arXiv:2301.06656v1 [math.PR] 17 Jan 2023

欧几里得空间上（对数）自相似马尔可夫半群的弱相似轨道

P. PATIE 和 R. SARKAR

Abstract. 我们首先确定一类由连续负定函数集生成的伪微分算子，这些算子属于欧几里得空间上自伴对数贝塞尔算子的弱相似（WS）轨道。事实证明，这些 WS 关系有助于首先刻画该类中每个算子的核，进而使我们能够证明，它们生成了一类记为 $\mathscr{P}$ 的非自伴 $\mathcal{C}_0$-压缩正半群。经过同胚变换，$\mathscr{P}$ 包含概率论中的基本对象—— $\mathbb{R}_+^d$上的自相似马尔可夫半群族。借助 WS 轨道，我们刻画了 $\mathscr{P}$ 中每个元素的谱性质；这些元素用于其谱表示，而谱表示取决于由相关负定函数定义的伯恩斯坦-伽马函数的解析性质，其谱可以是点谱、剩余谱、近似谱或连续谱。接下来，我们给出 $\mathscr{P}$ 中每个元素的谱表示，该表示以傅里叶乘子算子的形式表达，且至少在一个自然加权 L^2 空间的稠密定义域上成立。令人惊讶的是，当谱为剩余谱时，其定义域就是整个希尔伯特空间；这似乎是文献中首次注意到这一点。最后，我们列举了一系列例子，其中所有谱分量都用特殊函数或近期引入的幂级数显式计算。

1. Introduction

希尔伯特空间中自伴伪微分算子（PDO）的谱分析如今已相当成熟，并在数学的多个分支中衍生出许多引人入胜且深刻的成果，详见 Shubin 的专著 [46]。然而，尽管非自伴算子普遍存在，其理论却远未得到充分理解和统一。这似乎归因于研究这类算子时会遇到的各种现象，例如谱在微小扰动下的不稳定性。关于非自伴微分算子的全面论述及其谱渐近的详细研究，请参阅 Sj¨ostrand [47] 最近出版的专著。

在本文中，我们对该类非自伴、非局部伪微分算子进行深入而详尽的分析

$$\mathscr{A} = \{\boldsymbol{A}^{M}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}];\, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{N}^d_b(\mathbb{R}), M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})\}$$

2010 年数学学科分类号：35P05，47D07，41A60，60E07，42C15，40E05，30D05，44A20。关键词与短语：谱理论、伪微分算子、非自伴积分-微分算子、马尔可夫半群、交织、自相似性、渐近分析、贝塞尔算子、伯恩斯坦函数、特殊函数。作者感谢两位匿名审稿人提出的宝贵意见，并感谢他们认真审阅本文，促使论文质量得到提升。

，这些算子在加权希尔伯特空间中稠密定义$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$，定义见（2.1），其符号具有如下形式

$$\mathfrak{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\langle e(-M^{-1}\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}(M^\top \boldsymbol{\xi})\rangle, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

其中，$e(\boldsymbol{x}) = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_d})$，$\langle ., . \rangle$是欧几里得内积，$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in \mathbf{N}_b^d(\mathbb{R})$，是式(1.17)中定义的连续定函数向量，而 $M \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{R})$ 是$d \times d$ 可逆矩阵群。研究内容包括其定义域、按弱相似轨道进行分类（这一概念将在第1.2节中引入）、 $\mathcal{C}_0$-保正压缩半群的生成、这些半群的谱理论与表示，以及将其表示为积分-微分算子。

研究这一类（非局部）伪微分算子的首要动机，源于它们与定义在 $\mathbb{R}_+^d$ 上的自相似马尔可夫过程族之间的密切联系。过去二十年间，人们从理论和应用两个角度对此进行了深入研究，参见例如 [28, 9, 35]。这方面的兴趣似乎源于它们在概率论极限定理中所发挥的作用。这或许也解释了为何自相似马尔可夫过程会出现在许多不同的研究中，例如聚并-碎裂 [6]，随机平面图 [7]，以及分数阶算子的研究 [41, 43] 等。我们将证明，此类过程的 Dynkin 生成元经过同胚 $\boldsymbol{x} \mapsto e(\boldsymbol{x})$ 变换后，在我们所确定的一个核上，与符号具有形式(1.1（其中 M 为单位矩阵）的伪微分算子一致。本文对非局部、非自伴线性算子进行了非常详尽的谱分析，而相关文献中的研究实例寥寥无几。我们还指出，在近期论文 [30]，中，作者引入并深入分析了一类连续时间整数值马尔可夫链；相对于某个随机离散伸缩算子，这些链具有离散自相似性。

我们还旨在继续推进第一作者与 M. Savov [37, 38]以及后来与其他合著者共同发起的研究计划，基于交织概念或相关的分类方案，为非自伴马尔可夫半群发展谱理论，见 [11, 12, 10, 29, 30, 40]。从这一角度来看，本文通过两方面加深了对这些思想的理解：一方面，结合伪微分算子与傅里叶算子来确定交织关系，这与 Egorov[16] 的研究思路一脉相承；另一方面，本文也表明，这种方法能够有效处理谱的所有不同组成部分，包括连续谱、点谱、剩余谱和近似谱。

现在，我们来介绍主要结果以及为得到这些结果所采用的策略，并请参阅图示 1 ，直观了解我们所遵循的路径。我们的方法基于弱相似（WS）关系的概念。具体而言，如果满足以下条件，我们就称两个线性算子 P， Q 具有 WS 关系：

$$P\Lambda = \Lambda Q \ \text{ on } \mathbf{D}(\Lambda) \tag{1.2}$$

其中 $\Lambda \in \mathscr{D}(H)$，也就是说，它是希尔伯特空间 H上的一个稠密定义的单射线性算子，且其值域稠密。我们将其定义域记为 $\mathbf{D}(\Lambda)$，精确定义见第 1.2 节。在这种情况下，我们称 P 属于 Q的 WS 轨道。由于我们将证明，在本文的语境下，WS 是一种等价关系， Q 也可视为 P的 WS 轨道中的一个元素。

回到我们所讨论的框架，我们首先结合傅里叶分析与复分析证明，在非常宽松的条件下（讨论见1.5 ），形如（1.1）的符号类属于其符号如下所示的自伴偏微分算子的 WS 轨道

$$\mathfrak{g}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\langle e(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}_0(\boldsymbol{\xi})\rangle, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_0(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1^2, \ldots, \xi_d^2)$。值得指出的是，在[38], 一维情形中，利用某些随机变量的原始因子分解，在负定函数 Λ （1.2）是有界马尔可夫算子这一条件下，已建立了 $\mathbb{R}_+$ 上的自相似半群之间的交织关系。这些关系还要求负定函数 ψ满足某些条件。尽管借助前述同构，这些关系可以轻易地转化到我们的框架中，但所需条件相当严格，无法放宽。此外，尝试从 Lamperti 给出的、将无穷小生成元表示为积分-微分算子或 Dynkin 特征算子的形式出发，来获得弱相似关系[28] ，也会导致一些限制性条件，例如至少要求 Lévy–Khintchine 指数能够解析延拓到某个条带′。

这些原因促使我们从一种不同且全新的视角来考察这一问题：转而从符号具有形式（1.1）的伪微分算子类出发，首先刻画几乎所有对数 Lamperti 半群类所对应的对数贝塞尔半群的 WS 轨道。然而，这一方法会引出若干问题，例如与这些伪微分算子相关的 $\mathcal{C}_0$ 收缩半群是否存在、该半群是否具有保正性，以及它们与对数 Lamperti 半群之间的关系。我们强调，后一问题并非易事，因为据我们所知，伪微分算子尚无与 Volkinski 公式等价的公式。下面我们将说明为克服这些困难所采取的途径。

首先，我们建立符号为（1.3）的伪微分算子与作用于对称函数空间上的拉普拉斯算子之间的联系；随后借助自伴算子理论中的经典结果，证明它在对数平方贝塞尔过程的加权希尔伯特空间 $\mathcal{C}_0$上生成自伴 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$ $\mathbf{e}_M$定义见（2.1），且该半群具有保正性。遗憾的是，这些经典结果并不适用于符号具有形式（1.1）的算子。

为了处理一般情况下非自伴的 $\mathcal{C}_0$-压缩半群在相同加权 $\mathbf{L}^2$-空间上的生成问题，我们首先注意到，形如（1.1）的符号类在共轭下是闭的，因此可以将对这一伪微分算子类的分析分为两部分。接着，在一维情形下，利用前文提到的 WS 关系，我们确定了这两个子类之一的一个核，以及保证存在 $\mathcal{C}_0$-压缩半群的耗散性。对于另一个子类，我们则借助 $\mathcal{C}_0$-压缩半群理论中的经典结果。我们还将伪微分算子之间的 WS 关系提升到了 $\mathcal{C}_0$-压缩半群的层面。

基于 WS 关系以及贝塞尔半群众所周知的对角化，参见例如 [33], ，我们将在定理 2.4 中给出由这些伪微分算子生成的非自伴 $\mathcal{C}_0$-压缩半群的谱表示。该表示至少在一个定义域上成立，此定义域由与负定函数 $\boldsymbol{\psi}$相关的对象来刻画；该定义域可以是希尔伯特空间 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$ 的全体，也可以是其中的一个稠密子集。积分表示由傅里叶乘子算子给出，而这些算子本身是通过与负定函数 $\boldsymbol{\psi}$的 Wiener-Hopf 因子相关联的所谓伯恩斯坦-伽马函数来定义的，定义见（1.10）。关于这一方向，我们提到，文献中已经研究过某些特殊情形下自相似马尔可夫半群的谱性质。例如，分数阶导数算子对应的自相似半群的谱展开已在 [43], 中推导得出；半直线上稳定过程转移密度及相关对象的谱表示已在 [23, 25, 26, 32]中获得。

接下来，为证明保正性，我们再次借助 WS 关系对核的刻画，证明每个伪微分算子都与某个正自相似马尔可夫过程的 Dynkin 算子一致，定义见（3.4）。随后，通过结合张量化论证与相似变换，便可推出 d 维情形。

我们通过刻画谱的性质来展开讨论，而谱的性质取决于伯恩斯坦-伽马函数的渐近行为，见（1.10）。我们成功地将其归结为对 Wiener-Hopf 因子或直接对负定函数的一些易于检验的性质。该类涵盖谱的所有部分，包括点谱、剩余谱、近似谱和连续谱，这体现了 WS 概念在此背景下的灵活性。值得指出的是，当谱为剩余谱（分别为点谱）时，谱表示在整个希尔伯特空间上（分别在稠密定义域上）成立；据我们所知，这一点似乎尚未在文献中受到关注。

论文其余部分安排如下。介绍一些一般记号后，我们将在第 2 节给出主要结果，包括 WS 轨道、谱的性质以及谱表示。在第 4 节证明这些结果之前，我们先在第 3 节回顾一些重要的预备结果，并定义证明过程中必不可少的一些工具。最后一节将详细介绍若干新的例子，并用已知的特殊函数或近期提出的、对前者进行推广的幂级数来表示其谱分量。图 1展示了主要结果之间的关联。

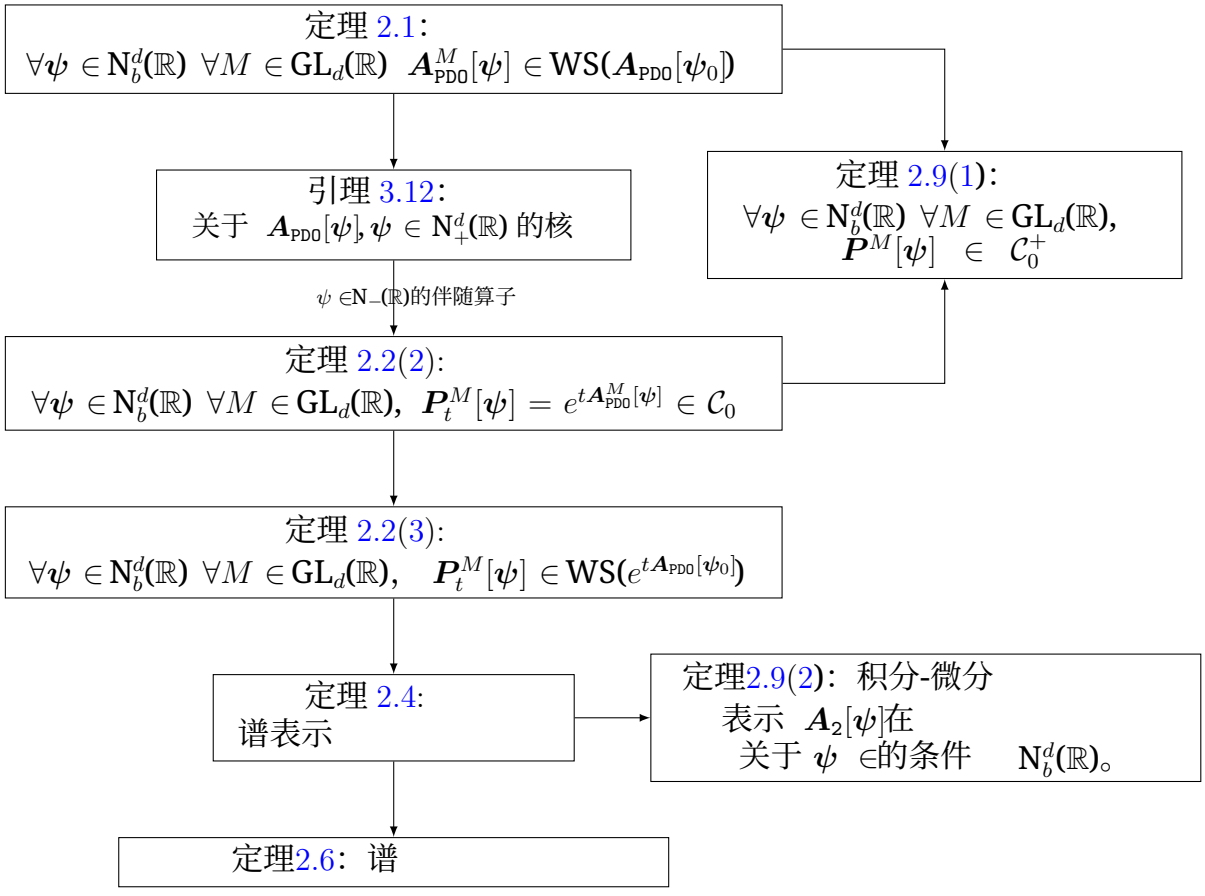

FIGURE 1. 主要结果之间联系的用户指南

1.1. 记号与预备知识。

1.1.1. 函数空间与算子。在本文中，我们用 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\boldsymbol{\mu})$ 表示所有关于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的非负博雷尔测度 $\boldsymbol{\mu}$ 的平方可积函数 f 构成的类，并赋予其自然内积 $\langle \mathrm{f},\mathrm{g}\rangle_{\boldsymbol{\mu}}=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\mu}(d\boldsymbol{x})$。特别地，当 $\boldsymbol{\mu}(d\boldsymbol{x})=e^{\langle \boldsymbol{x},\,\mathbf{1}\rangle}d\boldsymbol{x}$（分别地，当 $\boldsymbol{\mu}(d\boldsymbol{x})=e(x)dx=e^{x}dx,\ x\in\mathbb{R}$）时，我们用 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})$（分别用 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$）表示该希尔伯特空间。在全文中，我们用记号“$\perp$”表示希尔伯特空间上的正交关系。

对于单变量函数 f 和 d 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$，我们记 $f(\boldsymbol{x})=(f(x_1)\ f(x_2)\ldots,f(x_d))$。对于任意 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们用 $\mathrm{C}^k(\mathbb{R})$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有 k 次连续可微函数类。当 $k=0$ 时，我们将 $\mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ 简记为 $\mathrm{C}(\mathbb{R})$。用 $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上且在无穷远处趋于零的所有连续函数类。我们还考虑空间 $\mathrm{C}_b^k(\mathbb{R})$，即所有 k 次连续可微且有界、导数也有界的函数类。最后，我们用 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的所有紧支撑光滑函数类。当假设函数光滑且所有导数都在无穷远处趋于零时，我们用 $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 表示它们。

对于任意两个巴拿赫空间 $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,$，我们用 $\mathscr{B}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$ 表示从 X_1 到 X_2 定义的所有有界线性算子所构成的空间。当 $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2=\mathrm{X}$ 时，我们将含幺代数简单记为 $\mathscr{B}(\mathrm{X})$。对于任意 $T\in\mathscr{B}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$，其中 $\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2$ 是希尔伯特空间，T 的伴随算子记为 $\widehat{\ }T$，它是 $\mathscr{B}(\mathrm{H}_2,\mathrm{H}_1)$ 中的元素。记 $\mathrm{D}(\Lambda)$ 为算子 Λ 的定义域，我们还使用集合

$$\mathscr{D}_0(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)=\{\Lambda:\mathrm{D}(\Lambda)\subset\mathrm{X}_1\mapsto\mathrm{X}_2\ \text{线性的、稠密定义的、单射且具有稠密值域}\}$$

并且我们用 $\mathscr{D}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$ 表示从 X_1 到 X_2 的所有稠密定义算子所构成的集合。当 $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2=\mathrm{X}$ 时，我们分别使用记号 $\mathscr{D}_0(\mathrm{X})$ 和 $\mathscr{D}(\mathrm{X})$。

在本文中，我们用记号 $\mathcal{C}_0(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\boldsymbol{\mu}))$（分别用 $\mathcal{C}_0^+(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\boldsymbol{\mu}))$）表示希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\boldsymbol{\mu})$ 上的强连续半群（分别为保正半群）集合，其中 $\boldsymbol{\mu}$ 是 σ-有限测度，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上。回顾一下，$(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant0}\in\mathcal{C}_0(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\boldsymbol{\mu}))$ 称为保正的，如果对所有 $t\geqslant0$，只要 $\mathrm{f}\geqslant0$ a.s.，就有 $\boldsymbol{P}_t\mathrm{f}\geqslant0$ a.s.

1.1.2. 复平面、条带与解析函数。我们用 $\mathbb{C}$ 表示复平面。对于任意 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，我们用 $\mathbb{C}_{(a,b)}$ 表示垂直条带 $\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)\in(a,b)\}$。对于水平条带，我们使用记号 $\mathbb{S}_{(a,b)}$。同样地，我们使用记号 $\mathbb{C}_{[a,b]},\mathbb{S}_{[a,b]}$ 表示包含其边界的条带。对于 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，我们用 $\mathrm{A}^{(a,b)}$ 表示在条带 $\mathbb{S}_{(a,b)}$ 上解析的函数类。我们用 $\mathrm{A}^{[a,b]}$ 表示在 $\mathbb{S}_{(a,b)}$ 上解析且可连续延拓至条带边界的解析函数类。我们还使用经典记号 $\mathrm{i}^2=-1$。

1.1.3. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})$ 中的傅里叶变换和平移乘子。我们将平移傅里叶变换记为 $\mathcal{F}^{\mathrm{e}}$，其定义如下，适用于满足 $\sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{f}$ 可积的函数 f

$$\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\xi})=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\mathrm{i}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}\rangle}\sqrt{\mathrm{e}(\boldsymbol{x})}\mathrm{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\mathcal{F}_{\sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{f}}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\tag{1.4}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是通常的傅里叶变换，并且我们回顾一下，$\mathrm{e}(\boldsymbol{x})=e^{\langle\boldsymbol{x},\,\mathbf{1}\rangle},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)$。$\mathcal{F}_{\mathrm{e}}$（分别为 $\mathcal{F}$）是从 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})$（分别为 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$）到 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 的酉算子，

这解释了该记号。接下来，对于函数 $\mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$，我们定义平移傅里叶算子 $\mathbf{\Lambda} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e}) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e})$，其乘子为 $\mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}$：

$$\mathcal{F}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda f}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathcal{F}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.5}$$

当乘子 $\mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}$ 在圆柱 $\mathbb{S}^d{}_{(-\frac{1}{2},\ 1\,2)}$ 上解析时，我们将使用记号 $\mathbf{m}_{\mathbf{\Lambda}}\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathbf{1}\right) = \mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}(\boldsymbol{\xi})$，它对应于与经典傅里叶变换相关的（平移）乘子。 $\mathbf{\Lambda}$ 是一个稠密定义算子，其定义域为

$$\mathbf{D}(\mathbf{\Lambda}) = \left\{\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e});\ \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathcal{F}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)\right\}. \tag{1.6}$$

当 $\mathbf{m}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{\Lambda}}$ 几乎处处非零时， $\mathbf{\Lambda} \in \mathscr{D}_0(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\ \mathbf{e}))$。在第 3.4 小节中，我们将更详细地讨论这些算子的性质。

1.1.4. 比值的有界性。对于定义在复平面上的两个函数 f、g，我们使用以下记号

$$\begin{aligned}
f &\asymp g \text{ means that } \exists c > 0 \text{ such that } c^{-1} \leqslant \frac{f}{g} \leqslant c,\\
f &\overset{a}{\sim} g \text{ means that } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ for some } a \in [0,\infty],\\
f(x) &\overset{a}{=} \mathrm{O}(g(x)) \text{ means that } \limsup_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty,\\
f(x) &\overset{a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \text{ means that } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.
\end{aligned}$$

1.1.5. 连续负定函数、Wiener–Hopf 分解与伯恩斯坦-伽马函数。令 $\mathbf{N}(\mathbb{R})$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有连续负定函数构成的类，即对于任意 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$，存在唯一的四元组 $(\psi(0)\ \sigma^2, \mathtt{b}, \mu)$，使得

$$\psi(\xi) = \psi(0) - \mathrm{i}\mathtt{b}\xi + \sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{\mathrm{i}\xi y} + \mathrm{i}y\xi\,\mathbb{I}_{\{|y|\leqslant 1\}}\right)\mu(dy),\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

其中 $\psi(0) \geqslant 0, \mathtt{b} \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geqslant 0$ 且 μ 是一个非负拉东测度，满足 $\int_{\mathbb{R}}(y^2 \wedge 1)\mu(dy) < \infty$，例如参见 [20] 和 [45, 第 4]章。众所周知，集合 $\mathbf{N}(\mathbb{R})$ 在共轭运算下保持不变，即 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$ 当且仅当其共轭函数 $\overline{\psi} \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$。此外，每个 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$ 都具有如下解析 Wiener–Hopf 分解

$$\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi),\quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

其中 $\phi_+, \phi_- \in \mathbf{B}$，即伯恩斯坦函数集合；这些函数 ϕ：$[0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ 具有如下形式

$$\phi(u) = \phi(0) + \mathtt{d}u + \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\nu(dy),\quad u \geqslant 0, \tag{1.9}$$

其中 $\phi(0) \geqslant 0, \mathtt{d} \geqslant 0$ 且 ν 是非负拉东测度，使得 $\int_0^\infty (1 \wedge y)\nu(dy) < \infty$.任意 $\phi \in \mathbf{B}$ 均可在 $\mathbb{C}_{(0,\infty)}$ 上作解析延拓，且在 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ 上保持连续。Wiener-Hopf 因子 ϕ_+ 和 ϕ_- 是所谓上升和下降梯过程的拉普拉斯指数，它们对应于与 ψ 相关联的 L´évy 过程。此外， ϕ_+（分别为 ϕ_-）中存在跳跃测度，表明存在正（分别为负）

Lévy 过程的跳跃′由 (3.2) 确定。注意，如果 ψ 具有 (1.7) 的形式，则其共轭显然可以分解为

$$\overline{\psi}(\xi) = \phi_-(-\mathrm{i}\xi)\phi_+(\mathrm{i}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

关于 L 的 Wiener–Hopf 分解′évy 过程的精彩论述，可参阅 [4,第六章] 和[27, 第 6]章。

接下来，对于任意 $\phi \in \mathbf{B}$，我们用 W_ϕ 表示与 ϕ相关联的所谓 Bernstein-伽马函数，即满足函数方程的唯一正定函数，也就是某个正随机变量的梅林变换

$$W_\phi(z+1) = \phi(z)W_\phi(z), \quad z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}, \text{ and } W_\phi(1) = 1. \tag{1.10}$$

关于该函数的详细论述，可参阅 [39] ；特别是由 [39, 第 4],节可得

$$W_\phi \text{ is analytic and zero-free (at least) on } \mathbb{C}_{[0,\infty)}. \tag{1.11}$$

1.2. 弱相似的概念。 我们的方法旨在对由 $\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}]$ 生成的半群进行详细谱理论分析，其关键在于该半群属于自伴伪微分算子 $A_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}_0]$ （1.3）所给出的弱相似轨道，这一概念将在下文定义。对于希尔伯特空间 H，我们先回顾

$\mathscr{D}_0(\mathbf{H})$ $= \{\Lambda : \mathsf{D}(\Lambda) \subseteq \mathbf{H} \mapsto \mathbf{H}$ 是线性、稠密定义、闭算子、单射且具有稠密值域的算子$\}$

并且请注意，通常它并不是一个算子群。

定义 1.1. 对于两个希尔伯特空间 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ 以及 $A \in \mathscr{D}(\mathbf{H}_1)$ $B \in \mathscr{D}(\mathbf{H}_2)$，如果存在 $\Lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$ 使得 A弱相似于 B，则称

$$A\Lambda = \Lambda B \quad \text{on} \quad \mathcal{D} \tag{1.12}$$

其中 $\mathcal{D}, \Lambda(\mathcal{D})$ 分别在 $\mathbf{H}_2$,$\mathbf{H}_1$ 中稠密，并且

$$\mathcal{D} \subset \mathbf{D}(B) \cap \mathbf{D}(\Lambda), \ \Lambda(\mathcal{D}) \subset \mathbf{D}(A) \quad \text{and} \quad B(\mathcal{D}) \subset \mathbf{D}(\Lambda). \tag{1.13}$$

Λ称为弱相似算子。

从现在起，当我们有形如（1.13）的恒等式时，均默认假设（1.12）。在上述定义中请注意，当 A, B 有界且 $\mathcal{D}$ 是 Λ的核时，恒等式（1.12）可延拓至 $\mathbf{D}(\Lambda)$。

定义 1.2. 设 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ 为希尔伯特空间，且 $B \in \mathscr{D}(\mathbf{H}_2)$。我们将 B 在 $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(\mathbf{H}_1)$ 中的弱相似轨道定义为所有满足以下条件的算子 $A \in \mathscr{D}$ 构成的集合： A 与B弱相似。记作

$$\mathrm{WS}_{\mathscr{D}}(B) = \{A \in \mathscr{D};\ A \text{ is weakly similar to } B\}.$$

当 $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbf{H}_1)$ 时，我们简单地将 $\mathsf{WS}(B)$ $=\mathsf{WS}_{\mathscr{D}}(B)$ 记为。

1.3. 既定假设。现在我们来设定全文适用的假设和记号，并请参阅下文的注释，以了解这些假设的一般性。令

$$\mathbf{N}_+(\mathbb{R}) = \left\{ \psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R});\ \liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{|\phi_+(\mathrm{i}\xi)|}{|\xi|^{-\kappa}} > 0 \text{ for some } \kappa > 0,\ \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} = \mathrm{O}(1) \right\} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{N}_-(\mathbb{R}) = \left\{ \psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R});\ \overline{\psi} \in \mathbf{N}_+(\mathbb{R}) \right\} \tag{1.15}$$

and

$$\mathbf{N}_b(\mathbb{R}) = \mathbf{N}_+(\mathbb{R}) \cup \mathbf{N}_-(\mathbb{R}). \tag{1.16}$$

最后，对于任意 $d \in \mathbb{N}, d \geqslant 2$，我们记 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in \mathbf{N}_b^d(\mathbb{R})$，其中

$$\mathbf{N}_b^d(\mathbb{R}) = \mathbf{N}_b(\mathbb{R}) \times \ldots \times \mathbf{N}_b(\mathbb{R}) \quad (d \text{ times}) \tag{1.17}$$

并且，对于任意 $k = 1, \ldots, d$，$(\psi_k(0)\ \sigma_k^2,\ \mathfrak{b}_k,\ \mu_k)$ 是 的特征四元组，见（1.7）.

