}(\||Y|^t|X^*|^{1-t}\| + \||X|^t|Y^*|^{1-t}\|). \tag{3.4}$$

证明。由定理可立即推出。 □

推论 3.5. 设 $T = \begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$。则

$$\|X + Y\| \leq \max(\|X\|, \|Y\|) + \frac{1}{2}\left(\||X|^{1/2}|Y|^{1/2}\| + \||X^*|^{1/2}|Y^*|^{1/2}\|\right). \tag{3.5}$$

证明。应用定理，我们得到

$$\|X+Y^*\| = \|T+T^*\|.$$

□

下面我们给出算子矩阵 $T=\begin{bmatrix} S & X \\ Y & R \end{bmatrix}$. 的一些 Berezin 数不等式

定理 3.6. 设 $T=\begin{bmatrix} S & X \\ Y & R \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$。则

$$\mathrm{ber}(T) \leq \frac{1}{2}\mathrm{ber}(S) + \mathrm{ber}(R) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 贝雷津数^2(S) + \|X\|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)^2 贝雷津^2(S) + \|Y\|^2} \tag{3.6}$$

对 $0 \leq \alpha \leq 1$。

证明。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ber}(\mathtt{Re}(e^{i\theta}T)) \\
&= \mathbf{ber}\left(\frac{e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{ber}\begin{bmatrix} 2\mathtt{Re}(e^{i\theta}S) & e^{i\theta}X + e^{-i\theta}Y^* \\ e^{i\theta}Y + e^{-i\theta}X^* & 2\mathtt{Re}(e^{i\theta}R) \end{bmatrix} \\
&\leq \frac{1}{2}\Bigg(\mathbf{ber}\begin{bmatrix} 2\alpha\mathtt{Re}(e^{i\theta}S) & e^{i\theta}X \\ e^{-i\theta}X^* & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{ber}\begin{bmatrix} 2(1-\alpha)\mathtt{Re}(e^{i\theta}S) & e^{-i\theta}Y^* \\ e^{i\theta}Y & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \mathbf{ber}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathtt{Re}(e^{i\theta}R) \end{bmatrix}\Bigg) \\
&\leq \frac{1}{2}\Bigg(\begin{bmatrix} 2\alpha\mathbf{ber}(\mathtt{Re}(e^{i\theta}S)) & \|e^{i\theta}X\| \\ \|e^{-i\theta}X^*\| & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1-\alpha)\mathbf{ber}(\mathtt{Re}(e^{i\theta}S)) & \|e^{-i\theta}Y^*\| \\ \|e^{i\theta}Y\| & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbf{ber}(\mathtt{Re}(e^{i\theta}R)) \end{bmatrix}\Bigg) \quad \text{(by Theorem 2.1)} \\
&\leq \frac{1}{2}\Bigg(\begin{bmatrix} 2\alpha\mathbf{ber}(S) & \|X\| \\ \|X\| & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1-\alpha)\mathbf{ber}(S) & \|Y\| \\ \|Y\| & 0 \end{bmatrix} + 2\mathbf{ber}(R)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\alpha\mathbf{ber}(S) + \sqrt{\alpha^2\mathbf{ber}^2(S) + \|X\|^2} + (1-\alpha)\mathbf{ber}(S) \\
&+ \sqrt{(1-\alpha)^2\mathbf{ber}^2(S) + \|Y\|^2} + 2\mathbf{ber}(R)\Bigg] \\
&\leq \frac{1}{2}\Bigg[\mathbf{ber}(S) + 2\mathbf{ber}(R) + \sqrt{\alpha^2\mathbf{ber}^2(S) + \|X\|^2} + \sqrt{(1-\alpha)^2\mathbf{ber}^2(S) + \|Y\|^2}\Bigg].
\end{aligned}$$

对 $\theta \in \mathbb{R}$ 取上确界，得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ber}(T) \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbf{ber}(S) + \mathbf{ber}(R) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\mathbf{ber}^2(S) + \|X\|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)^2\mathbf{ber}^2(S) + \|Y\|^2}.
\end{aligned}$$

□

采用与前一定理中类似的论证，我们得到以下结果。

定理 3.7. 设 $T = \begin{bmatrix} S & X \\ Y & R \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$。那么

$$\begin{aligned} &\mathrm{ber}(T) \\ &\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{ber}(R) + \boldsymbol{ber}(S) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\boldsymbol{ber}^2(R) + \|Y\|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)^2\boldsymbol{ber}^2(R) + \|X\|^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

对于 $0 \leq \alpha \leq 1$。

在本文的最后部分，我们将给出算子的 Berezin 数的一种推广。为此，我们需要以下不等式，它们由以下文献得到：

$$a^{\nu}b^{1-\nu} \leq \nu a + (1-\nu)b \leq (\nu a^r + (1-\nu)b^r)^{\frac{1}{r}}, \tag{3.8}$$

and

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq (\frac{a^{pr}}{p} + \frac{b^{qr}}{q})^{\frac{1}{r}}, \tag{3.9}$$

