Hecke–Kiselman 代数的 Gelfand–Kirillov 维数 as

Magdalena Wiertel

arXiv:2301.06613v1 [math.RA] 16 Jan 2023

摘要

本文研究与有限有向图 Θ 相关联的域 k上的 Hecke–Kiselman代数 A_Θ。已知每个这样的代数都是 Ufranovskii 意义下的自动机代数。特别是，当其 Gelfand–Kirillov 维数有限时，该维数为整数。本文找到了图 Θ 的一个数值不变量，它决定了 A_Θ 的维数。具体而言，我们证明， A_Θ 的 Gelfand–Kirillov 维数等于Θ 中循环子图的数量与某种特殊类型的有向路径的数量之和，其中每个子图和路径均按某个特定次数计数。

2010年数学主题分类：16P90, 16S15, 16S36, 20M05, 20M25, 05C25.
关键词：Hecke–Kiselman 代数、幺半群、Gelfand–Kirillov 维数、约化词、自动机代数

1 引言

设 $\Theta = (V(\Theta)\ E(\Theta))$ 是一个具有 n 个顶点 x_1，.....， x_n的有限有向简单图。在 [6] 中，与 Θ 相关联的 Hecke–Kiselman 幺半群 HK_Θ 由以下表示定义。

(i) HK_Θ 由元素 $x_i^2 = x_i$生成，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$,

(ii) 若顶点 x_i、 x_j 在 Θ中不相连，则 $x_i x_j = x_j x_i$,

(iii) 若 x_i、 x_j 在 Θ中由箭头 $x_i \to x_j$ 相连，则 $x_i x_j x_i = x_j x_i x_j = x_i x_j$。

以 $k[\mathrm{HK}_\Theta]$ 表示 HK_Θ 在域 k 上的幺半群代数。由于基域 k 对我们的讨论并无影响，我们将此代数记为 A_Θ。

Hecke–Kiselman 幺半群是 0–Hecke 幺半群的自然商。后者的幺半群代数是著名的 Iwahori–Hecke 代数的特化；这些代数在 Coxeter 群的表示论中至关重要， [4], [7]。此外，0–Hecke 幺半群也应用于代数组合学，例如见 [11]。对 Hecke–Kiselman 幺半群及其代数的研究，属于对源自 Coxeter 群的代数结构的各种推广的研究范畴。Hecke–Kiselman 幺半群及其幺半群代数的若干组合性质和结构性质已得到研究，例如见 [5, 6, 12, 13, 14]。

本文旨在用底层图的数值不变量来描述与有向图相关联的 Hecke–Kiselman代数的 Gelfand–Kirillov 维数。该维数描述了代数增长的渐近行为，是研究非交换代数的有用工具。关于 Gelfand–Kirillov 维数的基础信息，请参见 [8]。

我们以 [12] 中得到的以下结果为出发点。

The定理 1.1. 设 Θ 是有限有向简单图。以下条件等价。

(1) Θ 不含由长度为 0 的有向路径连接的两个不同简单圈 ,

(2) A_Θ 是满足多项式恒等式的代数,

(3) A_Θ 的 GK 维数 $< \infty$,

(4) 幺半群 HK_Θ 不包含秩为 2 的自由子幺半群。

我们的论证依赖于 [13], 中发现的性质：与有向图相关联的 Hecke–Kiselman 代数是自动机代数。这类代数是作为具有有限 Gr¨obner 基的代数的一种推广而引入的, [17]。自动机代数是指其标准形集合可由有限确定性自动机识别的代数。这一性质对代数的组合学和增长有若干影响。特别是, 当自动机代数的 Gelfand–Kirillov 维数有限时，它是一个整数, [17], , 并且可以用代数元素的某些形式来表示, [16]。为得到定理 3.6 中的主要结果，我们研究了 Hecke–Kiselman 幺半群中字的组合学。我们的方法广泛运用了 [13] 中所描述的 Hecke–Kiselman 代数的 Gr¨obner 基，以及 [14], 中得到的对任意长度有向圈所关联的幺半群中几乎所有元素的刻画。

2 预备知识

接下来，让我们回顾一些关于有限生成代数语境下字的组合学的定义。

令 F 表示集合 X 上由 $n \geqslant 3$ 个自由生成元 x_1、.....、x_n 生成的自由幺半群。令 k 为一个域，并令 $k[F] = k\mathrm{h}x_1$、.....、$x_n\mathrm{i}$ 表示相应的、定义在 k 上的自由代数。对于任意 $x \in X$ 和 $w \in F$，我们用 $|w|_x$ 表示 x 在 w 中出现的次数。我们用 $|w|$ 表示字 w 的长度。$w \in F$ 的支撑记为 supp(w)，表示所有满足 $|w|_x > 0$ 的 $x \in X$ 的集合。若对于某些 v_1、.....、$v_{r+1} \in F$，有 $v = v_1 x_{i_1} \cdots v_r x_{i_r} v_{r+1}$，则称字 $w = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in F$ 是字 $v \in F$ 的子词，其中 $x_{i_j} \in X$。如果 v_2、.....、v_r 是平凡字，则称 w 是 v 的因子。字 w 的前缀（后缀）是指任意因子 $u \neq 1$，其中对于某个 v, $w = uv$ （$w = vu$）。

假设在 X 上固定了良序 $<$，并考虑其在 F 上诱导的次数字典序（也记作 $<$）。设 A 是 k 上的有限生成代数，生成元为r_1、.....、r_n，并设 $\pi\colon\ k[F] \to A$ 是 k-代数的自然同态，满足 $\pi(x_i) = r_i$。我们假设 ker(π) 由形如 $w - v$的元素张成，其中 w、$v \in F$（换言之, A是一个半群代数）。令 I 为 F 中由 ker(π) 的所有首项单项式构成的理想。与 A 的所选表示以及 F上的所选序相对应的正规词集合定义为 $N(A) = F \setminus I$。描述集合 $N(A)$与求理想 $J = \ker(\pi)$（属于 $k[F]$）的 Gr¨obner 基有关。回顾一下，若 G 是 J 的子集，则称其为 J （或 A）的 Gr¨obner 基，若$0 \notin G$, J 由 G 作为理想生成，并且对每个非零 $f \in J$，都存在 $g \in G$，使得 g 的首项单项式 $\overline{g} \in F$ 是 f的首项单项式 $\overline{f}$ 的因子。若 G 是 A的 Gr¨obner 基，则字 $w \in F$ 是正规词，当且仅当 w 不含 $g \in G$中的首项单项式作为因子。

与有向图相关联的 Hecke–Kiselman 代数的 Gr¨obner 基已在 [13] 中得到刻画。对于任意有向图 Θ, $t \in V(\Theta)$ 和 $w \in F = \langle V(\Theta) \rangle$，若 $|w|_t = 0$，且不存在满足 $x \to t$ 属于 Θ 的 $x \in \mathrm{supp}(w)$, 我们记作 $w \nrightarrow t$。类似地，我们定义 $t \nrightarrow w$: 同样假设 $|w|_t = 0$, 且不存在箭头 $t \to y$，其中 $y \in \mathrm{supp}(w)$。当 $t \nrightarrow w$ 且 $w \nrightarrow t$ 时，我们记作 $t \nleftrightarrow w$。若顶点 $v \in V(\Theta)$ 没有以 v 为起点的箭头，则称其为汇点。类似地，可以定义源顶点。汇点和源顶点统称为终端顶点。

