低维中的反射结构与自旋统计

Lukas M¨uller [a] 和Luuk Stehouwer [b]

[a] 周界理论物理研究所，
31 Caroline Street North，
N2L2Y5，滑铁卢

[b]马克斯·普朗克数学研究所，
Vivatsgasse 7，53111 波恩

arXiv:2301.06664v1 [math-ph] 17 Jan 2023

摘要

我们完整地分类了一维和二维时空维数中具有反射结构和自旋-统计的拓扑场论。我们的结果可以自然地用内部费米子对称群 G 来表述，该群不同于时空结构群。费米子群编码含有费米子的系统的对称性以及时间反演对称性。我们证明，具有反射结构和自旋-统计的一维拓扑场论由 G 的有限维厄米表示分类。在二维时空维数中，我们给出了按强 G-分次星形 Frobenius 代数进行的分类。我们的证明基于配边假设。在此过程中，我们还发展了一些有用的工具，用于计算双范畴上的 2-群作用的同伦不动点。

目录

1 引言 **2**
1.1 有能隙晶格系统与拓扑场论.3 1.2 反射结构与自旋统计.4 1.3 主要结果.5 1.4 配边假设与主要结果证明的一般结构.6 1.5 展望.7

2 拓扑场论 **10**
2.1 定义回顾.11 2.2 配边假设.13 2.3 2维配边假设的图示解释.16

3 费米子群 **19**
3.1 作为内部对称性的费米子群.20 3.2 费米子群的表示.23 3.3 时空结构群.25 3.4 费米子群的2-群模型.26 3.5 费米子分次代数.31

4 非扩展拓扑场论的自旋统计与反射结构 **34**
4.1 定义的物理动机.35 4.2 配边范畴上的 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用.36 4.3 一维分类.37

5 一旦扩展场论 **40**

5.1 扩展拓扑场论的自旋-统计与反射结构.41 5.2 星形代数.42 5.3 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$ 不动点与星形弗罗贝尼乌斯代数.48 5.4 计算具有自旋-统计和反射结构的二维拓扑场论.57 5.5 示例与计算.66 5.6 其他一些类型的二维拓扑场论的分类.72

A 2-群及其在双范畴上的作用ies 74
A.1 2-群.74 A.2 作用与同伦不动点.77 A.3 2-群的正合列与半直积.84

B 对称幺半双范畴中的对偶可对偶性 96
B.1 对偶与伴随.97 B.2 Serre 自同构.100 B.3 O_2 对完全可对偶对象的作用.101

C 超代数 104
C.1 关于$\rtimes B\mathbb{Z}_2^F$在超向量空间上的作用.104 C.2 基本定义与超代数双范畴.107 C.3 $*$-代数.110 C.4 超代数上的 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$作用.112 C.5 sAlg中的对偶可对偶性.114 C.6 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F \rtimes \mathrm{O}_2$在$\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的作用.119 C.7 超代数双范畴上的诱导作用.119

1 引言

函子性场论是研究量子场论的一种严谨方法。它最广为人知的形式是 Atiyah 对拓扑场论的定义 [Ati88], 也正是从这一形式发展而来。传统框架并未涵盖反射正性（幺正性的欧几里得版本），也未涉及粒子的自旋与统计之间的联系。反射结构[1] 和自旋-统计关系，都可以理解为场论满足某种等变条件 [JF17, FH21] ，分别对应于 $\mathbb{Z}_2$ 和 $B\mathbb{Z}_2$ 作用。

在拓扑场论领域，大多数数学上的分类结果和构造都没有考虑这些额外的等变条件。一个重要的例外是 Freed 和 Hopkins 的开创性工作 [FH21] ，他们利用同伦论工具对完全扩展的反射正可逆理论进行了分类。不过，据我们所知，还没有工作详细研究不可逆理论。例如，目前还没有针对扩展场论的正性定义。本文详细研究并分类了一维和二维时空维度中具有反射结构和自旋统计的拓扑场论。尽管我们不会解决一般情况下如何定义反射正性这一问题，但希望我们的结果能为如何定义扩展的不可逆场论中的反射正性提供一些启示。Freed 和 Hopkins 的工作中一个（在数学上）令人惊讶之处在于，施加反射正性条件会大大简化计算。我们的工作中也有类似情况：通过考察具有反射结构和/或自旋统计联系的拓扑场论，我们能够得到以具体代数结构表述的分类。

