arXiv:2301.06649v1 [math.CO] 17 Jan 2023

Ce双色点最大和匹配的中心 S

Pablo P´érez-Lantero* Carlos Seara†

2023年1月18日

摘要

设 R 和 B 是平面中两个不相交的点集，且满足 $|R| = |B| = n$。设 $\mathcal{M} = \{(r_i, b_i)\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ 是一个完美匹配，该匹配将 R 中的点与 B 中的点配对，并使 $\sum_{i=1}^{n} \|r_i - b_i\|$（即配对点对之间欧几里得距离的总和）最大。在本文中，我们证明平面上存在一点 o（$\mathcal{M}$ 的中心），使得对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 均有 $\|r_i - o\| + \|b_i - o\| \leq \sqrt{2}\,\|r_i - b_i\|$。

1 引言

设 R 和 B 是平面上两个不相交的点集，满足 $|R| = |B| = n$, $n \geq 1$。R中的点为红色，B 中的点为蓝色。$R \cup B$ 的匹配 是将 $R \cup B$ 划分为 n 对的一种划分，使得每一对都由一个红色点和一个蓝色点组成。当且仅当无序对 (p, q) 属于该匹配时，点 $p \in R$ 与点 $q \in B$ 才是匹配的。对于任意 $p, q \in \mathbb{R}^2$，我们用 pq 表示连接 p 和 q的线段，用 $\|p - q\|$ 表示其长度，即向量 $p - q$的欧几里得范数。令 $\mathcal{B}(pq)$ 表示直径等于 $\|p - q\|$的圆盘，该圆盘以线段 pq的中点 $\frac{p+q}{2}$ 为中心。对于任意匹配 $\mathcal{M}$，我们用 $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ 表示与该匹配关联的圆盘集合，即 $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \{\mathcal{B}(pq) : (p, q) \in \mathcal{M}\}$。

在本文中，我们考虑最大和匹配 $\mathcal{M}$，即使匹配点的欧几里得距离总和最大的匹配。作为主要结果，我们证明以下定理：

定理1。 **1.** 存在平面上的一个点 o，使得对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们都有 ：

$$\|r_i - o\| + \|b_i - o\| \ \leq\ \sqrt{2}\,\|r_i - b_i\|.$$

Fingerhut（参见 Eppstein [3]）受通信网络设计问题的启发（参见 Fingerhut 等人 [4]），提出猜想：给定平面上的无色点集 P 和一个最大和匹配 $\{(a_i,\ b_i)\ i = 1,\ \ldots\ldots,\ n\}$，其中 P，存在平面上的一点 o（不一定是 P 中的点），使得

$$\|a_i - o\| + \|b_i - o\| \ \leq\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\|a_i - b_i\| \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, n\},\ \text{where } 2/\sqrt{3} \approx 1.1547. \tag{1}$$

*智利圣地亚哥大学 (USACH)，科学学院，数学与计算机科学系，智利 pablo.perez.l@usach.cl。

†加泰罗尼亚理工大学数学系，西班牙。carlos.seara@upc.edu。

Bereg 等人 [2] 对这一猜想给出了一个近似结果。他们证明，对于平面上任意无色点集 P（由 $2n$ 个点组成）以及一个最大和匹配 $\mathcal{M} = \{(a_i,\ b_i)\ i = 1,\ \ldots\ldots,\ n\}$ （其中 P），$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ 中的所有圆盘都有公共交集，这意味着公共交集中的任意一点 o 都满足

$$\|a_i - o\| + \|b_i - o\| \ \leq\ \sqrt{2}\ \|a_i - b_i\|,\ \text{where}\ \sqrt{2} \approx 1.4142.$$

最近 地，Barabanshchikova 和 Polyanskii [1] 证实了 Fingerhu 的猜想 t.
方程（1）的表述等价于称交集 $\mathcal{E}(a_1b_1) \cap \mathcal{E}(a_2b_2) \cap$
$\cdots \cap \mathcal{E}(a_nb_n)$ 非空，其中 $\mathcal{E}(pq)$ 是由椭圆所界定的平面区域，该椭圆的焦点为 p 和 q，长轴长度为 $(2/\sqrt{3})\ \|p - q\|$ （见 [3]）。
在我们的双色点集语境中，给定 $p \in R$ 和 $q \in B$，令 $\mathcal{E}(pq)$ 表示由椭圆所界定的区域，该椭圆的焦点为 p 和 q，长轴长度为 $\sqrt{2}\ \|p - q\|$。也就是说，$\mathcal{E}(pq) = \{x \in \mathbb{R}^2 :$
$\|p - x\| + \|q - x\| \leq \sqrt{2}\ \|p - q\|\}$。于是，定理 1.1 的表述等价于称，对于 $R \cup B$ 的任意最大和匹配$\{(r_i,\ b_i)\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n\}$，交集 $\mathcal{E}(r_1b_1) \cap \mathcal{E}(r_2b_2) \cap \cdots \cap \mathcal{E}(r_nb_n)$ 非空。