定理 2.1 ([13]). 设 Θ 是一个有限简单有向图，其顶点为 $V(\Theta) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。将集合 $V(\Theta)$ 上的自然序 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 扩展为自由幺半群 $F = \mathrm{h}V(\Theta)\mathrm{i}$ 上的次数字典序。考虑代数 $k[F]$ 上的以下一组化简规则 T:

(i) (twt, tw)，对于任意 $t \in V(\Theta)$ 和满足 $w \nrightarrow t$ 的 $w \in F$,

(ii) (twt, wt)，对于任意 $t \in V(\Theta)$ 和满足 $t \nrightarrow w$ 的 $w \in F$,

(iii) $(t_1 w t_2,\ t_2 t_1 w)$，对于任意的 t_1、$t_2 \in V(\Theta)$ 以及满足 $t_1 > t_2$ 和 $t_2 \nleftrightarrow t_1 w$ 的 $w \in F$。

那么，集合 $\{w-v$，其中 $(w$、 $v) \in T\}$ 构成代数 A_Θ 的 ***Gr¨obner*** 基。

为强调上述定理的用途，每当我们考虑 Hecke–Kiselman 代数 $A_\Theta = k[\mathrm{HK}_\Theta]$ 的正规词集合 $N(A_\Theta)$，且该集合是由集合 T 经化简规则得到的，我们就称 $N(A_\Theta)$ 中的元素为 A_Θ 的约化词。

这一结果导出了以下推论，该推论在 [13]，中得到，将有助于计算 Hecke–Kiselman 代数的 Gelfand–Kirillov 维数。

定理 2.2。 假设 Θ 是有限简单有向图。那么，对于秩为 n 的底层自由幺半群上的任意次数字典序， A_Θ 都是一个自动机代数。因此，如果 ***Gelfand–Kirillov*** 维数 $\mathrm{GKdim}(A_\Theta)$ 有限，那么它是一个整数。

回顾一下，若 $N(A)$ 是正则语言，则称 A 为自动机代数。这意味着，该集合可由 F 的一个有限子集经有限次并集、乘法以及由 $T^* = \bigcup_{i\geqslant 0} T^i$ 定义的运算 $*$ 得到，其中 $T \subseteq F$。类似地，我们为 $T \subseteq F$ 定义 $T^+ = \bigcup_{i\geqslant 1} T^i$。若对于某个 $w \in F$，有 $T = \{w\}$，则记作 $T^* = w^*$ 和 $T^+ = w^+$。由 F 中的字母经递归地使用并集、乘法和 $*$ 运算构成的表达式称为正则表达式。自动机代数的重要性源于自动机理论中的深刻结果。回顾一下，有限自动机是一个有向图，其中有两个指定的顶点集合（可以相交），分别称为初始状态和终止状态；边上标记着有限字母表 X 中的字母。如果一个自动机只有一个初始顶点，并且在每个顶点处，对于每个字母，都恰有一条以该顶点为起点且标记为该字母的边，则称之为确定性自动机。自动机定义的语言由所有这样的字组成：从任一初始顶点出发，沿一条路径到达任一终止顶点时，依次读出路径上的标记即可得到这些字。著名的克莱尼定理指出，每个正则语言都可以由一个确定性自动机定义。正如下文将要看到的，这一性质对于有限 Gelfand–Kirillov 维数的自动机代数尤其有用。

众所周知，自动机代数的 GK 维数要么是无穷大，要么是一个整数，例见 [17] 第 97 页的定理3。此外，在有限维情形下，其维数与正规词所成正则语言的某些形式的正则表达式表示有关，见 [16]。我们重新表述 [16] 的结果，使其适用于 Hecke–Kiselman 代数。

先介绍必要的记号和说明。正则语言 $L \subseteq F$ 的密度函数（其中 F 是集合 X 上的自由幺半群）定义为 $p_L(n) = |L \cap X^n|$，即 L 中长度为 n 的元素个数。给定两个函数 $f(n)$ 和 $g(n)$，若存在正常数 C 和 n_0，使得对每个 $n \geqslant n_0$ 都有 $f(n) \leqslant Cg(n)$，则称 $f(n)$ 为 $O(g(n))$。特别地，自动机代数 A 的正规词所成正则语言 $N(A)$ 的密度函数为 $O(n^{k-1})$，当且仅当存在某个 $k \geqslant 1$，使得 A 的增长为 $O(n^k)$；因此，$\mathrm{GKdim}(A) \leqslant k$。由此可得以下结论，它是 [16] 中定理3的推论。

定理 2.3 ([16], 定理3). **</style}自动机代数 的 Gelfand–Kirillov 维数不大于，对于某个，当且仅当正规词集合 (**A) 可以表示为以下形式的正则表达式的有限并集

$$v_0 w_{i_1}^* v_1 w_{i_2}^* v_2 \dots v_{s-1} w_{i_s}^* v_s, \tag{2.1}$$

其中 v_0、 $\dots$、 $v_s \in F$、 w_{i_1}、 $\dots$、 $w_{i_s} \in F$ 和 $0 \leqslant s \leqslant k$。

我们旨在确定有限维情形下 Hecke–Kiselman 代数 A_Θ 的 Gelfand–Kirillov 维数。根据定理 1.1，这意味着图 Θ 不包含由有向路径连接的两个环。正如我们将要证明的，在这种情况下，任意一个形如 (2.1) 的词族都可以改写，使得每个w_{i_j} 对应于图 Θ 中的某个环 C_j，并且 v_i 包含一个顶点，该顶点通过一条边与环 C_{i+1} 相连，其中 $i \neq s$。为了估计维数，我们将求出这种形式的字所能达到的最大 s。

Θ 中属于某个环的每个顶点都称为环顶点，或 HK_Θ 的循环生成元。不是环顶点的顶点称为非环顶点（相应地，称为非环生成元）。

我们以一条关于 (2.1) 中元素 w_{i_j} 可能形式的一般观察结束本节。

观察 2.4. 设 Θ 是一个有限简单有向图，使得 A_Θ 具有有限的 *Gelfand–Kirillov* 维数。设 $C_1, \ldots, C_k$ 为 Θ 中互不相交的简单环，其中 C_l 的形式为

$$x_{1,l} \to x_{2,l} \to \ldots \to x_{n_l,l} \to x_{1,l},$$

对某些 $n_l \geqslant 3$ 和 $1 \leqslant l \leqslant k$。假设 F 上的任意次数字典序满足：对于某些 $x \in C_r$ 和 $y \in C_s$，$x < y$ 当且仅当 $r < s$，或者当 $r = s$ 和 $x = x_{p,r}$、$y = x_{q,r}$ 对于 $p < q$ 成立时。假设对于某个 $1 \neq w \in F$，对每个 $m \geqslant 1$，字 $w^m \in F$ 关于定理 *2.1* 中的约化集 T（相对于所选的次数字典序构造）都是约化的。那么 w 是形式为 $(q_{N,i})^\infty$ 的全支撑无限词的一个因子，其中 $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_N \to x_1$ 是环 C_k 之一，满足 $N = n_k$，$q_{N,i} = x_N(x_1 \ldots x_i)(x_{N-1} \ldots x_{i+1})$，且 $i \in \{0, \ldots, N-2\}$。这里假设 $q_{N,0} = x_N x_{N-1} \ldots x_1$。