鉴于本文篇幅较长，且有时涉及较多技术细节，我们将在引言中对研究结果作详细而全面的总结。首先，我们简要谈谈本文与凝聚态物理的联系，以及这一联系如何在一定程度上激发了我们的研究。

[1]我们稍后会讨论正定性。

1.1 有能隙的晶格系统与拓扑场论

一个对称性富化拓扑物态 [Kit09, GW09, KTTW15, FH21, GJF19] ，粗略来说，是一类有能隙晶格哈密顿量的等价类；这些哈密顿量可以连续变形为彼此，同时不破坏对称性，也不使能隙闭合。研究这类物态的一个有用工具是描述其基态的低能有效场论；在许多情况下，这种场论具有拓扑性质。猜想认为，有效低能场论是拓扑相的完备不变量 [Kap14, KTTW15, KT17, FH21]。拓扑量子场论在数学上已有相当深入的理解，因此原则上可以对可能的拓扑物态进行明确分类，并据此作出预测。对称性保护拓扑相中一个有趣的类别是所谓的短程纠缠拓扑相。其特点是低能有效场论可逆。酉的，即反射正的可逆拓扑场论，可用配边不变量来分类 [Yon19, FH21]。非可逆情形则远未得到同样深入的理解。

在进一步详细说明晶格系统的对称性如何在低能有效场论中实现之前，我们先粗略介绍本文所采用的拓扑场论的数学定义。更多细节见第2节。该定义可追溯至 Atiyah [Ati88], ，但自最初提出以来已发生了显著演变。根据所考虑的时空流形类型，定义有多种形式。例如，在涉及费米子的理论中，所有流形都应配备自旋结构。本文涉及的所有相关结构都可以用切向结构来表述（详情见第2节）。要为 d 维流形指定一种切向结构，必须固定一个李群 H ，以及一个实表示 $\rho\colon H \longrightarrow O_d$。 d 维流形 M 上的切向结构由一个主H-丛 P 及一个向量丛同构 $P \times_\rho \mathbb{R}^d \cong TM$ 构成。例如，对于映射 $\mathrm{Spin}_d \longrightarrow \mathrm{SO}_d \longrightarrow O_d$ ，切向结构就是 M 上的自旋结构。

拓扑场论（取值于超向量空间）将每个配备切向结构的闭 $d-1$维流形 Σ 映射为一个超向量空间 $\mathcal{Z}(\Sigma)$；该理论的态空间按费米子宇称分级。此外， $\mathcal{Z}$ 将每个配备切向结构的配边（即带边界 $\partial M \cong \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$的紧流形 M ）映射为一个线性映射 $\mathcal{Z}(M)\colon \mathcal{Z}(\Sigma_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(\Sigma_2)$。沿公共边界粘合两个流形所对应的线性映射，必须等于各部分对应线性映射的复合。通常还会对这些数据施加一些其他条件，而使用对称幺半范畴的语言可以方便地将其编码：令 $\mathrm{Bord}^{H,\rho}_d$ 为对称幺半范畴，其对象是配备切向 H 结构的闭 $d-1$维流形，态射是配边。幺半结构由流形的不交并给出。一个 d维拓扑场论 现在是一个对称幺半函子

$$\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}^{H,\rho}_d \longrightarrow \mathsf{sVect} \quad .$$