注1.3。由于对于所有 $\phi \in \mathbf{B}$，W_ϕ 的共轭满足 $\overline{W_\phi}(z) = W_\phi(\overline{z})$ $z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}$，我们注意到，若 $\psi \in \mathbf{N}_-(\mathbb{R})$，则

$$\liminf_{|\xi|\to\infty} |\xi|^\kappa |\phi_-(\mathrm{i}\xi)| > 0 \text{ for some } \kappa > 0 \text{ and } \frac{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} = \mathrm{O}(1),$$

这使得该记号合理。

注 1.4。 我们指出，对于 $\phi \in \mathbf{B}$，条件 $\liminf_{|\xi|\to\infty} |\xi|^\kappa |\phi(\mathrm{i}\xi)| > 0$ 被称为弱非格 性质，见 [39, (2.29)]，，特别地，它意味着

$$\phi \text{ is zero-free on } \mathrm{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.18}$$

在本文中，弱非格性质用于确保某些函数沿着 $\mathrm{Re}(z) = a$，$0 \leqslant a \leqslant 1$方向具有中等增长，这在我们结果的证明中发挥着重要作用。更多详情请参见第 3.6 节。

注 1.5。尽管弱非格性质仅排除了非常特殊、甚至退化的情形，但它似乎是集合 $\mathbf{N}_b(\mathbb{R})$ 定义中的主要限制，因为我们相信，对于任意 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$，其相应的伯恩斯坦-伽马函数之比要么从上方有界，要么从下方有界。

注 1.6。 我们还要强调，在许多情况下，集合 $\mathbf{N}_+(\mathbb{R})$ 和 $\mathbf{N}_-(\mathbb{R})$ 可以用负定函数的特征四元组 ψ 和/或定义其 Wiener-Hopf 因子的参数来表示。更多详情请参见下文的命题2.11 。

2. Main results

2.1. 弱相似轨道 $\mathrm{WS}_{\mathscr{A}_M}$。对于任意 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in \mathbf{N}_b^d(\mathbb{R})$ 和 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$（即 $d \times d$ 可逆矩阵群），并且记

$$\mathbf{e}_M(\boldsymbol{x}) = \mathbf{e}(M^{-1}\boldsymbol{x}) = e^{\langle M^{-1}\boldsymbol{x}, \mathbf{1}\rangle}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1}$$

我们考虑伪微分算子

$$\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}^M[\boldsymbol{\psi}] : \mathbf{D}(\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}^M[\boldsymbol{\psi}]) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$$

其符号为 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -\langle e(-M^{-1}\boldsymbol{x})\ \psi(M^{\top}\boldsymbol{\xi})\rangle$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$。也就是说，对于 $\mathrm{f}\in \mathrm{D}(\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi])$,

$$\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi]\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\mathfrak{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}$$

当 $M=\mathrm{Id}$ 时，我们简写为 $\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\psi]=\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi]$，并令 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}_M)$。我们还定义

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e);\ \mathcal{F}_f \text{ is entire and satisfies (2.2)}\}$$

$$\text{For any compact } C\subset\mathbb{R},\ \sup_{a\in C}|\mathcal{F}_f(\xi+\mathrm{i}a)| = \mathrm{O}(e^{-(\frac{\pi}{2}+\epsilon)|\xi|}),\ \epsilon>0, \tag{2.2}$$

并记 $\mathrm{D}(\mathbb{R}^d)=\otimes_{k=1}^d\mathcal{D}(\mathbb{R})$。现在我们可以陈述第一个主要结果。

定理 2.1. 对于任意 $M\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，记 $\mathscr{A}_M=\{\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi];\ \ \psi\in\mathrm{N}^d_b(\mathbb{R})\}$，则有

$$\mathrm{WS}_{\mathscr{A}_M}(\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]) = \mathscr{A}_M$$

其中 $\psi_0(\boldsymbol{\xi})=(\xi_1^2\ \ldots\ldots,\ \xi_d^2)$。更具体地，对于任意 $\psi\in\mathrm{N}^d_b(\mathbb{R})$ 和 $M\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，我们有 e

$$\boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi]\boldsymbol{\Lambda}_{\psi,M} = \boldsymbol{\Lambda}_{\psi,M}\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]\quad on\ \ \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d) \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_{\psi,\ M}$: $\mathrm{D}(\boldsymbol{\Lambda}_{\psi,\ M})\subset\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}_M)$ 满足 $\boldsymbol{\Lambda}_{\psi,\ M}\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Lambda}_{\psi}\mathrm{f}(M\boldsymbol{x})$，并且$\boldsymbol{\Lambda}_{\psi}$ 是与.....相关联的移位傅里叶乘子算子

$$\mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\psi}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{k=1}^d \frac{W_{\phi_{+,k}}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi_k)}{W_{\phi_{-,k}}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi_k)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi_k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi_k)}.$$

此外，对于任意 $\psi\in\mathrm{N}^d_+(\mathbb{R})$，$\boldsymbol{\Lambda}_{\psi,\ M}\in\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}),\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}_M))$。

该定理在子节 5.3中得到证明。

2.2. $\mathscr{P}$ 个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群和 $\mathrm{WS}_{\mathscr{P}}$的生成。下面引入线性微分算子

$$\boldsymbol{A}_0\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \ = \ \mathrm{Tr}\left(\Sigma(\boldsymbol{x})\nabla^2\mathrm{f}(\boldsymbol{x})\right),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

其中，Tr 和 ∇ 分别表示迹和梯度，并且，$\Sigma=\Sigma_{\mathbf{1}}$ 对于任意 $(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)\in[0,\infty)^d$，记作 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_d)$，对角矩阵 $\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})$ 定义为

$$\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{diag}(\sigma_1 e^{-x_1},\ldots,\sigma_d e^{-x_d}). \tag{2.5}$$

定理 2.2。(1) $(\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\psi_0],\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})$ 中的闭包，记作 $\boldsymbol{A}_2[\psi_0]$，生成一个自伴 $\mathcal{C}_0$-半群 $\boldsymbol{Q}\in\mathcal{C}_0^+(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}))$。更具体地说，$\boldsymbol{Q}$ 限制在 $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ 上的 $\cap\,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e})$ 可扩张为维数为 2 的 d 维对数贝塞尔过程的 Feller 半群，其生成元是 $(\boldsymbol{A}_0,\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d))$ 的闭包。

(2) 对任意 $M\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，集合 $\mathscr{A}_M$ 与集合之间存在一一映射

$$\mathscr{P}_M = \left\{\boldsymbol{P}^M[\psi];\ \psi\in\mathbf{N}^d_b(\mathbb{R})\right\}\subset\mathcal{C}_0(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e}_M))$$

使得 $\boldsymbol{A}^M_2[\psi] = \boldsymbol{A}^M_{\mathtt{PDO}}[\psi]$ 在一个稠密子集上成立，其中 $\boldsymbol{A}^M_2[\psi]$ 是 $\boldsymbol{P}^M[\psi]$ 的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathrm{e}_M)$-生成元。

更具体地，对于任意 $\psi\in\mathrm{N}_+(\mathbb{R})$，$A_2[\psi]$ 是 $(A_{\mathtt{PDO}}[\psi],\Lambda_\psi(\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}))$ 的闭包，其中 $\Lambda_\psi\in\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e))$ 在 (2.3) 中定义；否则，对于任意 $\psi\in\mathrm{N}_b(\mathbb{R})\setminus\widehat{\mathrm{N}}_+(\mathbb{R})$，$P[\psi]=P[\overline{\psi}]$。一般情形则通过希尔伯特空间的张量化和同构得到。

(3) 对任意 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，我们有

$$\mathrm{WS}_{\mathscr{P}_M}(\boldsymbol{Q}) = \mathscr{P}_M. \tag{2.6}$$

事实上，弱相似算子的集合构成一个乘法群，这意味着 $\mathrm{WS}_{\mathscr{P}}$ 构成一个等价类，其中 $\mathscr{P} = \bigcup_{M\in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})} \mathscr{P}_M$。

(4) 对任意 $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{N}_b^d(\mathbb{R})$，有 $\widehat{\boldsymbol{P}}^M[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{P}^M[\overline{\boldsymbol{\psi}}] \in \mathscr{P}$，其中 $\widehat{\boldsymbol{P}}^M[\boldsymbol{\psi}]$ 表示 $\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}]$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$ 中的伴随算子。因此，$\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}]$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$ 中自伴，当且仅当 $\overline{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi}$。

此定理在第 5.4 小节中证明。

注 2.3。当 $d = 1$，$M = \mathrm{Id}$（单位矩阵）时，简写为 $P[\psi] = \boldsymbol{P}^{\mathrm{Id}}[\boldsymbol{\psi}]$，恒等式（2.6）可写为

$$\mathrm{WS}_{\mathscr{P}}(Q) = \{P[\psi];\ \psi \in \mathbf{N}_b(\mathbb{R})\} \tag{2.7}$$

其中 Q 是对数平方贝塞尔过程（维数为 2）在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的半群，$e(x) = e^x$，$x \in \mathbb{R}$。此外，$P[\psi]$ 是对数自相似 Feller 半群在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的扩张，如第 3.3 节所述。

2.3. $\mathscr{P}$类的谱表示。在本节中，我们结合弱相似关系以及 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 中为自伴算子、因而可对角化这一事实，来获得 $\mathscr{P}$ 中半群的谱分解。为此，我们将 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 上的乘法半群记为 $(\boldsymbol{e}_t)_{t\geqslant 0}$，即对任意 $t \geqslant 0$，

$$\boldsymbol{e}_t \mathbf{f}(\boldsymbol{y}) = e^{-t\langle e(-\boldsymbol{y}),\mathbf{1}\rangle} \mathbf{f}(\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.8}$$

其中我们回顾一下，$e(-\boldsymbol{y}) = (e^{-y_1}, \ldots, e^{-y_d})$。现在可以陈述以下定理。

定理 2.4. 设 $\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}] \in \mathscr{P}_M$，其中某个 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，且 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in \mathrm{N}_b^d(\mathbb{R})$，满足 $\psi_k(\xi) = \phi_{+,k}(-\mathrm{i}\xi)\phi_{-,k}(\mathrm{i}\xi)$ 对所有 $1 \leqslant k \leqslant d$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$ 均成立。那么，对所有 $t \geqslant 0$，

$$\boldsymbol{P}_t^M[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M} \boldsymbol{e}_t \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M}^{-1} \quad on \quad \mathbf{D}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M}^{-1}) \tag{2.9}$$

其中 $\mathbf{D}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M}^{-1}) = $ 值域$(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M})$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M}\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{f}(M\boldsymbol{x})$ 中稠密，且 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi}}$ 是乘子记为 $\mathrm{m}_{\boldsymbol{\psi}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi})$ 的平移傅里叶算子，其中

$$\mathbf{m}_{\boldsymbol{\psi}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{k=1}^{d} \frac{W_{\phi_{+,k}}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi_k)}{W_{\phi_{-,k}}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi_k)},\quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

事实上，

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi},M}^{-1}) = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M);\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \mapsto \mathcal{F}_{\mathbf{f}\circ M^{-1}}^{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) \prod_{k=1}^{d} \frac{W_{\phi_{-,k}}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi_k)}{W_{\phi_{+,k}}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi_k)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

在某些条件下（见命题 2.11），$\mathbf{D}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi}M,}^{-1})$ 是整个希尔伯特空间，因此$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi}}^{-1}{}_{,M}$ 可扩展为整个希尔伯特空间上的有界算子。因此，(2.9) 在$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$上成立。

该定理在第 5.5 小节中得到证明。

注 2.5. 很容易验证，$\boldsymbol{H}_{\psi,M}$ 的逆算子为$\boldsymbol{H}_{\overline{\psi},M}$。这意味着，当 $\psi = \overline{\psi}$, $\boldsymbol{H}_{\psi,M}$ 是酉算子时（见第 3.4 小节），在下文的定理 2.6(3)中，我们将证明，$\boldsymbol{H}_{\psi}^{-1}{}_{,M}$ 的有界性以及条件 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 可确保半群 $\boldsymbol{P}^M[\psi]$ 的剩余谱存在。因此，定理 2.4 表明，剩余谱的存在使半群能够在整个希尔伯特空间上具有谱展开；而自伴线性算子的剩余谱为空。

2.4. 关于 $\mathscr{P}$ 中 $\mathcal{C}_0$-半群的谱。下一个结果给出了确定半群族 $\mathscr{P}$ 的谱性质的判据。为此，我们回顾一下：对于作用于希尔伯特空间 H 上的线性算子 A，其恒等算子为 I，记 $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}$；当 $A-\lambda I$ 不可逆时，$\}$，$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A)$；当 $A-\lambda I$ 不是单射时，$\}$，$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$；当 $A-\lambda I$ 具有稠密值域时，$\}$，以及 $\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$，它们分别对应于 A 的谱、点谱、连续谱和剩余谱，参见 Dunford 和 Schwartz 的专著 [14, 第 XV 章 8]。此外，我们将 A 的近似点谱记为

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists\, (v_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathrm{H} \text{ such that } \|v_n\|_{\mathrm{H}} = 1,\ \|Av_n - \lambda v_n\|_{\mathrm{H}} \to 0\}$$

其中 $\|.\|_{\mathrm{H}}$ 表示 H 中的范数。

定理 2.6。设 $\boldsymbol{P}^M[\psi] \in \mathscr{P}$ 对某个 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 成立。

(1) 对所有 $t \geqslant 0$,

$$e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]).$$

更准确地说，如果 $\mathbf{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}$ 是有界的，则 $e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_{ap}(\boldsymbol{P}_t^M[\psi])$，其中 $\mathbf{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}$ 定义于(2.10)中。如果 $1/\mathbf{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}$ 是有界的，则 $e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_{ap}(\widehat{\boldsymbol{P}}_t^M[\psi])$。

(2) 如果 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$，则

$$e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_p(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) \text{ and } \sigma_r(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) = \emptyset$$

其中，对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\boldsymbol{P}_t^M[\psi]\tau_{\ln \boldsymbol{q}}\mathbf{J}_{\psi}^M(\boldsymbol{x}) = \mathbf{e}(-t\boldsymbol{q})\, \tau_{\ln \boldsymbol{q}}\mathbf{J}_{\psi}^M(\boldsymbol{x})$$

其中 $\tau_{\boldsymbol{q}}\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q})$, $\mathrm{J}_{\psi}^M(\boldsymbol{x}) = \mathrm{J}\psi(M^{-1}\boldsymbol{x})$，并且

$$\mathbf{J}_{\psi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{e}(-\boldsymbol{x}/2)}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \mathbf{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

其中积分是按 L^2 意义理解的。

(3) 若 $1/\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$，则

$$e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_r(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) \text{ and } \sigma_p(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) = \emptyset$$

对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}_+^d$, $t > 0$ 以及 $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$,

$$\left\langle \boldsymbol{P}_t^M[\psi]\mathrm{f}, \tau_{\ln \boldsymbol{q}}\mathbf{J}_{\overline{\psi}}^M \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e}_M)} = \mathbf{e}(-t\boldsymbol{q}) \left\langle \mathrm{f}, \tau_{\ln \boldsymbol{q}}\mathbf{J}_{\overline{\psi}}^M \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d,\mathbf{e}_M)}.$$

(4) 若 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}$ 上下均有界，则

$$\sigma(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) = \sigma_c(\boldsymbol{P}_t^M[\psi]) = e^{t\mathbb{R}_-}. \tag{2.11}$$

特别地，当 $\boldsymbol{P}_t^M[\psi]$ 是自伴的，即 $\psi = \overline{\psi}$时，(2.11) 成立 .

该定理在第 5.6 小节中证明。

注 2.7. 关于点谱和剩余谱，有许多自然的例子，我们将在第 6.1 节和第 6.2.2节详细介绍其中一些。更一般地，对于任意 $\phi \in \mathbf{B}$，定义

$$\underline{\Theta}_\phi = \liminf_{|\xi|\to\infty} \Theta_\phi(|\xi|) \text{ and } \overline{\Theta}_\phi = \limsup_{|\xi|\to\infty} \Theta_\phi(|\xi|) \tag{2.12}$$

其中 $\Theta_\phi(|\xi|) = \frac{\int_{1/2}^{\infty} \ln\left(\frac{|\phi(a+\mathrm{i}|\xi|)|}{\phi\ a}()\right)}{|\xi|}\ da$，由 [38, 定理 6.2(1)], 可轻易推出，对于任意$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}\right| \asymp \frac{\sqrt{|\phi_-\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)|}}{\sqrt{|\phi_+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)|}} e^{-|\xi|(\Theta_{\phi_+}(|\xi|)-\Theta_{\phi_-}(|\xi|))}. \tag{2.13}$$

因此，若 $\underline{\Theta}_{\phi_+} > \overline{\Theta}_{\phi_-}$(分别为 $\underline{\Theta}_{\phi_-} > \overline{\Theta}_{\phi_+}$)，则 $P[\psi]$ 具有点谱（分别具有剩余谱）。关于最后两个结论的证明，以及在 $\underline{\Theta}_{\phi_+} = \overline{\Theta}_{\phi_-}$的情形下点谱和剩余谱的充分条件，请参阅命题 2.11。在第 6.2.1节，我们给出一些 ψ'，使得 $P[\psi]$ 不是自伴算子且具有连续谱。然而，一般而言，尽管我们总有 $e^{t\mathbb{R}^-} \subseteq \sigma(\boldsymbol{P}_t^M[\boldsymbol{\psi}])$，弱相似关系并不能用于验证反向包含关系。

注 2.8. 当函数 $\mathrm{m}_\psi^{\mathrm{e}}$ 是多项式有界的，即存在某个正数$p > 0$ 使得

$$\left|\mathbf{m}_{\boldsymbol{\psi}}^{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi})\right| \leqslant C_p(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^p$$

我们仍可在施瓦茨分布的意义下求得 $\mathrm{m}_\psi^{\mathrm{e}}$ 的傅里叶逆变换，并用它定义与剩余谱相关的函数。然而，$\mathrm{m}_\psi^{\mathrm{e}}$ 沿实数轴的增长通常是指数级的，因此这项分析需要更深入的技术，我们计划在后续工作中加以研究。

2.5. 生成元的保正性与积分微分表示。本节给出半群 $\boldsymbol{P}^M[\psi]$的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$-生成元的积分微分表示。首先引入 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 的以下子集

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{E} \text{ with } \mathcal{E} = \mathrm{Span}\{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta};\ \epsilon, \beta > 0\} \tag{2.14}$$

其中 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 由 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x) = e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x}e^{-\beta e^{-x}}$定义，而 $\otimes$表示单变量函数的张量积。接下来，对于任意 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in \mathrm{N}_b^d(\mathbb{R})$，其中，对于任意$k = 1, \ldots d$，$(\psi_k(0)\ \sigma_k^2, \mathfrak{b}_k, \mu_k)$ 是 ψ_k 的特征四元组，且 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，我们考虑作用于光滑且性质良好的函数 $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 的线性积分微分算子如下

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^M[\boldsymbol{\psi}]\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \ &= \ \mathrm{Tr}\left(M^\top \Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}(M^{-1}\boldsymbol{x})M\nabla^2\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\right) + \left\langle Me_{\mathfrak{b}}(-M^{-1}\boldsymbol{x}), \nabla\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\right\rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbf{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{y}, \nabla\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\rangle_{\mathbb{I}\{\|M^{-1}\boldsymbol{y}\|\leqslant 1\}}\right)\left\langle e(-M^{-1}\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\mu}_M(d\boldsymbol{y})\right\rangle \\ &\quad - \left\langle e(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}(0)\right\rangle \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中，Tr 表示迹，$\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}$ 在（2.5）中定义，∇ 是梯度，$\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_d), e_{\mathfrak{b}}(-\boldsymbol{x}) = (\mathfrak{b}_1 e^{-x_1}, \ldots, \mathfrak{b}_d e^{-x_d})$，其中 $e_1(-\boldsymbol{x}) = e(-\boldsymbol{x}) = (e^{-x_1}, \ldots, e^{-x_d})$。$\langle ., . \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $\mathbb{R}^d$ 中的内积和欧几里得范数，并且对于任意 $\boldsymbol{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$\boldsymbol{\mu}_M(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\mu}(M^{-1}\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{B}) = (\mu_1(B_1)\ldots,\mu_d(B_d))$，其中对于所有 $1 \leqslant k \leqslant d$，$B_k = \{x \in \mathbb{R} : x\mathfrak{e}_k \in \boldsymbol{B}\}$，$(\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_d)$ 是 $\mathbb{R}^d$的标准基。现在我们引入关于 ψ的 Wiener-Hopf 因子的以下条件。

$$\text{For any } 1 \leqslant k \leqslant d, \text{ either } \int_{|y|>1} |y|\mu_k(dy) < \infty \quad \text{or} \quad \phi_{+,k}(0) > 0 \tag{2.16}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^n e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|} \sup_{1\leqslant k\leqslant d} \left| \frac{W_{\phi_{+,k}}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_{-,k}}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} \right| = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N} \tag{2.17}$$

当 $\phi_{+,\ k}(0) = 0$时，（2.16）中的可积性假设结合泰勒公式的应用，意味着算子 $\boldsymbol{A}^M[\psi]$（2.15）在集合上定义良好

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \{\mathbf{f} \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^d);\ \nabla\mathbf{f} \in \mathbf{C}_b^1(\mathbb{R}^d)\}. \tag{2.18}$$

定理 2.9。设 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$。

(1) 我们有

$$\mathscr{P}_M \subset \mathcal{C}_0^+(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)).$$

更具体地说，将 $\boldsymbol{P}^M[\psi]$ 限制在 $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$ 上时，可将其扩展为 $\mathbb{R}^d$ 上 Feller 过程的半群；对任意 $t \geqslant 0$，该半群定义为 $\boldsymbol{Y}_t = M\boldsymbol{X}_t$，其中$\boldsymbol{X}_t = (\ln X_t^{(1)},\ldots,\ln X_t^{(d)})$，随机过程 $(X_t^{(k)})_{t\geqslant 0}, k = 1,\ldots,d$ 相互独立，且每个过程都是 $(0,\infty)$ 上的正自相似Feller过程；有关这些过程的更多细节，请参见第3.3节。(2) 如果 ψ 满足条件 (2.16) 和 (2.17)，那么 $\mathrm{E}_\psi^M := \boldsymbol{H}_\psi^M(\mathrm{E})$ 是 $\boldsymbol{A}_2[\psi]$ 的一个核，且其在 E_ψ^M 上的限制与 (2.15) 中定义的 $\boldsymbol{A}^M[\psi]$ 一致。

该定理在第5.7节证明。

注2.10。条件（2.16）是确保 $\mathrm{E}_\psi^M \subset \mathrm{C}$ 所必需的，这意味着（2.15）中的积分-微分算子在 E_ψ^M 上定义良好。为了减弱这一假设，并使得只要 ψ 满足（2.17），就有 $\mathrm{E}_\psi^M \subset \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$，则需要对比值 $\left|\frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}\right|$ 的渐近行为进行更精细的分析。

2.6. 根据 Wiener-Hopf 因子确定点谱或剩余谱的条件。 下一个命题给出了关于 Wiener-Hopf 因子特征三元组的一些充分条件，用于刻画点谱或剩余谱是否存在。根据定理 2.6，这归结为确定 $m_\psi = m_{\psi_k} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 对于 $k = 1,\ldots,d$ 是否成立。对于 $\phi \in \mathbf{B}$，回顾一下，$\overline{\Theta}_\phi$和 $\underline{\Theta}_\phi$ 定义于（2.12）。

命题2.11. 设 $\psi \in \mathrm{N}(\mathbb{R})$，其中 $\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi)$对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均成立，且 $\phi_\pm(z) = \phi_\pm(0) + \mathrm{d}_\pm z + \int_0^\infty (1-e^{-zy})\nu_\pm(dy)$对所有 $z \in \mathbb{C}_{[0,\infty)}$均成立。那么，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，

(i) 若 $\underline{\Theta}_{\phi_+} > \overline{\Theta}_{\phi_-}$ 且

$$\sup\left\{\kappa > 0;\ \liminf_{|\xi|\to\infty} |\xi|^\kappa |\phi_+(\mathrm{i}\xi)| > 0\right\} < \infty$$

则 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$、$m_\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 和 $m_{\overline{\psi}} \notin \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$。表1给出了关于 ϕ_+ 和 ϕ_- 的特征三元组、针对 $\underline{\Theta}_{\phi_+} > \overline{\Theta}_{\phi_-}$ 的充分条件，其中$\overline{\nu}_\pm(r) = \nu_\pm(r,\infty)$，并且对于任意 $\alpha > 0$，RV(α)（分别为 q-m）表示所有正则变化

变化的（res p. 准单调) 函数，其指标为 α，参见 [8, 第 1 章和第 2.7 节]

$\mathtt{d}_+$	$\mathtt{d}_-$	$\overline{\nu}_+$	$\overline{\nu}_-$	$\left\lvert \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} \right\rvert$
0	0	$\overline{\nu}_+ \in \mathrm{RV}(\alpha_+)$, $y \mapsto \frac{\overline{\nu}_+(y)}{y^{\alpha_+}}$ 是 q-m	$\overline{\nu}_- \in \mathrm{RV}(\alpha_-)$, $y \mapsto \frac{\overline{\nu}_-(y)}{y_{\alpha_-}}$ 是 q-m,	$= \mathrm{O}\left(e^{-(\alpha_+-\alpha_-)\frac{\pi}{2}\lvert\xi\rvert}\right)$ $0<\alpha_-<\alpha_+<1$
>0	0		$\overline{\nu}_- \in \mathrm{RV}(\alpha)$, $y \mapsto \frac{\overline{\nu}_-(y)}{y_{\alpha}}$ 是 q-m,	$= \mathrm{O}\left(e^{-(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\lvert\xi\rvert}\right)$ $0<\alpha<1$

TABLE 1. $m_\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 在 $\underline{\Theta}_{\phi_+} > \overline{\Theta}_{\phi_-}$ 时的条件

（ii）如果$\underline{\Theta}_{\phi_+} = \overline{\Theta}_{\phi_-}$，我们在表2 中给出了关于 ϕ_+、ϕ_- 的特征三元组的一组充分条件，以确保 $m_\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 和$m_{\overline{\psi}} \notin \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$成立。

$\mathtt{d}_+$	$\mathtt{d}_-$	$\overline{\nu}_+$	$\overline{\nu}_-$	$\left\lvert \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} \right\rvert$
>0	0	$\overline{\nu}_+(0)<\infty$		$= \mathrm{O}(\lvert\xi\rvert^{-u}) \ \ \forall u>0$
>0	>0	$\overline{\nu}_+(0)<\infty$	$\overline{\nu}_-(0) = \infty$	$= \mathrm{O}(\lvert\xi\rvert^{-u}) \ \ \forall u>0$

TABLE 2. $m_\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 在 $\underline{\Theta}_{\phi_+} = \overline{\Theta}_{\phi_-}$ 时的条件

该命题将在第 3.8 节证明。我们指出，对于任意一对伯恩斯坦函数，尤其是任意一对 $\mathrm{L}\left\lvert \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} \right\rvert$ 测度，研究比值 ´ 的渐近行为是一个微妙的问题。我们的结果确定了若干大类伯恩斯坦函数，对于这些函数，这类估计是可以得到的。我们提到，在近期的论文 [31], 中，当 W_{ϕ_+} 为经典伽马函数时，该比值的渐近估计已在对 L´évy 测度尾函数所作的、不同于本文条件的其他条件下得到$\overline{\nu}_-$。

3. PRELIMINARIES AND AUXILIARY RESULTS

本节汇集若干一般性事实，介绍论文后续部分将用到的一些概念和工具，重点讨论移位傅里叶乘子理论，以及某些伯恩斯坦-伽马函数比值的解析性质；这些内容将在下文中发挥重要作用。

3.1. 傅里叶变换、移位傅里叶变换及一些经典结果。对于任意函数 f in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$，记其傅里叶变换为 $\mathcal{F}_f$，即

$$\mathcal{F}_f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\, dx, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

和之前一样，我们定义 $\mathcal{F}^e$ 平移傅里叶变换，即对于任意的 $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$，记$e(x) = e^x$，

$$\mathcal{F}^e_f(\xi) = \mathcal{F}_{\sqrt{e}f}(\xi) \tag{3.1}$$

在 L^2 意义下。显然，$\mathcal{F}^e: L^2(\mathbb{R}, e) \to L^2(\mathbb{R})$ 是一个等距映射，其逆算子记为$\frown\mathcal{F}^e$。接下来，我们介绍一个由维纳提出、在本文中将频繁用到的非常有用的结果。

定理 3.1（维纳陶伯定理）。设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 满足 $\mathcal{F}_f$ 几乎处处（a.e.）非零。然后，回顾 $\tau_a f(.) = f(. + a)$，集合 $\mathrm{Span}\{\tau_a f;\ a \in \mathbb{R}\}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密。

这一结果非常标准，可以在 [8] 中找到。在下面的推论中，我们将介绍维纳定理的一个变体，该变体将在后续结果中用到。

推论 3.2。设 $f \in L^2(\mathbb{R}, e)$ 满足 $\mathcal{F}_f^e$ 几乎处处非零。那么，$Span\{\tau_a f;\ a \in \mathbb{R}\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。

证明。注意到 $f \in L^2(\mathbb{R}, e)$ 意味着 $\sqrt{e}f \in L^2(\mathbb{R})$，其中我们回顾 $\sqrt{e}f = f(x)e^{\frac{x}{2}}, x \in \mathbb{R}$。根据维纳陶伯定理，我们有 $\mathrm{Span}\{\tau_a\sqrt{e}f;\ a \in \mathbb{R}\}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密，从而证明了该结果。□

我们以如下柯西围道积分公式的一个变体结束本部分，后文也将用到它。

引理 3.3. 设 $f \in A^{[0,\gamma]}$，其中某个 $\gamma > 0$，且存在 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 使得，对于$p < \infty$,

$$\sup_{b\in[0,\gamma]} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x + \mathrm{i}b)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

（分别地，对于 $p = \infty$，上确界范数有限）。那么，可以选取自然数的一个子序列 $(n_j)_{j\geqslant 1}$，使得对任意 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-n_j}^{n_j} [f(x + \mathrm{i}b) - f(x)]dx = 0.$$

特别地，当 $p = 1$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x + \mathrm{i}b)dx$ 对所有 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$成立，且当 $p = \infty$时，$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} [f(x + \mathrm{i}b) - f(x)]dx = 0$ 对所有 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$成立。