证明。设 $w \neq 1$，使得对于每个 $m \geqslant 1$，字 w^m 都是约化字。假设 $y \in \mathrm{supp}(w)$ 是 Θ 中的一个非环顶点。首先，我们将证明此时 w 的支撑也会包含一个源顶点或汇点。若 y 不是终端顶点，由定理 2.1 中的条件 (i) 和 (ii) 可知，存在 u_1、$z_1 \in V(\Theta)$、$u_1 \neq z_1$，使得 $u_1 \to y$、$z_1 \leftarrow y$ 属于 Θ，且 u_1、$z_1 \in$ 属于 $\mathrm{supp}(w)$。类似地，若 u_1 不是汇点，则存在 $u_2 \in$ 属于 $\mathrm{supp}(w)$，使得 $u_2 \to u_1$。对称地，若 z_1 不是源顶点，则对于某个 $z_2 \in$ 属于 $\mathrm{supp}(w)$，有 $z_2 \leftarrow z_1$ 属于 Θ。此外，$\{u_1, u_2\} \cap \{z_1, z_2\} = \emptyset$，因为 y 是非环顶点，且 $z_2 \notin \{y, z_1\}$、$u_2 \notin \{y, u_1\}$。我们继续这一过程，直到所选顶点中至少有一个是终端顶点或环顶点。由于图是有限的，经过有限步后，我们得到一条路径 $u_s \to \cdots \to u_1 \to y \to z_1 \to \cdots \to z_r$，使得 u_1、……、u_s、z_1、……、$z_r \in$ 属于 $\mathrm{supp}(w)$，并且要么 u_s 是环顶点，要么是源顶点；类似地，要么 z_r 是环顶点，要么是汇点。由定理 1.1 以及 A_Θ 具有有限 Gelfand–Kirillov 维数这一假设，图 Θ 不包含由路径连接的两个环，因此 u_s 和 z_r 不可能同时是环顶点。因此，正如所声称的，要么 u_s 是源顶点，要么 z_r 是汇点。然而，根据定理 2.1，汇点或源顶点在约化字中至多出现一次。由于 w^2 是约化字，且包含至少两次 u_s 和 z_r，它们不可能是终端顶点，这就导致矛盾。

我们已证明，w 的整个支撑由环生成元构成。将这些环记为 C_1、……、C_q。由于 A_Θ 的 Gelfand–Kirillov 维数有限，任何顶点都不能属于两个环；而且，如果 w 支撑中的两个元素属于不同的环，那么它们之间不存在 Θ 中的有向路径。由定理 2.1 以及 F 上假设的次数字典序可得 $w = w_1 w_2 \ldots w_q$，其中 $\mathrm{supp}(w_p) \subseteq V(C_{i_p})$，这里 C_{i_p} 是两两不同的环，$p =$ 1取遍…… q。然而，由于 w^m 是约化的，对所有 $m \geqslant 1$，容易推出 $q = 1$，因此 w 的支撑完全属于同一个环。设该环 C 的形式为 $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_N \to x_1$。假设存在一个不在 w支撑中的 x_i。取指标 i，使得 $x_i \notin \mathrm{supp}(w)$，但 $x_{i-1} \in \mathrm{supp}(w)$；其中，对于 $i = 1$，取 $i - 1 = N$。那么 w^2 包含一个形如 $x_{i-1} u x_{i-1}$ 的因子，使得 $x_i \notin \mathrm{supp}(u)$。由定理 2.1 中 Gr¨obner 基的描述可知，此时 w^2 不是约化的。这意味着 $\mathrm{supp}(w) =$ {x_1、……、x_N}。由命题 2.14 可知，若每个$n \geqslant 1$对应的 w^n 都是约化的，则对于某个 $m \geqslant 1$，字 w^m 具有如下形式：aq_N^k、$_ib$，其中 $i \in$ {0、……、$N-2$}，$k \geqslant 1$和a 以及 b 均属于明确描述的有限词族。于是，根据假设，w^{2m} 具有约化形式 aq_N^k、$_ibaq_N^k$、$_ib$。特别地，这个字含有一个因子 q_N、$_i$，因此由 [14], 中的定理 2.1 可知，ba 要么具有 q_N、$_i$ 的形式，要么是平凡字 1。因此，由于 w 是 $w^m = aq_N^k$、$_ib$的前缀和后缀，它也是形如 $(q_N$、$_i)^\infty$的无限词的因子，其中某个 $i \in$ {0、……、$N-2$}。断言得证。

□

3 主要结果

考虑一个不含有由有向路径连接的两个不同环的有向图 Θ。那么，根据定理 1.1，相应的 Hecke–Kiselman 代数 $A_\Theta = k[\mathrm{HK}_\Theta]$ 具有有限 Gelfand–Kirillov 维数。

如果该图不含任何有向圈，那么相应的 Hecke–Kiselman幺半群是有限的，例如参见 [2]。在这种情况下，幺半群代数 A_Θ的 Gelfand–Kirillov 维数为 0。

因此，本节中我们假设 Θ 至少包含一个环。将图的简单圈记为 C_1、.....、C_k，其中 $k \geqslant 1$ 为某个数，并假设环 C_j的长度为 $i_j \geqslant 3$，其中$j = 1$、.....、 k。

令 Θ' 为 Θ 的导出子图，其顶点集由所有圈顶点以及所有通过有向路径与至少一个环相连的顶点构成。我们称这样的子图 Θ' 为 Θ的最大环可达子图。

特别地，对于任意不属于任何环的顶点 $x \in V$（Θ'），如果存在一条从 x 到某个环的路径（从某个环到 x的路径），那么 x 与所有环之间的所有路径都从x 通向这些环（从这些环通向 x），否则 Θ 将包含由一条有向路径连接的两个不同环。

考虑由 Θ的顶点生成的自由幺半群上的任意次数—字典序。回顾一下，约化词指的是关于定理 2.1 中化简规则的标准形字。

我们首先估计 Hecke–Kiselman 幺半群的约化字中某些非循环顶点出现的次数。约定：对于任意顶点 x，在 x 中恰有一条长度为 0、终点（或起点）为该顶点的路径。

引理 3.1。设 Θ 是一个有限简单有向图，其环记为 $C_1, \ldots, C_k$，且 Θ' 是它的最大环可达子图。对于每个顶点 $x \in V(\Theta') \setminus (V(C_1) \cup \ldots \cup V(C_k))$，任意一条连接 x 与某个环的有向路径，要么都从 x 通向环，要么都从环通向 x。在前一种情况下，记 k_x 为 Θ 中终点为顶点 x 、长度非负的有向路径条数；在后一种情况下，记 k_x 为 Θ 中起点为 x 、长度非负的有向路径条数。于是，在 HK_Θ 的任意约化字中，元素 x 出现的次数至多为 k_x 。

证明。设 x 是图 Θ 的最大环可达子图 Θ' 中的任意一个顶点，但不属于环 $C_1, \ldots, C_k$。首先假设存在从这些环通向x的有向路径。为证明该结论，我们对图 Θ中以x 为起点的路径的最大长度 $l(x)$ 使用归纳法。

若 $l(x) = 0$，则 x 是图 Θ 中的汇点，因此没有以 x为起点的边。于是，对任意 $w \in \mathrm{HK}_\Theta$，我们有 $xwx = wx$ （见定理 2.1 中的条件 (ii)），因此 x 在任意约化字中至多出现一次。