为充分体现局域性，通常还允许将 $d-1$ 维流形切分为更小的部分，从而得到一个对称幺半 d 范畴 $\mathrm{Bord}^{H,\rho,0}_d$ [Lur09, CS19]。取值于对称幺半 d 范畴 $\mathcal{S}$ 的完全局域拓扑场论，是一个对称幺半函子 $\mathrm{Bord}^{H,\rho,0}_d \longrightarrow \mathcal{S}$。对我们而言，只有 $d=2$ 的情形以及以超代数、双模和交织算子构成的目标双范畴 sAlg 才相关。我们将在第2节和附录 C 中更详细地解释这些内容。在本引言余下部分，无需详细理解这些概念。

经过这段简短的迂回之后，我们回到格点系统的对称性。这些对称性由与每个格点相关联的希尔伯特空间上的自同构给出，并且这些自同构与系统的哈密顿量对易。在含有费米子的理论中， -1 费米子数的奇偶性始终是系统的一种非平凡对称性，记作 $(-1)^F$。此外，我们还区分酉（保时）对称性和反幺正（反时）对称性。我们将这种局域对称群称为格点系统的内对称群 G 。将格点系统中局域对称性的结构抽象出来，便得到费米子群 的定义：它是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次李群 $G = G_0 \sqcup G_1$ ，并带有一个偶

中心元 $(-1)^F \in G_0$ ，其平方为 1。我们将在第 3 节详细讨论费米子群。

由于内部对称性是局域的，低能有效场论应当能够定义在带有内部对称性背景场的流形上。这里，时间反演对称性和费米子宇称需要与局域时空对称性适当地结合起来。这意味着，低能有效拓扑场论定义的并非带有切向 G 结构的流形，而是带有与 G相关联的时空结构群 H_d 的切向结构的流形。我们将在第3.3节详细说明如何从费米子群 G 构造 H_d 。现在，先来看几个说明性示例：

- 如果内部对称群是平凡的，那么相应的时空结构群就是 SO_d。因此，低能有效理论可以定义在定向流形上。
- 如果理论包含费米子，但没有其他内部对称性，那么内部对称群是 $\mathbb{Z}_2^F = \{1, (-1)^F\}$，时空结构群则是 Spin_d。因此，低能有效理论定义在自旋流形上。
- 在存在一个反时对称性 T ，其平方为 $(-1)^F$ 的情况下，时空结构群为 Pin_d^+ 。

由幺正晶格系统产生的理论有一个重要特征：人们预期它们是反射正的，并满足某种形式的自旋统计关系。对于具有任意切向结构的拓扑场论，这两个概念都没有良定义；但可以针对由内部对称群 G构造的结构群来表述。

1.2 反射结构与自旋统计

按照构造，与内部对称群 G 关联的时空结构群 H_d 属于一个短正合列

$$1 \longrightarrow H_d \longrightarrow \widehat{H}_d \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

，其元素均为李群。该正合列可用于在 H_d-结构流形上定义一个对合 $(\cdot)$，使之推广定向反转。其构造大致如下（详情请参阅第4.2节）：由主 H_d丛 P 可构造一个伴随 H_d丛 P，其中包含 P 作为一个自然的子流形。我们可以如下构造一个新的主 H_d丛： $P \coloneqq P \setminus P$。此外，映射$P \times_\rho \mathbb{R}^d \cong TM$ 由旧的映射和在 $\mathbb{R}^d$ 中选定的一个反射构造而成（我们选择沿 $(e_1 = 0)$-平面的反射）。对合 $(\cdot)$产生一个在 $\mathrm{Bord}_d^{H_d,\rho}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$作用，从而推广 $H = SO_d$的定向反转作用。

场论上的反射结构要求“定向反转”对应于复共轭。从数学上说，带有反射结构的拓扑场论定义为一个 $\mathbb{Z}_2$-等变函子 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}_d^{H_d,\rho} \longrightarrow \mathrm{sVect}$，它相对于 $\mathrm{Bord}_d^{H_d,\rho}$ 上的定向反转作用以及 sVect [FH21]上的复共轭作用而言。请注意，等变性是一种结构，而不是一种性质。根据定义，每个对象上的态空间都配备了一个厄米内积 [FH21]。如果所有这些内积都是正定的，这种反射结构就称为**正定** 。