证明。先假设 $1 \leqslant p < \infty$。由 f 在条带 $\mathbb{S}_{[0,\gamma]}$ 内的解析性，并应用柯西积分公式，对于任意 $x > 0$ 和 $0 < b \leqslant \gamma$，有

$$\int_{R_x^b} f(z)dz = 0$$

其中，R_x^b 是由点 $-x$、x、$x + \mathrm{i}b$ 和 $-x + \mathrm{i}b$构成的矩形。下面估计 R_x^b的垂直边上的积分。由 H¨older 不等式可得

$$\left(\int_0^b |f(\pm x + \mathrm{i}y)|dy \right)^p \leqslant \left(\int_0^\gamma |f(\pm x + \mathrm{i}y)|dy \right)^p \leqslant \gamma^{\frac{p}{q}} \int_0^\gamma |f(\pm x + \mathrm{i}y)|^p dy$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，当 $q = \infty$ 时，$p = 1$。结合引理的假设应用 Fubini定理，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\gamma |f(x + \mathrm{i}y)|dy \right)^p dx \leqslant \gamma^{\frac{p}{q}} \int_0^\gamma \int_{\mathbb{R}} |f(x + \mathrm{i}y)|^p dx\, dy < \infty$$

其中 i 这意味着存在一个自然数子序列 $(n_j)_{j\geqslant 1}$，使得 at

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{\gamma}|f(\pm n_j+\mathrm{i}y)|dy=0.$$

因此，对于任意 $0\leqslant b\leqslant\gamma$，$\lim_{j\to\infty}\left(\int_{-n_j}^{n_j}[f(x+\mathrm{i}b)-f(x)]-\int_{R^b_{n_j}}f(z)dz\right)=0$，这证明了该引理。当 $p=\infty$ 时，对于任意 $0<b\leqslant\gamma$，沿 R^b_x 垂直直线的积分在 $x\to\infty$ 时趋于 0。这就完成了对所有 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 的引理证明。□

3.2. Rd 上的负定函数与伪微分算子。

3.2.1. 负定函数。若函数 $\psi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 满足：对于任意选取的 $p\in\mathbb{N}$ 和 $(\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_p)\in\mathbb{R}^{d\times p}$，矩阵

$$(\psi(\boldsymbol{\xi}_i)+\overline{\psi}(\boldsymbol{\xi}_j)-\psi(\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{\xi}_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$$

是半正定 Hermitian 矩阵。众所周知，任意连续负定函数 ψ 都有如下表示

$$\psi(\boldsymbol{\xi})=\psi(\mathbf{0})-\mathrm{i}\langle\mathbf{b},\boldsymbol{\xi}\rangle+\langle\boldsymbol{\xi},\Sigma\boldsymbol{\xi}\rangle+\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-e^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}\rangle}+\mathrm{i}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{I}_{\{\|\boldsymbol{y}\|\leqslant 1\}}}\right)\mu(d\boldsymbol{y})$$

其中 $\psi(0)\geqslant 0$，$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$，$\Sigma$ 为非负定，且 μ 是正拉东测度，使得 $\int_{\mathbb{R}^d}(\|\boldsymbol{y}\|^2\wedge 1)\mu(d\boldsymbol{y})<\infty$。我们用 $\mathrm{N}(\mathbb{R}^d)$ 表示所有连续负定函数构成的集合。$\mathrm{N}(\mathbb{R}^d)$ 这一类自然地出现在对 L´évy 过程的研究中。事实上，对于任意（可能含杀死项的）L´évy 过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，存在唯一的 $\psi\in\mathrm{N}(\mathbb{R}^d)$，使得

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{\xi},Z_t\rangle}]=e^{-t\psi(\boldsymbol{\xi})},\ t\geqslant 0,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \tag{3.2}$$

并且 Z 的无穷小生成元，对光滑函数 $\mathbf{f}\in\mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$，由下式给出

$$\begin{aligned}L[\psi]\mathbf{f}(\boldsymbol{x})=&\langle\nabla\mathbf{f},\Sigma\nabla\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\rangle+\langle\mathbf{b},\nabla\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\rangle+\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\mathbf{f}(\boldsymbol{x})-\langle\boldsymbol{y},\nabla\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\rangle_{\mathbb{I}_{\{\|\boldsymbol{y}\|\leqslant 1\}}})\mu(d\boldsymbol{y})\\&-\psi(\mathbf{0})\mathbf{f}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Jacob 的专著 [20] 对这类函数及其与 L´évy 过程之间的联系作了全面论述。

3 2 2 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\ldots$ 伪微
$\mathbb{C}$ $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ $\boldsymbol{\xi}\mapsto$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{\xi}$
分算子及其与马尔可夫过程的联系。设 $_{\mathfrak{g}}$: 是一个连续函数，且对所有 ，映射 $_{\mathfrak{g}}(\,,\,)$ 都是负定的。根据马尔可夫过程伪微分算子（简称 PDO）的一般理论，我们知道，对于所有 $\boldsymbol{x},\gamma$，都有 $|_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|\leqslant\gamma(\boldsymbol{x})(1+\|\boldsymbol{\xi}\|^2)$，其中 γ是局部有限函数。我们定义如下线性算子

$$-_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{x},D)f(x)=-(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}\rangle}\mathcal{F}_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}\ ,\quad \mathbf{f}\in\mathbf{S}(\mathbb{R}^d),$$

其中 $\mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Schwartz 空间。显然，上述积分定义良好，我们称 $_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{x},D)$ 为符号为 $_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 的伪微分算子。具有负定符号的伪微分算子类在马尔可夫过程理论中发挥着重要作用。Courr`ege [13] 证明，若 $(\boldsymbol{A},\mathrm{D}(\boldsymbol{A}))$ 是

$\mathbb{R}^d$ 使得 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq D(A)$，则 A 是符号为 ${}_{\mathcal{G}}(x,\xi)$ 的伪微分算子，其形式为

$$ {}_{\mathcal{G}}(x,\xi) = {}_{\mathcal{G}}(x,0) - i\langle \xi, b(x)\rangle + \langle \xi, Q(x)\xi\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (1 - e^{i\langle \xi, y\rangle} + i\langle \xi, y\rangle \mathbb{I}_{\{\|y\|\leqslant 1\}})\mu(x,dy) $$

其中，对所有 x，$a(x,0) \geqslant 0$, $Q(x)$ 都是非负定的，$b:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是可测的，而 $\mu(x,dy)$ 是一个 Lévy 测度，即 $\int_{\mathbb{R}^d}(\|y\|^2 \wedge 1)\mu(x,dy) < \infty$。另一方面，若给定一个具有负定符号的伪微分算子，那么与之对应的唯一 Feller 过程是否存在，是一个更为微妙的问题。关于这一问题的一些结果可见 [19, 定理 5.7]，，但对符号 $a(\cdot,\cdot)$ 的要求相当严格。例如，即使在一维情形下，这些条件也不满足符号 $a(x,\xi) = e^{-x}\psi(\xi)$，其中 ψ 是连续负定函数。然而，在下文的定理 4.1 中，我们提出了一种基于交织概念的新方法来解决这一问题。事实上，我们将证明，在对 ψ 施加一些较弱条件的情况下，符号为 $a(x,\xi) = e^{-x}\psi(\xi)$ 的伪微分算子在某个函数稠密子集上的限制，可唯一延拓为 $L^2(\mathbb{R},e)$ 上一个 $\mathcal{C}_0$-压缩保正半群的生成元。

3.3. Lamperti 映射、对偶、对数变换与生成元。在 Lamperti 的开创性论文中，[28] 他建立了所有 L´évy 过程与正实数轴上的自相似 Feller 过程之间的一一对应关系，直至它们在 0 处被吸收。更具体地说，对于任意从 $x > 0$出发的正 α-自相似、$\alpha > 0$、Feller 过程$X = (X_t(x))_{t\geqslant 0}$，存在唯一一个从原点出发的 L´évy 过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$，使得对所有 $0 \leqslant t < \zeta(x) = \inf\{t \geqslant 0;\ X_t(x) \leqslant 0\}$,

$$ X_t(x) = x\exp(Z_{\varphi(x^{-\alpha}t)}) $$

其中 $\varphi(t) = \inf\left\{s > 0;\ \int_0^s e^{\alpha Z_r}\,dr > t\right\}$。首次到达时$\zeta(x)$几乎必然有限，取决于 L´évy 过程 Z 以及它的生存期。这称为 Lamperti 映射，它使得能够为 X 关联一个唯一的 L´évy–Khintchine 指数。更多细节请参见[28, 定理 4.1]。不难看出，对于任意 α-自相似 Feller 过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 在 $(0,\infty)$ 上，过程 $(X_t^{1/\alpha})_{t\geqslant 0}$ 是 $(0,\infty)$ 上的 1-自相似 Feller 过程。由于 $x \mapsto x^{1/\alpha}$ 是 $(0,\infty)$ 上的同胚，相应的半群彼此相似。对于与 L´évy–Khintchine 指数 ψ对应的 1-自相似 Feller 半群 $P_t^{\mathrm{F}}[\psi]$，其伴随半群也是一个 Feller 半群，并且对应于共轭的 L´évy–Khintchine 指数 $\overline{\psi}$，参见 [5, 引理 2]。也就是说，对于任意 $f,g \geqslant 0$,

$$ \int_{\mathbb{R}_+} P_t^{\mathrm{F}}[\psi]f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)P_t^{\mathrm{F}}[\overline{\psi}]g(x)\,dx. \tag{3.3} $$

这保证了 $\mathbb{R}_+$ 上的勒贝格测度是半群$P^{\mathrm{F}}[\psi]$的超额测度，因此，后者可自然延拓到 $L^2(\mathbb{R}_+)$，我们将其记为 $P[\psi]$。$P[\psi]$ 是 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上的一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群，其伴随算子为 $P[\overline{\psi}]$。由于我们的方法源自定义在整个实数轴$\mathbb{R}$上的伪微分算子理论，因此我们考虑 1-自相似菲勒过程的对数。由于对数是从 $(0,\infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 的同胚，所得半群仍与原半群相似。经过对数变换后，所得半群以 $e(x)dx = e^x\,dx, x \in \mathbb{R}$ 为超额测度，并可延拓为 $L^2(\mathbb{R},e)$ 上的 $\mathcal{C}_0$-压缩半群。因此，在此对数变换下，所有谱性质均保持不变。接下来，由 [28], 可知

与 Lévy-Khintchine 指数 ψ 相关联的 1-自相似过程的 Dynkin 特征算子由下式给出

$$\overline{A}_{\mathtt{D}}[\psi]f(x) = \frac{1}{x}L[\psi](f\circ\exp)(\ln x), \quad x\in\mathbb{R} \tag{3.4}$$

其中， $L[\psi]$ 是具有 Lévy-Khintchine 指数 ψ 的 Lévy 过程的生成元，且集合 $\{f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+;\ x\mapsto f(x)$ $xf'(x)$ $x^2f''(x)$ $\in \mathsf{C}_b(\mathbb{R}_+)\}\subseteq \mathsf{D}(\overline{A}_{\mathtt{D}}[\psi])$。若现在以 $A_{\mathtt{D}}[\psi]$ 表示对数自相似过程的 Dynkin 特征算子，则

$$A_{\mathtt{D}}[\psi]f(x) = e^{-x}L[\psi]f(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

和 $\{f\colon \ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \ f\in \mathbf{C}_b^2(\mathbb{R})\}\subseteq \mathbf{D}(A_{\mathtt{D}}[\psi])$ 。此外，对于任意 $f\in\mathbf{S}(\mathbb{R})$，由（3.5）可推得 $A_{\mathtt{D}}[\psi]f = A_{\mathtt{PDO}}[\psi]f$ 其中

$$A_{\mathtt{PDO}}[\psi]f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x}\psi(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi$$

这是一个符号为 $\mathsf{a}(x,\xi) = e^{-x}\psi(\xi)$ 的 PDO。从现在起，我们只考虑对数自相似过程，并将它们的半群记为 $P[\psi]$。

3.4. 移位傅里叶乘子算子。回顾一下，若算子 $\Lambda : \mathrm{L}^2(\mathbb{R},e) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 满足：存在可测函数$m^e_\Lambda : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ，使得对所有 $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}^e_{\Lambda f}(\xi) = m^e_\Lambda(\xi)\mathcal{F}^e_f(\xi)$$

对所有满足 $m^e_\Lambda\mathcal{F}^e_f\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 的 $f\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 均成立。算子 Λ 有界，当且仅当 m^e_Λ 可测且本质有界。在本文中，我们使用移位傅里叶乘子算子的一个子类，其中乘子在某个条带上解析。以下定义将正式引入这一类算子。

定义 3.4. 令 $\mathscr{M}$ 为定义在加权希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 上的所有移位傅里叶乘子算子的集合，并满足：对任意 $\Lambda\in\mathscr{M}$，存在一个函数m^e_Λ，即傅里叶乘子，使得记作 $m_\Lambda\left(\cdot+\mathrm{i}\frac{}{2}\right) = m^e_\Lambda(\cdot)$ 时， m_Λ 定义在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 上并满足

(i) m_Λ 在条带 $\mathbb{S}_{(0,1)}$内解析；
(ii) m_Λ 在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 上无零点，并且

$$\mathcal{F}^e_{\Lambda f}(\xi) = m_\Lambda\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathcal{F}^e_f(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{3.6}$$

$$\text{with } \mathbf{D}(\Lambda) = \{f\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e);\ m_\Lambda\left(\xi+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathcal{F}^e_f(\xi)\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})\}.$$

若 $f\in\mathsf{D}(\Lambda)$ 足够正则，且乘子 m_Λ 满足某些可积性条件，则在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 的某个子空间上，Λ 可表示为 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 上的经典傅里叶乘子算子。

命题 3.5. 考虑 $\Lambda\in\mathscr{M}$，使得 m_Λ 在 $\mathbb{R}$ 上连续延拓。设 $f\in\mathsf{D}(\Lambda)$ 满足对某个 $\frac{1}{2}\leqslant\gamma\leqslant 1$,

(i) 对所有 $0\leqslant b\leqslant\gamma$, $\mathcal{F}_f\in\mathsf{A}^{[0,\gamma]}$ 和 $\mathcal{F}_f(\cdot+\mathrm{i}b)\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$；(ii) $\sup_{b\in[0,\gamma]}\int_{\mathbb{R}}|m_\Lambda(\xi+\mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi+\mathrm{i}b)|^2\,d\xi<\infty$。

那么，对于任意 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$， $\Lambda f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e^{2bx})$，且对于所有 $\xi \in \mathbb{R}$，

$$\mathcal{F}_{\Lambda f}(\xi + \mathrm{i}b) = m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b). \tag{3.7}$$

证明。我们首先注意到，条件（ii）保证对于任意 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$，存在 $g_b \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$，使得 $\mathcal{F}_{g_b}(\xi) = m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$成立。现在，根据傅里叶变换的标准理论可知，对于任意 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$，

$$g_b(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b)e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$$

上述收敛在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 中成立。现在，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，由于上面的被积函数满足引理 3.3 的条件，且 $p = 2$，因此我们可以选取一个子列 $(n_j)_{j\geqslant 1}$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_j}^{n_j} m_\Lambda(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_j}^{n_j} m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b)e^{\mathrm{i}\xi x}e^{-bx} d\xi \to 0$$

当 $j \to \infty$ 时。注意，上面的第一个被积函数收敛到 $g_0(x)$，而第二个积分在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 中收敛到 $e^{-bx}g_b(x)$，这表明对于所有 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$， $g_b(x) = e^{bx}g_0(x)$，特别是在 $b = \frac{1}{2}$ 时成立。现在，根据 Λf 的定义，显然有 $\Lambda f(x) = e^{-\frac{x}{2}}g_{\frac{1}{2}}(x) = g_0(x)$。上述计算表明，对于所有 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$， $g_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e^{2bx})$，由此证明了该结果的第一个结论。利用柯西-施瓦茨不等式，对于任意 $0 < b < \gamma$，我们有

$$\left(\int_{-\infty}^{0} |g_0(x)|e^{bx} dx\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{0} |g_0(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{0} e^{2bx} dx < \infty$$

$$\left(\int_{0}^{\infty} |g_0(x)|e^{bx} dx\right)^2 \leqslant \int_{0}^{\infty} |g_0(x)|^2 e^{2\gamma x} dx \int_{0}^{\infty} e^{-2(\gamma-b)x} dx < \infty$$

这表明对所有 $0 < b < \gamma$， $\Lambda f = g_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, e^{bx})$。因此，对于任意 $0 < b < \gamma$，有

$$\mathcal{F}_{\Lambda f}(\xi + \mathrm{i}b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_0(x)e^{bx}e^{-\mathrm{i}\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_b(x)e^{-\mathrm{i}\xi x} dx = m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b).$$

由于 $\Lambda f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e^{2\gamma x})$且上述方程右端连续延拓至 $\mathbb{S}_{(0,\gamma)}$的边界上，因此（3.7）对所有 $0 \leqslant b \leqslant \gamma$均成立。□

命题 3.6. 任意 $(\Lambda, \mathbf{D}(\Lambda)) \in \mathscr{M}$在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中均稠密定义且具有稠密值域，并且$\mathcal{F}^e_{\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ 是一个核。

证明。设 $f \in \mathbf{D}(\Lambda)$ 满足 $\mathcal{F}^e_f(\xi) \neq 0$几乎处处成立。那么，对于任意 $a, \xi \in \mathbb{R}$，

$$\mathcal{F}^e_{\tau_a \Lambda f}(\xi) = e^{\mathrm{i}a - \frac{a}{2}} m_\Lambda\left(\xi + \mathrm{i}/2\right) \mathcal{F}^e_f(\xi) = m_\Lambda\left(\xi + \mathrm{i}/2\right) \mathcal{F}^e_{\tau_a f}(\xi) = \mathcal{F}^e_{\Lambda \tau_a f}(\xi),$$

也就是说， $\tau_a \Lambda f \in \mathbf{Range}(\Lambda)$。应用维纳陶伯定理可知，集合 $\mathbf{Span}\{\tau_a \Lambda f;\ a \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。接下来，我们注意到

$$\mathbf{D}(\Lambda) = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e);\ \mathcal{F}^e_f \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, \left(1 + \left|m_\Lambda\left(\xi + \mathrm{i}/2\right)\right|^2\right) d\xi\right)\right\}. \tag{3.8}$$

由于函数 $1 + |m_\Lambda(\cdot + \mathrm{i}/2)|^2$ 局部可积，相应的加权 $\mathbf{L}^2$- 空间以 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 为稠密子集。此外，Λ 的图范数定义为 $\|f\|_\Lambda := \|f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} + \|\Lambda f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}$，它等价于 $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, \left(1 + |m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}/2)|^2\right) d\xi\right)$的范数。因此，$\mathcal{F}^e_{\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ 在图范数 $\|\cdot\|_\Lambda$ 意义下稠密于 $\mathbf{D}(\Lambda)$，故为 $(\Lambda, \mathbf{D}(\Lambda))$ 的核. □

该类 $\mathscr{M}$ 还具有一些良好的代数性质，具体如下 .

命题 3.7. 类 $\mathscr{M}$ 在算子乘法（即考虑复合的闭包）的意义下构成一个阿贝尔群，且在取伴随算子后保持封闭。

证明。注意，任意 $\Lambda \in \mathscr{M}$ 都是单射，因为由 (3.6)， $\Lambda f \equiv 0$ 蕴含 $\mathcal{F}_f^e = 0$ 几乎处处成立；又由于 $m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}/2) \neq 0$ 几乎处处成立，因此得到 $f \equiv 0$。由定义显然可知， $\mathscr{M}$ 中的任意算子也是闭算子。此外，任意算子 $(\Lambda, \mathrm{D}(\Lambda)) \in \mathscr{M}$ 都有一个逆算子 $(\Lambda^{-1}, \mathrm{D}(\Lambda^{-1}))$，该逆算子也是闭算子，并且 $\mathrm{D}(\Lambda^{-1}) = \text{值域}(\Lambda)$，$\text{值域}(\Lambda^{-1}) = \mathrm{D}(\Lambda)$。容易看出，$(\Lambda^{-1}, \mathrm{D}(\Lambda^{-1})) \in \mathscr{M}$ 且 $m_{\Lambda^{-1}} = \frac{1}{m_\Lambda}$。对于任意两个算子 $\{(\Lambda_k, \mathrm{D}(\Lambda_k))\}_{k=1}^2$， $\Lambda_1\Lambda_2$ 的闭包 $\overline{\Lambda_1\Lambda_2}$ 是稠密定义的，且满足 $m_{\overline{\Lambda_1\Lambda_2}} = m_{\Lambda_1} m_{\Lambda_2}$；这证明了 $(\overline{\Lambda_1\Lambda_2}, \mathrm{D}(\overline{\Lambda_1\Lambda_2})) \in \mathscr{M}$。对于 $\Lambda \in \mathscr{M}$，我们断言 Λ 的伴随算子 $\hat{\Lambda}$ 是傅里叶乘子算子，其乘子为 $m_{\hat{\Lambda}}(\xi + \mathrm{i}a) = \overline{m}_\Lambda(\xi + \mathrm{i}a) = m(-\xi + \mathrm{i}(1-a))$。为此，令 $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$，使得映射

$$f \mapsto \langle \Lambda f, g\rangle_e = \left\langle m_\Lambda\left(\cdot + \mathrm{i}/2\right)\mathcal{F}_f^e, \mathcal{F}_g^e\right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = \left\langle \mathcal{F}_f^e, \overline{m}_\Lambda\left(\cdot + \mathrm{i}/2\right)\mathcal{F}_g^e\right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}$$

是连续的。只有当 $\overline{m}_\Lambda(\cdot + \mathrm{i}/2)\, \mathcal{F}_g^e \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 时，这才可能成立，由此完成命题的证明。□

令 $\mathscr{M}_e$ 表示 $\mathscr{M}$ 中满足以下附加性质的算子类

$$\text{For all } (\Lambda, \mathbf{D}(\Lambda)) \in \mathscr{M}_e,\ |m_\Lambda(\xi + \mathrm{i}/2)| \leqslant Ce^{k|\xi|},\ \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

其中 C、k 是依赖于 Λ 但与 ξ 无关的正数。最后，我们定义 $\overline{\mathscr{M}}$（分别地， $\overline{\mathscr{M}}_e$）为 $\mathscr{M}$（分别地， $\mathscr{M}_e$）中满足以下条件的算子 Λ 类：函数 m_Λ 在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 上解析，并可连续延拓至 $\mathbb{S}_{[0,1]}$。注意，当且仅当 $m_\Lambda(\cdot + \mathrm{i}/2)$ 有界时，$(\Lambda, \mathrm{D}(\Lambda)) \in \mathscr{M}$ 有界。现在我们证明，傅里叶乘子算子作为交织算子作用时满足传递性。

命题 3.8. 设 A、$B \in \mathscr{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e))$ 且 $\Lambda \in \mathscr{M}_e$ 满足：对所有 $f \in \mathrm{D}(\Lambda)$，均有 $A\Lambda f = \Lambda B f$。则对所有 $f \in \mathrm{D}(\Lambda^{-1})$，均有 $B\Lambda^{-1} f = \Lambda^{-1} A f$。类似地，若对于 A、B、$C \in \mathscr{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e))$，存在 Λ_1、$\Lambda_2 \in \mathscr{M}_e$，使得在 $\mathrm{D}(\Lambda_1)$ 上有 $A\Lambda_1 = \Lambda_1 B$，且在 $\mathrm{D}(\Lambda_2)$ 上有 $B\Lambda_2 = \Lambda_2 C$，那么在 $\mathrm{D}(\overline{\Lambda_1\Lambda_2})$ 上有 $A\overline{\Lambda_1\Lambda_2} = \overline{\Lambda_1\Lambda_2} C$，其中 $\overline{\Lambda_1\Lambda_2}$ 是 $\Lambda_1\Lambda_2$ 的闭包。

证明。若 $A\Lambda = \Lambda B$ 在 $\mathrm{D}(\Lambda)$ 上，则由 Λ 的单射性可知， $B\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} A$ 在 $\mathrm{Range}(\Lambda) = \mathrm{D}(\Lambda^{-1})$ 上。为证明传递性，我们考虑 $A, B, C \in \mathscr{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e))$，使得 $A\Lambda_1 = \Lambda_1 B$ 在 $\mathrm{D}(\Lambda_1)$ 上且 $B\Lambda_2 = \Lambda_2 C$ 在 $\mathrm{D}(\Lambda_2)$ 上。于是，我们已有 $A\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_1\Lambda_2 B$ 在 $\{f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上；$f \in \mathrm{D}(\Lambda_2)$ $\Lambda_2 f \in \mathrm{D}(\Lambda_1)\}$。由命题 3.6，集合 $\widehat{\mathcal{F}}^e_{\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ 是 Λ_1、Λ_2 和 $\overline{\Lambda_1\Lambda_2}$ 的核，其中

$$\mathbf{D}(\overline{\Lambda_1\Lambda_2}) = \left\{f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e);\ \xi \mapsto m_{\Lambda_1}\left(\xi + \mathrm{i}/2\right) m_{\Lambda_2}\left(\xi + \mathrm{i}/2\right)\mathcal{F}_f^e(\xi) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)\right\}.$$

此外，$\widehat{\mathcal{F}}^e_{\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})} \subset \{f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e);\ f \in \mathrm{D}(\Lambda_2)$ $\Lambda_2 f \in \mathrm{D}(\Lambda_1)\}$。因此，由稠密性论证，恒等式 $A\overline{\Lambda_1\Lambda_2} = \overline{\Lambda_1\Lambda_2} B$ 在 $\mathrm{D}(\overline{\Lambda_1\Lambda_2})$ 上成立。

□

3.5. 关于生成元的一些基本事实。在马尔可夫半群理论中，有多种定义生成元的概念。这取决于所研究的底层巴拿赫空间及其所关注的拓扑。本文关注马尔可夫半群的 $\mathbf{L}^2$-生成元。本节的主要目的是联系三类

生成元，即 Feller 生成元、Dynkin 特征算子和 L^2-生成元。我们从下面这个 Dynkin 提出的结果开始，该结果联系了 Feller 过程的特征算子与无穷小生成元。

引理 3.9. [15, 定理 5.5，第 V 章。3] 设 $(A_F, D(A_F))$ 和 $(A_D, D(A_D))$ 分别是状态空间为 E 的某个 Feller 过程的 Feller 无穷小生成元和 Dynkin 特征算子。若对某个 $f \in D(A_D) \cap C_0(E)$，$A_D f \in C_0(E)$，则 $f \in D(A_F)$ 且 $A_F f = A_D f$。

下一个结果讨论希尔伯特空间上马尔可夫半群的强生成元与弱生成元相等这一问题，证明可见于 [44]。

引理 3.10. [44,定理 1。3] 设 $(P_t)_{t\geqslant 0}$ 是巴拿赫空间 Y 上由有界算子构成的 C_0-压缩半群。令 $(A, D(A))$ 和 $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ 分别表示该半群的弱生成元和强生成元。那么，$(A, D(A)) = (\tilde{A}, D(\tilde{A}))$。

最后，我们得到以下结果，它将 Feller 无穷小生成元与马尔可夫过程的 L^2-生成元联系起来。

引理 3.11. 对于具有超额测度 ε（即 $\varepsilon P_t \leqslant \varepsilon$）的 $\mathbb{R}$ 上的 Feller 半群 $(P_t)_{t\geqslant 0}$，令 $(P_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ 表示其 $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$-扩张。设 $(A_F, D(A_F))$ 和 $(A_2, D(A_2))$ 分别为 P 和 $P^{(2)}$ 的生成元。若 $f \in D(A_F) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 满足 $A_F f \in L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$，则 $f \in D(A_2)$ 且 $A_F f = A_2 f$。

证明。任取满足 $A_F f \in L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 且 $g \in L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 的 $f \in D(A_F) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$。那么我们知道，对所有 $t \geqslant 0$，P_t 关于 $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 范数在 $C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 上是压缩映射，并且，

$$\left\langle (P_t^{(2)} f - f)/t, g \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)} = \langle (P_t f - f)/t, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)}. \tag{3.10}$$

由于 A_F 是 Feller 半群 $(P_t)_{t\geqslant 0}$ 的生成元，我们有

$$\lim_{t\to 0} \|(P_t f - f)/t - A_F f\|_\infty = 0$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $C_0(\mathbb{R})$ 中的上确界范数。由于 $A_F f \in L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$，我们注意到，对于任意 $t > 0$，

$$\left\| \frac{P_t f - f}{t} \right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)} = \frac{1}{t} \left\| \int_0^t P_s A_F f ds \right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{t} \int_0^t \|P_s A_F f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)} ds \leqslant \|A_F f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\varepsilon)}.$$

现在，由 (3.10) 可知，若 $g \in L^1(\mathbb{R}, \varepsilon) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$，则 $\lim_{t\to 0} \left\langle \frac{P_t f - f}{t}, g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R},\varepsilon)} = \langle A_F f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R},\varepsilon)}$。另一方面，由于 $\{(P_t f - f)/t;\ t > 0\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 中有界，因此它在 $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 中弱紧。设 f^* 是 $(P_t f - f)/t$ 在 $t \to 0$ 时的一个弱子列极限。那么，由 (3.10) 及上述讨论可得，对所有 $g \in L^1(\mathbb{R}, \varepsilon) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$，都有 $\langle f^*, g \rangle_{L^2(\mathbb{R},\varepsilon)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R},\varepsilon)}$。由于 $L^1(\mathbb{R}, \varepsilon) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 在 $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ 中稠密，我们推知，对于所有 $f \in D(A_F) \cap L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$，当 $t \to 0$ 时，$\frac{P_t^{(2)} f - f}{t} \to A_F f$ 弱收敛。最后，运用引理 3.10，我们得出 $A_F f$ 也是 $(P_t^{(2)} f - f)/t$ 的强极限，证明完毕。□