现在假设对某个 $x \in V(\Theta') \setminus (V(C_1) \cup \ldots \cup V(C_k))$，有 $l(x) > 0$，并令 $z_1, \ldots, z_m$为 Θ中所有满足对每个 $i = 1, \ldots, m$都存在一条边 $x \to z_i$的顶点。由最大环可达子图的定义可知，所有 $z_1, \ldots, z_m$ 也都在 Θ'中。此外，对 $i = 1, \ldots, m$，有 $l(z_i) < l(x)$。根据归纳假设，每个 z_i 在任意约化字中至多出现 k_{z_i} 次，其中 k_{z_i} 是以 z_i为起点的路径数。我们知道，若形如 xwx且满足 $|w|_x = 0$ 的字在 HK_Θ 中是约化的，那么特别有 $x \to y$，其中某个 $y \in$ 属于 $\mathrm{supp}(w)$；否则 $x \nrightarrow w$且 $xwx = wx$ 在 HK_Θ中。由此可知，在任意两个生成元x之间，至少有一个 $z_1, \ldots, z_m$出现。正如前面所述，每个 z_i 在任意约化字中至多出现 k_{z_i} 次。因此， x 在任意约化字中至多出现 $k_{z_1} + \ldots + k_{z_m} + 1$次。另一方面，在 Θ 中，以 x为起点的长度为 0 的路径恰有一条。其他每条以 x 为起点的路径，都唯一确定一条以 $z_1, \ldots, z_m$之一为起点的路径；而每条以 z_i为起点的路径 p，都定义一条以 $x \to z_i$开头、后接 p的路径。因此，在图 Θ中，以 x 为起点的路径总数恰为 $k_{z_1} + \ldots + k_{z_m} + 1$ 。结论得证。

存在从 x 到某个环的路径的情形，可以通过对称论证处理，并对以 x 结尾的路径的最大长度使用归纳法。

□

注意，对于最大环可达子图 Θ' 中的每个非循环顶点 x，若 x 与各个环之间的所有路径都从环通向 x （反之，从 x 通向各个环），那么从 x 出发（分别以 x 为终点）的、位于 Θ 中的所有路径数量，与 Θ' 中这类路径的数量相同。

下一步，我们将使用引理 3.1 证明，每个形如 $w_1^* v_1 w_2^* \dots v_{s-1} w_s^*$、用于描述代数 A_Θ 中约化词的正则表达式，都可以用至多一定数量的星号来表示。为此，我们需要在 Θ 的顶点集合上引入某种序。在本节余下部分中，我们将假定已经选定了这样的序。

定义 3.2（图顶点上的序）。设 Θ 是一个图，其环为 C_1、$\dots C_k$，长度为 $n(j) \geqslant 3$，其中 $j = 1, \dots\dots, k$。记 Θ' 为 Θ 的最大环可达子图。如前所述，对于 Θ' 中不属于任何环的任意顶点 x，x 与任一环之间的所有有向路径要么都从 x 出发，要么都通向 x。对于每个这样的顶点，记 k_x 为 Θ 中长度为 $\geqslant 0$ 且终点或起点为 x 的有向路径数，具体取决于 x 与各环之间路径的方向。在这些顶点的集合上任意定义一个序，使得若 $k_x < k_y$ 成立，则 $y < x$。

设 C_j 具有如下形式：$x_{1,\,j} \to \cdots \to x_{n(j),\,j} \to x_{1,\,j}$，其中 $n(j) \geqslant 3$，且 $j = 1, \dots\dots, k$。在所有圈顶点的集合上定义一个序，使得若 $j < m$ 或 $j = m$ 且 $i < l$，则 $x_{i,\,j} < x_{l,\,m}$。此外，假设所有圈顶点都小于环外的任意顶点。

Fina.....地，在不属于 Θ' 的 Θ 顶点集合中任选一种序，例如使得所有这些顶点都大于 Θ' 的顶点。

注意，只要图 Θ 不包含由有向路径连接的两个不同的环，就可以定义满足上述所有条件的序。

在下一个引理中，我们描述由 $w^* v w^*$ 描述的约化词族可能具有的形式，其中 $\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$，对某个 n 成立。

引理 3.3。如果一个约化词族可由以下形式的正则表达式描述：$u^* v w^*$ *with*支集(u),支集$(w) \subseteq V(C_n)$，其中 C_n 是一个环，那么 v 要么包含一个与 C_n 由一条边连接的顶点，要么这个词族可表示为有限个以下形式的正则表达式之和：pr^*q 或 p，其中 p、q 和 r 是一些字。

证明。令 $u^* v w^*$ 为描述满足 $\mathrm{supp}(u)$、$\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$ 的约化字的正则表达式，其中 C_n 是一个环。首先我们断言，或者 $\mathrm{supp}(v) \subseteq V(C_n)$，或者 v 包含一个非环顶点。事实上，根据定义 3.2 中对 Θ 顶点的序的定义，以及图中不存在由有向路径连接的两个不同环这一事实，对应于不同环上顶点的生成元彼此交换。因此，每个约化字 w（满足 $\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_1) \cup \cdots \cup V(C_k)$）中的不同环元素都按如下方式分组：若 $w = w_1 \cdots w_j$，其中 $w_i \in V(C_{n(i)})$ 且 $w_l \in V(C_{n(l)})$，则对所有 $i < l$，都有 $n(i) \leqslant n(l)$。因此，若满足 $\mathrm{supp}(u)$、$\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$ 的词族 $u^* v w^*$ 是约化的，那么或者 $\mathrm{supp}(v) \subseteq V(C_n)$，或者 v 包含一个非环生成元。

现在考虑第一种情形，即 $u^* v w^*$ 由约化词组成，且 $\mathrm{supp}(u)$、$\mathrm{supp}(v)$、$\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$。我们接下来证明，此时 $u^* v w^*$ 可以表示为有限个至多含一个克林星号的表达式之和。根据观察 2.4 证明中的推理可知，u、v 和 w 都是无限词 $(x_N(x_1 \dots x_l)(x_{N-1} \dots x_{l+1}))^\infty$ 的因子，简记为 $q_N^\infty{}_{,\,l}$；其中某个 $l \in \{0, \dots, N-2\}$，且 N 取决于 n。此外，对于非负的 α_i、β 以及字 a、a'、b、b'，我们可以分别将 $u = a q_N^{\alpha_1}{}_{,\,l} b$、$v = a q_N^{\beta}{}_{,\,l} b'$ 和 $u = a' q_N^{\alpha_2}{}_{,\,l} b'$ 写成这些字的形式，其中它们分别是字 $q_N{}_{,\,l}$ 的后缀和前缀，长度至多为 $N-1$。因此，ba 和 $b'a'$ 要么都是平凡字 1，要么都具有 $q_N{}_{,\,l}$ 的形式。于是，$u^* v w^*$ 等于集合 $\{a q_N^{l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \beta_3}{}_{,\,l} \quad b' : l_1, l_2 \geqslant 0\}$，其中某些正整数 $\beta_i\,(i = 1, 2, 3)$ 满足：若 $ba = 1$，则 $\beta_1 = \alpha_1$；否则 $\beta_1 = \alpha_1 + 1$；若 $b'a' = 1$，则 $\beta_2 = \alpha_2$；否则 $\beta_2 = \alpha_2 + 1$。根据 [15] 中的命题 2.2，存在一个正整数 n_0 和一个有限集 F，使得 $\{l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \beta_3\} = \{n_0 + kd : k \geqslant 0\} \cup F$，其中 $d =$ 是 β_1 和 β_2 的最大公因数。由此容易得到，$u^* v w^*$ 可以写成有限个至多含一个星号 $*$ 的正则表达式之和。