自旋统计关系断言，粒子在元素 $c = (-1) \in \mathrm{Spin}_d$ 作用下的变换决定了它的统计性质：它对玻色粒子表现为恒等作用，对费米粒子则表现为乘以–1。粒子的类型由超向量空间的分次编码：对于超向量空间 $V = V_0 \oplus V_1$ ，我们将 V_0 中的元素视为玻色粒子，将 V_1 中的元素视为费米粒子。自旋统计联系现在要求 c 通过分次算子 $(-1)^F_V$作用于空间 V。 c 的作用为每个对象 $\Sigma \in \mathrm{Bord}_d^{\mathrm{Spin}_d}$定义了一个自同构 c_Σ 。拓扑场论 $\mathcal{Z}$ **满足自旋统计关系** [JF17] ，当且仅当 $\mathcal{Z}(c_\Sigma) = (-1)^F_{\mathcal{Z}(\Sigma)}$。若要将此定义推广到由内对称群 G构造的一般时空结构群 H_d ，只需

将 $c \in \mathrm{Spin}_d$ 替换为类似的元素 $c \in H_d$。其定义见第3.3节。我们可以将此定义改写为更接近反射结构定义的形式：为此注意，$(-1)^{\frac{F}{2}}$ 在 sVect 上诱导出一个从恒等函子到自身的自然变换，因此也诱导出 2- 群 $B\mathbb{Z}_2$ 在 sVect 上的作用。类似地，施加 c 的作用会在 $\mathrm{Bord}^{H_d,\rho}_d$ 上诱导出 $B\mathbb{Z}_2$ 的作用。自旋统计关系等价于 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}^{H_d,\rho}_d \longrightarrow \mathrm{sVect}$ 是 $B\mathbb{Z}_2$-等变的。

编码自旋统计的 $B\mathbb{Z}_2$-作用与编码反射结构的 $\mathbb{Z}_2$-作用结合为 $\mathrm{Bord}^{H_d,\rho}_d$ 上的 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-作用。该作用可扩展到完全局部配边范畴 $\mathrm{Bord}^{H_d,\rho}_{d,0}$，（正如我们在第4.2节中所解释的，这由配边假设推出）。此外，sVect 上的 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-作用诱导出对称幺半双范畴 sAlg 上的 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-作用（见附录 C）。因此，我们可以将具有反射结构和自旋统计联系的扩展场论定义为 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-等变函子。本文关注低维情形下此类场论的分类与研究。我们将在下一节总结所得结果。

1.3 主要结果

我们的主要结果是，对时空维数为 1 和 2 的任意内部对称群 G，分类 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-等变函子。我们工作的一个令人惊讶的结果是：对于 d 等于 1 和 2，具有结构群 H_d、反射结构和自旋统计、并与内部对称群 G 相关联的拓扑场论，可以用 G 而不是 H_d 来得到良好的描述。

为了更好地理解我们的结果，我们首先描述不带额外结构的一维场论的分类。在一维中，$\mathrm{O}_1 = \mathbb{Z}_2$，因此切向结构由李群同态 $\rho\colon H_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 确定。分类只取决于离散群映射$\pi_0(\rho)\colon \pi_0(H_1) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$，因此从现在起我们假设（不失一般性）$G$，从而$H_1$ 是离散的。一维拓扑场论 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}^{H_1,\rho}_1 \longrightarrow \mathrm{sVect}$ 完全由一个有限维超向量空间 V（即 $\mathcal{Z}$ 在一点上的取值）、$(H_1)_{\mathrm{ev}} = \rho^{-1}(0)$ 的偶部的一个表示，以及一个双线性型 ${}_h\langle -,-\rangle\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$（对 H_1 的所有奇元素均成立）所描述，并满足一些并不太有启发性的关系（见命题 2.7）。