我们以如下引理结束本节，该引理表明，算子的 C_0-收缩半群生成性质在弱相似关系下保持不变。

引理 3.12. 设 $(B,\mathcal{D})$ 的闭包是巴拿赫空间 X 上一个 $\mathcal{C}_0$-收缩半群的生成元。设 $(A,\mathrm{D}(A))$ 是 X 上的稠密定义算子，使得

$$A\Lambda = \Lambda B \quad on \quad \mathcal{D} \tag{3.11}$$

其中，$\Lambda \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ 的值域稠密，且 A 在 $\Lambda(\mathcal{D})$ 上是耗散的。于是，$(A,\Lambda(\mathcal{D}))$ 的闭包在 X 上生成一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群。

证明。首先注意到，$\mathcal{D}$ 是 X 的一个稠密子集，因为它是 X 上一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群的生成元的核。其次，根据 Hille-Yosida 定理，对于任意 $\alpha>0$，$(\alpha I-B)(\mathcal{D})$ 在 X 中稠密。由于 Λ 有界且 Range(Λ) 在 X 中稠密，因此 $\Lambda(\mathcal{D})$ 和 $\Lambda((\alpha I-B)(\mathcal{D}))$ 都是 X 的稠密子集。现在利用 (3.11)，我们有 $\Lambda((\alpha I-B)(\mathcal{D}))=(\alpha I-A)(\Lambda(\mathcal{D}))$，这表明对于任意 $\alpha>0$，后一个子集在 X 中稠密。由于 A 在 $\Lambda(\mathcal{D})$ 上也具有耗散性，应用 Hille-Yosida 定理于算子 $(A,\Lambda(\mathcal{D}))$ 即完成证明。□

3.6. 伯恩斯坦-伽马函数与函数方程。我们回顾一下，根据（1.9），$\phi\in\mathbf{B}$ 可写为 $\phi(z)=\phi(0)+\mathtt{d}z+\int_0^\infty(1-e^{-zy})\nu(dy)\quad z\in\mathbb{C}_{[0,\infty)}$，其中 ν 是一个满足以下条件的正测度 $\int_0^\infty(y\wedge 1)\nu(dy)<\infty$ 且 $\phi(0)\ \mathtt{d}\geqslant 0$。接下来，我们定义

$$W_\phi(z)=\frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(z)}{\phi(k+z)}e^{\frac{\phi'(k)}{\phi(k)}},\quad z\in\mathbb{C}_{(0,\infty)},$$

其中 $\gamma_\phi=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}{}^{\phi'}_{\phi}{}^{(k)}{}_{(k)}-\ln\phi(n)\right)\in\left[-\ln\phi(1)\ \overline{{}^{\phi'}_{(1)}{}_{\phi(1)}}-\ln\phi(1)\right]$。根据 [39, 节 4] 和 [38, 定理 4.2]，已知 W_ϕ 是函数方程的一个解

$$f(z+1)=\phi(z)f(z),\ f(0)=1,\quad z\in\mathbb{C}_{(0,\infty)}, \tag{3.12}$$

并且满足以下重要性质。

（W1）W_ϕ 是上述函数方程（3.12）的唯一正定解，也就是说，它是$(0,\infty)$上概率测度的梅林变换集合中的唯一解。（W2）W_ϕ 在 $\mathbb{C}_{(0,\infty)}$ 上无零点，且$\overline{W}(z)=W(\overline{z})$对所有 $z\in\mathbb{C}_{(0,\infty)}$（W3）$W_\phi$ 在 $\mathbb{C}_{(0,\infty)}$（W4）对于任意 $z=a+\mathrm{i}\xi$ 满足 $a>0$

$$|W_\phi(z)|=\frac{\sqrt{\phi(1)}}{\sqrt{\phi(a)\phi(1+a)|\phi(z)|}}e^{G_\phi(a)-A_\phi(z)-E_\phi(z)-R_\phi(a)} \tag{3.13}$$

其中 $G_\phi(a)=\int_1^{1+a}\ln\phi(u)\,du\leqslant a\ln\phi(1+a)$，$A_\phi(z)=\int_a^\infty\ln\left(\frac{|\phi(u+\mathrm{i}\xi)|}{\phi(u)}\right)du\in[0,\frac{\pi}{2}|\xi|$

并且对所有$|E_\phi(z)|+$取上确界$|R_\phi(a)|<\infty$。关于量 $d>0$的定义，我们再次参见 [39, 定理$^{z\in\mathbb{C}_{(d,\infty)}}$ $^{a>d}$3.1和定理3.2] G_ϕ、A_ϕ、E_ϕ、R_ϕ。

W_ϕ 称为与 ϕ对应的 Bernstein-伽马函数。这些函数已在[39]中得到广泛研究。下一个命题推导式（2.10）中定义的乘子函数的解析性和增长界。这里我们讨论一维情形，这是本文所有结果的主要基础。

命题 3.13. 设 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$ 满足 $\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 和$\psi_\beta(\xi) = \xi^2 - \mathrm{i}\beta\xi$, $\beta > 0$均成立。那么，由下式定义的函数 $W_\psi^{(\beta)}: \mathbb{S}_{(0,1)} \to \mathbb{C}$

$$W_\psi^{(\beta)}(z) = \frac{\Gamma(1 + \mathrm{i}z + \beta)W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)}{\Gamma(-\mathrm{i}z)W_{\phi_-}(1 + \mathrm{i}z)}$$

满足函数方程

$$W_\psi^{(\beta)}(\xi)\psi(\xi) = W_\psi^{(\beta)}(\xi + \mathrm{i})\psi_\beta(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

并具有以下性质。
(1) $W_\psi^{(\beta)}$ 在条带 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 内解析，并在 $\mathbb{S}_{[0,1]}$上连续延拓。(2) 设 $\psi \in \mathbf{N}_+(\mathbb{R})$。那么，

$$\sup_{a\in[0,1]} \left|W_\psi^{(\beta)}(\xi + \mathrm{i}a)\right| = \mathrm{O}(|\xi|^u) \text{ for some } u > \beta. \tag{3.15}$$

注 3.14. 从命题 3.13 的证明可清楚看出，对于任意 ψ_1，若 $\psi_2 \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$，且$\psi_1(\xi) = \phi_+^{(1)}(-\mathrm{i}\xi)\phi_-^{(1)}(\mathrm{i}\xi)$、 $\psi_2(\xi) = \phi_+^{(2)}(-\mathrm{i}\xi)\phi_-^{(2)}(\mathrm{i}\xi)$，如果我们假设

$$\{z \in \mathrm{i}\mathbb{R};\ \phi_\pm^{(2)}(z) = 0\} \subseteq \{0\} \text{ and } \phi_-^{(1)}(0) > 0,$$

那么函数方程的解

$$f(\xi)\psi_2(\xi) = f(\xi + \mathrm{i})\psi_1(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{3.16}$$

由.....给出

$$f(\xi) = W[\psi_2; \psi_1](\xi) = \frac{W_{\phi_+^{(2)}}(-\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_+^{(1)}}(-\mathrm{i}\xi)} \frac{W_{\phi_-^{(1)}}(1 + \mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-^{(2)}}(1 + \mathrm{i}\xi)}.$$

此外， $W[\psi_2;\ \psi_1] \in \mathbf{A}^{(0,1]}$。特别地，取 $\psi_2 = \psi, \psi_1 \equiv 1$，函数 $W(\xi) = W_{\phi_+}(-\mathrm{i}\xi)W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}\xi)$满足

$$W(\xi + \mathrm{i}) = \psi(\xi)W(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3.17}$$

且 $W \in \mathbf{A}^{(0,1]}$。

3.7. 命题 **3.13** 的证明。 设 ψ 使得

$$\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi)$$

f或者对所有满足 $\xi \in \mathbb{R}$、 ϕ_+ 的 $\phi_- \in \mathbf{B}$。定义如下这一对函数 s

$$\begin{cases} W_+(z) = \frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)}{\Gamma(-\mathrm{i}z)}, & z \in \mathbb{S}_{(0,\infty)} \\ W_-(z) = \frac{\Gamma(1+\mathrm{i}z+\beta)}{W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)}, & \text{for any } \beta > 0 \text{ and } z \in \mathbb{S}_{(-\infty,1)}. \end{cases}$$

现在，对于 $z \in \mathbb{S}_{(0,\infty)}$，我们有

$$W_+(z + \mathrm{i}) = \frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z + 1)}{\Gamma(-\mathrm{i}z + 1)} = \frac{\phi_+(-\mathrm{i}z)}{-\mathrm{i}z} \frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)}{\Gamma(-\mathrm{i}z)} = \frac{\phi_+(-\mathrm{i}z)}{-\mathrm{i}z} W_+(z)$$

即 $W_+(z) = W_+(z + \mathrm{i})\frac{-z}{\phi_+ - \mathrm{i}(\mathrm{i}z)}$。同理，对于所有 $z \in \mathbb{S}_{(-\infty,0)}$，我们有：

$$W_-(z + \mathrm{i}) = W_-(z)\frac{\phi_-(\mathrm{i}z)}{\mathrm{i}z + \beta}.$$

接下来，利用 3 对于 W_{ϕ_+} 所具有的性质 (W W_+ 在 $\mathbb{S}_{(0,\infty)}$ 上解析，并可连续延拓到去心直线 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$。另一方面， W_- 在 $\mathbb{S}_{(-\infty,1)}$ 上也解析，并且对于 $\mathbb{R}+$ 的任意值，都可连续延拓到直线 $\phi_-(0)$。为处理 W_+ 到整个实数轴的延拓，我们注意到

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)>0}} \frac{-\mathrm{i}z}{\phi_+(-\mathrm{i}z)} = \lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)>0}} \frac{z}{\phi_+(z)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \phi_+(0)>0 \\ \frac{1}{\phi_+'(0)} < \infty, & \text{if } \phi_+(0)=0 \end{cases} \tag{3.18}$$

因此， W_+ 连续延拓到 $\mathbb{S}_{[0,\infty)}$。现在，我们定义 $W_\psi^{(\beta)}(z) = W_+(z)W_-(z)$，对所有 $z\in\mathbb{S}_{(0,1)}$。显然，上述结果意味着 $W_\psi^{(\beta)}$ 在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$上解析，在其边界上连续延拓，并且满足（3.14）。接下来，为了证明（3.15），我们借助 Phragm´en-Lindel¨öf 原理。在接下来的两个引理中，我们将得到伯恩斯坦函数的一些初等界，以及 $W_\psi^{(\beta)}$ 在条带 $\mathbb{S}_{[0,1]}$中的一个指数界。

引理 3.15. 对任意 $\phi\in$ B、 a、 $b\geqslant 0$，以及所有 $\xi\in\mathbb{R}$，有

$$|\phi(a+\mathrm{i}\xi)-\phi(b+\mathrm{i}\xi)| \leqslant \phi(|a-b|)-\phi(0).$$

因此，对任意 a、 $b>0$，当 $|\xi|\to\infty$ 时， $\phi(a+\mathrm{i}\xi)\asymp\phi(b+\mathrm{i}\xi)$。

证明。 设 ϕ 具有（1.9）的形式。那么，对于任意 a， $b\geqslant 0$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$，我们可以写成

$$\phi(a+\mathrm{i}\xi)-\phi(b+\mathrm{i}\xi) = \mathrm{d}(a-b)+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-(a+\mathrm{i}\xi)y}-e^{-(b+\mathrm{i}\xi)y}\right)\nu(dy)$$

现在，假设 $a<b$。对上述等式右端应用三角不等式，可得

$$|\phi(a+\mathrm{i}\xi)-\phi(b+\mathrm{i}\xi)| \leqslant \mathrm{d}(b-a)+\int_{\mathbb{R}}(1-e^{-(b-a)y})e^{-ay}\nu(dy) \leqslant \phi(b-a)-\phi(0).$$

由于对于任意 $a>0$， $|\phi(a+\mathrm{i}\xi)|\geqslant\phi(a)>0$，由上述不等式可得

$$\left|\frac{\phi(a+\mathrm{i}\xi)}{\phi(b+\mathrm{i}\xi)}-1\right| \leqslant \frac{\phi(|a-b|)-\phi(0)}{\phi(b)}, \quad \left|\frac{\phi(b+\mathrm{i}\xi)}{\phi(a+\mathrm{i}\xi)}-1\right| \leqslant \frac{\phi(|a-b|)-\phi(0)}{\phi(a)}$$

由此完成引理的证明。 □

引理 3.16. 设 $\psi\in$ N(ℝ)。那么，对于任意 $\epsilon>0$，存在一个与 z 无关的 $C_\epsilon>0$，使得 $|W_\psi^{(\beta)}(z)| \leqslant C_\epsilon e^{(\frac{\pi}{2}+\epsilon)|z|}$ 对所有 $z\in\mathbb{S}_{[0,1]}$ 均成立。

证明。 根据函数 $W_\psi^{(\beta)}$ 的定义，并利用（3.14）中的递推关系以及（3.13）中的表示，只需证明存在 u， $C>0$ 使得

$$\left|\frac{z}{\phi_+(z)}\right| \leqslant C|z|^u \quad \text{for all } z\in\mathbb{C}_{[0,1]}, \tag{3.19}$$

其中我们回顾一下： $z\in\mathbb{C}_{[0,1]}=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)\in[0,1]\}$。现在，对于任意 $a>0$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$，应用引理 3.15可得

$$\left|\frac{\phi_+(\mathrm{i}\xi)}{\phi_+(a+\mathrm{i}\xi)}-1\right| \leqslant \frac{\phi_+(a)-\phi_+(0)}{|\phi_+(a+\mathrm{i}\xi)|} \leqslant \frac{\phi_+(a)-\phi_+(0)}{\phi_+(a)} \leqslant 1,$$

这表明，对于所有 $a>0,\xi\in\mathbb{R}$， $|\phi_+(a+\mathrm{i}\xi)|\geqslant\frac{1}{2}|\phi_+(\mathrm{i}\xi)|$。因此，利用 (1.14) 可得 $\liminf_{|\xi|\to\infty}|\xi|^\kappa|\phi_+(a+\mathrm{i}\xi)|>0$，且该结论关于 $a\in[0,1]$ 一致。由 (3.18) 可知，映射 $z\mapsto|_{\phi_+}{}^z(z)|$ 在 0 附近有界，因此 (3.19) 在 $u=\kappa+1$ 下成立。□

利用 Phragmén-Lindelöf 原理，要得到 (3.15) 中的上界，引理 3.16表明，只需在 $a=0$, 分别为 1 时证明 (3.15)。下面讨论$a=1$的情形。将所有内容都改写为函数 $W_\psi^{(\beta)}$ 的形式，我们注意到

$$W_\psi^{(\beta)}(\xi+\mathrm{i})=\frac{W_{\phi_+}(1+\mathrm{i}\xi)\Gamma(\beta-\mathrm{i}\xi)\phi_-(-\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(1-\mathrm{i}\xi)\Gamma(1+\mathrm{i}\xi)}.$$

根据伽马函数的斯特林渐近公式，并回顾 [39, 命题 3.1(4)] 可知 $\phi_-(-\mathrm{i}\xi)=-\mathrm{id}_-\xi+o(|\xi|)$，我们得到

$$\frac{\Gamma(\beta-\mathrm{i}\xi)\phi_-(-\mathrm{i}\xi)}{\Gamma(1+\mathrm{i}\xi)}=O(|\xi|^\beta). \tag{3.20}$$

因此，只需研究比值 $W_{\phi_+}(1+\mathrm{i}\xi)\,W_{\phi_-}(1-\mathrm{i}\xi)$ 的渐近行为。为此，我们证明下面的引理。

现在回到命题的证明，根据性质（W4），并利用上述引理，我们得到

$$\left|\frac{W_{\phi_+}(1+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(1-\mathrm{i}\xi)}\frac{W_{\phi_-}(1/2+\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_+}(1/2-\mathrm{i}\xi)}\right|\lesssim e^{A_{\phi_-}(1+\mathrm{i}\xi)-A_{\phi_-}(1/2+\mathrm{i}\xi)+A_{\phi_+}(1/2+\mathrm{i}\xi)-A_{\phi_+}(1+\mathrm{i}\xi)} \tag{3.21}$$

其中 $f\lesssim g$ 表示 $f(\xi)\,g(\xi)$ 在上界意义下是有界的，当 $|\xi|\to\infty$时。由于 $\lim_{|\xi|\to\infty}\phi_+(u+i\xi)_{u+i\xi}=\mathrm{d}_+$关于 $u>0$ 局部一致地成立，根据（A_{ϕ_+} 中的 3.13）的定义，我们有

$$\left|A_{\phi_+}(1+\mathrm{i}\xi)-A_{\phi_+}(1/2+\mathrm{i}\xi)\right|=\int_{\frac12}^1\ln\left(\frac{|\phi_+(u+\mathrm{i}\xi)|}{\phi_+(u)}\right)du\leqslant\int_{\frac12}^1\ln\left(\frac{|\phi_+(u+\mathrm{i}\xi)|}{\phi_+(\frac12)}\right)du$$

其中，最右侧的积分的增长阶至多为 $\ln|\xi|$，当 $|\xi|\to\infty$ 时。另一方面，对所有 $\xi\in\mathbb{R}$, $A_{\phi_-}(1+\mathrm{i}\xi)\leqslant A_{\phi_-}(1/2+\mathrm{i}\xi)$，见 [39, 定理 3.2(1)]。因此，由 (3.21) 中比值 $W_{\phi_+}(\frac12-\mathrm{i}\xi)\,W_{\phi_-}(\frac12+\mathrm{i}\xi)$ 的有界性以及 (3.20) 中的估计可知，对于某个 $u>\beta$, $W_\psi^{(\beta)}(1+\mathrm{i}\xi)=O(|\xi|^u)$。通过类似的方法可以处理 $a=0$ 的情形，只需注意到对任意 $\xi\in\mathbb{R}$, $W_{\phi_\pm}(-\mathrm{i}\xi)=W_{\phi_\pm}(1-\mathrm{i}\xi)/\phi_\pm(-\mathrm{i}\xi)$。由于存在 $\kappa>0$ 使得 $\liminf_{|\xi|\to\infty}|\xi|^\kappa|\phi_+(-\mathrm{i}\xi)|>0$，采用与前面类似的思路，可以证明下列比值

$$\left|\frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}\xi)}\frac{W_{\phi_-}\left(\frac12+\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_+}\left(\frac12-\mathrm{i}\xi\right)}\right|$$

当 $|\xi|\to\infty$ 时，至多按多项式速度增长。因此，对条带 $\mathbb{S}_{[0,1]}$ 内的函数 $z\mapsto(2+z^2)^{-\frac{u}{2}}W_{(\beta)\psi}(z)$ 应用 Phragmén-Lindelöf 原理，即可完成该命题的证明。□

3.8. 命题 **2.11**的证明。 由 [38, 定理 6.2(1)], 可知，对于任意 $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\left|W_\phi\left(\frac12+\mathrm{i}\xi\right)\right|\asymp\frac{\sqrt{\phi(\frac12)W_\phi(\frac12)}}{\sqrt{|\phi\left(\frac12+\mathrm{i}\xi\right)|}}e^{-|\xi|\Theta_\phi(|\xi|)}. \tag{3.22}$$

Cle同理，这证明了（2.13）中的估计。当条件（i）成立时，ra tio

$$\left|\frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}\right|$$

根据 (2.13)，其衰减速度呈指数级。此外，我们注意到 $\liminf_{|\xi|\to\infty}|\phi_+(\mathrm{i}\xi)|=\infty$ if $\mathtt{d}_+>0$。现在，令 $\overline{\nu}_\pm(r)=\nu_\pm(r,\infty)$，[39, 定理 3.3(2)] 保证，若 $\mathtt{d}_+>0$, $\mathtt{d}_-=0$ 且 $\overline{\nu}_-\in \mathrm{RV}(\alpha)$，其中 $r\mapsto \overline{\nu}_-(r)\, r^\alpha$ 是准单调的，则 $\lim_{|\xi|\to\infty}\Theta_{\phi_+}(|\xi|)=\pi/2$ 且 $\lim_{|\xi|\to\infty}\Theta_{\phi_-}(|\xi|)=\pi\alpha/2$。当 $\mathtt{d}_+=\mathtt{d}_-=0$, $\overline{\nu}_\pm\in \mathrm{RV}(\alpha_\pm)$ 且 $r\mapsto \overline{\nu}_\pm(r)\, r^{\alpha_\pm}$ 是准单调的时，前述参考文献表明 $\lim_{|\xi|\to\infty}\Theta_{\phi_\pm}(|\xi|)=\pi\alpha_\pm/2$。由于 $\alpha_+>\alpha_-$，应用 (2.13) 可得 $\psi\in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 和 $m_\psi\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$。这就证明了 (i)。为证明 (ii)，根据命题 6. 2]，，我们知道，若 $\mathtt{d}_-=0$ 或 $\overline{\nu}_-(0)=\infty$，则对任意 $u>0$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\xi|^u\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}\right|=0.$$

另一方面，如果 $\mathtt{d}_+>0$ 和 $\overline{\nu}_+(0)<\infty$，那么

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\xi|^u\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}\right|=\infty$$

只要 $u>\phi_+(0)+\overline{\nu}_+(0)\,\mathtt{d}_+$。这就证明了（ii）。

在上述两种情形中，我们注意到 m_ψ 和 $m_{\overline{\psi}}$ 不可能同时属于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$，因为对于所有 $\xi\in\mathbb{R}$, $m_{\overline{\psi}}(\xi)=1/\overline{m}_\psi(\xi)$。

4. Proof of Theorem 2.1: the one dimensional case

由于此定理的证明相当长，我们将其分为两部分，并先概述主要思路。我们首先在一维情形下证明该定理，即 $d=1$，从而 $M=\mathrm{Id}$。一般情形将通过张量化和相似变换技术得到证明，相关内容推迟至第 5 节。在定理 4.1 中，我们证明一维情形，首先推导伪微分算子层面的弱相似关系。随后，利用小节 3.5 的结果，我们证明这些伪微分算子生成马尔可夫半群，并将弱相似关系提升到半群层面。接着，利用 Dynkin 定理（见引理 3.9）以及定义在核上的算子所生成的半群的唯一性，我们证明这些半群确实对应于对数自相似马尔可夫过程。作为弱相似恒等式（4.3）的推论，我们通过一些受.....启发的逼近技术，得到这些半群的 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\ e)$-生成元的核及积分微分表示，见命题 4.2，这些逼近技术的灵感来自[39]。

回顾第 3.2.2 小节，$\psi\in \mathbf{N}_b(\mathbb{R})$ $P[\psi]$ 表示 $\mathcal{C}_0$-收缩半群，作用于 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$，当限制在 $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ 上时，它与对应于 L´évy-Khintchine 指数 ψ的对数自相似 Feller 半群一致。我们还将 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$-生成元记为 $P[\psi]$。$A_2[\psi]$

定理 4.1. (1) 设 $\psi_0(\xi)=\xi^2, \xi\in\mathbb{R}$，则算子 $(A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0], \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中的闭包生成作用于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 上的对数平方贝塞尔半群 Q。(2) 对任意 $\psi\in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$，移位傅里叶乘子算子为 $\Lambda_\psi\in\mathscr{M}_e$，其中 $m_{\Lambda_\psi}(z)=W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)\, W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)\,\Gamma(1+\mathrm{i}z)\,\Gamma(-\mathrm{i}z)$，对所有 $z\in\mathbb{S}_{(0,1)}$ 均成立。特别地，当 $\psi\in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时，$\Lambda_\psi\in\mathscr{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e))$。

(3) 对任意 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$，有 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi] \in \mathrm{WS}(A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0])$。更具体地，回顾 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e);\ \mathcal{F}_f$ 为整函数并满足 (2.2)$\}$，可得 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密，并且，

$$A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0] \quad on \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{4.1}$$

特别地，如果 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 那么 (4.1) 在 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$上成立。

（4）如果 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$，则算子 $(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \Lambda_\psi(\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的闭包生成半群 $P[\psi]$，其定义在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上。因此，在这种情况下，$\Lambda_\psi(\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 是 $A_2[\psi]$ 的核。一般而言，对于任意 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$，我们有

$$A_2[\psi] = A_{\mathtt{PDO}}[\psi] \quad on \quad \Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \tag{4.2}$$

并且 $\Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。

（5）对于任意 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$ 和 $t \geqslant 0$，我们有

$$P_t[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi Q_t \quad on \quad \mathbf{D}(\Lambda_\psi). \tag{4.3}$$

如果 H_ψ是具有 $m_\psi(z) := m_{H_\psi}(z) = {}^{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)}$ 的移位傅里叶乘子算子，那么 $(H_\psi, \mathbf{D}(H_\psi)) \in \mathscr{M}_e$，并且对于所有 $t \geqslant 0$，我们有

$$P_t[\psi] = H_\psi e_t H_\psi^{-1} \quad on \quad \mathbf{D}(H_\psi^{-1}) \tag{4.4}$$

其中，$(e_t)_{t\geqslant 0}$表示 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的乘法半群，即 $e_t f(x) = e^{-te^{-x}} f(x)$。注意，由于它们对应于同一个乘子，$H_\psi^{-1} = \widehat{H_{\overline{\psi}}}$。

该定理在第 4.1节中得到证明。

上述定理中的第 (4) 项在 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时为 $A_2[\psi]$ 提供了一个核。当 $\psi \in \mathrm{N}_-(\mathbb{R})$ 时，一般情形更加复杂，因为 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 可能不包含在 Λ_ψ 的定义域中，这是因为 $m_\Lambda(\cdot + \mathrm{i}/2)$ 可能呈指数增长。尽管第 (4) 项中提到的集合 $\Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密，但一般而言它并不是 $A_2[\psi]$ 的核。为处理这一问题，我们为半群 $(e_t)_{t\geqslant 0}$ 的生成元找到了一个核，该核由傅里叶变换指数快速衰减的光滑函数组成，并且在半群 $(e_t)_{t\geqslant 0}$ 下保持不变。然后，通过对比值 ${}^{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)\, W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}$ 施加一个温和条件，我们证明这些光滑函数属~~于第 (5) 项~~中定义的 H_ψ 的定义域，并且它们在 H_ψ 下的像构成 $A_2[\psi]$ 的一个核。此外，我们还得到了 $A_2[\psi]$ 的积分微分表示。这些结果将在下一个命题中正式陈述。

命题 4.2. 设 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$，并将 $A_2[\psi]$ 记为 $P[\psi]$ 的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$-生成元。(1) 若 $\psi(\xi) = -\mathrm{i}\mathtt{d}\xi$ 对某个 $\mathtt{d} > 0$ 成立，则 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 是 $A_2[\psi]$ 的核。否则，假设

$$\eta_\psi := \sup\left\{\eta \in \mathbb{R};\ \xi \mapsto |\xi|^{\eta+\frac{1}{2}} \frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)} e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})\right\} \in (0, \infty]. \tag{4.5}$$

记 $\epsilon > 0$, $\mathcal{E}(\epsilon)$ =张成空间$\{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta};\ \beta > 0\}$其中 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x) = e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x} e^{-\beta e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$，则有如下结论。

(a) 对所有 $\epsilon > 0$，$\mathcal{E}(\epsilon)$ 都是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 的稠密子集。(b) 对所有 $0 < \epsilon < \eta_\psi$，$\mathcal{E}(\epsilon) \subset \mathrm{D}($ $H_\psi)$ 以及 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon) := H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))$ 是 $A_2[\psi]$ 的核。

(2) 设 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$ 满足：对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\xi \mapsto |\xi|^n \frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)} e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}). \tag{4.6}$$

此外，如果 ψ 满足以下条件之一

(i) $\phi_+(0) > 0$(ii) $\int_{|y|>1} |y|\mu(dy) < \infty$那么$\mathcal{E}_\psi = \bigcup \mathcal{E}_\psi(\epsilon)$是 $A_2[\psi]$的核。此外，在 $\mathcal{E}_\psi$ 上， $A_2[\psi]$ 具有如下积分-微分算子表示$0<\epsilon<\infty$

$$\begin{aligned} A_2[\psi]f(x) &= e^{-x}\left(\sigma^2 f''(x) + \mathtt{b} f'(x) - \psi(0)f(x)\right. \\ &+ \left.\int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x) - y_{\mathbb{I}_{\{|y|\leqslant 1\}}} f'(x))\mu(dy)\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中（$\psi(0)$ $\mathtt{b}$， σ^2， μ）是确定 ψ的四元组。

该命题在第4.2小节中得到证明。

注4.3。条件 (4.5) 仅用于证明 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$属于 $P[\psi]$的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$-生成元的定义域。当 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时，该条件总是满足。只要 $\epsilon > 0$ 足够小（其大小取决于 ψ），包含关系$\mathcal{E}_\psi(\epsilon) \subset \mathrm{D}(H_\psi)$ 以及 $H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))$在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$中的稠密性就成立，见 (4.23) 和 (4.24)。