现在假设由 $u^* v w^*$ 描述的约化词族满足 $\mathrm{supp}(u)$,$\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$，且 v 含有一个非环顶点。对于字 v_s，我们可以写出 $v = v_s z v_c{}_{,\,v_c}$ 和一个非环顶点 $_{k}\,z$，使得 $\mathrm{supp}(v_c) \subseteq \bigcup V(C_j)$。假设 z 与一个环 $_{j=1}C_n$ 之间没有边相连。考察字 $v_c w$ 中顶点 x 第一次出现的位置，使得 $x \in V(C_n)$。那么，字 vw 含有一个形如 $zv'x$ 的因子，且 $\mathrm{supp}(v_c) \subseteq \bigcup V(C_j)$。此外，$x < z$ 和 $zv' \nleftrightarrow x$。$_{j \neq n}$

因此， vw 含有一个可以使用定理 2.1 中的约化 (iii) 化简的因子。由此得到的矛盾表明，对于任意形如 u^*vw^* 的约化词族，若 $\mathrm{supp}(u),\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_n)$ 且 $\mathrm{supp}(v) \nsubseteq V(C_n)$，那么对于环 C_n，因子 v 至少包含一个通过边与 C_n 相连的顶点。因此，结论得证。

□

推论 3.4。若 Θ 是一个有向图，其环为 $C_1, \ldots, C_k$，且对应的 *Hecke–Kiselman* 代数具有有限 *Gelfand–Kirillov* 维数，则

$$\operatorname{GKdim} A_\Theta \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1 \right),$$

其中 $\mathcal{A}_j$ 由 Θ 中与环 C_j 通过边相连的所有顶点组成，其中 $j = 1, \ldots, k$.

证明。只需证明， A_Θ 中每个如下形式的约化词族

$$w_1^* v_1 w_2^* \ldots v_{s-1} w_s^*$$

都可以表示为形式 (2.1) 的正则表达式，其中 $s \leqslant \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in \mathcal{A}_j} (k_x + 1)$。

由观察 2.4 可知，对于每个 n，都有 $\mathrm{supp}(w_n) \subseteq V(C_{j(n)})$，其中某个 $j(n) \in \{1, \ldots, k\}$，并且 w_n 是全支撑字 $(x_N(x_1 \ldots x_i)(x_{N-1} \ldots x_{i+1}))^\infty$ 的因子，其中 $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_N \to x_1$ 是满足 $N = n(j)$ 的环 C_j 之一，且 $i \in \{0, \ldots, N-2\}$。

由引理 3.3 可知，我们可以重写所考察的词族，使得对于任意两个 w_i、w_j（$i, j \in \{1, \ldots, s\}$），若 $\mathrm{supp}(w_i), \mathrm{supp}(w_j) \subseteq V(C_n)$ 对某个 $n \in \{1, \ldots, k\}$ 成立，则存在一个非环顶点 z，它与 C_n 由一条边相连，即 $z \in \mathcal{A}_n$。

由引理 3.1 可知，任何约化字中，具有此性质的所有顶点 z 总共至多出现 $\sum_{x \in \mathcal{A}_n} k_x$ 次。因此，在上述形式的正则表达式中，对于每个 $j = 1, \ldots, k$，形如 w^* 且满足 $\mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_j)$ 的因子至多出现 $\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1$ 次。

因为正如前文所述， A_Θ 中任何形如 $w_1^* v_1 w_2^* \ldots v_{s-1} w_s^*$ 的约化词族都可以重写，使得对于每个 w_i，都有 $\mathrm{supp}(w_i) \subseteq V(C_j)$ 对某个 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 成立，因此可得 $s \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1 \right)$。

由定理 2.3 可知， A_Θ 的正规（约化）字集是有限个形如 $v_0 w_{i_1}^* v_1 w_{i_2}^* v_2 \ldots v_{s-1} w_{i_s}^* v_s$ 的正则表达式的并集。因此，根据上述推理和定理 2.3，可得 $\operatorname{GKdim} A_\Theta \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1 \right)$，证毕。

□

下一步，我们要为代数 A_Θ 构造一个约化词族，该词族由一个恰好含有 $s = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1 \right)$ 个星号的正则表达式描述，并且对星号进行不同的正整数替换时，得到的元素也各不相同。由于对每个字 w，都有 $w^* w = w^+$，我们将用 w^+ 代替 $w^* w$；即使使用了 $+$，我们仍按正则表达式中的星号数量来计数。

回顾一下，我们假设 Θ 的顶点集合按定义 3.2 中的方式排序。

设 Θ 是一个含有环 C_1、……、C_k 的图，每个环的长度为 $i_j \geqslant 3$，其中 $j \in \{1, \ldots, k\}$。记 Θ' 为 Θ 的最大环可达子图。我们将通过下文描述的插入过程，构造 HK_Θ 中的一个约化词族。

步骤 1。首先，从平凡字 1 开始，将图 Θ 的环可达子图 Θ' 中后续出现的、但不是圈顶点的顶点插入某些字中。每一步都将选定的生成元 y 插入字的开头，并插入到（先前构造的）字中每个通过一条边与 y 相连的顶点之后。构造出的字中，每个顶点 y 恰好出现 k_y 次。注意，在此阶段得到的字不一定是约化字。具体过程如下所述。

由于 Θ 不含由有向路径连接的两个不同的环，因此要么至少存在一个终端顶点 y，满足 $k_y = 1$；要么该图是环 C_1、……、C_k 的不交并。若属于后一种情况，我们令 $w' = 1$，其中 1 是平凡字，然后转到步骤 2。

现在我们考虑 Θ' 中存在一些终端顶点的情形。注意， $y \,\mathrm{from} \Theta'$ 中的顶点当且仅当 $k_y = 1$ 时是终端顶点。令 $y_1^{(1)} < \ldots < y_{n_1}^{(1)}$ 为 Θ' 中所有满足 $k_{y_i^{(1)}} = 1$ 的顶点所构成的集合

并定义

$$w_1 = y_1^{(1)} y_2^{(1)} \cdots y_{n_1}^{(1)}.$$

接下来，取尚未在 w_1 中使用且不包含在图的任何环中的最大（相对于定义 3.2 中定义的序）顶点 $y^{(2)} \in V(\Theta')$。我们可以假设，环与 $y^{(2)}$ 之间的所有路径都从环通向 $y^{(2)}$。否则，所有这类路径都从 $y^{(2)}$ 通向环，推理过程对称。若对于某个非环顶点 $z \in V(\Theta')$，我们有 $y^{(2)} \to z$，那么 $k_z < k_{y^{(2)}}$，因而 $y^{(2)} < z$。根据 $y^{(2)}$ 的选取可得 $z \in \{y_1^{(1)}, \ldots, y_{n_1}^{(1)}\}$。此外，$w_1$ 中恰有 $k_{y^{(2)}} - 1$ 个与 $y^{(2)}$ 通过一条边相连的生成元（回忆一下，$k_{y^{(2)}}$ 是从 z 出发的路径数）。令 w_2 为由 w_1 构成的字，其中插入生成元 $y^{(2)}$，使其成为 w_2 的首字母，并且 $y^{(2)}$ 也在 w_2 中紧接着每个与 $y^{(2)}$ 在 Θ' 中通过一条边 $y^{(2)} \to y_j^{(1)}$ 相连的 $y_j^{(1)}$。生成元 $y^{(2)}$ 在 w_2 中恰好出现 $k_{y^{(2)}}$ 次。此外，字 w_2 中使用的每个生成元 z 在该字中恰好出现 k_z 次。