在凝聚态物质领域，这应当对应于一个具有内部 G对称性的零维晶格系统。这类系统通常由一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$、一个哈密顿量H以及 G 的一个作用来描述，其中偶元素以酉方式作用，奇元素以反酉方式作用。我们可以将希尔伯特空间的条件放宽为厄米向量空间，从而也能描述非酉系统[2]。有能隙系统的低能有效拓扑场论现在应由 H的基态描述，而该基态仍带有 G的作用。我们可以在以下定义中抽象出这种作用的结构：厄米超向量空间V上的幺正费米子表示是指 V上 G 的一个表示，其中偶元素通过酉映射 $\rho(g)\colon V \longrightarrow V$作用，奇元素通过 $\mathbb{C}$-反酉映射 $\rho(g)\colon V \longrightarrow V$作用，并且 $\rho(c) = (-1)^F_V$。然而，乍看之下，这与描述 H_1-拓扑场论的数据大不相同。

当考虑具有反射结构和自旋统计联系的理论时，这种不匹配便完全消失。我们在第 4.3 节证明以下分类结果：

命题 1.1 (命题 4.10)**.** 设 G 是一个费米子群。具有内对称群 G 的一维反射与自旋统计场论所成的群胚，等价于费米子群 $\pi_0(G)$ 的酉费米子表示范畴的核心。

我们再次强调，这些是 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$ 等变函子 $\mathrm{Bord}^{H_1,\rho}_1 \longrightarrow \mathrm{sVect}$。我们将在引言的下一部分讨论证明。这个分类结果在数学和物理视角上都令人满意。从数学上说，我们的结果颇具吸引力，因为它描述了

[2]非厄米 具有非自伴哈密顿量的系统也已在凝聚态 ed 物质 ，但不会 此处不予考虑。

一维场论如何以费米子群表示这一自然概念来刻画；相比之下，用一组双线性内积来分类则略显繁琐。从物理上说，这个结果颇具吸引力，因为它恰好得出了通过考察零维格点系统所预期的答案。

第 5 节研究取值于超代数、具有反射结构和自旋统计联系的完全扩张二维拓扑场论的分类。这些场论是 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-等变对称幺半函子

$$\mathcal{Z}\colon \mathsf{Bord}_{2,0}^{H_2} \longrightarrow \mathsf{sAlg}$$

定义在对称幺半双范畴之间。我们将分类结果表述为定理 5.30。这里不完整陈述该结果，而只指出我们所发现的结构。与一维情形类似，答案只取决于与 G 对应的低维同伦数据。更具体地说，它只取决于基本群胚 $\Pi_1(G)$。这是一个费米子 2-群。我们将在第 3.4 节中对其作更详细的定义。粗略地说，它是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次幺半群胚（G，$\otimes$，1，α），带有一个平方为 1 的典范中心元 $c \in G$。我们用 θ 表示该分次。为便于介绍，我们假设结合子 α 以及正式定义中涉及的其他一些相干同构都是平凡的。对于任意费米子 2-群 G，一个 G分次代数由以下数据构成

- 一个复超向量空间 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} A_g$
- 带有实数域上的 G-分次超代数结构，使得 $a_g \cdot i = (-1)^{\theta(g)} i a_g$ 对所有 $a_g \in A_g$均成立
- 对于 G 中的每个态射 $\gamma\colon g \longrightarrow g'$，都有一个同构 $^{a}\gamma\colon A_g \longrightarrow A_{g'}$

它必须满足一系列自然条件。特别地，要求分量 A_c 由一个对象 $(-1)^F$ 作为 A_e-模生成，该对象的平方为 1，且满足 $(-1)^F a_g = (-1)^{|a_g|} a_g (-1)^F$。详情将在第 3.5 节讨论。 G-分次代数若满足乘法诱导出同构 $A_g \otimes_{A_e} A'_g \longrightarrow A_{gg'}$，则称为 G-分次代数。我们的主要结果根据带有结构群 H_2 的二维反射与自旋统计拓扑场论，对强 G-分次 Frobenius 代数进行分类；这些代数还附带一种厄米配对的推广，称为星代数结构。粗略地说，它们是 $*$-代数的 Morita 不变版本。它们最初在线性框架 [SP09], 中引入，而我们采用这一概念的 $\mathbb{C}$-反线性版本。更多详情请参阅第 5.2 节。现在，我们的主定理表述如下