注4.4. 我们注意到，当 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时，条件 (4.6) 总是成立。更一般地，只要 $\psi(\xi) \neq -\mathrm{id}\xi$，且满足 $\mathtt{d}_- = 0$、 $\mathtt{d}_+ > 0$ 或 $\int_{\mathbb{R}} \mu(dy) = \infty$ 中任一条件，(4.6) 就成立，参见 [39, 定理 2.3(1)]，，其中 $\mathtt{d}_\pm$ 在命题 2.11 中定义，而 μ 在 (1.7) 中定义。然而，当 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时，我们将考虑 $\Lambda_\psi(\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 作为 $A_2[\psi]$ 的核，因为我们在此集合上有 $A_2[\psi]$ 的伪微分算子表示，参见 (4.10)，且这不需要条件 (2i)–(2ii)。

4.1. 定理的证明 4.1。 我们先证明以下引理。

引理4.5. 对任意 $\psi \in \mathrm{N}(\mathbb{R})$，算子 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi]$ 在定义域 $\mathrm{D}_\psi = \{f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上是耗散的；$A_{\mathtt{PDO}}[\psi]f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)\}$。

证明。对于任意 $f \in \mathrm{D}_\psi \subset \mathrm{S}(\mathbb{R})$，我们有

$$A_{\mathtt{PDO}}[\psi]f(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)\, d\xi = e^{-x}L[\psi]f(x) \tag{4.8}$$

其中， $L[\psi]$ 是具有 L´evy-Khintchine 指数 ψ 的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-生成元，同时也是该 L´evy 过程的 Feller生成元，参见 [1, 第 3.4.1 节和定理 3.3.3]。众所周知，希尔伯特空间 H 上的算子 $(L, \mathrm{D}(L))$ 是耗散的，当且仅当对于所有$f \in \mathrm{D}(L)$，都有 $\mathrm{Re}\langle Lf, f\rangle \leqslant 0$。为在 $\mathrm{D}_\psi \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上检验 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi]$ 的这一条件，我们注意到，对于所有$f \in \mathrm{D}(L)$,

$$\mathrm{Re}\langle A_{\mathtt{PDO}}[\psi]f, f\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} = \mathrm{Re}\langle L[\psi]f, f\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leqslant 0 \tag{4.9}$$

因为 $L[\psi]$ 是该 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-L´évy 过程的生成元，因此具有耗散性。于是，$(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \mathrm{D}_\psi)$ 具有耗散性。□

注 4.6。我们指出，尽管恒等式 (4.8) 在稠密子集 $\mathrm{D}_{\psi,A_{\mathrm{PDO}}}$ 上将 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$-生成元与 L´évy 过程的 Feller 生成元联系起来，但我们尚不能得出 A_{PDO} 在该集合上与对数 Lamperti 半群的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$-生成元一致，因为目前尚无此类生成元的表示。事实上，Lamperti [28] 由于在此背景下应用 Volskonskii 公式较为微妙，只提供了将生成元表示为 Dynkin 算子的形式。然而，在 ψ 的 Wiener-Hopf 因子满足条件 (4.6) 的情况下，我们将证明 Dynkin 表示与 Feller 表示（以及 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 表示）一致。为处理其余情形，我们将证明并使用以下事实：我们的伪微分算子类以及对数 Lamperti 类在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中取伴随算子后仍保持稳定。

4.1.1. 定理 *4.1*(1)的证明。 为证明这一结果，我们通过同胚变换回到 $\mathbb{R}_+$ $x\mapsto e^x$，该变换会将算子（$A_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]$，$\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$变为

$$\widetilde{A}f(r)=rf''(r)+f'(r),\ f\in\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+).$$

只需证明上述算子相对于 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 本质自伴。注意，写作 $F(x,y)=f(x^2+y^2)$ 时，有 $Af(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\Delta F(x,y)$，其中 Δ 是$\widetilde{\ }$ $\mathbb{R}^2$上的拉普拉斯算子。因此，$(A,\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+))$ 与算子 $(\Delta,\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)\cap\mathcal{S})$ 相同，其中 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^2$上所有径向对称函数构成的集合。由于后者在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)\cap\mathcal{S}$ 中本质自伴，我们得出 $(A,\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$ 中本质自伴。因此，$(A_{\mathrm{PDO}}[\psi_0],\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 可闭，且其闭包 $(\overline{A}_{\mathrm{PDO}}[\psi_0],\mathrm{D}(\overline{A}_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]))$ 也自伴。利用引理4.5，我们得到 $A_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]$ 是耗散的，其闭包亦然。根据自伴耗散算子理论，我们推知$\overline{A}_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 上生成一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群。另一方面，由引理 3.11 和引理 3.9，我们注意到

$$A_2[\psi_0]=A_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]\text{ on }\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

其中，$A_2[\psi_0]$ 是对数平方贝塞尔半群的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$-生成元。由于 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中稠密，根据唯一性，我们得出 $(\overline{A}_{\mathrm{PDO}}[\psi_0],\mathrm{D}(\overline{A}_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 上生成对数平方贝塞尔半群 $(Q_t)_{t\geqslant0}$。

4.1.2. 定理 4.1(2) 的证明。对于任意 $\phi_+,\phi_-\in\mathrm{B}$，我们断言 $W_{\phi_+}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)\,W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)$ 关于 ξ 总是有界的。事实上，我们首先注意到 $\xi\mapsto W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi\right)$ 是有界的，因为它是一个随机变量的梅林变换，见 [38, 定理 6.1(3)]，；比值 $\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)\,W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)$ 也是与拉普拉斯指数为 ϕ_- 的次 subordinators 相关联的指数泛函的梅林变换，见 [18, 定理 2.2]。现在，回忆 $|\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)|\sim e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}$ 当 $|\xi|\to\infty$ 时，上述论证意味着对于所有 $\xi\in\mathbb{R}$，

$$\left|\frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)}\right|\leqslant Ce^{\frac{\pi}{2}|\xi|}$$

这表明 $\Lambda_\psi\in\mathscr{M}_e$。特别地，当 $\psi\in\mathrm{N}_+(\mathbb{R})$ 时，由 (1.14) 及 m_{Λ_ψ} 的定义，映射 $\xi\mapsto m_{\Lambda_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2)$ 是有界的，因为对所有 $\xi\in\mathbb{R}$，都有 $|\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)|=|\Gamma(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)|$。因此，若 $\psi\in\mathrm{N}_+(\mathbb{R})$，则 $\Lambda_\psi\in\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e))$。

4.1.3. 定理 *4.1*(3) 的证明。 我们先证明本条目的第二个结论。

命题 4.7。对于任意 $\psi\in\mathrm{N}_+(\mathbb{R})$，我们有

$$A_{\mathrm{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi=\Lambda_\psi A_{\mathrm{PDO}}[\psi_0]\quad on\quad\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}).\tag{4.10}$$

证明：由于证明过程相当技术性，我们先概述其证明的主要思路。如果 m_{Λ_ψ} 在 $\mathbb{S}_{[0,1]}$ 上连续延拓，并且命题 3.5 的条件对于 $f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 得到满足，其中 $\gamma = 1$，那么我们得到

$$\mathcal{F}_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi f}(\xi + \mathrm{i}) = \mathcal{F}_{L[\psi]\Lambda_\psi f}(\xi) = m_{\Lambda_\psi}(\xi)\psi(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)$$

其中 $L[\psi]$ 是与 $'$ 所对应的 Lévy 过程的生成元 ψ。另一方面，若在命题 $\beta = 0$ 中取 3.13，则预期 m_{Λ_ψ} 应满足（3.14）中的同一函数方程，其中 $\beta = 0$，假设 $m_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i})$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$都有定义。因此，直接应用命题 3.5 即可推出

$$\mathcal{F}_{\Lambda_\psi A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]f}(\xi + \mathrm{i}) = m_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i})\mathcal{F}_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]f}(\xi + \mathrm{i}) = m_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i})\psi_0(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)$$

这将证明 $\mathcal{F}_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi f} = \mathcal{F}_{\Lambda_\psi A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]f}$。然而，$m_{\Lambda_\psi}$ 在直线 $\mathbb{R} + \mathrm{i}$ 上的连续延拓并不总是存在，因此我们用参数 Λ_ψ 对算子 $\beta > 0$ 进行扰动，并借助命题 3.13 来证明（4.10）。为此，我们回顾 $\psi_\beta(\xi) = \xi^2 - \mathrm{i}\beta\xi$，其中 $\beta > 0$，且 $\xi \in \mathbb{R}$。此外，定义

$$m_{\Lambda^{(\beta)}}(z) = \frac{\Gamma(1 + \mathrm{i}z)}{\Gamma(1 + \beta + \mathrm{i}z)},\ z \in \mathbb{S}_{(-\infty,1)}.$$

显然，$m_{\Lambda^{(\beta)}}$ 在 $\mathbb{S}_{[0,1)}$中解析且无零点。令 $\Lambda^{(\beta)}$ 为与$m_{\Lambda^{(\beta)}}$相关联的移位傅里叶乘子。由于 $m_{\Lambda^{(\beta)}}$ 在直线 $\mathbb{R} + \mathrm{i}/2$上有界，因此 $\Lambda^{(\beta)} \in \mathscr{M} \cap \mathscr{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e))$。注意，对于任意 $f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，$\mathcal{F}_f$ 是一个整函数。此外，$m_{\Lambda^{(\beta)}} \in \mathbf{A}_{(-\infty,1)}$，根据伽马函数的斯特林渐近公式，$m_{\Lambda^{(\beta)}}$ 在条带 $\mathbb{S}_{(-\infty,a/2]}$ 上对任意 $a < 2$均一致有界。另外，对所有 $a < 2$，$\mathcal{F}_f(\cdot + \mathrm{i}\frac{a}{2}) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$；因此由命题 3.5 可知，对任意 $a < 2$，$\Lambda^{(\beta)} f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e^{ax}dx)$。

引理 4.8。对于任意 $\beta > 0$，我们有

$$A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]\Lambda^{(\beta)} = \Lambda^{(\beta)} A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0] \quad on \quad \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

且 $\Lambda^{(\beta)}(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。

证明。 根据算子 $\Lambda^{(\beta)}$ 的定义，且由于 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0](\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})) \subset \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 和命题 3.5，对于任意 $f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 且记 $d\tilde{\xi}_x = -e^{\mathrm{i}\xi x}\frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}$，

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(\beta)} A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0] f(x) &= -\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{\Lambda^{(\beta)}}(\xi)(\xi - \mathrm{i})^2 \mathcal{F}_f(\xi - \mathrm{i})\,\frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\Gamma(1 + \mathrm{i}\xi)(\xi - \mathrm{i})^2}{\Gamma(1 + \beta + \mathrm{i}\xi)} \mathcal{F}_f(\xi - \mathrm{i})\, d\tilde{\xi}_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}\Gamma(2 + \mathrm{i}\xi)(\xi - \mathrm{i})}{\Gamma(1 + \beta + \mathrm{i}\xi)} \mathcal{F}_f(\xi - \mathrm{i})\, d\tilde{\xi}_x \qquad (4.11) \\
&= e^{-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}\Gamma(1 + \mathrm{i}\xi)}{\Gamma(\beta + \mathrm{i}\xi)} \xi \mathcal{F}_f(\xi)\, d\tilde{\xi}_x = e^{-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Gamma(1 + \mathrm{i}\xi)}{\Gamma(1 + \beta + \mathrm{i}\xi)} \psi_\beta(\xi) \mathcal{F}_f(\xi)\, d\tilde{\xi}_x \qquad (4.12) \\
&= A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]\Lambda^{(\beta)} f(x) \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

其中（4.12）由应用引理 3.3得到。现在，由于伴随算子 $\widehat{\Lambda}^{(\beta)}$ 也是一个移位傅里叶乘子算子，且 $m_{\widehat{\Lambda}^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}/2) = m_{\Lambda^{(\beta)}}(-\xi + \mathrm{i}/2) \neq 0$ 对几乎处处的 ξ成立，因此它是有界的且为单射。这意味着，任意稠密集在 $\Lambda^{(\beta)}$ 下的像在$\mathbf{L}^2$（$\mathbb{R}$，e）中稠密。引理得证。□

现在，令 $g \in \Lambda^{(\beta)}(\mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$, 即 $g = \Lambda^{(\beta)} f$, $f \in \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，并且，

$$m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(z) = W_\psi^{(\beta)}(z) = \frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)\Gamma(1+\mathrm{i}z+\beta)}{\Gamma(-\mathrm{i}z)W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{S}_{[0,1)}. \tag{4.14}$$

由命题 3.13(1)可知，$m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}} \in \mathsf{A}_{[0,1]}$。令 $\Lambda_\psi^{(\beta)}$ 为与 $m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}$ 相关联的傅里叶算子。于是，$\Lambda_\psi^{(\beta)} \in \mathscr{M}$。此外，根据我们的假设 $\psi \in \mathsf{N}_+(\mathbb{R})$以及伽马函数的斯特林渐近公式，可得 $\left|m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}/2)\right| = \mathsf{O}(|\xi|^\beta)$。由命题 3.13(2)可知，$\xi \mapsto m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi)$和$\xi \mapsto m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i})$至多具有多项式增长（当 $|\xi| \to \infty$时）。另一方面，由(4.11)和(4.13)可得

$$A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta] g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e) \text{ and } \mathcal{F}^e_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]g}(\xi) = \mathrm{O}(|\xi|^{-n}) \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

因此，映射 $\xi \mapsto m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}/2)\ \mathcal{F}^e_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]g}(\xi) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$，这保证了$A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]g \in \mathsf{D}(\Lambda_\psi^{(\beta)})$。因此，我们有：

$$\Lambda_\psi^{(\beta)} A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta] g(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} \mathcal{F}^e_{\Lambda_\psi^{(\beta)} A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]g}(\xi)\, d\xi \tag{4.15}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}+\frac{\mathrm{i}}{2}} e^{\mathrm{i}zx} m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(z) \psi_\beta(z - \mathrm{i}) \mathcal{F}_g(z - \mathrm{i})\, dz \tag{4.16}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi) \psi_\beta(\xi - \mathrm{i}) \mathcal{F}_g(\xi - \mathrm{i})\, d\xi \tag{4.17}$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}) \psi_\beta(\xi) \mathcal{F}_g(\xi) d\xi$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi) \psi(\xi) \mathcal{F}_g(\xi)\, d\xi$$

$$= A_{\mathtt{PDO}}[\psi] \Lambda_\psi^{(\beta)} g(x)。 \tag{4.18}$$

在上述计算中，第二个等式是通过变量代换得到的；由于 ψ_β 和 $\mathcal{F}_g$ 是整函数，且对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$\mathcal{F}_{A_{\mathtt{PDO}}[\psi_\beta]g}(\xi) = \psi_\beta(\xi - \mathrm{i})\mathcal{F}_g(\xi - \mathrm{i})$，因此该代换是有效的。(4.17)由(4.16)和引理 3.3 得出，因为 $\psi_\beta \mathcal{F}_g \in \mathsf{A}^{(-\infty,1)}$，且当 $|\xi| \to \infty$时它比任何多项式都衰减得快；(4.18)之前的等式则由命题 3.13(3.14)和命题 3.5 得出。现在，回顾移位傅里叶乘子算子 Λ_ψ的定义，我们注意到在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 上有 $m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}} m_{\Lambda^{(\beta)}} = m_{\Lambda_\psi}$，这意味着 $\Lambda_\psi = \Lambda_\psi^{(\beta)} \Lambda^{(\beta)}$。然后，将 $g = \Lambda^{(\beta)} f$ 代入上述计算，并结合引理 4.8，即可得到(4.10)。□

现在回到条目（3）的证明，我们首先证明 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的稠密性。事实上，有如下包含关系

$$\mathrm{Span}\{x \mapsto e^{-(x-a)^2};\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

并且，由推论 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 可知，前一个集合在其中稠密。接下来，为了证明（3.2），我们只需证明以下事实，之后便可模仿命题 4.1 证明中使用的相同技巧。4.7

引理 4.9。对于任意 $\psi \in \mathrm{N}_b(\mathbb{R})$ 和 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，对所有 $u > 0$，我们有，

$$\sup_{b\in[0,1]} \left| m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi \pm \mathrm{i}b) \right| = \mathrm{O}(|\xi|^{-u}). \tag{4.19}$$

证明。由（4.14）并利用以下事实：对于任意 $b > 0$,

$$\left| \frac{W_{\phi_+}(b + \mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(b + \mathrm{i}\xi)} \Gamma(b + \mathrm{i}\xi) \right| = \mathrm{O}(1)$$

我们推得，对于某个 $l > 0$，$b \in \{0, 1\}$, $|m_{\Lambda_\psi^{(\beta)}}(\xi + \mathrm{i}b)| = \mathrm{O}(|\xi|^l e^{\pi|\xi|/2})$。由于对于任意 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，$\mathcal{F}_f$ 是整函数，并且对于某个 $\epsilon > 0$，$\sup_{b\in\{0,1\}} |\mathcal{F}_f(\xi \pm \mathrm{i}b)| = \mathrm{O}(e^{-(\pi/2+\epsilon)|\xi|})$, 故引理的结论对 $b = 0$，1 成立。最后，（4.19）中的估计可通过直接应用引理 3.16 以及 Phragm´en-Lindel¨of 原理得到，具体方法与命题 3.13(2) 的证明相同。□

由于上述引理，引理 4.8 的陈述以及（4.15）与（4.18）之间的计算步骤，在将 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 替换为 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 时仍然成立。至此，条目（ 3 ）的证明完成。

4.1.4. 定理 4.1(4) 的证明。我们证明，$(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的闭包生成半群 $P[\psi]$。利用 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]$ 是耗散的这一事实，以及 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 是其核，再由引理4.5 和条目 1 可知，对于任意 $\alpha > 0$，$(\alpha I - A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0])(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。此外，由于 $\xi \mapsto m_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i}\,2)$ 有界，且 $\overline{m}_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i}\,2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非零，因此 Λ_ψ 和 $\widehat{\Lambda}_\psi$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上均有界且为单射，由此可推得 $\Lambda_\psi(\alpha I - A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0])(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。由引理 3.12 可知，$(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上生成一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群。接下来，为了证明该半群确实与 $P[\psi]$ 一致，令 $A_2[\psi]$ 表示 $P[\psi]$ 的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$-生成元。我们要证明，算子 $A_2[\psi]$ 和 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi]$ 在函数集合 $\Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 上的限制相同。为此，我们首先注意到，对于任意 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$，$\Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$。这是因为，对于任意 $\psi \in \mathrm{N}_+(\mathbb{R})$、$f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $u > 0$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^u \sup_{b\in[0,\frac{1}{2}]} \left| m_{\Lambda_\psi}(\xi + \mathrm{i}b)\mathcal{F}_f(\xi + \mathrm{i}b) \right| = 0.$$

由于m_{Λ_ψ} 在条带 $\mathbb{S}_{[0,1)}$内解析，命题3.5 给出 $\mathcal{F}_{\Lambda_\psi f} = m_{\Lambda_\psi}\mathcal{F}_f$ 从而，$\Lambda_\psi f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 由黎曼-勒贝格引理得到。如果 $A_{\mathtt{D}}[\psi]$ 表示该对数自相似 Feller 过程的 Dynkin 特征算子，回顾 Lamperti 结果，我们得到

$$A_{\mathtt{D}}[\psi]\Lambda_\psi = A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi \quad \text{on } \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

由 (4.15)、(4.17)、(4.18)，我们注意到，对于任意 $f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，$A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$。因此，根据引理 3.9，记 Feller 半群的生成元为 $A_{\mathtt{F}}[\psi]$，我们有 $\Lambda_\psi f \in \mathrm{D}(A_{\mathtt{F}}[\psi])$。最后，利用引理 3.11，我们推得，对于所有 $f \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，$\Lambda_\psi f \in \mathrm{D}(A_2[\psi])$，并且

$$A_2[\psi]\Lambda_\psi f = A_{\mathtt{F}}[\psi]\Lambda_\psi f = A_{\mathtt{D}}[\psi]\Lambda_\psi f = A_{\mathtt{PDO}}[\psi]\Lambda_\psi f.$$

由于 $\Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 是 $A_{\mathtt{PDO}}[\psi]$ 的核，算子 $(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})))$ 和 $(A_2[\psi], \Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})))$ 的闭包必定生成同一个半群 $P[\psi]$。为完成这一项的证明，还需证明 (4.2) 以及 $\Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 的稠密性。注意，集合 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 在平移下封闭，也就是说，若 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，则对所有 $a \in \mathbb{R}$，都有 $\tau_a f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$。由于 Λ_ψ 是移位傅里叶乘子，$\Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 也在平移下封闭。因此，

的稠密性 $\Lambda_\psi(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 可由推论 3.2 得出。现在，根据 (4.1)，采用与前文类似的论证，并用到引理 3.9 和引理 3.11 ，即可得到等式 (4.2)。

4.1.5. 定理 *4.1*(5) 的证明。按照条目（4）的证明，我们可以将 A_{PDO} 替换为 A_2，因此由（4.10），对所有 $\alpha>0$，有：

$$(\alpha I - A_2[\psi])\Lambda_\psi = \Lambda_\psi(\alpha I - A_2[\psi_0]) \quad \text{on} \quad \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

回顾预解算子 $R_\alpha[\psi]=(\alpha I - A_2[\psi])^{-1}$ 和 $R_\alpha[\psi_0]=(\alpha I - A_2[\psi_0])^{-1}$，可得

$$R_\alpha[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi R_\alpha[\psi_0] \quad \text{on} \quad (\alpha I - A_2[\psi_0])(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})).$$

由于 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 是 $A_2[\psi_0]$ 的核，$(\alpha I - A_2[\psi_0])(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中稠密。利用 Λ_ψ、$R_\alpha[\psi]$、$R_\alpha[\psi_0]$ 的有界性，可得

$$R_\alpha[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi R_\alpha[\psi_0] \quad \text{on} \quad \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e).$$

回顾 $R_\alpha[\psi]$（分别为 $R_\alpha[\psi_0]$）是半群 $P[\psi]$（分别为 Q）的拉普拉斯变换，可得

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t[\psi]\Lambda_\psi f\,dt = \Lambda_\psi\int_0^\infty e^{-\alpha t}Q_t f\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\Lambda_\psi Q_t f\,dt$$

其中，第二个等式由 Λ_ψ 的有界性得出。由于 $t\mapsto P_t[\psi]\Lambda_\psi f$ 和 $t\mapsto \Lambda_\psi Q_t f$ 是有界函数，根据拉普拉斯变换的唯一性，我们得出，对于几乎处处的 $t\geqslant 0$,

$$P_t[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi Q_t \quad \text{on} \quad \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e). \tag{4.20}$$

由半群的强连续性，上述恒等式对所有 $t\geqslant 0$均成立。这就证明了（5）。若 $\psi\in\mathbf{N}_-(\mathbb{R})$，则 $\overline{\psi}\in\mathbf{N}_+(\mathbb{R})$，并对（4.3）取伴随算子，利用$\frown P[\overline{\psi}]=P[\psi]$这一事实，可得

$$Q_t\widehat{\Lambda}_{\overline{\psi}} = \widehat{\Lambda}_{\overline{\psi}}\widehat{P}_t[\overline{\psi}] \iff Q_t\widehat{\Lambda}_{\overline{\psi}} = \widehat{\Lambda}_{\overline{\psi}}P_t[\psi].$$

根据 Λ_ψ 和$\Lambda_{\overline{\psi}}$的定义，我们注意到 $m_{\Lambda_\psi}^{-1}=\overline{m}_{\Lambda_{\overline{\psi}}}$，这意味着$\widehat{\Lambda}_{\overline{\psi}}=\Lambda_\psi^{-1}$。因此，利用命题3.8，我们得到 $P_t[\psi]\Lambda_\psi=\Lambda_\psi Q_t$ 在$\mathbf{D}(\Lambda_\psi$上。为证明（4.4），我们首先注意到，半群 $(e_t)_{t\geqslant 0}$ 对应于 $\psi\equiv 1$。因此，由（4.20），可得

$$e_tH = HQ_t \quad \text{on} \quad \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$$

其中，对所有 $z\in\mathbb{S}_{(0,1)}$，$m_H(z)=\frac{\Gamma(1+\mathrm{i}z)}{\Gamma(-\mathrm{i}z)}$。注意到，对所有 $\xi\in\mathbb{R}$，$m_H(\xi+\mathrm{i}/2)=\frac{\Gamma(1/2+\mathrm{i}\xi)}{\Gamma(1/2-\mathrm{i}\xi)}$，$H$实际上是一个酉算子，因为对所有 $\xi\in\mathbb{R}$，$|m_H(\xi+\mathrm{i}/2)|=1$。因此，$Q$ 与半群 $(e_t)_{t\geqslant 0}$酉相似。定义 $H_\psi=\Lambda_\psi H$。根据命题 3.7，$H_\psi\in\mathscr{M}_e$在 $\mathbb{S}_{(0,1)}$ 上满足 $m_{H_\psi}(z)=\frac{W_{\phi_+}(-\mathrm{i}z)}{W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)}$，且 $\mathbf{D}(H_\psi)=\mathbf{D}(\Lambda_\psi)$。因此，对所有 $f\in\mathbf{D}(H_\psi)$，

$$P_t[\psi]H_\psi f = P_t[\psi]\Lambda_\psi H f = \Lambda_\psi Q_t H f = \Lambda_\psi H e_t f = H_\psi e_t f. \tag{4.21}$$

此外，$m_{H_{\overline{\psi}}}=\frac{1}{\overline{m}_{H_\psi}}$在 $\mathbb{R}+\mathrm{i}\,2$。因此，$H_\psi^{-1}=\widehat{H}_{\overline{\psi}}$，由 (4.21) 可得 $P_t[\psi]=H_\psi e_t\widehat{H}_{\overline{\psi}}$在$\widehat{\ }\mathbf{D}(H_{\overline{\psi}})$。

4.2. 命题 4.2 的证明。

4.2.1. 命题 4.2(1)的证明。当 $\psi(\xi) = -\mathrm{i}\mathtt{d}\xi$ 对于某个 $\mathtt{d} > 0$，相应的半群 $P_t[\psi]$由下式给出

$$P_t[\psi]f(x) = f(\ln(e^x + \mathtt{d}t)).$$

由上述恒等式可知，对于任意 $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，$\lim_{t\downarrow 0}(P_t[\psi]f - f)/t$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中存在，因此 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathrm{D}(A_2[\psi])$。显然，$P_t[\psi](\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})) \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，这表明 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 是 $P[\psi]$ 的生成元的核。

对于结论（1a），我们首先注意到，对于任意 ϵ，$\beta > 0$，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi) = \frac{\beta^{-\frac{1}{2}-\epsilon-\mathrm{i}\xi}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon + \mathrm{i}\xi\right). \tag{4.22}$$

由于 $\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}$ 处处非零，且 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$，令 $\beta = e^a$ 表示 $a \in \mathbb{R}$，由推论 3.2可得 （1b），接下来我们证明存在 $\delta_\psi > 0$ 使得对所有 $\beta > 0$，

$$\xi \mapsto m_{H_\psi}(\xi + \mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \tag{4.23}$$

只要 $0 < \epsilon < \delta_\psi$。由于 $\psi(\xi) \neq -\mathrm{i}\mathtt{d}\xi$ 对于某个 $\mathtt{d} > 0$，由 [39, 定理 2.3(1)] 可知存在 $\delta_\psi > 0$ 使得对于任意 $\delta_1 < \delta_\psi < \delta_2$，

(4.24)
$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{\delta_1}\left|\frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)\right| = 0, \quad \lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{\delta_2}\left|\frac{W_{\phi_+}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi\right)}{W_{\phi_-}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi\right)\right| = \infty.$$

由于对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi) = \mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi + \mathrm{i}/2) = \frac{\beta^{-\epsilon-\mathrm{i}\xi}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\epsilon + \mathrm{i}\xi)$，根据 H_ψ的定义，并结合上述估计和斯特林近似，对于任意 $\delta_1 < \delta_\psi < \delta_2$，

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{\delta_1+\frac{1}{2}-\epsilon}\left|m_{H_\psi}(\xi + \mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\right| = 0, \quad \lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{\delta_2+\frac{1}{2}-\epsilon}\left|m_{H_\psi}(\xi + \mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\right| = \infty.$$

显然，只要 $0 < \epsilon < \delta_\psi$，这就意味着 (4.23) 成立，从而证明了 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon) \subset \mathrm{D}(H_\psi)$。为证明 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的稠密性，设 $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 满足 $f \in H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))^\perp$。那么，根据平移傅里叶变换的等距映射，我们有

$$\mathcal{F}^e_f \perp \left\{m_{H_\psi}\left(\cdot + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}; \beta > 0\right\}. \tag{4.25}$$

回顾$\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi) = \frac{\beta^{-\epsilon-\mathrm{i}\xi}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\epsilon + \mathrm{i}\xi)$ 并取 $\beta = e^a$，由（4.25）可得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a\epsilon-\mathrm{i}a\xi} m_{H_\psi}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\Gamma(\epsilon + \mathrm{i}\xi)d\xi = 0 \quad \text{for all } a \in \mathbb{R}.$$

这意味着 $\mathcal{F}^e_f(\xi)$ 几乎处处成立，也就是说 $f = 0$ 几乎处处成立。由此完成了 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$ 稠密性的证明。

现在，只需证明 $H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))$ 是 $A_2[\psi]$ 的核。为此，我们需要以下两个引理。