同样，如果我们已经为某个 $i > 1$ 构造了字 w_i，那么在下一步中，我们将若干个最大的非环生成元 $y^{(i+1)} \in V$（Θ'）插入这个字中，该生成元尚未出现在 w_i 的支撑中。在字 w_i 中，每个生成元 z 都出现 k_z 次。我们知道，每个满足 $y^{(i+1)} < z$ 的 z 都已经在 w_i 的支撑中。特别地，每个满足 $k_z < k_{y^{(i+1)}}$ 的生成元 z 都属于 w_i。如上所述，我们可以假设所有连接环与 $y^{(i+1)}$ 的有向路径都从环出发。因此，若图 Θ' 中有 $y^{(i+1)} \to p$，则 $p \in$ 支集(w_i)。将 $y^{(i+1)}$ 插入 w_i 的开头，并紧接在每个满足 $y^{(i+1)} \to z$ 的生成元 $z \in$ 支集(w_i) 之后，从而定义字 w_{i+1}。在这样的字 w_{i+1} 中，元素 $y^{(i+1)}$ 恰好出现 $\sum k_z + 1_{y^{(i+1)} \to z}$ 次。注意，在图 Θ 中从 $y^{(i+1)}$ 出发的所有路径，要么是长度为 0 的路径，要么由某个 z 对应的、从 z 出发且满足 $y^{(i+1)} \to z$ 的路径唯一确定。因此，在字 w_{i+1} 中，元素 $y^{(i+1)}$ 恰好出现 $\sum k_z + 1 = k_{y^{(i+1)}}$ 次。

经过上述有限步后，我们得到一个字 w'，其支撑包含 Θ' 的每个非环生成元 z，并且每个 w' 的支集 $z \in \mathrm{supp}(w')$ 在 w' 中恰好出现 k_z 次。

步骤 2。现在，我们将圈顶点插入步骤 1 中构造的字 w'。这一想法基于对上一步的轻微修改。具体而言，对于一个环 C_j，我们在构造出的正则表达式开头，以及每个通过一条边与 C_j 相连的顶点之后，插入形如 $w_0 w^* w_1$ 且具有 $\mathrm{supp}(w_0), \mathrm{supp}(w_1), \mathrm{supp}(w) \subseteq V(C_j)$ (w_0 和 w_1（它们随插入位置而变化）的正则表达式。对于每个环都重复此过程，从按照定义 3.2 中的排序意义下顶点最大的环开始。具体步骤如下所述。

对于每个顶点为 $x_{1,i}, \ldots, x_{n,i}$ 的环 $C_i (i = 1, \ldots, k)$，对于某个 $n \geqslant 3$，记 c_i 为如下形式的约化字：$x_{1,i} \cdots x_{n,i}$。

我们可以写成 $w' = v_1 \cdots v_{m+1}$，其中每个 v_i 都是长度尽可能短且以元素 z_i 结尾的字，该元素通过一条边与环 C_k 相连（可能带有 $v_{m+1} = 1$），其中 $i = 1, \ldots, m$。注意，如果 $\mathcal{A}_k$ 非空，则有 $m = \sum_{x \in \mathcal{A}_k} k_x$；否则有 $m = 0$。

对于每个通过一条边与长度为 n 的环 C_k 相连的顶点 z_i，我们可以选取 $j(i) \in \{1, \ldots, n\}$，使得满足以下条件之一：$z_i \to x_{j(i),k}$ 或 $x_{j(i),k} \to z_i$。然后我们定义如下正则表达式（即某个词族）r_k：

$$c_k^+(x_{1,k} \ldots x_{j(1)-1,k}) v_1 (x_{j(1),k} \cdots x_{n,k}) c_k^+ (x_{1,k} \ldots x_{j(2)-1,k}) \cdots$$
$$\cdots c_k^+ (x_{1,k} \ldots x_{j(m)-1,k}) v_m (x_{j(m),k} \cdots x_{n,k}) c_k^+ v_{m+1}.$$

在这个表达式中，克林星号 $*$ 恰好出现 $m_k = \sum_{x \in \mathcal{A}_k} k_x + 1$ 次，其中 $\mathcal{A}_k$ 由所有与环 C_k 在 Θ' 中通过一条边相连的顶点组成。如果 $\mathcal{A}_k$ 为空，也就是说，没有顶点与环 C_k 相连，并且 $w' = v_1$，我们将正则表达式 r_1 定义为 $c_k^+ v_1$。那么我们还假设 $\sum_{x \in \mathcal{A}_k} k_x = 0$，因此克林星号 $*$ 恰好出现 $1 = \sum_{x \in \mathcal{A}_k} k_x + 1$ 次。

接下来，我们对图 Θ中的每个环重复这一过程。更确切地说，在每一步中，我们将构造出的正则表达式 r_j 改写为 $v_1 \cdots v_{m+1}$，其中 $v_1, \ldots, v_m$ 是长度尽可能短且以一个与该环通过边相连的元素结尾的正则表达式

，该元素为 z_i ，与环 C_{j-1}通过边相连（可能带有 $v_{m+1}=1$）。如果没有顶点与 C_{j-1}通过边相连，我们令 $r_j=v_1$，即 $m=0$。注意，我们有 $m=\sum_{x\in\mathcal{A}_{j-1}}k_x$，其中当 $\mathcal{A}_{j-1}$ 为空时，令 $\sum_{x\in\mathcal{A}_{j-1}}k_x=0$。对于每个与长度为 n的环 C_{j-1} 通过边相连的顶点 z_i，我们可以选取 $j(i)\in\{1,\dots,n\}$，使得 $z_i\to x_{j(i),j-1}$ 或 $x_{j(i),j-1}\to z_i$。然后将正则表达式 r_{j-1} 定义为：

$$c_{j-1}^{+}(x_{1,j-1}\dots x_{j(1)-1,j-1})v_1(x_{j(1),j-1}\cdots x_{n,j-1})c_{j-1}^{+}(x_{1,j-1}\dots x_{j(2)-1,j-1})\cdots \\ \cdots c_{j-1}^{+}(x_{1,j-1}\dots x_{j(m)-1,j-1})v_m(x_{j(m),j-1}\cdots x_{n,j})c_{j-1}^{+}v_{m+1}. \tag{3.1}$$

和之前一样，如果$\mathcal{A}_{j-1}$ 为空，我们设定 $r_{j-1}=c_{j-1}^{+}r_j$。那么表达式 r_{j-1} 恰好包含 $m_{j-1}=m_j+\sum_{x\in\mathcal{A}_{j-1}}k_x+1$ 个克林星号。

通过这种方式，我们构造出一个正则表达式 r_1，它恰好包含 $m_1=m_2+\sum_{x\in\mathcal{A}_1}k_x+1=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{x\in\mathcal{A}_j}k_x+1\right)$ 个星号。我们将证明，作为一个词族的 r_1，由 HK_Θ 的约化词组成。这对于获得代数 A_Θ 的 Gelfand–Kirillov 维数下界至关重要。

引理 3.5。字(3.1) 相对于定理 *2.1* 中引入的系统，在 A_Θ 中是约化的。因此，GK 维数 $A_\Theta\geqslant\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{x\in\mathcal{A}_j}k_x+1\right)$。

证明。我们将证明，定理 2.1 中列出的 (i)–(iii) 型化简规则的首项，均不会作为因子出现在正则表达式 r_1所描述的族中的任何字 w 中。

(i) 型和 (ii) 型化简规则。首先，考虑 w 的任意一个因子，其形式为 tvt，其中t 是某个生成元，v 是满足 $t\notin\mathrm{supp}(v)$的任意一个字。我们需要证明，此时存在顶点 x、$y\in\mathrm{supp}(v)$，使得 $x\to v$ 且 $v\to y$。