我们注意到，因子$\sqrt{2}$ 是紧的。只需考虑两个红点和两个蓝点作为正方形的顶点，并使每条对角线的两个顶点颜色相同。由任意最大和匹配所诱导的两个椭圆的唯一公共点是正方形的中心。

因此，根据海利定理，要证明定理 1.1，只需考虑 $n \leq 3$。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$是一组 n 个 $\mathbb{R}^d$的凸子集，满足 $n \geq d + 1$。海利定理 [5] 指出，如果这些子集中任意 $d + 1$ 个的交集非空，那么整个集合的交集也非空。因此，我们只需证明关于 $n \leq 3$的结论，因为我们考虑的是$\mathbb{R}^2$中的 n 个椭圆。
本文给出的论证是对 Barabanshchikova 和 Polyanskii 的论证 [1]所作的简化与改编。

Huemer 等人 [6] 证明，如果 $\mathcal{M}'$ 是 R 和 B 的任意一个完美匹配，且使匹配点之间的总平方欧几里得距离最大化，即使 $\sum_{(p,\ q)\in\mathcal{M}'} \|p - q\|^2$最大化，那么 $\mathcal{B}_{\mathcal{M}'}$ 的所有圆盘都有一个公共点。正如 Bereg 等人 [2], 所证明的，我们的 $R \cup B$ 的最大和匹配 $\mathcal{M}$ 中的圆盘两两相交；本文将用到这一事实，但它们不一定有公共交集。

2 主要结果的证明

设 R 和 B 是如上定义的两个不相交点集，其中 $|R| = |B| = n$、$n \leq 3$，并设 $\mathcal{M}$是 $R \cup B$的一个最大和匹配。注意，对于每一对 $(p,\ q) \in \mathcal{M}$，圆盘 $\mathcal{B}(pq)$ 内切于椭圆 $\mathcal{E}(pq)$（见图1a），这意味着 $\mathcal{B}(pq) \subset \mathcal{E}(pq)$。于是，根据命题 2.1], 定理 1.1 成立，因为 $\mathcal{M}$ 的圆盘两两相交 [2, 。显然，该定理对 $n = 1$也成立。因此，本文剩余部分将证明该定理对$n = 3$也成立，这需要较为繁复的论证。

设 $n = 3$，其中 $R = \{a, b, c\}$ 和 $B = \{a', b', c'\}$，并设 $\mathcal{M} = \{(a,\ a')、(b,\ b')、(c,\ c')\}$ 是 $R \cup B$ 的最大和匹配。
对于两个点 $p,\ q \in \mathbb{R}^2$，令 $r(pq)$ 表示顶点为 p 且经过 q的射线；对于实数 $\lambda \geq 1$，令 $\mathcal{E}_\lambda(pq)$ 表示由焦点为 p 和 q、长轴长度为 $\lambda\|p - q\|$的椭圆所围成的区域。也就是说，$\mathcal{E}_\lambda(pq) = \{x \in \mathbb{R}^2 :$
$\|p - x\| + \|q - x\| \leq \lambda\|p - q\|\}$。注意，在我们的

上下文中， $\mathcal{E}(pq) = \mathcal{E}_{\sqrt{2}}(pq)$，并且对于任意 $\lambda' > \lambda$， $\mathcal{E}_\lambda(pq) \subset \mathcal{E}_{\lambda'}(pq)$。