其中 a、$b \geq 0$、$\nu \in [0,1]$、$r \geq 1$ 和 p、$q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。

命题 3.8. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么

$$\boldsymbol{ber}^{2r}(T) \leq \frac{1}{2}(\boldsymbol{ber}^r(T^2) + \|T\|^{2r}) \tag{3.10}$$

对于任意 $r \geq 1$。

证明。我们需要用到施瓦茨不等式的以下改进：

$$\|a\|\|b\| \geq |\langle a,b\rangle - \langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| + |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| \geq |\langle a,b\rangle|, \tag{3.11}$$

其中 a、b、e 是 $\mathcal{H}$ 中的向量，且 $\|e\| = 1$。
由，我们有

$$\frac{1}{2}(\|a\|\|b\| + |\langle a,b\rangle|) \geq |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| \tag{3.12}$$

将 $e = k_\lambda$、$a = Tk_\lambda$ 和 $b = T^*k_\lambda$ 代入，得到

$$\begin{aligned} |\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle|^2 &\leq \frac{1}{2}(\|Tk_\lambda\|\|T^*k_\lambda\| + |\langle T^2k_\lambda, k_\lambda\rangle|) \\ &\leq \left(\frac{\|Tk_\lambda\|^r\|T^*k_\lambda\|^r + |\langle T^2k_\lambda, k_\lambda\rangle|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

因此

$$|\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle|^{2r} \leq \frac{1}{2}(\|Tk_\lambda\|^r\|T^*k_\lambda\|^r + |\langle T^2k_\lambda, k_\lambda\rangle|^r).$$

对所有单位向量 k_λ 取上确界，即得所需结果 . □

注释 3.9. 由不等式 , 显然可得

$$\begin{aligned}\mathbf{ber}^{2r}(T) \leq \frac{1}{2}(\mathbf{ber}^{r}(T^2) + \|T\|^{2r}) &\leq \frac{1}{2}(\|T\|^{2r} + \|T\|^{2r}) \\ &\leq \|T\|^{2r}.\end{aligned}$$

在下一个定理中，我们得到了 ber 的幂的上界。

定理 3.10. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 f, g 是定义在$[0,\infty)$上的非负连续函数，满足关系 $f(t)g(t) = t\,(t \in [0,\infty))$。那么

$$\boldsymbol{ber}^{2r}(T) \leq \frac{1}{2}(\|T\|^{2r} + \boldsymbol{ber}(\frac{1}{p}f^{pr}(|T^2|) + \frac{1}{q}g^{qr}(|(T^2)^*|), \tag{3.13}$$

其中 $r \geq 1, p \geq q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 和 $qr \geq 2$。

证明。设 $k_\lambda \in \mathcal{H}$ 为单位向量。由引理 , 我们有

$$\begin{aligned}|\langle T^2k_\lambda, k_\lambda\rangle|^r &\leq \|f(|T^2|)k_\lambda\|^r\|g(|(T^2)^*|)k_\lambda\|^r \\ &= \langle f(|T^2|)k_\lambda, k_\lambda\rangle^{\frac{r}{2}}\langle g(|(T^2)^*|)k_\lambda, k_\lambda\rangle^{\frac{r}{2}} \\ &\leq \frac{1}{p}\langle f(|T^2|)k_\lambda, k_\lambda\rangle^{\frac{rp}{2}} + \frac{1}{q}\langle g(|(T^2)^*|)k_\lambda, k_\lambda\rangle^{\frac{rq}{2}} \\ &\leq \frac{1}{p}\langle f(|T^{rp}|)k_\lambda, k_\lambda\rangle + \frac{1}{q}\langle g(|(T^{rq})^*|)k_\lambda, k_\lambda\rangle \\ &= \langle\frac{1}{p}f(|T^{rp}|) + \frac{1}{q}g(|(T^{rq})^*|)k_\lambda, k_\lambda\rangle.\end{aligned}$$

由定理 的证明，我们有

$$|\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle|^{2r} \leq \frac{1}{2}\left(\|Tk_\lambda\|^r + \|T^*k_\lambda\|^r + \langle\frac{1}{p}f(|T^{rp}|) + \frac{1}{q}g(|(T^{rq})^*|)k_\lambda, k_\lambda\rangle\right).$$

对单位向量 k_λ 取上确界，可得所需的不等式。 □

定理 3.11. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则对于任意 $\nu \in [0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$,

$$\|T\|^2 \leq ((1-\nu)^2 + \nu^2)\boldsymbol{ber}^2(T) + \nu\|T - tI\|^2 + (1-\nu)\|T - itI\|^2.$$

证明. 我们使用以下不等式，该不等式由下式得到

$$\begin{aligned}&(\nu\|tb - a\|^2 + (1-\nu)\|itb - a\|^2)\|b\|^2 \\ &\geq \|a\|^2\|b\|^2 - ((1-\nu)Im\langle a, b\rangle + \nu Re\langle a, b\rangle)^2 (\geq 0)\end{aligned}$$