引理 4.10。算子 $(I_e, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|}))$，其中 $I_e f(x) = -e^{-x}f(x)$，是 $(e_t)_{t\geqslant 0}$ 的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$-生成元；且对于任意 $\epsilon > 0$, $\mathcal{E}(\epsilon) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|})$。此外，对于任意 $\epsilon > 0$, $\mathcal{E}(\epsilon)$，其在半群 $(e_t)_{t\geqslant 0}$ 下是不变的，因此它是其生成元的核。

证明。若 $f \in \mathrm{D}(I_e)\cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$，则 $\lim_{t\to 0}(e_t f - f)/t$ 必须在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中存在。注意到对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$\lim_{t\to 0}(1 - e^{-te^{-x}})/t = e^{-x}$，由法图引理可得

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x} dx \leqslant \liminf_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e_t f(x) - f(x)}{t}\right)^2 e^x dx = \|I_e f\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} < \infty.$$

这表明 $\mathrm{D}(I_e) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|})$。另一方面，若 $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|})$，我们首先注意到

$$\lim_{t\to 0} \frac{e_t f(x) - f(x)}{t} = I_e f(x) = -e^{-x} f(x)$$

逐点成立。接下来，回顾不等式 $(1 - e^{-te^{-x}})/t \leqslant e^{-x}$ 对所有 $t > 0$成立，利用控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e_t f(x) - f(x)}{t} - I_e f(x)\right)^2 e^x dx = 0$$

这表明 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|}) \subseteq \mathrm{D}(I_e)$，因此 $\mathrm{D}(I_e) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|})$。接下来，根据 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}$的定义可知，对于任意 $\epsilon, \beta > 0$, $\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e^{|x|})$。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，$\mathcal{E}(\epsilon) \subset \mathrm{D}(I_e)$。现在，对于任意 $\epsilon, \beta > 0$，$e_t \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x) = \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta+t}$。由 e_t, $\mathcal{E}$ 的线性性可知，ϵ 确实是不变的。由于 $\mathcal{E}(\epsilon)$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密，根据 [17, 命题 1.7],，它是 $(e_t)_{t\geqslant 0}$的生成元的一个核。□

回到命题（1b）的证明，我们已经在定理 4.1（5）中证明了$P_t[\psi]H_\psi = H_\psi e_t$ 在 $\mathbf{D}(H_\psi)$ 上对任意 $\psi \in \mathbf{N}_b(\mathbb{R})$ 成立。因此，$P_t[\psi]H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon)) = H_\psi e_t(\mathcal{E}(\epsilon))$。由 $\mathcal{E}(\epsilon)$ 在 e_t下的不变性，我们得到

$$P_t[\psi](H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))) \subseteq H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon)).$$

换言之，$\mathcal{E}_\psi(\epsilon) = H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon))$ 在半群 $P[\psi]$下是不变的。在下一个引理中，我们证明 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon) \subset \mathbf{D}(A_2[\psi])$。这里假设（4.5）至关重要。

引理 4.11. 若 $\psi(\xi) \neq -\mathrm{i}\mathfrak{d}\xi$ 对某个 $\mathfrak{d} > 0$ 成立，则对任意 $0 < \epsilon < \eta_\psi$，$H_\psi(\mathcal{E}(\epsilon)) \subseteq \mathrm{D}(A_2[\psi])$ 且 $A_2[\psi]H_\psi = H_\psi I_e$ 在 $\mathcal{E}(\epsilon)$ 上成立。

证明。由（4.3），我们知道，由于 $\mathcal{E}(\epsilon) \subset \mathbf{D}(H_\psi)$，有

$$P_t[\psi]H_\psi = H_\psi e_t \text{ on } \mathcal{E}(\epsilon). \tag{4.26}$$

对于任意 $f \in \mathcal{E}(\epsilon) \subset \mathrm{D}(I_e)$，我们断言

$$\lim_{t\downarrow 0} H_\psi \frac{e_t f - f}{t} = H_\psi I_e f.$$

只需对 $f = \mathfrak{h}_{\epsilon,\,\beta}$ 以及 $\beta > 0$ 和 $0 < \epsilon < \eta_\psi$证明我们的断言。首先，我们回顾一下，对于所有 $t \geqslant 0$，都有$e_t \mathfrak{h}_{\epsilon,\,\beta} = \mathfrak{h}_{\epsilon,\,\beta+t}$。由于 H_ψ 是一个移位傅里叶乘子算子（因而是闭算子），只需证明函数

$$\xi \mapsto m_{H_\psi}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left[\frac{\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta+t}}(\xi) - \mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)}{t}\right]$$

在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 中收敛，当 $t \downarrow 0$。由 (4.22)，利用伽马函数的斯特林渐近公式，当 $|\xi| \to \infty$时，

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{d}{dt}\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta+t}}(\xi)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{t\in[0,1]} \left|(\beta+t)^{-\epsilon-\mathrm{i}\xi-1}(\epsilon+\mathrm{i}\xi)\Gamma(\epsilon+\mathrm{i}\xi)\right| \asymp |\xi|^{\epsilon+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}.$$

现在，回想$m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2) = {}^{W_{\phi_+}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)}\underline{W_{\phi_-}(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)}$，并结合上述界使用条件 (4.5)，可得对所有 $0<\epsilon<\eta_\psi$,

$$\sup_{t\in[0,1]}\int_{\mathbb{R}}\left|m_{H_\psi}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|^2\left|\frac{\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta+t}}(\xi)-\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)}{t}\right|^2 d\xi<\infty.$$

因此，我们的结论由控制收敛定理得出。因此，由（4.26），

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t[\psi]H_\psi f-H_\psi f}{t}=\lim_{t\downarrow 0}H_\psi\frac{e_t f-f}{t}=H_\psi I_e f$$

这意味着 $H_\psi f\in \mathrm{D}(A_2[\psi])$，且对所有 $f\in\mathcal{E}(\epsilon)$，$A_2[\psi]H_\psi f=H_\psi I_e f$，从而完成了引理的证明。□

由于集合 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$ 在$\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中稠密，且在 $P[\psi]$下不变，根据[17, 命题 1.7]，它是 $A_2[\psi]$的一个核。

4.2.2. 命题 4.2(2) 的证明。我们通过观察条件 (4.6) 蕴含 $\delta_\psi=\infty$ 来展开论证，其中 δ_ψ 在 (4.24) 中定义。这进一步意味着 $\eta_\psi=\infty$，其中 η_ψ 在 (4.5) 中定义。首先假设条件 (2i)，即 $\phi_+(0)>0$，这确保了 m_{H_ψ} 在 $\mathbb{S}_{[0,1]}$ 上连续延拓。现在，结合 (4.6) 中的界，并采用与命题 3.13(2) 的证明中类似的论证（涉及 Phragm´en-Lindel¨of 原理），可以证明，对任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\xi\mapsto\sup_{b\in[0,1]}|\xi+\mathrm{i}b|^n|m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}b)\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi+\mathrm{i}b)|\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R}).$$

因此，应用命题 3.5，我们得到 $H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$，对所有 $\epsilon,\beta>0$ and

$$\mathcal{F}_{H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}=m_{H_\psi}\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}.$$

由于上述等式右侧的函数比任何多项式都衰减得更快，我们得到 $H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$。此外，由注记 3.14，我们有 $m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i})=m_{H_\psi}(\xi)\psi(\xi)$，对所有 $\xi\in\mathbb{R}$。因此，由引理 4.11，对于任意 $\beta,\epsilon>0$，我们得到

$$\begin{aligned}
A_2[\psi]H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}&=H_\psi I_e\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}\\
&=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\xi x}m_{H_\psi}\left(\xi+\mathrm{i}/2\right)\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}\left(\xi-\mathrm{i}/2\right)\,d\xi\\
&=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}-\frac{\mathrm{i}}{2}}m_{H_\psi}(z+\mathrm{i})\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(z)e^{\mathrm{i}zx}\,dz\\
&=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i})\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi\\
&=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}m_{H_\psi}(\xi)\psi(\xi)\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi\\
&=A_{\mathtt{PDO}}[\psi]H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}=A_{\mathtt{IDO}}[\psi]H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}
\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中，我们反复使用引理 3.3 来改变积分路径。另请注意，最后一个等式成立，因为 $\xi\mapsto\xi^2 m_{H_\psi}(\xi)\mathcal{F}_{H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$。最后，由于算子的线性性，最后一个恒等式可推广至 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$，从而推广至 $\mathcal{E}_\psi$。接下来，为了去除条件 $\phi_+(0)>0$，我们用其小扰动 ψ_q 近似 ψ，对于这些小扰动，我们可以应用上文讨论的技巧。更正式地说，我们定义 $\psi_q(\xi)=\psi(\xi)+q$, $q\geqslant 0$。

令 $\psi_q(\xi)=\phi_+^{(q)}(-\mathrm{i}\xi)\phi_-^{(q)}(\mathrm{i}\xi)$ 为 ψ_q 的 Wiener–Hopf 分解。根据 [39, 引理 7.3, (7.66)], 取 $\mathfrak{r}=1$ 并采用其中的记号，对于所有 $n\in\mathbb{N}$,

$$\limsup_{|\xi|\to\infty}|\xi|^n e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}\sup_{0\leqslant q\leqslant 1}\left|m_{H_{\psi_q}}(\xi+\mathrm{i}/2)-m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2)\right|=0. \tag{4.28}$$

注意，按照前述论文中的记号， $\mathtt{N}_\Psi$ 在我们的情形下与 δ_ψ 一致，而后者等于 ∞，这是由（4.6）得出的。此外，我们将 $\Gamma(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)$ 在[39, (7.66)]中直接替换为 $e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}$，因为根据斯特林近似公式，二者渐近等价。因此，由控制收敛定理和引理 4.11，可得

$$\begin{aligned}A_2[\psi]H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x)&=H_\psi I_e\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x)\\&=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi-\mathrm{i}/2)\,e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi\\&=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\lim_{q\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}m_{H_{\psi_q}}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi-\mathrm{i}/2)\,e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi.\end{aligned} \tag{4.29}$$

由于 $\phi_+^{(q)}(0)>0$，由（4.27）可得

$$\begin{aligned}&\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}m_{H_{\psi_q}}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi-\mathrm{i}/2)\,e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi\\&=-e^{-\frac{x}{2}}\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\psi_q(\xi)m_{H_{\psi_q}}(\xi)\mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)e^{\mathrm{i}\xi x}\,d\xi\\&=-e^{\frac{x}{2}}\lim_{q\downarrow 0}A_{\mathtt{IDO}}[\psi_q]H_{\psi_q}\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x).\end{aligned} \tag{4.30}$$

最后，为了完成该定理的证明，我们需要以下引理。

引理 4.12。 若 ψ 满足条件 (2ii)，则对任意 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，有

$$\lim_{q\downarrow 0}(H_{\psi_q}\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}(x)=(H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}(x)$$

$$\lim_{q\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}\mathtt{F}H_{\psi_q}\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x,y)\mu(dy)=\int_{\mathbb{R}}\mathtt{F}H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x,y)\mu(dy)$$

其中 $\mathtt{F}f(x,y)=f(x+y)-f(x)-y_{\mathbb{I}\{|y|\leqslant 1\}}f'(x)$.

证明。根据 H_{ψ_q} 的定义，对于任意 $\beta>0$,

$$\lim_{q\downarrow 0}H_{\psi_q}\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\lim_{q\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\xi x}m_{H_{\psi_q}}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\,d\xi,$$

根据（4.28）和控制收敛定理，该式等于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\xi x}m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\,d\xi=H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x).$$

对于导数，我们注意到，对于任意 $n\in\mathbb{N}$、 $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(H_\psi\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}/2))^n\,m_{H_\psi}(\xi+\mathrm{i}/2)\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\,d\xi\\&=\lim_{q\downarrow 0}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\xi x}m_{H_{\psi_q}}(\xi+\mathrm{i}/2)\,(\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}/2))^n\,\mathcal{F}^e_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\,d\xi\\&=\lim_{q\downarrow 0}(H_{\psi_q}\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}(x).\end{aligned}$$

另一方面，利用函数 $z \mapsto (-\mathrm{i}z)^n m_{H_\psi}(z) = (\frac{-z}{\phi_+ - z}^n \mathrm{i})(\mathrm{i}) W_{\phi_+}(1-\mathrm{i}z) W_{\phi_-}(1+\mathrm{i}z)$在 $\mathbb{S}_{[0,1]}$ 对于 $n \geqslant 1$，并回顾命题 3.5，我们得到

$$(H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} (\mathrm{i}\xi)^n m_{H_\psi}(\xi) \mathcal{F}_{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}}(\xi)\, d\xi.$$

由于上述被积函数的模关于ξ比任何多项式都衰减得更快，我们推得，对于任意 $n \geqslant 1$，$(H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)} \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$；并利用（4.28），容易看出，当 $q \to 0$ 时，$(H_{\psi_q} \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)} \to (H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta})^{(n)}$ 在一致拓扑下成立。因此，记

$$\mathtt{I} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathtt{F} f(x,y) \mu(dy) \text{ and } D_q(x) = H_{\psi_q} \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x) - H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x)$$

当 $q \to 0$ 时，我们有：

$$\begin{aligned}
&|\mathtt{I} H_{\psi_q} \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x) - \mathtt{I} H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}(x)| = |\mathtt{I} D_q(x)| \\
&\leqslant \int_{|y|\leqslant 1} \left| D_q(x+y) - D_q(x) - y D_q'(x) \right| \mu(dy) + \int_{|y|>1} |D_q(x+y) - D_q(x)|\, \mu(dy) \\
&\leqslant \|D_q''\|_\infty \int_{|y|\leqslant 1} y^2 \mu(dy) + \|D_q'\|_\infty \int_{|y|>1} |y| \mu(dy) \to 0
\end{aligned}$$

根据我们对 ψ 的假设。这就证明了该引理。 □

因此，利用（4.29）和（4.30），以及前一个引理，我们得出

$$A_2[\psi] H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta} = A_{\mathtt{IDO}}[\psi] H_\psi \mathfrak{h}_{\epsilon,\beta}.$$

根据算子的线性性，上述恒等式可推广为 $\mathcal{E}_\psi$ 这就完成了（2）的证明。

5. Proof of Theorem 2.1: the multidimensional case

定理的证明2.1 由定理4.1 结合张量化与相似变换技术得出，我们先在半群的一般背景下介绍这些方法。

5.1. 半群及其生成元的张量化与相似变换。对于 $d \in \mathbb{N}$，考虑定义在希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的 $\mathcal{C}_0$- 压缩半群 $P^{(1)}, P_{(2)} \ldots, P_{(d)}$。对于每个 $t \geqslant 0$，定义 $\boldsymbol{P}_t$ 为 $P_t^{(1)}, \ldots, P_{(d)\,t}$ 的张量积。显然，$(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 上的 $\mathcal{C}_0$-压缩半群，其中 $\mathrm{e}(\boldsymbol{x}) = \otimes_{k=1}^d e(\boldsymbol{x}) = e^{\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{1} \rangle}$。若 $(A^{(k)}, \mathrm{D}(A^{(k)}))$ 表示 $P^{(k)}$, $k = 1, \ldots, d$ 的生成元，则 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 的生成元为

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^d I \otimes \ldots \otimes I \otimes A^{(k)} \otimes I \otimes \ldots \otimes I.$$

由于我们未能找到关于生成元张量积的核的恰当参考文献，因此在下一个引理中给出这一结果。

引理 5.1. $\otimes_{k=1}^d \mathrm{D}(A^{(k)})$ 构成 $\boldsymbol{A}$ 的一个核。特别地，对于 $k = 1, \ldots, d$，如果 $\mathcal{D}_k \subseteq \mathrm{D}(A^{(k)})$ 满足 $\mathcal{D}_k$ 是 $P^{(k)}$ 的一个核，那么 $\mathrm{D} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$ 构成 $\boldsymbol{A}$ 的一个核。

证明。 首先注意到 $\otimes_{k=1}^d \mathbf{D}(A^{(k)}) \subset \mathbf{D}(\boldsymbol{A})$，且它在半群 $\boldsymbol{P}$ 下保持不变。因此，结论的第一部分由 [17, 命题 1。7] 得出。接下来，要证明$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个核，只需证明

(i) D 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 中稠密，

(ii) $(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\mathrm{D})$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 中稠密，对任意 $\alpha > 0$ 均成立。

第（i）项成立，因为 $\mathcal{D}_k$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密，对每个 $k = 1$，……，d均成立。对于第（ii）项，注意，对于任意 $\alpha > 0$，都有

$$(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = \sum_{k=1}^{d} \mathcal{D}_1 \otimes \cdots \otimes (\alpha I - A^{(k)})(\mathcal{D}_k) \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_d.$$

由于 $\mathcal{D}_k$ 是 $A^{(k)}$的核，$(\alpha I - A^{(k)})(\mathcal{D}_k)$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密。因此，上述等式右侧的集合在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 中也稠密。这就证明了该引理。□

在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 上定义一个半群后，可以通过对 $\mathbb{R}^d$的坐标进行相似变换构造一类半群。所得半群与原半群相似。具体而言，设 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 上的一个半群，对于任意博雷尔双射 $\mathfrak{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，可以通过相似变换定义一个新半群如下，对任意 $t \geqslant 0$,

$$\boldsymbol{P}_t^{\mathfrak{g}} = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \boldsymbol{P}_t \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}^{-1}$$

其中，$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_{\mathfrak{g}})$，且 $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\mathrm{f} = \mathrm{f} \circ \mathfrak{g}^{-1}$ 是等距映射。半群 $(\boldsymbol{P}_t^{\mathfrak{g}})_{t\geqslant 0}$ 定义在一个新的 L^2空间上，即 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_{\mathfrak{g}})$，其中 $\mathrm{e}_{\mathfrak{g}}$ 是由 $\mathfrak{g}$诱导的推前测度。若 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathcal{C}_0$-压缩半群，则 $(\boldsymbol{P}_t^{\mathfrak{g}})_{t\geqslant 0}$也是如此。此外，分别记 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$和 $(\boldsymbol{P}_t^{\mathfrak{g}})_{t\geqslant 0}$ 的生成元为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_{\mathfrak{g}}$，则有

$$\boldsymbol{A}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \boldsymbol{A} \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}^{-1} \text{ on } \mathbf{D}(\boldsymbol{A}_{\mathfrak{g}}) = \left\{ \mathrm{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_{\mathfrak{g}});\ \mathrm{f} \circ \mathfrak{g} \in \mathbf{D}(\boldsymbol{A}) \right\}.$$

5.2. 傅里叶乘子算子的张量化。由于傅里叶乘子算子是闭算子，因此很容易在多维 L^2 空间上定义它们的张量积。例如，设 $\{(\Lambda_k, \mathrm{D}(\Lambda_k))\}_{k=1}^d \subset \mathscr{M}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是定义在 $\otimes_{k=1}^d \mathrm{D}(\Lambda_k)$ 上的移位傅里叶乘子，其定义为

$$\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_{\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{f}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{k=1}^{d} m_{\Lambda_k}(\xi_k + \mathrm{i}/2)\, \mathcal{F}^{e}_{f_k}(\xi_k)$$

其中，对于 $k = 1$，$\mathrm{f} = \otimes_{k=1}^d f_k$，$f_k \in \mathrm{D}(\Lambda_k)$，且 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$。注意，在这种情况下，$\mathcal{F}^{\mathrm{e}}$ 表示多维移位傅里叶变换，即

$$\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathbf{1}\rangle} \mathbf{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

其中，回顾一下，$\mathbf{1}$ 是由全为 1 的元素组成的 $\mathbb{R}^d$ 中的向量。我们称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为各个 Λ_k 的张量积，并记作

$$\boldsymbol{\Lambda} = \otimes_{k=1}^d \Lambda_k.$$

算子 $\boldsymbol{\Lambda}$ 限制在 $\otimes_{k=1}^d \mathrm{D}(\Lambda_k)$ 上时是可闭的，其闭包是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 上的移位傅里叶乘子算子，其乘子函数为

$$\mathbf{m}_{\boldsymbol{\Lambda}}\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathbf{1}\right) = \prod_{k=1}^{d} m_{\Lambda_k}\left(\xi_k + \frac{\mathrm{i}}{2}\right).$$

提到傅里叶乘子的张量积时，我们始终指上文提到的移位傅里叶乘子算子。与一维傅里叶乘子算子一样，命题 3.6、3.7 和 3.8 对移位傅里叶乘子的张量积同样成立

算子以及有界算子的张量积也同样成立。接下来，我们证明以下关于傅里叶乘子算子张量积的核的引理。

引理 5.2. 设 $(\Lambda_k)_{k=1}^d$ 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的一列移位傅里叶乘子算子，使得对每个 $k = 1, \ldots, d$，$\mathcal{D}_k$ 都是 Λ_k 的核。那么，$\mathrm{D} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$ 是 $\mathbf{\Lambda} = \otimes_{k=1}^d \Lambda_k$ 的核。

证明。回顾命题 3.6 的证明可知，$\mathcal{D}_k$ 是 Λ_k 的核，当且仅当$\mathcal{F}^e_{\mathcal{D}_k}$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, 1 + |m^e_{\Lambda_k}|^2)$ 中稠密。记 $\mathbf{m} = \prod_{k=1}^d (1 + |m^e_{\Lambda_k}|^2)$。于是可得

$$\bigotimes_{k=1}^d \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, 1 + |m^e_{\Lambda_k}|^2) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{m})$$

因此，D 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{m})$ 中稠密。由于 $\mathrm{m} \geqslant 1 + \prod_{k=1}^d |m^e_{\Lambda_k}|^2 = 1 + |\mathrm{m}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{\Lambda}}|^2$，这意味着 D 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, 1 + |\mathrm{m}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{\Lambda}}|^2)$ 中也稠密。因此，D 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的核。□

命题 5.3. 设对每个 $k = 1, \ldots, d$, $A_k, B_k \in \mathscr{D}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e))$ 和 $(\Lambda_k, \mathrm{D}(\Lambda_k)) \in \mathscr{M}$，并假设存在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 的稠密子集 $\mathcal{D}_k$，使得 $A_k\Lambda_k = \Lambda_k B_k$ 在 $\mathcal{D}_k$上成立。那么，

$$\boldsymbol{A}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{B} \quad on \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} \tag{5.1}$$

其中 $\mathrm{D} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$, $\boldsymbol{A} = \otimes_{k=1}^d A_k$, $\boldsymbol{B} = \otimes_{k=1}^d B_k$ 和 $\mathbf{\Lambda} = \otimes_{k=1}^d \Lambda_k$。特别地，当 A_k, B_k是有界算子，且对每个 k，$\mathcal{D}_k$ 是 Λ_k 的核时，上述等式可延拓至 $\mathrm{D}(\mathbf{\Lambda})$。

证明。由于任意 $\mathrm{f} \in \mathrm{D} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$ 都是形如 $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k)$ 的函数的线性组合，其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ 且 $f_k \in \mathcal{D}_k$，根据算子张量积的定义，我们有

$$\boldsymbol{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{f} = \boldsymbol{A}(\otimes_{k=1}^d \Lambda_k f_k) = \otimes_{k=1}^d A_k\Lambda_k f_k = \otimes_{k=1}^d \Lambda_k B_k f_k = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{B}\mathbf{f}, \tag{5.2}$$

这就证明了 (5.1)。当 A_k、B_k 是有界算子时，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$也都是有界算子。此外，若 $\mathcal{D}_k$是 Λ_k 在 $k = 1, \ldots, d$ 上的核，则由引理 5.2 可知，$\mathrm{D} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}_k$ 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的核。因此，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的有界性以及 $\mathbf{\Lambda}$ 的闭性，保证了 (5.2) 对所有 $\mathrm{f} \in \mathrm{D}(\mathbf{\Lambda})$ 均成立。□

命题 5.4. 设 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d) \in \mathrm{N}_b^d(\mathbb{R})$，满足 $\psi_k(\xi) = \phi_{+,k}(-\mathrm{i}\xi)\phi_{-,k}(\mathrm{i}\xi)$，且对于任意 $k = 1, 2, \ldots, d$，$\psi_k(\xi) \neq -\mathrm{id}\xi$。假设 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，并令 $\boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}}$按定理 2.4 中的定义给出。则 $\boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}} : \mathrm{D}(\boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$ 是一个稠密定义、闭、单射且具有稠密值域的线性算子，且

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}}) = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M);\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \mapsto \mathcal{F}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{f}\circ M^{-1}}(\boldsymbol{\xi}) \prod_{k=1}^d \frac{W_{\phi_{+,k}}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi_k)}{W_{\phi_{-,k}}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi_k)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}. \tag{5.3}$$

此外，对于充分小的 $\epsilon > 0$，$\mathrm{E}(\epsilon) \subset \mathrm{D}(\boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}})$，且 $\mathrm{E}^M_{\boldsymbol{\psi}}(\epsilon) := \boldsymbol{H}^M_{\boldsymbol{\psi}}(\mathrm{E}(\epsilon))$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$ 中稠密，其中

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\epsilon) = \bigotimes_{k=1}^d \mathcal{E}(\epsilon) \ \ with \ \ \mathcal{E}(\epsilon) = \mathrm{Span}\{\mathfrak{h}_{\epsilon,\beta};\ \beta > 0\}$$

以及 $\mathfrak{h}_{\epsilon,\ \beta}(x) = e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x} e^{-\beta e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$。

证明。 只需证明上述命题在 $d = 1$的情形。一般情形可通过张量化和相似变换技巧得出。当 $d = 1$，由5.3可根据第 3.4 节以及 $\mathcal{E}_\psi(\epsilon)$ 是 $A_2[\psi]$ 在充分小的 $\epsilon > 0$时的核这一事实推出；由命题4.2(1b) 可得。 □

现在我们可以证明定理 2.1。

5.3. 定理 **2.1** 的证明。 由于弱相似算子是傅里叶乘子算子，且弱相似性在相似变换下保持不变，因此只需在 $M = \mathrm{Id}$ 时证明该定理。由定理 4.1(3) 可知，对于每个 $k = 1, \ldots, d$, $A_{\mathtt{PDO}}[\psi_k]\Lambda_{\psi_k} = \Lambda_{\psi_k} A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0]$在 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上。由于 $\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d A_{\mathtt{PDO}}[\psi_k]$且 $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} = \otimes_{k=1}^d \Lambda_{\psi_k}$, 命题5.3 给出

$$\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}]\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}_0] \quad \text{on} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)$$

其中 $\mathsf{D}(\mathbb{R}^d) = \otimes_{k=1}^d \mathcal{D}(\mathbb{R})$。

当 $\boldsymbol{\psi} \in \mathsf{N}_+^d(\mathbb{R})$ 时，这意味着对于每个 $k = 1, \ldots, d$, $\psi_k \in \mathsf{N}_+(\mathbb{R})$。因此，对于每个 $k = 1, \ldots, d$, $\Lambda_{\psi_k} \in \mathscr{B}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e))$。于是， $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} \in \mathscr{B}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathsf{e}))$。定理得证。

5.4. 定理 **2.2** 的证明。

5.4.1. 定理 2.2(1) 的证明。我们首先注意到，对于任意 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$，都有 $\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d A_{\mathtt{PDO}}[\psi_k] \in \mathsf{N}_b^d(\mathbb{R})$。接下来，由定理 4.1(1) 可知，$(A_{\mathtt{PDO}}[\psi_0], \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的闭包生成 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的对数平方贝塞尔半群 Q，且其在 $\mathsf{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 上的限制可扩张为 $\mathsf{C}_0(\mathbb{R})$ 上的 Feller 半群，其生成元是 $(A_0, \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 在 $\mathsf{C}_0(\mathbb{R})$ 中的闭包。注意到，由于引理 5.1，张量积 $\boldsymbol{Q} = \otimes_{k=1}^d Q$ 由 $\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}_0]$ 在 $\otimes_{k=1}^d \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 上的限制的闭包生成。由于 $\otimes_{k=1}^d \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，且这两个集合在 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathsf{e})$ 中均稠密，$(\boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}_0], \mathsf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ 的闭包也生成 $\boldsymbol{Q}$。此外，由于张量化， $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{C}_0^+(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathsf{e}))$。至此，结论 (1) 得证。

5.4.2. 证明 定理 2.2(2)。 对于任意 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d) \in \mathbf{N}_b^d(\mathbb{R})$，我们定义

$$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d P[\psi_i].$$

显然， $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}] \in \mathcal{C}_0(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}))$。此外，由定理 4.1(4.2)，我们推得

$$\boldsymbol{A}_2[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}[\boldsymbol{\psi}] \quad \text{on} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)). \tag{5.4}$$

由于 $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}}(\mathsf{D}(\mathbb{R}^d)) = \otimes_{k=1}^d \Lambda_{\psi_k}(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ 是 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中稠密子集的张量积，因此它在 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathsf{e})$ 中稠密。接下来，对于 $M \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$ 和 $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathsf{e}_M)$，我们定义

$$\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}]\mathsf{f} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}](\mathsf{f} \circ M) \circ M^{-1}.$$

由第 5.1 小节中的讨论可知， $\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}] \in \mathcal{C}_0(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M))$ 且 $\boldsymbol{A}_2^M[\boldsymbol{\psi}] = \mathrm{d}_M \boldsymbol{A}_2[\boldsymbol{\psi}]\mathrm{d}_{M^{-1}}$是其 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$-生成元。因此，由 (5.4) 得出

$$\boldsymbol{A}_2^M[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{A}_{\mathtt{PDO}}^M[\boldsymbol{\psi}] \quad \text{on} \quad \mathrm{d}_M \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d))$$