用反证法，假设 $\mathcal{E}(aa') \cap \mathcal{E}(bb') \cap \mathcal{E}(cc') = \emptyset$。那么，我们可以将 $\mathcal{E}(aa')$、$\mathcal{E}(bb')$ 和 $\mathcal{E}(cc')$“等比例扩大”,_ 直到它们有公共交集。形式上，我们可以取最小的 $\lambda > \sqrt{2}$，使得 $\mathcal{E}_\lambda(aa') \cap \mathcal{E}_\lambda(bb') \cap \mathcal{E}_\lambda(cc')$ 非空；此时 $\mathcal{E}_\lambda(aa') \cap \mathcal{E}_\lambda(bb') \cap \mathcal{E}_\lambda(cc')$ 是单点集。令 o 表示 $\mathcal{E}_\lambda(aa') \cap \mathcal{E}_\lambda(bb') \cap \mathcal{E}_\lambda(cc')$ 中的点。

令 $\ell(aa')$ 表示顶点为 o、平分 $r(oa)$ 与 $r(oa')$ 的射线。类似地，我们定义 $\ell(bb')$ 和 $\ell(cc')$。令 $t(aa')$ 表示经过 o 且与 $\mathcal{E}_\lambda(aa')$ 相切的直线，其方向使得 $\mathcal{E}_\lambda(aa')$ 位于直线右侧。类似地，我们定义 $t(bb')$ 和 $t(cc')$。众所周知，给定焦点为 p 和 q 的椭圆，以及在某点 o 处与椭圆相切的直线，射线 $r(op)$ 和 $r(oq)$ 与切线所成的角相等（见图1b）。这意味着射线 $\ell(aa')$、$\ell(bb')$ 和 $\ell(cc')$ 分别垂直于切线 $t(aa')$、$t(bb')$ 和 $t(cc')$。换言之，它们分别位于点 o 处的法线上。

由于 $\mathcal{E}(aa')$、$\mathcal{E}(bb')$ 和 $\mathcal{E}(cc')$ 两两相交（且其中任一个都不包含在另一个之内），因此 o 属于 $\mathcal{E}_\lambda(aa')$、$\mathcal{E}_\lambda(bb')$ 和 $\mathcal{E}_\lambda(cc')$ 各自的边界。于是，$\mathcal{E}_\lambda(aa')$、$\mathcal{E}_\lambda(bb')$ 和 $\mathcal{E}_\lambda(cc')$ 两两相交，且每一对的交集都包含内点。这意味着 $t(aa')$、$t(bb')$ 和 $t(cc')$ 中任意两条直线都不重合。此外，$t(aa')$、$t(bb')$ 和 $t(cc')$ 的六个方向（正向和反向）围绕 o 交替排列，这意味着围绕 o 逆时针排列的 $\ell(aa')$、$\ell(bb')$ 和 $\ell(cc')$ 中任意两条相邻射线之间的旋转角都严格小于 π（见图1c）。

令 $G = (R \cup B, E)$ 为如下二分图：当且仅当 $p \in R, q \in B$ 时，$(p,q) \in E$，且要么 $(p,q) \in \{(a,a'), (b,b'), (c,c')\}$，要么 $o \in \mathcal{B}(pq)$。我们将边分为两种颜色：若 (p,q) 满足 $(p,q) \in \{(a,a'), (b,b'), (c,c')\}$，则称边 (p,q) 为黑边。否则，称 (p,q) 为白边。注意，这种颜色分类是一致的，因为对于所有 $(p,q) \in \{(a,a'), (b,b'), (c,c')\}$，都有 $o \notin \mathcal{B}(pq)$，这是因为 $\mathcal{B}(pq)$ 包含于 $\mathcal{E}_\lambda(pq)$ 的内部，而 o 位于 $\mathcal{E}_\lambda(pq)$ 的边界上。

为完整起见，这里给出下一个引理的证明。

引理2.1 ([1])。 如果 G 有一个边颜色交替的环，那么 $\mathcal{M}$ 不是 $R \cup B$的最大和匹配。

证明。对于一条黑边（p, q），有 $\|p - o\| + \|q - o\| = \lambda\|p - q\|$。对于一条白边（$p, q$），有 $\|p - o\| + \|q - o\| < \lambda\|p - q\|$，因为 $o \in \mathcal{B}$（pq）和 $\mathcal{B}$（pq）包含在 $\mathcal{E}_\lambda$（pq）的内部。设（$r_1, b_1, r_2, b_2, \ldots, r_m, b_m, r_{m+1} = r_1$）是一个长度为 m的颜色交替环，其中$r_1, \ldots, r_m \in R$和 $b_1, \ldots, b_m \in B$。不失一般性，假设边（r_1, b_1）是黑边，这意味着边（r_1, b_1）$\ldots$，（r_m, b_m）$\in \mathcal{M}$ 都是黑边，而边（b_1, r_2）$\ldots$，（b_m, r_{m+1}）$\in \mathcal{M}$都是白边。于是有：

$$\sum_{i=1}^{m} \|r_i - b_i\| = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} (\|r_i - o\| + \|b_i - o\|) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} (\|b_i - o\| + \|r_{i+1} - o\|) < \sum_{i=1}^{m} \|b_i - r_{i+1}\|.$$