对于任意的 a、$b \in \mathcal{H}$、$\nu \in [0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$。因此,

$$\begin{aligned}\|a\|^2\|b\|^2 &\leq ((1-\nu)Im\langle a, b\rangle + \nu Re\langle a, b\rangle)^2 \\ &\quad + (\nu\|tb - a\|^2 + (1-\nu)\|itb - a\|^2)\|b\|^2 \\ &\leq ((1-\nu)^2 + \nu^2)|\langle a, b\rangle|^2 + (\nu\|tb - a\|^2 + (1-\nu)\|itb - a\|^2)\|b\|^2.\end{aligned}$$

取 $a = Tk_\lambda$、 $b = k_\lambda$，使得 $\|k_\lambda\| = 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\|Tk_\lambda\|^2\|k_\lambda\|^2 &\leq ((1-\nu)Im\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle + \nu Re\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle)^2 \\ &\quad + (\nu\|tk_\lambda - Tk_\lambda\|^2 + (1-\nu)\|itk_\lambda - Tk_\lambda\|^2)\|k_\lambda\|^2 \\ &\leq ((1-\nu)^2 + \nu^2)|\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle|^2 \\ &\quad + (\nu\|tk_\lambda - Tk_\lambda\|^2 + (1-\nu)\|itk_\lambda - Tk_\lambda\|^2)\|k_\lambda\|^2.\end{aligned}$$

对所有单位向量 k_λ 取上确界，即得所需结果。 □

References

1. Y. Al-manasrah 和 F. Kittaneh，《两种精细杨氏不等式的推广》，Positivity 19 (2015)，第 4 期，757–768。2. M. Bakherad，《算子矩阵的一些 Berezin 数不等式》，捷克斯洛伐克数学杂志 68(4)(2018)，997–1009。3. M. Bakherad、K. Shebrawi，《涉及非对角算子矩阵的数值半径不等式的上界》，泛函分析年刊，J. 9(3)(2018)，297–309。4. M. Bakherad、R. Lashkaripour、M. Hajmohamadi 和 Ulas Yamanci，《Berezin 数不等式的完全精细化》，J. Math. Inequal. 4 13 (2019)，1117–1128。5. F.A. Berezin，《算子的协变符号与逆变符号》，苏联科学院数学系列 6(1972)，1117–1151。6. F.A. Berezin，《量子化》，苏联科学院数学系列 8(1974)，1109–1163。7. S.S. Dragomir，《希尔伯特空间上线性算子的范数和数值半径的一些不等式》，淡江数学杂志 39(1) (2008)，1–7。8. M.T. Garayev、M. G¨urdal、S. 和 Saltan，《再生核希尔伯特空间算子的 Hardy 型不等式及相关问题》，Positivity，21 (4) (2017)，1615–1623。9. M.T. Garayev、M. G¨urdal 和 A. Okudan，《算子的 Hardy-Hilbert 不等式及 Berezin 数的幂不等式》，Math. Inequal. Appl.，19 (3) (2016)，883–891。10. M. Hajmohamadi、R. Lashkaripour 和 M. Bakherad，《Berezin 数不等式的改进》，线性与多重线性代数 68(6) (2020)，1218–1229。11. P.R. Halmos，《希尔伯特空间问题集》，第 2 版，施普林格，纽约，1982。12. G.H. Hardy、J.E. Littlewood 和 G. Polya，《不等式》，第 2 版，剑桥大学出版社，剑桥，1988。13. M.T. Karaev，《函数希尔伯特空间上算子的 Berezin 符号与可逆性》，J. Funct. Anal. 238(2006)，181–192。14. M.T. Karaev，《算子理论各种问题中的再生核与 Berezin 符号技术》，Complex Anal. Oper. Theory，7 (2013)，983–1018。15. F. Kittaneh，《关于希尔伯特空间算子若干不等式的注记》，数学科学研究所刊 24 (2) (1988)，283–293。16. T. Kosem，《 $\|f(A+B)\|$ 与 $\|f(A)+f(B)\|$ 之间的不等式》，Linear Algebra Appl. 418 (1)(2006)，153–160。17. U. Yamanci、M. Tapdigoglu，《与 Berezin 数不等式相关的一些结果》，土耳其数学杂志 43, (4) (2019)，1940–1952。18. U. Yamanci、T. Remziye、M. Gurdal，《Berezin 数、Gruss 型不等式及其应用》，马来西亚数学科学学会通报 (2019) 1–10。

1,2,3Department of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Za-hedan, I.R.Iran. 4 P.G. Department of Mathematics, Utkal University, Vanivi-har, Bhubaneswar-751004, India电子邮箱：mojtaba.bakherad@yahoo.com 和 monire.hajmohamadi@yahoo.com，电子邮箱：lashkari@hamoon.usb.ac.ir 和 satyajitsahoo2010@gmail.com