定理 1.2 (定理 5.30)。 设 G 为一个费米子群。具有内部对称群 G 的二维反射与自旋统计场论所构成的 2- 群胚，等价于强 $\Pi_1(G)$ 分次星形弗罗贝尼乌斯代数双范畴的核心。

1.4 配边假设与主要结果证明的一般结构

1维和2维情形的证明遵循相同的思路，并以配边假设 [BD95, Lur09] 为基础。配边假设给出了具有任意目标和切向结构的拓扑场论的分类结果。我们将在第2节回顾其具体陈述；粗略地说，它将目标为 $\mathcal{S}$ 的完全扩张的 d 维框架场论，与 d 中二重可对偶化对象 $\mathcal{S}^{\mathrm{f.d.}}$ 所构成的满子群胚对应起来。这意味着 $\mathcal{S}^{\mathrm{f.d.}}$ 上存在一个 O_d 作用，而具有切向结构 $H \longrightarrow \mathsf{O}_d$ 的拓扑场论，则由所诱导的 H 作用的不动点进行分类。当且仅当超代数有限维且半单时，它才是二重可对偶化的。我们将在附录 C.5 中详细描述 O_2 作用。

我们的主定理的证明按以下步骤进行

- 我们利用配边假设，将 H_2-拓扑场论与同伦 H_2 不动点 H_2-TFT $\cong (\mathrm{sAlg}_{\mathrm{f.d.}})^{H_2}$ 的范畴对应起来。$\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-等变函子可以识别为函子范畴 $\mathrm{Bord}_2^{H_2,0} \longrightarrow \mathrm{sAlg}$ 上 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$ 的共轭作用所对应的同伦不动点。这意味着我们要计算同伦不动点双范畴 $(H_2\text{-TFT})^{\mathbb{Z}_2\times B\mathbb{Z}_2} \cong ((\mathrm{sAlg}_{\mathrm{f.d.}})^{H_2})^{\mathbb{Z}_2\times B\mathbb{Z}_2}$。

- 由于我们研究双范畴和紧李群，因此可以用 2-群的作用替代拓扑群的作用。在附录 A 中，我们汇集了一些关于 2-群的细节。特别地，我们证明，迭代同伦不动点 $(H_2\text{-拓扑场论})^{\mathbb{Z}_2\times B\mathbb{Z}_2} \cong ((\mathrm{sAlg}^{f.d.})^{H_2})^{\mathbb{Z}_2\times B\mathbb{Z}_2}$ 等价于 2-群 $H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2)$ 作用下的不动点；该 2-群由 2-群的扭曲半直积构造而成，并位于一个 2-群的短正合列中

$$1 \longrightarrow H_2 \longrightarrow H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \quad .$$

- 2-群 $H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2)$ 与 $O_2 \times G_b$ 非平凡同构。这意味着，如果我们要计算 $H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2)$ 的不动点，也可以先计算 O_2 的不动点，再计算其中的 G_b-不动点。这里需要注意， O_2 作用不同于配边假设中出现的作用。

- 在第5.3节中，我们将 $\mathrm{sAlg}_{\mathrm{f}}$ 中 O_2-不动点构成的双范畴 与（反线性）星代数构成的双群胚对应起来。 .d.