因此，在 $\mathcal{M}$ 中用环上的白边替换黑边，我们将得到一个总和更大的匹配。

□

引理 2.2. G 的每个顶点至少有一条与其相连的白边。

证明。 考虑蓝色顶点 a'。不失一般性，设 o 为坐标原点，且 a'位于 y轴的正方向上。由于 $o \notin \mathcal{B}(aa')$，我们有 $\angle aoa' < \pi/2$，于是

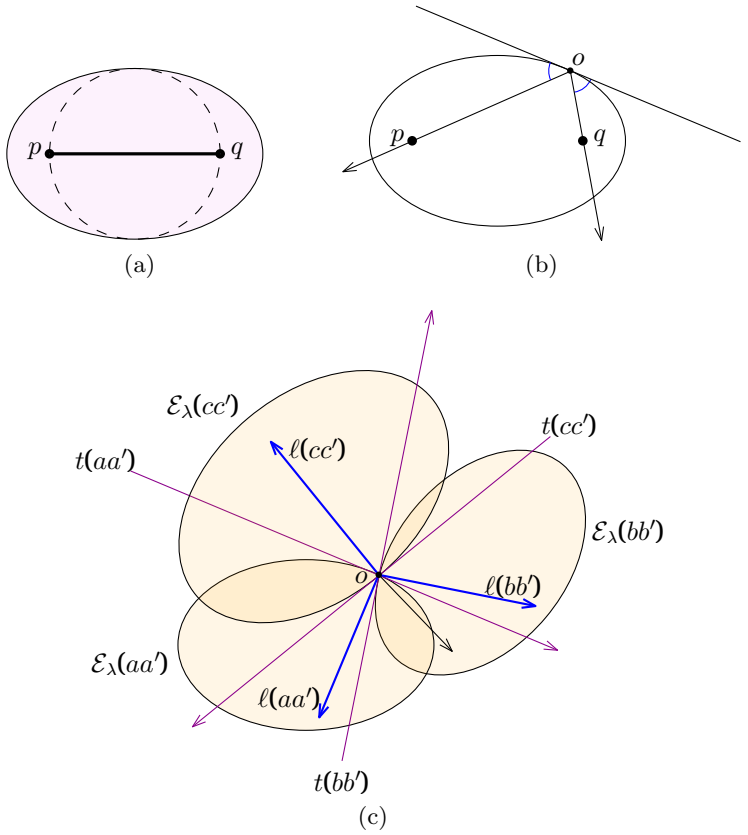

图1：（a）椭圆 $\mathcal{E}(pq)$ 和圆盘 $\mathcal{B}(pq)$。（b）与椭圆相切的直线与经过焦点且顶点为切点的射线形成相等的角。（c）点 o 和三个椭圆。

不失一般性，设 a 位于第一象限 Q_1的内部。令 Q_2、 Q_3和 Q_4 分别为第二、第三和第四象限。进一步不失一般性地假设，射线 $\ell(aa')$、 $\ell(bb')$和 $\ell(cc')$按此顺序逆时针排列。

反设没有与 a' 相邻的白边。这意味着 b, c 位于 $Q_1 \cup Q_2$ 的内部。若 $c \in Q_2$，则从 $\ell(cc')$ 到 $\ell(aa')$ 的逆时针旋转角大于 π。因此， $c \in Q_1$。若 $b \in Q_1$，则从 $\ell(aa')$ 到$\ell(bb')$ 的逆时针旋转角，或从 $\ell(bb')$ 到 $\ell(cc')$ 的逆时针旋转角，大于 π。因此 $b \in Q_2$。此外，若 b' 和 c' 都属于 $Q_1 \cup Q_2$，则从 $\ell(bb')$ 到 $\ell(cc')$ 的逆时针旋转角大于 π。因此， b', c' 中至少有一个位于 $Q_3 \cup Q_4$ 的内部。也就是说， $b' \in Q_3$ 和/或 $c' \in Q_4$。证明现在分为三种情况：