首先假设 t是一个环顶点，令 $t\in V(C_j)$，其中 C_j是一个环，其顶点为$x_{1,\,j}$、……、$x_{n,\,j}$，且 $j\in\{1$、……、$k\}$中的某个元素。考虑由正则表达式 (3.1) 描述的族中的元素在自然投影 $\varphi_j:\mathrm{HK}_\Theta\to\mathrm{HK}^{C_j}$ 下的像，该自然投影映到与环 C_j关联的 Hecke–Kiselman 幺半群，并满足对所有 $x\notin V(C_j)$，均有 $\varphi_j(x)=1$。

根据该构造，每个这样的像都是 $(x_{1,\,j}\cdots x_{n,\,j})^{\infty}$ 的因子。因此，若 t 是一个环顶点 x_i，则 x_{i-1}，$x_{i+1}\in$ 是 v 的支集，其中对于 $i=1$ 和 $i=n$，我们分别设 $i-1=n$ 和 $i+1=1$。特别地，此时不可能有 $t\nrightarrow v$ 或 $t\nleftarrow v$。因此，我们可以考虑任意一个不在环上的 t，并断言：在每个因子 tvt 中，集合 $\mathrm{supp}(v)$ 都包含元素 p 和 q，它们通过一条边相连，且该边满足 t，使得 $t\to p$ 和 $q\to t$。

注意，每个汇点或源顶点 x 要么不属于图的最大环可达子图 Θ'，要么 $k_x=1$。因此，在所考虑的正则表达式所描述的每个字中，它至多出现一次。由此可知，t 既不是汇点也不是源顶点。

现在假设 t 是非环且不是终端顶点，见第 2 节，且它来自 Θ'。首先假设连接 t 与环的所有有向路径都从环指向 t。对于图 Θ' 中包含的任意 $z\to t$，我们都有 $z<t$。由词族的构造可知，这样的 z 会被插入到任意两个 t 的出现位置之间，即 $z\in$ 支集(v)，因此定理 2.1 中约化 (i) 的首项是不可能出现的。反过来，生成元 t 会被插入正则表达式的开头，以及紧接在任意顶点 y 之后的位置，使得 $t\to y$（y 被插入到 t之前）。特别地，所有这样的生成元 y 都出现在任意两个 t之间。因此可以直接得出，约化类型 (ii) 的首项不会作为 w的因子出现。所有有向路径都从 t 指向环的情形可以用几乎相同的方法处理。

Reduiii）类型的部分。我们声称，w 不包含任何形如 t_1vt_2 的因子，使得 $t_1>t_2$ a
nd$t_2\nleftrightarrow t_1v$

。如果 t_1 包含于某个环中，则 $t_1\geqslant t_2$ 意味着 t_2 也是一个环顶点。

设字 w 由正则表达式（3.1）描述。根据该构造，对于形如 $px_{i,j}$ 的 w 的每个因子，其中 $x_{i,j}$ 是一个环顶点，而 p 是满足 $p\nleftrightarrow x_{i,j}$ 的字，字 p 由环顶点 $x_{l,m}$ 组成，且满足 $m<j$。特别地，对于每个 $g\in\mathrm{supp}(p)$，我们有 $g<x_{i,j}$。因此，不存在上述形式且 t_2 为环元素的因子。

因此，我们可以假设 t_1 和 t_2 都是非环顶点。

我们断言，正规表达式 r_1 构造的第一部分中没有任何字 w_i 含有定理 2.1 中 (iii) 型的因子。为此，我们对 i 使用归纳法。首先注意到，该断言

对 $i = 1$ 成立，因为 w_1 中的生成元按递增序排列。因此，假设该断言对某个 w_i 成立，并将下一步插入的顶点记为 $y^{(i+1)}$，即 $\mathrm{supp}(w_{i+1}) \setminus \mathrm{supp}(w_i) = \{y^{(i+1)}\}$。那么，每个满足 $t_1 > t_2$ 且在 w_{i+1} 中的因子 $t_1 v t_2$ 都会有 $t_2 = y^{(i+1)}$，因为根据归纳假设，w_i 不含此类因子，并且 $\mathrm{supp}(w_i)$ 中的所有元素都大于 $y^{(i+1)}$。另一方面，在 w_{i+1} 中，紧邻 $y^{(i+1)}$ 之前的元素与 $y^{(i+1)}$ 之间有一条边相连。因此，在 w_{i+1} 中，任何形如 $t_1 v y^{(i+1)}$ 且满足 $t_1 > y^{(i+1)}$ 的因子，其最后一个生成元都与 $y^{(i+1)}$ 之间有一条边相连。归纳断言得证。

因此，我们知道在构造的第一步中构造的字 w'不含 (iii) 型因子。正则表达式 r_1 由 w' 插入循环生成元得到。于是，每个满足 $t_2 > t_1$ 和 $t_2 \nleftrightarrow t_1 w$ 的因子 $t_2 v t_1$ 都将以环顶点开头或结尾，也就是说，t_1 或 t_2 是环顶点。这是不可能的，正如我们前面所解释的。我们已经证明，定理 2.1 中由正则表达式 r_1 描述的任意w 都不含 (iii) 型因子，正如所声称的那样。引理的第一部分得证。

由于正则表达式 r_1 所描述的每个字都是约化的，代数 A_Θ 中的两个不同字相等，当且仅当它们作为由 Θ的顶点生成的自由幺半群的元素相等。

注意，这个词族中的每个元素 w 都由 m 个正整数 $(n_1, \dots, n_m)$ 唯一确定，其中 $m = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathrm{A}_j} k_x + 1 \right)$，且 $n_1, \dots, n_m$ 是形如 $(x_{1,j} \cdots x_{n,j})$ 的连续循环的幂，这些循环恰好对应于星形子图 $*$。若一个词族形如 $v_0 w_{i_1}^* v_1 w_{i_2}^* v_2 \dots v_{m-1} w_{i_m}^* v_m$，记 q为字 $v_0 v_1 \dots v_{m-1} v_m$的长度，并令 K为 Θ中循环子图的最大长度。那么，该词族中长度不超过 n的元素个数，记为 $d(n)$（$n \geqslant 1$），不小于集合 $\{(n_1, \dots, n_m) : n_i \in \mathbb{Z}_+, n_1 + \cdots + n_m \leqslant \frac{n-q}{K}\}$ 中元素的个数。因此，对于几乎所有的 n，都有 $d(n) \geqslant d_m(Cn)$，其中某个常数为 C，而 d_m 是 m 个变量的多项式的增长函数。因此，由 [8], 中的例 1.6 可知，$\mathrm{GKdim}\, A_\Theta \geqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathrm{A}_j} k_x + 1 \right)$。

□

推论3.4 和引理 3.5 总结为以下定理，该定理描述了与任意不含由有向路径连接的两个不同环的有向图相关联的 Gelfand–Kirillov 维数。

定理 3.6. 设 Θ 是一个有限简单有向图，其环为 $C_1, \dots, C_k$，其中 $k \geqslant 1$ 不含由有向路径连接的两个不同环。特别地，对于任何通过有向路径与某个环相连的非循环顶点 x，要么所有连接 x 与各环的路径都从 x 指向各环，要么所有路径都从各环出发。记 A_j 为图中与环 C_j 有边相连的顶点集合，其中 $j = 1, \dots, k$。对于任意 $x \in A_j$，令 k_x 为 Θ 中长度为 $\geqslant 0$ 、在所有连接 C_j 与 x 的路径均以圈顶点为起点时以 x 为起点的有向路径，以及在其他情况下以 x 为终点的有向路径的数量。那么