且 $\mathrm{d}_M \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d))$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$ 中也稠密，因为 d_M是 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e}_M)$ 与$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e})$ 之间的等距映射。此项的第二部分可由定理 4.1(5) 的证明推出。

5.4.3. 定理 2.2(3) 的证明。 由定理 4.1(4.3) 可知，对于任意 $\psi \in \mathbf{N}_b(\mathbb{R}), P[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi Q$ 在 $\mathbf{D}(\Lambda_\psi)$ 上，其中 Q 是对数平方贝塞尔半群。令 $M = \mathrm{Id}$。于是，$\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d P[\psi_k]$ 因此，利用命题 5.3，我们得到

$$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}]\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{Q} \quad \text{on} \quad \mathbf{D}(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}})$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\psi}} = \otimes_{k=1}^d \Lambda_{\psi_k}$ 且 $\boldsymbol{Q} = \otimes_{k=1}^d Q$。这就证明了当2.6成立时的 $M = \mathrm{Id}$。一般情形将由相似变换论证得出。

5.4.4. 定理2.2(4)的证明。先假设 M =Id。于是，根据张量化， $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d P[\psi_k]$ 在$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{e})$中的伴随算子等于

$$\widehat{\boldsymbol{P}}[\boldsymbol{\psi}] = \otimes_{k=1}^d \widehat{P}[\psi_k] = \otimes_{k=1}^d P[\overline{\psi}_k] = \boldsymbol{P}[\overline{\boldsymbol{\psi}}].$$

事实上，当且仅当 $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}]$ $\overline{\psi}_k = \psi_k$ 对每个 $k = 1, \ldots\ldots, d$成立。接下来，我们证明对于任意 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$， $\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}]$ 在$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$中的伴随算子等于$\boldsymbol{P}^M[\overline{\boldsymbol{\psi}}]$。回忆一下，算子$\mathrm{d}_M\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e})$由$\mathrm{d}_M\mathrm{f} = \mathrm{f} \circ M^{-1}$定义，是一个等距映射，并且$\widehat{\mathrm{d}}_M = \mathrm{d}_{M^{-1}}$。现在，对于任意$\mathrm{f}$、$\mathrm{g} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$以及 $t \geqslant 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{P}_t^M[\boldsymbol{\psi}]\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{g}(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_M(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{P}_t[\boldsymbol{\psi}](\mathbf{f} \circ M)(M^{-1}\boldsymbol{x})\mathbf{g}(\boldsymbol{x})\mathbf{e}(M^{-1}\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\
&= \det(M) \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{P}_t[\boldsymbol{\psi}](\mathbf{f} \circ M)(\boldsymbol{y})\mathbf{g}(M\boldsymbol{y})\mathbf{e}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\
&= \det(M) \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{P}_t[\overline{\boldsymbol{\psi}}](\mathbf{g} \circ M)(\boldsymbol{y})\mathbf{f}(M\boldsymbol{y})\mathbf{e}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{P}_t^M[\overline{\boldsymbol{\psi}}]\mathbf{g}(\boldsymbol{y})\mathbf{f}(\boldsymbol{y})\mathbf{e}_M(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

因此， $\widehat{\boldsymbol{P}}^M[\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{P}^M[\overline{\boldsymbol{\psi}}]$和 $\boldsymbol{P}^M[\boldsymbol{\psi}]$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{e}_M)$ 中是自伴算子，当且仅当 $\boldsymbol{\psi} = \overline{\boldsymbol{\psi}}$。

5.5. 定理 **2.4** 的证明。 同样，假设 M =Id，因为一般情形可由相似变换推出。由定理 4.1(4.4) 可知，对于任意 $k = 1, \ldots, d$，有$P_t[\psi_k]H_{\psi_k} = H_{\psi_k}e_t$ 在 $\mathbf{D}(H_{\psi_k})$ 上，其中 $H_{\psi_k} \in \mathscr{M}$ 与.....相关联

$$m_{\psi_k}^e(\xi) = m_{H_{\psi_k}}(\xi + \mathrm{i}/2) = \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi)}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_t = \otimes_{k=1}^d e_t$，应用命题 5.3 并取 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\psi}} = \otimes_{k=1}^d H_{\psi_i}$，定理得证。

5.6. 定理 2.6 的证明。我们先对 $M = \mathrm{Id}$ 证明此定理，一般情形可由相似变换推出。我们先证明第 (2) 和 (3) 项，再证明第 (1) 项。若 $m_{H_\psi}(\cdot + \mathrm{i}/2) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$，则存在唯一函数 $J_\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, e)$，使得 $\mathcal{F}_{J_\psi}^e = m_{H_\psi}(\cdot + \mathrm{i}/2)$。因此，对于任意 $f \in \mathrm{D}(H_\psi)$，我们有

$$H_\psi f = J_\psi * f$$

其中 $*$ 表示加法卷积。此外，$m_{H_\psi}\left(\cdot+\mathrm{i}\frac{}{2}\right)\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 意味着 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})\subset \mathbf{D}(H_\psi)$。现在，对于任意 $f\in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(|J_\psi|*|f|)^2(x)e^x dx &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|J_\psi(x-y)||f(y)|dy\right)^2 e^x dx\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|J_\psi(x-y)|^2 e^x dx\right)^{\frac{1}{2}}|f(y)|dy\right)^2\\ &= \|J_\psi\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{y}{2}}|f(y)|dy\right)^2<\infty\end{aligned}\tag{5.5}$$

其中，第一个不等式由闵可夫斯基积分不等式得出。此外，对于所有 $f\in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$和 $g\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$,

$$\langle P_t[\psi]H_\psi f,g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}=\langle H_\psi f,\widehat{P}_t[\psi]g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)f(y)\,dy\right)\widehat{P}_t[\psi]g(x)e^x\,dx.\tag{5.6}$$

由于（5.5）可得 $|J_\psi|*|f|\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|J_\psi(x-y)f(y)\widehat{P}_t[\psi]g(x)|e^x dx\;dy<\infty.$$

对（5.6）右侧应用富比尼定理，对于所有 $f\in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $g\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$，可得

$$\langle P_t[\psi]H_\psi f,g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)\widehat{P}_t[\psi]g(x)e^x\,dx\right)f(y)\,dy.\tag{5.7}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\langle P_t[\psi]H_\psi f,g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} &= \langle H_\psi e_t f,g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}\\ &= \int_{\mathbb{R}}H_\psi e_t f(x)g(x)e^x\,dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)e_t f(y)\,dy\right)g(x)e^x\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)f(y)e^{-te^{-y}}\,dy\right)g(x)e^x\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)g(x)e^x\,dx\right)f(y)e^{-te^{-y}}\,dy\end{aligned}\tag{5.8}$$

其中，最后一个等式再次用到了富比尼定理。由（5.7）、（5.8），并利用 $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中的稠密性，可得几乎处处对 y,

$$\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)\widehat{P}_t[\psi]g(x)e^x\,dx=e^{-te^{-y}}\int_{\mathbb{R}}J_\psi(x-y)g(x)e^x\,dx.$$

由于 $y\mapsto \tau_{-y}J_\psi=J_\psi(\cdot-y)$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$ 中连续，上述恒等式两边都是关于 y 的连续函数。因此，对于所有 $y\in\mathbb{R}$ 和 $g\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$,

$$\int_{\mathbb{R}}P_t[\psi]\tau_{-y}J_\psi(x)g(x)e^x\,dx=e^{-te^{-y}}\int_{\mathbb{R}}\tau_{-y}J_\psi(x)g(x)e^x\,dx,$$

这进一步意味着，对于所有 $y\in\mathbb{R}$,

$$P_t[\psi]\tau_{-y}J_\psi=e^{-te^{-y}}\tau_{-y}J_\psi\quad\text{in }\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e).$$

当 $d>1$ 时，当且仅当 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 时，$m_{H_{\psi_i}}\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 对所有 $k=1$、……、d 成立。这意味着

$$\widehat{\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\psi}}}=\otimes_{k=1}^{d}\widehat{\mathcal{F}^{e}_{m_{H_{\psi_i}}}}.$$

因此，若 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$，则对于任意 $t>0$，$\boldsymbol{P}_t[\psi]\tau_{-\boldsymbol{y}}\mathrm{J}_{\psi}=e^{-t\langle e(-\boldsymbol{y}),\,\mathbf{1}\rangle}\mathrm{J}_{\psi}$ 对所有 $y\in\mathbb{R}$ 都成立，其中 $\mathrm{J}_{\psi}=\otimes_{k=1}^{d}J_{\psi_i}$。由于 $\mathrm{m}_{\psi}^{\mathrm{e}}$ 有界，$\boldsymbol{H}_{\psi}$ 是一个有界算子。对交织关系 $\boldsymbol{P}_t[\psi]\boldsymbol{H}_{\psi}=\boldsymbol{H}_{\psi}\boldsymbol{e}_t$ 取伴随算子，得到

$$\boldsymbol{e}_t\widehat{\boldsymbol{H}}_{\psi}=\widehat{\boldsymbol{H}}_{\psi}\widehat{\boldsymbol{P}}_t[\psi].$$

由于 $\sigma_r(\boldsymbol{P}_t[\psi])\subseteq\sigma_p(\boldsymbol{P}_t[\psi])$ 且 $\sigma_p(\boldsymbol{e}_t)=\emptyset$，我们必须有 $\sigma_p(\boldsymbol{P}_t[\psi])=\emptyset$。因此，$\sigma_r(\boldsymbol{P}_t[\psi])=\emptyset$，从而完成了第 (2) 项的证明。

将 $\boldsymbol{P}_t[\psi]$ 替换为 $\boldsymbol{P}_t[\overline{\psi}]$，即可由第 (2) 项推出第 (3) 项。现在回到第 (1) 项，如果第 (2) 项和第 (3) 项中的某个条件成立，那么第 (1) 项显然成立。我们再次针对 $d=1$ 证明这一结果，一般情形则可通过张量化和相似变换直接得到。设 $m_{H_{\psi}}(\cdot+\mathrm{i}/2)$ 有界且不属于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$。我们考虑 $\varphi\in\mathrm{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ $\varphi\geqslant 0$，其中 $\mathrm{Supp}\,\varphi\subset(-1,1)$，并且对任意 $y\in\mathbb{R}$，$\varphi_n^{(y)}(x)=n\varphi(n(x-y))$。我们首先证明，$(\varphi_n^{(y)})_{n\geqslant 1}$（归一化为单位范数时）是 e_t 的近似特征函数，对应于近似特征值 $e^{-te^{-y}}$。注意，对任意 $y\in\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}\|e_t\varphi_n^{(y)}-e^{-te^{-y}}\varphi_n^{(y)}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}&=\int_{\mathbb{R}}n^2e^{-2te^{-y}}\left[e^{-te^{y}(e^{-(x-y)}-1)}-1\right]^2\varphi(n(x-y))^2e^x\,dx\\&=e^{-2te^{-y}+y}\int_{\mathbb{R}}n\left[e^{-te^{y}(e^{-\frac{x}{n}}-1)}-1\right]^2\varphi(x)^2e^{\frac{x}{n}}\,dx.\end{aligned}\tag{5.9}$$

利用控制收敛定理可知，式（5.9）中的表达式在 n 趋于无穷时收敛到 0。此外，对所有 $y\in\mathbb{R}$ 和 $n\geqslant 1$，

$$\|\varphi_n^{(y)}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}=\int_{\mathbb{R}}n^2\varphi(n(x-y))^2e^x\,dx=ne^y\int_{-1}^{1}\varphi(x)^2e^{\frac{x}{n}}\,dx$$

这意味着 $\|\varphi_n^{(y)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\,e)}\to\infty$ 当 $n\to\infty$ 时成立。因此，这些函数经归一化后，构成 e_t 的近似特征函数，对应于近似特征值 $e^{-te^{-y}}$。现在，我们声称函数 $H_{\psi}\varphi_n^{(y)}$ 经归一化后，是 $P_t[\psi]$ 的近似特征函数，对应于近似特征值 $e^{-te^{-y}}$。为证明这一点，只需证明 $\lim_{n\to\infty}\|P_t[\psi]H_{\psi}\varphi_n^{(y)}-e^{-te^{-y}}H_{\psi}\varphi_n^{(y)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\,e)}=0$，且 $\{\|H_{\psi}\varphi_n^{(y)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\,e)}\}_{n\geqslant 1}$ 有下界。我们先证明，当 $n\to\infty$ 时，$\|H_{\psi}\varphi_n^{(y)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\,e)}\to\infty$。事实上，我们注意到，对所有 $n\geqslant 1$，

$$\mathcal{F}^{e}_{\varphi_n^{(y)}}(\xi)=e^{-\mathrm{i}y+\frac{y}{2}}\mathcal{F}_{\varphi}\left(\frac{\xi}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2n}\right).$$

因此，

$$\mathcal{F}^{e}_{H_{\psi}\varphi_n^{(y)}}(\xi)=e^{-\mathrm{i}y+\frac{y}{2}}m_{H_{\psi}}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathcal{F}_{\varphi}\left(\frac{\xi}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2n}\right).$$

利用同构 应用平移傅里叶变换的对称性，再结合法图引理，我们得到 n

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\|H_\psi\varphi_n^{(y)}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} &= \liminf_{n\to\infty}\|\mathcal{F}^e_{H_\psi\varphi_n^{(y)}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}\\ &= e^y\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|m_{H_\psi}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|^2\left|\mathcal{F}_\varphi\left(\frac{\xi}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2n}\right)\right|^2 d\xi\\ &\geqslant e^y\int_{\mathbb{R}}\left|m_{H_\psi}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|^2\liminf_{n\to\infty}\left|\mathcal{F}_\varphi\left(\frac{\xi}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2n}\right)\right|^2 d\xi\\ &= \|\varphi\|^2_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}\left|m_{H_\psi}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|^2 d\xi=\infty.\end{aligned}\tag{5.10}$$

借助交织关系 $P_t[\psi]H_\psi = H_\psi e_t$ 以及 $e^{-te^{-y}}$ 是 e_t的近似特征值这一事实，可推得

$$\lim_{n\to\infty}\|P_t[\psi]H_\psi\varphi_n^{(y)} - e^{-te^{-y}}H_\psi\varphi_n^{(y)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} = 0.$$

因此，(5.10) 保证序列 $(H_\psi\varphi_n^{(y)})_{n\geqslant 1}$ 经归一化后，是 $P_t[\psi]$ 对应于近似特征值 $e^{-te^{-y}}$的近似特征函数。当$m_{H_\psi}(\cdot+\mathrm{i}\,2)^{-1}$ 有界时，我们有 $\widehat{P}_t[\psi]H_{\overline{\psi}} = H_{\overline{\psi}}e_t$。因此，按照之前相同的论证，我们有 $e^{t\mathbb{R}_-}\subseteq\sigma_{ap}(\widehat{P}_t[\psi])$。由于 $\sigma(P_t[\psi]) = \sigma(\widehat{P}_t[\psi])$，我们得出，对于所有 $t\geqslant 0$，$e^{t\mathbb{R}_-}\subseteq P_t[\psi]$。

对于条目 (4)，设 $\boldsymbol{P}_t[\boldsymbol{\psi}]$ 为自伴的，即 $\boldsymbol{\psi} = \overline{\boldsymbol{\psi}}$。那么，对于所有 $k = 1, 2\ldots, d$, $m_{H_{\psi_k}} = (\overline{m}_{H_{\psi_k}})^{-1}$，这意味着 H_{ψ_k} 是酉的。因此， $\boldsymbol{H_\psi}$ 也是酉的，因而， $\sigma(\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\psi}]) = \sigma_c(\boldsymbol{e}_t) = e^{t\mathbb{R}_-}$ 对于所有 $t\geqslant 0$。

5.7. 定理 2.9 的证明。在定理 4.1(4) 的证明中，我们已经看到，对于任意$\psi\in\mathbf{N}_+(\mathbb{R})$，$(A_{\mathtt{PDO}}[\psi], \Lambda_\psi(\mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$ 的闭包生成 $P[\psi]$，它是与 ψ 相关的对数自相似 Feller 半群的 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$-扩张。由对偶性， $P[\psi] = P[\overline{\psi}]$也对应于与 $\overline{\psi}$ 相关的对数自相似 Feller 半群。因此，对于任意$\psi\in\mathbf{N}_b(\mathbb{R})$ 和 $f\in\mathbf{C}_0(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)$，对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in\mathbb{R}$，我们有：

$$P_t[\psi]f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$$

其中 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是与 ψ 相关的对数自相似 Feller 过程。因此，条目 (1) 直接由张量化和相似变换得到。

条目 (2) 同样由命题 4.2(2) 得出，再结合张量化、相似变换以及命题 5.4。

6. Examples

6.1. 谱负自相似过程。 设 $\psi\in\mathbf{N}(\mathbb{R})$ 是一个保守谱负 Lévy 过程的 L´évy–Khintchine 指数，该过程具有非负均值，即 ´evy 过程的指数满足 $\psi(0) = 0$， $\psi'(0)\geqslant 0$ 且 $\mu(0,\infty) = 0$ 属于 (1.7)。注意，这意味着底层 Lévy 过程以及相应的自相似过程都没有正跳跃。在这种情况下， ´的 Wiener–Hopf 分解为 ψ 是

$$\psi(\xi) = -\mathrm{i}\xi\phi(\mathrm{i}\xi),\ \xi\in\mathbb{R},$$

其中 $\phi\in$ B 的 Lévy 测度具有一个绝对连续且非递增的密度。记 $m_{\Lambda_\psi}(z) = \Gamma_{(1+\mathrm{i}z)W_\phi(1+\mathrm{i}z)}$。根据伯恩斯坦-伽马函数的性质 ———

（这些性质在第 3.6 节中回顾过），显然 m_{Λ_ψ} 在条带 $\mathbb{S}_{[0,1)}$ 内解析；对于 $z \in \mathbb{S}_{(0,\infty)}$, $m_{\Lambda_\psi}(-\mathrm{i}z)$ 是一个正随机变量的梅林变换，该随机变量记为 I_ψ，其所有阶数严格大于 -1 的矩均有限，参见例如 [34] 及其中的参考文献。因此，$|m_{\Lambda_\psi}(\cdot+\mathrm{i}/2)|$ 在 $\mathbb{R}$上有界，且以 m_{Λ_ψ}为乘子的移位傅里叶乘子算子 Λ_ψ是有界算子，并属于 $\mathscr{M}$。此外，根据定理 4.1(5), $P_t[\psi]\Lambda_\psi = \Lambda_\psi Q_t$ 作用于 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$，其中 Q 为对数平方贝塞尔半群。在下一个引理中，我们将证明 Λ_ψ 是相对于某个概率测度的卷积核，这是 [38,Theorem 7.1] 的加法卷积类比。

命题 6.1. 若 $\psi(\xi) = -\mathrm{i}\xi\phi(\mathrm{i}\xi)$，$\xi \in \mathbb{R}$，则算子 $\Lambda^b_\psi \in \mathscr{B}(\mathbf{C}_b(\mathbb{R}))$ wher e

$$\Lambda^b_\psi f(x) = \mathbb{E}[f(x - \log I_\psi)] \tag{6.1}$$

有界，且

$$\Lambda^b_{\psi\,|\mathbf{C}_b(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} = \Lambda_{\psi\,|\mathbf{C}_b(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}.$$

特别地，Λ^b_ψ 将 $\mathbf{C}_0([-\infty,\infty))$ 映射到其自身。

证明。 我们定义 Λ^b_ψ在 $\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$ 如 (6.1) 中所示，其中 I_ψ满足对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}[e^{-\mathrm{i}\xi}$对数 $^{I_\psi}] = m_{\Lambda_\psi}(\xi)$。显然，$\Lambda^b_\psi$ 是有界的（相对于上确界拓扑）。现在，对任意 $f \in \mathbf{C}^\infty_c(\mathbb{R})$,

$$\Lambda^b_\psi f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{\Lambda_\psi}(\xi)\mathcal{F}_f(\xi)\,d\xi = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-\frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty-\frac{\mathrm{i}}{2}} m_{\Lambda_\psi}\left(z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathcal{F}^e_f(z)e^{\mathrm{i}zx}dz.$$

这意味着

$$\Lambda^b_{\psi\,|\mathbf{C}^\infty_c(\mathbb{R})} = \Lambda_{\psi\,|\mathbf{C}^\infty_c(\mathbb{R})}.$$

由 $\mathbf{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 中的稠密性，上述等式保证

$$\Lambda^b_{\psi\,|\mathbf{C}_b(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} = \Lambda_{\psi\,|\mathbf{C}_b(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}.$$

□

命题 6.2. 设 $\psi(\xi) = -\mathrm{i}\xi\phi(\mathrm{i}\xi)$，$\xi \in \mathbb{R}$，并定义

$$J_\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{W_\phi(n+1)}\frac{e^{nx}}{n!}. \tag{6.2}$$

则，J_ψ 是一个整函数，且 $J_\psi \in \mathbf{C}_0([-\infty,\infty))$. 此外，如果

$$\xi \mapsto m_{H_\psi}\left(\xi+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)}{W_\phi(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$$

则 $J_\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$，且 $\tau_{-y}J_\psi$ 是 $P_t[\psi]$ 的特征函数，对应的特征值为$e^{-te^{-y}}$.

注 6.3. (i) 我们指出，解析幂级数 $\mathcal{I}_\psi$ 定义如下

$$J_\psi(z) = \mathcal{I}_\psi(-e^z), z \in \mathbb{C},$$

是在[36] 中引入的，并且在 [3]中对这一类整函数进行了近期全面研究。在后者的参考文献中，给出了若干与著名特殊函数相关的此类幂级数实例。特别是，当$\psi(\xi) = \xi^2$时，J_ψ 归结为零阶贝塞尔函数。

(ii) 根据 [39, 命题 6.2], $\xi \mapsto \left|m_{H_\psi}(\xi + \mathrm{i}/2)\right| = \left|\Gamma(1/2 - \mathrm{i}\xi)\, W_\phi(1/2 + \mathrm{i}\xi)\right| \in L^2(\mathbb{R})$，只要 $\phi \in B_\mathfrak{d}^c$ 或 $\phi_+ \in B_\mathfrak{d}$ 且 $\frac{1}{\mathfrak{d}}(\phi(0) + \overline{\mu}(0)) > \frac{1}{2}$。特别是，当 $\mathfrak{d} > 0$ 且 $\overline{\mu}(0) = \infty$ 时，这一条件总是成立。不过，在证明中，除了假设 $\xi \mapsto \Gamma(1/2 - \mathrm{i}\xi)\, W_\phi(1/2 + \mathrm{i}\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ 外，我们不对 ϕ 作任何假设。

证明。由于 ϕ 是递增的，因此对所有 n，都有 $W_\phi(n+1) \geqslant \phi(1)^n$，从而定义 J_ψ 的级数对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都绝对收敛。现在，考虑函数

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{(n!)^2} = J_0\left(2e^{\frac{x}{2}}\right)$$

其中 J_0 是阶数为 0 的贝塞尔函数。众所周知，$J_0 \in C_0([0,\infty))$，这意味着 $J \in C_0([-\infty,\infty))$。此外，

$$\Lambda_\psi^b J(x) = \mathbb{E}[J(x - I_\psi)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} e^{n(x - I_\psi)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} e^{nx} \mathbb{E}[e^{-nI_\psi}],$$

由于右侧的级数绝对收敛，求和与取期望的次序交换是合理的。回忆 $\mathbb{E}[e^{-nI_\psi}] = {}^{n}!\, W_\phi({}_{n+1})$，可得 $J_\psi = \Lambda_\psi^b J$。由命题 6.1 可得 $J_\psi \in C_0([-\infty,\infty))$。现在，由定理 2.6 可知，当 $m_{H_\psi}(\cdot + \mathrm{i}\,2) \in L^2(\mathbb{R})$ 时，$P_t[\psi]$ 具有点谱；对应于特征值 $e^{-te^{-y}}$ 的特征函数为 $\tau_{-y} K_\psi$，其中 $K_\psi = \widehat{\mathcal{F}^e}(m_{H_\psi}(\cdot + \mathrm{i}\,2))$。证明的其余部分旨在证明 $K_\psi = J_\psi$。对每个 $\kappa > 1$，令 $\mathfrak{f}_\kappa(x) = \kappa e^{-\kappa x} e^{-e^{-\kappa x}}$。那么，$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{f}_\kappa(x)\, dx = 1$。由定理 2.6 的证明可知，$\bar{H}_\psi \mathfrak{f}_\kappa = K_\psi * \mathfrak{f}_\kappa$。另一方面，

$$\begin{aligned}
H_\psi \mathfrak{f}_\kappa(x) &= e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^e_{H_\psi \mathfrak{f}_\kappa}(\xi) e^{\mathrm{i}\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} m_{H_\psi}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) \mathcal{F}_{\mathfrak{f}_\kappa}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi)}{W_\phi(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi)} \mathcal{F}_{\mathfrak{f}_\kappa}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} e^{\mathrm{i}zx} \frac{\Gamma(-\mathrm{i}z)}{W_\phi(1 + \mathrm{i}z)} \Gamma\left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{\kappa}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} e^{\mathrm{i}zx} \frac{\pi \Gamma(1 + \frac{\mathrm{i}z}{\kappa})}{W_\phi(1 + \mathrm{i}z) \sin(-i\pi z) \Gamma(1 + \mathrm{i}z)}\, dz \\
&=: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} e^{\mathrm{i}zx} G_\kappa(z)\, dz.
\end{aligned}$$

为计算上述积分，我们固定 $B > 0$，其中 N 为正奇整数，并考虑由点 $-B + \mathrm{i}\,2$、$B + \mathrm{i}\,2$、$B - \mathrm{i}\,\frac{N}{2}$、$-B - \mathrm{i}\,\frac{N}{2}$ 构成且沿顺时针方向的矩形围道。该矩形内 G_κ 的极点为 $\{0, -\mathrm{i}, -2\mathrm{i}, \ldots, -\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \mathrm{i}\}$，其留数为 $(-1)^n \Gamma_{(1+\frac{n}{\kappa}) n! W_\phi(n+1)}$、$n = 0$、1、2、…、$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$。我们将围道积分拆分为以下四个

部分

$$I_B^{(1)}=\int_{-B+\frac{\mathrm{i}}{2}}^{B+\frac{\mathrm{i}}{2}}e^{\mathrm{i}zx}G_\kappa(z)\,dz,\ I_{B,N}^{(2)}=\int_{B-\mathrm{i}\frac{N}{2}}^{B+\frac{\mathrm{i}}{2}}e^{\mathrm{i}zx}G_\kappa(z)\,dz$$
$$I_{B,N}^{(3)}=\int_{-B-\mathrm{i}\frac{N}{2}}^{-B+\frac{\mathrm{i}}{2}}e^{\mathrm{i}zx}G_\kappa(z)\,dz,\ I_{B,N}^{(4)}=\int_{-B-\mathrm{i}\frac{N}{2}}^{B-\mathrm{i}\frac{N}{2}}e^{\mathrm{i}zx}G_\kappa(z)\,dz.$$

由于积分 $I_B^{(2)}{}_{,N}$ 和 $I_B^{(3)}{}_{,N}$ 相似，我们只需处理其中一个，例如 $I_{B\,N}^{(2)}{}_{,}$。对于任意固定的 N，我们注意到，当 B取较大值时，

$$\sup_{t\in[-\frac{N}{2},\frac{1}{2}]}\left|\frac{\Gamma(1-\frac{t}{\kappa}+\mathrm{i}\frac{B}{\kappa})}{W_\phi(1-t+\mathrm{i}B)\sin(\pi(t-\mathrm{i}B))\Gamma(1-t+\mathrm{i}\xi)}\right|\leqslant C_Ne^{-\frac{\pi}{2\kappa}|B|}.$$

因此，对于固定的 N, $I_B^{(2)}{}_{,N}\to 0, I_B^{(3)}{}_{,N}\to 0$，当 $B\to\infty$时。对于 $I_B^{(4)}{}_{,N}$，我们按如下方式进行。首先，我们注意到

$$\left|W_\phi\left(1+\frac{N}{2}+\mathrm{i}\xi\right)\right|\geqslant\left|W_\phi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi\right)\right|\phi(1)^{\frac{N}{2}}.$$

那么，对于任意奇自然数 N,

$$\begin{aligned}|I_{B,N}^{(4)}|&\leqslant\int_{-B}^{B}\frac{e^{\frac{Nx}{2}}\left|\Gamma(1+\frac{N}{2\kappa}+\frac{\mathrm{i}\xi}{\kappa})\right|}{|W_\phi(\frac{N}{2}+1+\mathrm{i}\xi)||\sin(-\frac{N\pi}{2}-\mathrm{i}\pi\xi)||\Gamma(1+\frac{N}{2}+\mathrm{i}\xi)|}\,d\xi\\&\leqslant e^{\frac{Nx}{2}}\phi(1)^{-\frac{N}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(1+\frac{N}{2\kappa}+\frac{\mathrm{i}\xi}{\kappa})}{W_\phi(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)\cosh(\pi\xi)\Gamma(1+\frac{N}{2}+\mathrm{i}\xi)}\right|d\xi \qquad (6.3)\\&\leqslant Ce^{\frac{Nx}{2}}\phi(1)^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{\kappa}-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{W_\phi(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)\cosh(\pi\xi)}\right|d\xi\to 0 \qquad (6.4)\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 由于 $\kappa>1$ 且（6.4）可由（6.3）通过斯特林近似得到。因此，$I_B^{(4)}{}_{,N}\to 0$ 当 $N\to\infty$ 时，在 B 上一致成立。最后，利用亚纯函数的留数定理，我们得出，对于所有 $x\in\mathbb{R}$,

$$H_\psi\mathfrak{f}_\kappa(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(1+\frac{n}{\kappa})}{n!W_\phi(n+1)}e^{nx}.$$