情形1： $b' \in Q_3$ 和 $c' \in Q_4$。由于 $b \in Q_2$ 和 $c' \in Q_4$，角 $\angle boc' \geq \pi/2$，这意味着$o \in \mathcal{B}(bc')$（见图2a）。也就是说，边 $(b,\ c')$ 是白色的。同理，边 $(b',\ c)$ 也是白色的。环 $(b,\ c',\ c,\ b',\ b)$ 上的边颜色交替，因此引理2.1推出矛盾。

情形2： $b' \in Q_3$ 和 $c' \notin Q_4$。由于从 $\ell(bb')$ 到 $\ell(cc')$ 的逆时针旋转角 θ 小于 π，因此必有 $c' \in Q_1$。与情形1一样，鉴于 $b' \in Q_3$ 和 $c \in Q_1$，边 $(b',\ c)$ 为白色。设 β 为射线 $r(ob)$ 与 $r(ob')$ 之间角的一半， γ 为射线 $r(oc)$ 与 $r(oc')$ 之间角的一半（见图2b）。我们有 $\beta,\ \gamma < \pi/4$，这

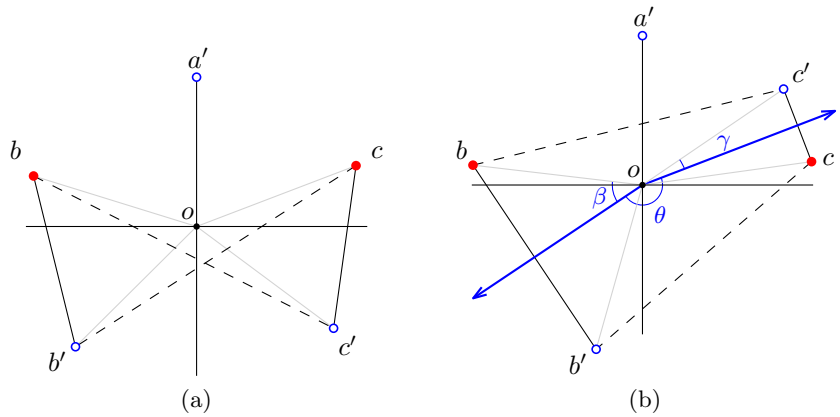

图2：引理　　2.2 的证明。黑边采用实线样式，白边采用虚线样式　　e.

意味着 $\angle boc' \geq 2\pi - \beta - \gamma - \theta \geq \pi/2$。因此，边 $(b,\ c')$ 也是白色的。同样，环 $(b,\ c',\ c,\ b',\ b)$ 的各边颜色交替出现，而引理2.1 导出了矛盾。

Ca例3： $b' \notin Q_3$ 和 $c' \in Q_4$。此情形的证明与情形　　2.

因此引理得证。　　□

引理 2.2 表明，图 G 总是包含一个环（长度为四或六），其边颜色交替。因此，由引理2.1可得矛盾，从而得到最大和匹配$\mathcal{M}$ 确保 $\mathcal{E}(aa') \cap \mathcal{E}(bb') \cap \mathcal{E}(cc') \neq \emptyset$。因此，定理 1.1 成立。

参考文献

[1] P. Barabanshchikova 和 A. Polyanskii。由最大和匹配诱导的相交椭圆。*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.14200*，2022 年。[2] S. Bereg、O. P. Chac´on-Rivera、D. Flores-Pe˜naloza、C. Huemer、P. P´erez-Lantero 和 C. Seara。关于点的最大和匹配。*Journal of Global Optimization*，第 1–18 页，2022 年。[3] D. Eppstein。Geometry Junkyard。https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/maxmatch.html。[4] J. A. Fingerhut、S. Suri 和 J. S. Turner。设计最低成本无阻塞宽带网络。*J.Algorithms*，24(2):287–309，1997 年。.[5] E. Helly。关于具有公共点的凸集。关于具有公共点的凸体。德国数学家协会年报，32:175–176，1923 年。[6] C. Huemer、P. P´erez-Lantero、C. Seara 和 R. I. Silveira。用具有公共交集的圆盘匹配点。*Discrete Mathematics*，342(7):1885–1893，2019 年。