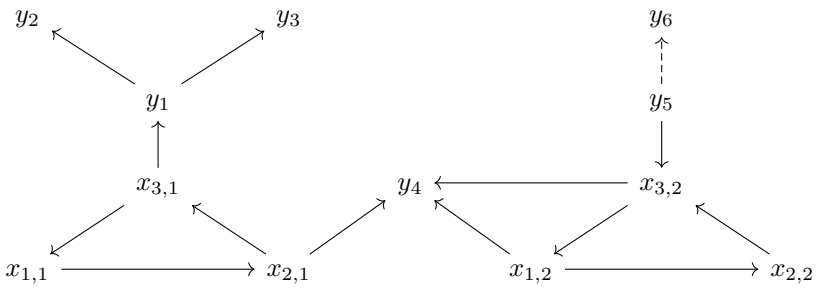
$$\mathrm{GKdim}\, A_\Theta = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1 \right),$$

其中 $\sum_{x \in \mathcal{A}_j} k_x + 1$ 在 A_j 为空集时等于 1 。最后，如果图 Θ 不包含任何环，则 GK 维数 $A_\Theta = 0$。

4 示例

我们通过图中展示的有向图 Θ 来说明定理 3.6 及其证明中的概念。

Θ



最大环可达子图 Θ' 是 Θ 的导出子图，包含除 y_6以外的所有顶点。Θ' 的边用实线箭头表示，其补集则用虚线箭头表示。

对于图中标记为 Θ' 的非环顶点，有：$k_{y_2} = k_{y_3} = k_{y_4} = k_{y_5} = 1$ 和 $k_{y_1} = 3$。将顶点为 x_i、1、$i = 1$、2、3 的环记为 C_1，并令 C_2 为环 $x_{1,2} \to x_{2,2} \to x_{3,2} \to x_{1,2}$。由与这些环有边相连的顶点组成的集合 A_1 和 A_2 分别为 $A_1 = \{y_1, y_4\}$ 和 $A_2 = \{y_4, y_5\}$。因此，$\sum_{x \in A_1} k_x + 1 = 5$，且 $\sum_{x \in A_2} k_x + 1 = 3$。

由定理 3.6 可得以下推论。

推论 4.1. 与图 Θ （如图所示）相关联的 *Hecke–Kiselman* 代数 A_Θ 的 *Gelfand–Kirillov* 维数为 8。

根据引理 3.5，我们来构造 A_Θ 中由一个恰有 8 个克林星号的正则表达式描述的约化词族。

在 Θ 的顶点集合上，我们引入如下序。

- 圈顶点为 $x_{1,1} < x_{2,1} < x_{3,1} < x_{1,2} < x_{2,2} < x_{3,2}$。
- 对于非循环顶点，我们可以任意选取一个序，使 y_1 为最小的。假设 $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6$。
- 所有圈顶点都小于非循环顶点，即 $x_{3,2} < y_1$。

那么，在构造的第一部分中构成的、不含圈顶点的字 w' 具有如下形式：$y_1y_2y_1y_3y_1y_4y_5$。注意，支撑该字的每个元素 y_j 在其中恰好出现 m_{y_j} 次。接下来，用 c_i 表示字 $x_{1,i}x_{2,i}x_{3,i}$，其中 $i = 1, 2$。我们有，c_1 的每个顶点都小于 c_2 的任意顶点。正则表达式 r_2 为 $c_2^+ y_1y_2y_1y_3y_1y_4c_2^+ x_{1,2}x_{2,2}y_5x_{3,2}c_2^+$。最后，恰有 8 个星号且由约化词组成的正则表达式 r_1 具有如下形式：

$$(c_1^+ x_{1,1}x_{2,1})(c_2^+)\underline{y_1}(x_{3,1}c_1^+ x_{1,1}x_{2,1})\underline{y_2y_1}(x_{3,1}c_1^+ x_{1,1}x_{2,1})\underline{y_3y_1}(x_{3,1}c_1^+ x_{1,1})\underline{y_4}(x_{2,1}x_{3,1}c_1^+)(c_2^+ x_{1,2}x_{2,2})\underline{y_5}(x_{3,2}c_2^+).$$

为清晰起见，将第一步中构造的 w' 连续因子加上下划线。

致谢。我非常感谢 Jan Okniński 仔细审阅论文的早期版本并提出许多建议，也感谢他一直以来的支持。我还要感谢 Arkadiusz Męcel，就研究课题进行了富有成效的讨论。This

[S] 这项工作得到波兰国家科学中心 2021/41/N/ST1/03082 号资助项目的支持（波兰）.

参考文献

[1]D.N. Ashikhmin、M.V. Volkov、W.T. Zhang，*Kiselman* 幺半群的有限基问题，《Demonstratio Mathematica》48（2015），475–492。

[2] R. Aragona, A. D'Andrea, 小基数 *Hecke–Kiselman* 幺半群, Semigroup Forum 86 (1) (2013),32–40.

[3] G.M. Bergman，环论中的菱形引理，《数学进展》29 (1978), 178– 218.[4] T. Denton, F. Hivert, A. Schilling, N.M. Thiery，有限 *J*–平凡幺半群的表示论，洛塔林组合学研讨会 64 (2011), Art. B64d.[5]L. Forsberg，*A* 型 *Hecke–Kiselman* 幺半群的有效表示。https://arxiv.org/abs/1205.0676 (2014).[6] O. Ganyushkin, V. Mazorchuk，关于0-*Hecke* 幺半群的 *Kiselman* 商，Int. Electron. J. Algebra 10(2) (2011), 174–191.[7] J. Huang，*0-Hecke* 代数表示论的杨表方法，Annals of Combi- natorics 20(4) (2016), 831–868.[8] G.R. Krause, T.H. Lenagan，代数的增长与 *Gelfand-Kirillov* 维数，Pitman，伦敦，1985.[9] G. Kudryavtseva, V. Mazorchuk，关于 *Kiselman* 的半群，《横滨数学杂志》55(1) (2009), 21–46.[10] J. Krempa, J. Okniński，张量积的 *Gefand-Kirillov* 维数，《数学杂志》194 (1987), 487–494.[11] E. Marberg，关于仿射对称群的 *0-Hecke* 幺半群的一些作用，《组合理论杂志》A辑，161 (2019), 178–219.[12]A. Męcel, J. Okniński，*Hecke-Kiselman* 幺半群的增长二分性，Publicacions Mathem`atiques, 63 (2019), 219–240.[13] A. Męcel, J. Okniński，*Gr¨Hecke–Kiselman* 代数的 *Gröbner* 基与自动机性质，Semigroup Forum 99 (2019), 447–464.[14] J. Okniński, M. Wiertel，*Hecke–Kiselman* 代数的组合学与结构，Communica- tions in Contemporary Mathematics, 22 (07) (2020), 2050022 (42页).[15] J.C. Rosales, P. A. Garc´ıa-S´anchez，数值半群，《数学发展》第20卷，施普林格，2009.[16] A. Szilard, S. Yu, K. Zhang, J.Shallit，以多项式密度刻画正则语言，第17届国际计算机科学数学基础研讨会论文集，《计算机科学讲义》629，施普林格出版社，柏林 (1992) 494-503.[17] V.A. Ufnarovskii，《代数中的组合与渐近方法》，载于：《数学百科全书》第57卷，第1–196页，施普林格，1995。

Magdalena Wiertel 电子邮箱：
m.wiertel@mimuw.edu.pl 数学研究所
华沙大学 巴纳哈街2号 02-097华沙，波兰