另一方面，很容易看出，对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\kappa>1$,

$$J_\psi*\mathfrak{f}_\kappa(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(1+\frac{n}{\kappa})}{W_\phi(n+1)n!}e^{nx}.$$

因此，对于所有的 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\kappa>1$, $K_\psi*\mathfrak{f}_\kappa(x)=J_\psi*\mathfrak{f}_\kappa(x)$。最后，我们将借助以下引理完成该命题的证明。□

引理 6.4. 若 $g\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R},e)$ 且 $h\in\mathrm{C}_b(\mathbb{R})$ 满足对所有 $\kappa>1$, $g*\mathfrak{f}_\kappa=h*\mathfrak{f}_\kappa$，则$g=h$ 几乎处处。

证明。我们首先回顾这样一个事实：对于任意 $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$，$\lim_{t\to 0} \|\tau_t g - g\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\, e)} = 0$ 且 $\|\tau_t g\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\, e)} = e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},\, e)}$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。现在，对任意 $\kappa > 1$, $g * \mathfrak{f}_\kappa \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, e)$ 且

$$\begin{aligned} \|g * \mathfrak{f}_\kappa - g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} &= \int_{\mathbb{R}} e^x \left(\int_{\mathbb{R}} (\tau_{-y} g(x) - g(x)) \mathfrak{f}_\kappa(y)\, dy \right)^2 dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} e^x \left(\int_{\mathbb{R}} (\tau_{-y} g(x) - g(x))^2 \mathfrak{f}_\kappa(y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-y} g - g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} \mathfrak{f}_\kappa(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-\frac{y}{\kappa}} g - g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} \mathfrak{f}_1(y)\, dy. \end{aligned} \tag{6.5}$$

接下来,

$$\int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-\frac{y}{\kappa}} g - g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}\, \mathfrak{f}_1(y)\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}} (1 + e^{\frac{y}{\kappa}}) \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)}\, \mathfrak{f}_1(y)\, dy = \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} \left(1 + \Gamma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\right)$$

且右端关于 κ有界。因此，应用控制收敛定理，当 $\kappa \to \infty$ 时可得,

$$\int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-\frac{y}{\kappa}} g - g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} \mathfrak{f}_1(y) dy \to 0.$$

由（6.5），可得 $\|g * \mathfrak{f}_\kappa - g\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R},e)} \to 0$ 当 $\kappa \to \infty$ 时。因此，存在一个正实数序列 (κ_n)，使得当 $n \to \infty$ 时，$\kappa_n \to \infty$ 满足 $g * \mathfrak{f}_{\kappa_n} \to g$ 几乎处处成立。另一方面，对于 $h \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R})$，由 h 的连续性和有界收敛定理，当 $\kappa \to \infty$ 时，$h * \mathfrak{f}_\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x - \frac{y}{\kappa}) \mathfrak{f}_1(y)\, dy \to h(x)$。因此，在恒等式 $g * \mathfrak{f}_{\kappa_n} = h * \mathfrak{f}_{\kappa_n}$ 中令 $n \to \infty$，引理得证。□

6.2. 具有双侧跳跃的自相似过程。

6.2.1. 实连续谱的非自伴半群示例。考虑 $\psi \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$，使得对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 和，$\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi)$

$$\phi_\pm(z) = m_\pm + \mathtt{d}_\pm z + \int_0^\infty (1 - e^{-zy}) \mu_\pm(dy), \quad z \in \mathbb{C}_{[0,\infty)},$$

其中 $m_\pm \geqslant 0$、$\mathtt{d}_\pm > 0$ 和 $\int_0^\infty (y \wedge 1) \mu_\pm(dy) < \infty$.。定义 $\mathfrak{m}_\pm = m_\pm + \overline{\mu}_\pm(0+)$。于是，我们有如下结果。

命题 6.5. 设 $\mathfrak{m}_\pm$、$\mathtt{d}_\pm$ 如上。令 $\overline{\nu}_\pm$ 表示测度 $e^{-ay}\mu_\pm(dy)$ 的尾函数。若 $\mathfrak{m}_\pm < \infty$、$\frac{\mathfrak{m}_+}{\mathtt{d}_+} = \frac{\mathfrak{m}_-}{\mathtt{d}_-}$ 且 $w \mapsto \int_0^\infty \cos(wy) \overline{\nu}_\pm(y)\, dy$ 属于 $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$，则 $P_t[\psi] \Lambda_\psi = \Lambda_\psi Q_t$，其中 Λ_ψ 可逆。因此，$\sigma(P_t[\psi]) = \sigma_c(P_t[\psi]) = e^{t\mathbb{R}_-}$。

备注 6.6。根据 Vigon 慈善理论 [48]，如果我们假设 $\mu_\pm$ 相对于勒贝格测度具有非递增的稠密性，ϕ_+ 且 ϕ_- 总是某个 L´évy-Khintchine 指数的 Wiener-Hopf 因子。

为证明命题6.5，我们先证明以下引理。

引理 6.7。设 $\phi \in \mathbf{B}$ 满足 $\mathfrak{m} = m + \overline{\mu}(0+) < \infty$，则

$$|W_\phi(a + \mathrm{i}\xi)| \asymp \sqrt{\phi(a)} W_\phi(a) e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|} |\xi|^{a + \frac{\mathfrak{m}}{\mathtt{d}} - \frac{1}{2}}, \quad \forall a > 0, \tag{6.6}$$

当且仅当 $w \mapsto \int_0^\infty \cos(wy) \overline{\nu}(y)\, dy \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$，其中 $\overline{\nu}$是测度 $e^{-ay}\mu(dy)$的尾函数

证明。 首先注意，由 [38, 定理 6.2(1)], 可知，对所有 $a>0$,

$$|W_\phi(a+\mathrm{i}\xi)| \asymp \frac{\sqrt{\phi(a)}W_\phi(a)}{\sqrt{\phi(a+\mathrm{i}\xi)}} e^{-|\xi|\Theta_\phi(a,|\xi|)} \quad \text{as } |\xi|\to\infty$$

其中

$$|\xi|\Theta_\phi(a,|\xi|) = \int_a^\infty \ln\left(\frac{|\phi(y+\mathrm{i}|\xi|)|}{\phi(y)}\right) dy$$

根据 [39, 定理 3.2], 的证明，可知其结果为

$$\Theta_\phi(a,|\xi|) = \int_0^{|\xi|} \arg(\phi(a+\mathrm{i}w))\, dw. \tag{6.7}$$

由于 $\mathtt{d}>0$, $|\phi(a+\mathrm{i}\xi)| \sim \mathtt{d}|\xi|$, 且 $|\xi|\to\infty$。因此，只需证明 $e^{-|\xi|\Theta_{\phi(a,|\xi|)}} \asymp |\xi|^{\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{d}}+a} e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}$。若 $z=a+\mathrm{i}w$，则

$$\phi(z) = z\left(\frac{\mathtt{m}}{z}+\mathtt{d}-\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zy}\mu(dy)\right) = zg(z).$$

现在，$\arg(g(z)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(g(z))}{g\ z}_{\mathrm{Re}(())}\right)$。我们注意到

$$\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w)) = \mathtt{d} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{w}\right) \tag{6.8}$$

$$\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w)) = -\frac{\mathtt{m}}{w^2+a^2} + \frac{w}{w^2+a^2}\int_0^\infty \sin(wy)e^{-ay}\mu(dy) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{w^2}\right). \tag{6.9}$$

由（6.8）和（6.9），可得

$$\frac{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))} = -\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{d}w} + \frac{\frac{w}{w^2+a^2}\int_0^\infty \sin(wy)e^{-ay}\mu(dy)}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{w^2}\right). \tag{6.10}$$

现在，我们来分析上述表达式中的第二项。利用分部积分（或者等价地，利用Fubini定理），我们得到

$$\frac{\frac{w}{w^2+a^2}\int_0^\infty \sin(wy)e^{-ay}\mu(dy)}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))} = \frac{\frac{w^2}{w^2+a^2}\int_0^\infty \cos(wy)\overline{\nu}(y)\,dy}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))}. \tag{6.11}$$

由于 $\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w)) = \mathtt{d}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{w}\right)$，(6.11) 右侧关于 w 可积，当且仅当函数 $w\mapsto\int_0^\infty \cos(wy)\overline{\nu}(y)\,dy$ 关于 w 可积。此外，我们注意到 $_{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}\ _{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))} \to 0$, 当 $w\to\infty$ 时，这意味着

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))}\right) - \frac{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))} = \mathrm{O}\left(\left|\frac{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}{\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w))}\right|^2\right). \tag{6.12}$$

由（6.10），不难看出 $\int_0^\infty \left|\frac{\mathrm{Im}(g(a+\mathrm{i}w))}{g\ a+\ w}_{\mathrm{Re}((\mathrm{i}))}\right|^2 dw < \infty$。因此，（6.11）和（6.12）可得

$$\int_0^{|\xi|} \arctan(g(a+\mathrm{i}w))\, dw = -\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{d}}\ln|\xi| + \mathrm{O}(1).$$

最后，$\lim_{w\to\infty}\mathrm{Re}(g(a+\mathrm{i}w)) = \mathfrak{d} = \lim_{w\to\infty} g(a+\mathrm{i}w) > 0$ 这意味着，当w取较大值时，$\arg(\phi(a+\mathrm{i}w)) = \arg(a+\mathrm{i}w) + \arg(g(a+\mathrm{i}w))$. 因此，

$$\begin{aligned}
|\xi|\Theta_\phi(a,|\xi|) &= \int_0^{|\xi|} \arg(\phi(a+\mathrm{i}w))\,dw \\
&= \int_0^{|\xi|} \arg(a+\mathrm{i}w)\,dw + \int_0^{|\xi|} \arg(g(a+\mathrm{i}w))\,dw + \mathrm{O}(1) \\
&= |\xi|\arctan\left(\frac{|\xi|}{a}\right) - \frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{\xi^2}{a^2}\right) - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{d}}\ln|\xi| + \mathrm{O}(1) \\
&= \frac{\pi}{2}|\xi| - a\ln|\xi| - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{d}}\ln|\xi| + \mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

于是，我们得出

$$e^{-|\xi|\Theta_\phi(a,|\xi|)} \asymp |\xi|^{a+\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{d}}} e^{-\frac{\pi}{2}|\xi|}$$

当且仅当 $w \mapsto \int_0^\infty \cos(wy)\overline{\nu}(y)\,dy$ 属于 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$。引理的证明至此完成。 □

现在回到命题 6.5 的证明。如果 ϕ_+ 和 ϕ_- 均满足该命题的条件，由估计式（6.6）容易看出，$\xi \mapsto \left|\begin{smallmatrix} W_{\phi_+} \\ W_{\phi_-}\end{smallmatrix}(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\xi)\,(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi)\right|$ 有界且有正的下界。因此，Λ_ψ 和 Λ_ψ^{-1} ~~均可逆，~~ 证明至此完成。

6.2.2. 另一个具有双侧跳跃的例子。考虑满足下列条件的 ϕ_+、ϕ_-

$$\phi_+(z) = \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}(1+z))}{\Gamma(\tilde{\alpha}z)} \quad \text{and} \quad \phi_-(z) = \frac{\Gamma(\rho+\alpha+\alpha z)}{\Gamma(\rho+\alpha z)}, \quad z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)},$$

其中 $\tilde{\alpha}$，$\alpha \in (0,\ 1)$ $\rho > 0$。根据 [24], 已知 ϕ_+，$\phi_- \in \mathbf{B}$ 和 L´evy 测度 ϕ_+ 以及 ϕ_- 均绝对连续，且具有非递增密度，即对于 $y > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu_+(dy) &= \frac{1}{\Gamma(1-\tilde{\alpha})}\frac{e^{\frac{y}{\alpha}}}{(e^{\frac{y}{\tilde{\alpha}}}-1)^{1+\tilde{\alpha}}}\,dy, \\
\mu_-(dy) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{e^{\frac{(1-\rho)y}{\alpha}}}{(e^{\frac{y}{\alpha}}-1)^{1+\alpha}}\,dy.
\end{aligned}$$

因此，根据 Vigon 的慈善理论 [48], ，存在一个 Lévy 过程，其 Lévy–Khintchine 指数为

$$\psi(\xi) = \phi_+(-\mathrm{i}\xi)\phi_-(\mathrm{i}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

显然，与 ϕ_- 和 ϕ_+ 对应的伯恩斯坦-伽马函数为

$$W_{\phi_+}(z) = \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}z)}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \text{ and } W_{\phi_-}(z) = \frac{\Gamma(\rho+\alpha z)}{\Gamma(\alpha+\rho)} \quad z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}.$$

利用伽马函数的斯特林公式，我们知道对于所有 $a > 0$ 以及足够大的 $|\xi|$,

$$|W_{\phi_+}(a+\mathrm{i}\xi)| \asymp |\xi|^{a\tilde{\alpha}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tilde{\alpha}\pi|\xi|}{2}} \text{ and } |W_{\phi_-}(a+\mathrm{i}\xi)| \asymp |\xi|^{a\alpha+\rho-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha\pi|\xi|}{2}}.$$

此外，根据上述估计以及 ϕ_+、ϕ_- 的定义，我们推得 $\psi \in \mathbf{N}_b(\mathbb{R})$，对于任意$\alpha$，$\tilde{\alpha} \in (0,1)$ $\rho > 0$。由定理 2.6，傅里叶算子 H_ψ的乘子由下式给出

$$m_{H_\psi}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{W_{\phi_+}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\xi)}{W_{\phi_-}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\xi)},$$

因此，在以下两种情况下，$\xi \mapsto m_{H_\psi}\left(\xi + \mathrm{i}\frac{}{2}\right) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$：当 $\tilde{\alpha} > \alpha$ 或当$\alpha = \tilde{\alpha}$，$\rho > \frac{1}{2}$。类似地，倒数函数

$$\xi \mapsto \frac{1}{m_{H_\psi}\left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$$

当 (i') $\tilde{\alpha} < \alpha$ 时。基于这些观察，我们得到以下结果 t.

命题 6.8. (i) 若 $\tilde{\alpha} > \alpha$，或者，$\alpha = \tilde{\alpha}$ 且 $\rho > \frac{1}{2}$，则 $e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_p(P_t[\psi])$，对应于特征值 $e^{-te^{-y}}$ 的特征函数由 $\tau_{-y}J_\psi$ 给出，其中

$$J_\psi(x) = \mathtt{W}\left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}, \alpha + \rho; -e^{\frac{x}{\tilde{\alpha}}}\right)$$

且 $\mathtt{W}(\gamma, \beta;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\gamma n + \beta)} \frac{z^n}{n!}$ 是赖特超几何函数；当 $\gamma > -1$ 时，它定义一个整函数。

(ii) 若 $\tilde{\alpha} < \alpha$，则 $e^{t\mathbb{R}_-} \subseteq \sigma_r(P_t[\psi])$，且对应于 $e^{-te^{-y}}$ 的余特征函数由 $\tau_{-y}J_{\overline{\psi}}$ 给出，其中

$$J_{\overline{\psi}}(x) = e^{\frac{\rho x}{\alpha}} \mathtt{W}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}, \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}\rho; -e^{\frac{x}{\alpha}}\right). \tag{6.13}$$

证明。证明仍将基于在适当围道上对乘子函数进行积分。假设条件 (i) 或 (ii) 成立，由定理 2.6 的证明可知

$$J_\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}} \widehat{\mathcal{F}}\left(m_{H_\psi}\left(\cdot + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)(x).$$

假设 $\tilde{\alpha} > \alpha$。那么，$m_{H_\psi}\left(\cdot + \mathrm{i}\frac{}{2}\right) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$。因此，由傅里叶反演可得

$$J_\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} \frac{\Gamma(-\mathrm{i}\tilde{\alpha}z)}{\Gamma(\rho + \alpha(1 + \mathrm{i}z))} e^{\mathrm{i}zx}\, dz := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} G(z) e^{\mathrm{i}zx}\, dz.$$

取顶点为 $-R$、R、$R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}$、$-R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}$ 的矩形围道，其中 N 是奇自然数，并将四条边上的积分定义为

$$I_R^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} G(z) e^{\mathrm{i}zx}\, dz, \quad I_{R,N}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{-R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}} G(z) e^{\mathrm{i}zx}\, dz$$

$$I_{R,N}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R}^{R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}} G(z) e^{\mathrm{i}zx}\, dz, \quad I_{R,N}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}}^{-R - \mathrm{i}\frac{N}{2\tilde{\alpha}}} G(z) e^{\mathrm{i}zx}\, dz.$$

注意到，函数 G在该矩形内的极点为 $\left\{0,\ -\mathrm{i}\tilde{\alpha},\ \ldots\ldots,\ -\mathrm{i}\frac{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{\tilde{\alpha}}\right\}$，其留数为$\frac{\tilde{\alpha}n}{\Gamma} \frac{1}{!(\frac{n\alpha}{\tilde{\alpha}} + \alpha + \rho)}$。仿照命题6.2 的证明，对于任意固定的 N，可以

证明 $I_R^{(2)}$，$_N$, $I_R^{(3)}$，$_N \to 0$ 当 $R \to \infty$。另一方面，经过变量代换，

$$\begin{aligned} I_{R,N}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{Nx}{2\alpha}} \int_{-R}^{R} \frac{\Gamma(-\frac{N}{2} - \mathrm{i}\tilde{\alpha}\xi)}{\Gamma(\rho + \alpha + \frac{N}{2} + \mathrm{i}\alpha\xi)} e^{\mathrm{i}\xi x}\, d\xi \\ &= \frac{e^{\frac{Nx}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \frac{\pi e^{\mathrm{i}\xi x}}{\cosh(\pi\tilde{\alpha}\xi)\Gamma(1 + \frac{N}{2} + \mathrm{i}\tilde{\alpha}\xi)\Gamma(\rho + \alpha + \frac{N\alpha}{2\tilde{\alpha}} + \mathrm{i}\alpha\xi)}\, d\xi. \end{aligned}$$

利用斯特林公式，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} \left|\Gamma\left(1 + \frac{N}{2} + \mathrm{i}\tilde{\alpha}\xi\right)\right| &\geqslant \frac{\Gamma(1 + \frac{N}{2})}{\cosh^{\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}\pi\xi)} \\ \left|\Gamma\left(\rho + \alpha + \frac{N\alpha}{2\tilde{\alpha}} + \mathrm{i}\alpha\xi\right)\right| &\geqslant \frac{\Gamma(1 + \frac{N\alpha}{2\tilde{\alpha}} + \alpha + \rho)}{\cosh^{\frac{1}{2}}(\alpha\pi\xi)} \end{aligned}$$

并且，接着

$$|I_{R,N}^{(4)}| \leqslant \frac{e^{\frac{Nx}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(1 + \frac{N}{2})\Gamma(\rho + \alpha + \frac{N\alpha}{2\tilde{\alpha}})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^{\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}\pi\xi)\cosh^{\frac{1}{2}}(\alpha\pi\xi)}{\cosh(\tilde{\alpha}\pi\xi)}\, d\xi.$$

当 $\tilde{\alpha} > \alpha$ 时，右侧的积分有限，因此，$I_R^{(4)}$，$_N \to 0$ 当 $N \to \infty$ 时，关于 R 一致成立。于是，利用柯西积分公式，有

$$J_\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\frac{n\alpha}{\tilde{\alpha}} + \alpha + \rho)} \frac{e^{\frac{nx}{\alpha}}}{n!}.$$

当 $\tilde{\alpha} = \alpha$ 且 $\rho > \frac{1}{2}$时，函数 $m_{H_\psi}\left(\cdot + \mathrm{i}\frac{}{2}\right) \notin \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ 对于 $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$。在这种情况下，我们可以采用命题 6.2证明中的相同思路，其中我们对一类核函数 $\{\mathfrak{f}_\kappa, \kappa > 1\}$ 进行卷积，并回顾如下事实（见（6.2），其中 $\phi_+(s) = s + \alpha + \rho$）：

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + \alpha + \rho)} \frac{e^{\frac{nx}{\alpha}}}{n!} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}),$$

我们可以得出结论：

$$J_\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + \alpha + \rho)} \frac{e^{\frac{nx}{\alpha}}}{n!}.$$

当 $\tilde{\alpha} < \alpha$，$\frac{1}{m_{H_\psi}}\left(\cdot + \mathrm{i}\frac{}{2}\right) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$，并由定理2.6的证明可得

$$J_{\overline{\psi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - \frac{\mathrm{i}}{2}}^{\infty + \frac{\mathrm{i}}{2}} \frac{\Gamma(\rho - i\alpha z)}{\Gamma(\tilde{\alpha}(1 + \mathrm{i}z))} e^{\mathrm{i}zx}\, dz.$$

函数 $z \mapsto {}^{\Gamma}{}_{(\rho - \mathrm{i}\alpha z)\Gamma(\tilde{\alpha}(1+\mathrm{i}z))}$的极点 $\{-\frac{n+\rho}{\alpha}\mathrm{i} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$，其留数为 $_{\alpha n\,\Gamma\,\tilde{\alpha}}{}^{1}{}_{!((1+\frac{n+\rho}{\alpha}))}$。沿用情形 $\tilde{\alpha} > \alpha$ 中的相同论证，并应用柯西留数定理，即可得到式（6.13）。□

References

[1] D. Applebaum，《莱维过程与随机微积分》。剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社，第2版，2009年。[2] D. Bakry、I. Gentil 和 M. Ledoux，《马尔可夫扩散算子的分析与几何》。第348卷，2013年。[3] C. Bartholm´e 和 P. Patie，关于一类整函数的图兰不等式与完全单调性，数学分析，47卷，第3期，507–527页，2021年。[4] J. Bertoin，《莱维过程》，第121卷。剑桥大学出版社，剑桥，1996年。[5] J. Bertoin，自相似马尔可夫过程的入口律与莱维过程的指数泛函，势分析，17卷，第4期，389–400页，2002年。[6] J. Bertoin，碎裂过程的渐近行为。《欧洲数学会杂志》，5卷：305–416页，2003年。[7] J. Bertoin 和 I. Kortchemski，正整数上马尔可夫链的自相似标度极限。《概率年刊》26卷，2556–2595页，2016年。[8] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels，《正则变差》，《数学及其应用百科全书》第27卷，剑桥大学出版社，剑桥，1987年。[9] M.E. Caballero 和 L. Chaumont，正自相似马尔可夫过程的弱收敛与莱维过程的超越量。《概率年刊》34卷，1012–1034页，2006年。[10]P. Cheridito、P. Patie、A. Vaidyanathan 和 A. Srapionyan，关于非局部遍历 Jacobi 半群：谱理论、趋于平衡与压缩性，《巴黎综合理工学院数学学报》，第8卷，331–378页，2021年。[11] M. Choi 和 P. Patie，无跳越马尔可夫链，《美国数学会汇刊》371(10)，7301–7342页，2019年。[12] M. Choi 和 P. Patie，通过相似轨道分析非可逆马尔可夫链，《组合学、概率与计算》29(4)：508–536页，2020年。[13] P. Courr`ege，《关于满足最大值原理的 C_k^∞ 在 c 上的算子的积分-微分形式》，Brelot-Choquet-Deny 讨论班：《势理论》，第10卷，第1期，1965–1966年。[14] N. Dunford 和 J. T. Schwartz，《线性算子》第三部分：谱算子，Interscience出版社，John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，1971年；William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写，《纯粹与应用数学》第VII卷。[15] E. B. Dynkin，《马尔可夫过程》第一、二卷，第122卷，由 J. Fabius、V. Greenberg、A. Maitra、G. Majone 在作者授权并协助下翻译。《数学科学基础》丛书第121卷。Academic Press Inc. 出版社，纽约；施普林格出版社，柏林-哥廷根-海德堡，1965年。[16] Yg.V. Egorov，关于伪微分算子的正则变换。《数学科学进展》25卷，235–236页，1969年。[17] K.-J. Engel、R. Nagel 和 S. Brendle，《线性演化方程的单参数半群》，第194卷。施普林格，2000年。[18] F. Hirsch 和 M. Yor，关于与次 subordinators 相关的永续随机变量及余项变量的梅林变换，《伯努利》第19卷，1350–1377页，2013年。[19] W. Hoh，生成马尔可夫过程的伪微分算子，授 habilitation 论文，比勒费尔德大学，1998年。[20] N. Jacob，《伪微分算子与马尔可夫过程》第1卷：傅里叶分析与半群，第1卷，帝国理工学院出版社，2001年。[21] M. Jacobsen 和 M. Yor，$\mathbb{R}_+^n$ 上的多重自相似马尔可夫过程及其兰佩蒂表示。《概率论及相关领域》126卷，第1期，1–28页，2003年。[22] T. Juszczyszyn 和 M. Kwa´snicki，具有完全单调跳跃的对称莱维过程的点首次到达时，《电子概率学杂志》20卷，2015年。[23] A. Kuznetsov 和 M. Kwa´snicki，正半轴上稳定过程的谱分析，《电子概率学杂志》23卷，2018年。[24] A. Kuznetsov 和 J.C. Pardo，稳定过程的涨落与超几何莱维过程的指数泛函，《应用数学学报》123卷，2013年。[25] M. Kwasnicki，半直线上从属布朗运动的谱分析。《数学研究》206(3)：211–271页，2011年。[26] M. Kwasnicki，具有完全单调跳跃的莱维过程的上确界：谱理论方法，arXiv:2212.11390，2022年。

[27] A. E. Kyprianou, 《带应用的 Lévy 过程涨落：入门讲座》。施普林格科学与商业媒体，2014 年。[28] J. Lamperti, 《半稳定马尔可夫过程 I》，《概率论及相关领域杂志》，第 22 卷，第 205–225 页，1972 年 9 月。[29] L. Miclo 和 P. Patie, 《论交织关系》，《函数分析杂志》280，第 3 期，53 页，2021 年。[30] L. Miclo、P. Patie 和 R. Sarkar, 《离散自相似遍历马尔可夫链》，《概率年刊》，第 6 期，第 2085–2132 页，2022 年。[31]M. Minchev 和 M. Savov, 《从属过程指数泛函密度的渐近性质》，https://arxiv.org/abs/2104.05381v2，2021 年。[32] J. Mucha, 《一维（非对称）稳定过程在击中原点时被杀死的谱理论》，《电子概率学杂志》26，1–33，2021 年。[33] B. Muckenhoupt 和 E. M. Stein, 《经典展开及其与共轭调和函数的关系》，《美国数学会汇刊》118：17–92，1965 年。[34] P. Patie, 《指数分布的精细因子分解》，《伯努利》17(2)：814–826，2011 年。[35] P. Patie, 《某些正自相似马尔可夫过程吸收时间的分布》，《概率年刊》40，第 2 期，第 765–787 页，2012 年。[36] P. Patie, 《某些半稳定积分微分方程解的无限可分性与 Lévy 过程的指数泛函》，《亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊》45(3)，667–684，2009 年。[37] P. Patie 和 M. Savov, 《非自伴高斯–拉盖尔半群的柯西问题与广义拉盖尔多项式的一致有界性》，《谱理论杂志》7(3)：797–846，2017 年。[38] P. Patie 和 M. Savov, 《非自伴广义拉盖尔半群的谱展开》，《美国数学会回忆录》272，第 1336 号，vii 页，2021 年。[39] P. Patie 和 M. Savov, 《伯恩斯坦-伽马函数与 Lévy 过程的指数泛函》，《电子概率学杂志》第 23 卷，第 101 页，2018 年。[40] P. Patie、M. Savov 和 Y. Zhao, 《非自伴马尔可夫半群的交织、游程理论与弦的克雷因理论》，《概率年刊》47(5)：3231–3277，2019 年。[41] P. Patie 和 T. Simon, 《某些分数阶导数的交织》，《势分析》36：569–587，2012 年。[42] P. Patie 和 A. Vaidyanathan, 《将亚强制性应用于某些退化亚椭圆及非局部算子的谱理论方法》，《动力学及相关模型》13(3)：479–506，2020 年。[43] P. Patie 和 Y. Zhao, 《分数阶算子的谱分解与反射稳定半群》，《微分方程杂志》第 262 卷，第 3 期，第 1690–1719 页，2017 年。[44] A. Pazy, 《生成与表示》，第 1–41 页。纽约州纽约：施普林格纽约，1983 年。[45] R. L. Schilling、R. Song 和 Z. Vondraˇcek, 《伯恩斯坦函数》，德格鲁伊特数学研究丛书第 37 卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2010 年。[46] M. A. Shubin, 《伪微分算子与谱理论》。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，300 页，2001 年。[47] J. Sjostrand, 《非自伴微分算子、谱渐近与随机扰动》，《伪微分算子理论与应用》第 14 卷，Birkhäuser，2019 年。[48] V. Vigon, 《通过撩拨 Wiener–Hopf 因子分解来简化 Lévy 过程》，博士论文，2002 年。

School of Operations Research and Information Engineering, Cornell University, Ithaca,NY 14853, USA.电子邮箱：pp396@cornell.edu

Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, CT 06269, USA.电子邮箱：rohan.sarkar@uconn.edu