- 在定 理 5.26 中，我们证明了由此诱导的星代数上的 G_b-作用具有简单的形式。

- 在定理 5.30 中，我们计算了此 G_b-作用的不动点，从而完成了分类的证明。

一维证明基本遵循相同的推理思路，但是在 1-范畴的层面上进行。这显著降低了技术难度。我们在第 4.3 节给出这个 1-范畴证明。

我们的结果依赖于配边假设，但目前尚无完整的已发表证明（不过可参见预印本 [GP21]）。配边假设已在维数 1 [Har12] 中得到证明。因此，我们所有的一维结果都是定理。在双范畴二维情形中，配边假设已针对许多切向结构得到证明，包括框架 [Pst22],、定向 [SP09]、 $G \times \mathrm{SO}_2$-结构 [Soz19] 以及 r-自旋结构 [CS21]。我们解决这一问题的方法，是通过配边假设所赋予的泛性质来定义双范畴 $\mathrm{Bord}_2^{H_2,\,0}$。因此，对于本文所考察的配边双范畴，配边假设是按构造成立的。然而，代价是，除上述情形外，若不证明配边假设，我们就无法确定本文所用的配边范畴是否与 [SP09, CS19] 中构造的范畴一致。

1.5 展望

我们以对本研究可能的扩张及其影响的一些推测作为引言的结尾。

关于扩展反射正性的评论

Freed 和 Hopkins [FH21] 的工作仅为非扩展场论和完全扩展的可逆场论定义了反射正性。如何将定义扩展到扩展的不可逆理论，是一个有趣的问题。我们的工作对一次扩展场论提出了如下答案：我们的工作应当意味着，任何带有反射结构、定义在 $d-2$ 维流形 S 上的一次扩展拓扑场论 $\mathcal{Z}$: $\mathrm{Bord}_d^{H_d,\,d-2} \longrightarrow \mathrm{sAlg}$，其取值在规范意义下都是星代数（这应当可以通过维数约化得出）。有限维 C^*-代数是星代数的一种来源。我们建议将给定星代数 A 上的正性结构 定义为

与某个固定 C^*-代数所导出的星代数之间的同构。此外， $\mathcal{Z}$ 赋给协边的双模具有星双模的结构。在与 C^*-代数的识别下，这些星双模带有取值于 C^*-代数的厄米内积结构。我们可以要求这些双模是正的，即为希尔伯特 C^*-双模。在我们看来，现在自然的做法是将带有反射结构的一次扩展拓扑场论上的正性结构定义为对场论所有取值的正性结构作出相容选择，并要求与所有协边相关联的双模均为正。这个定义中一个重要的微妙之处在于，存在

$*$代数并非 C^*，但作为星代数，它们仍与一个 C^*代数同构，参见例 5.10。要谨慎地发展这些思想，很可能还需要更好地理解双范畴及匕首双范畴中对象上的“厄米配对”。

光滑设定

我们的分类仅依赖于内对称群 G 的分类空间的同伦类型（甚至只依赖于其 2-截断）。如果希望获取 G 的几何结构，就应当在光滑场论的设定下工作 [ST11 、 BEP15 、 LS20]。在那里，配边范畴还具有光滑范畴的结构，即流形位上的对称幺半（高阶）范畴层。我们预期，相应的光滑一维分类将由 G 的光滑酉费米子表示给出，而不是由 $\pi_0(G)$ 给出。如果进一步纳入黎曼度量，我们预期表示也可以是无限维的，并且必须用一个与 G 的作用相交换的哈密顿量来指定额外数据。

G分次代数的概念也有一个光滑类比，我们认为它与二维光滑场论有关。它由一个超向量丛 $\mathcal{A} \longrightarrow G$ 在 $\mathbb{C}$ 上以及向量丛映射给出

$$\mu_A \colon \operatorname{pr}_1^* \mathcal{A} \otimes \operatorname{pr}_2^* \mathcal{A} \longrightarrow \mu_G^* \mathcal{A}$$

其中， μ_G 是 G中的乘法，它是结合的且有单位元。通过要求奇点上的纤维与 i 和$\mathcal{A}_c = (\mathcal{A}_e)^{(-1)^F}$反交换，可以直接将其推广到费米子分次代数。此外，我们认为 $\mathcal{A}$ 应配备一个与所有其他结构相容的联络。将“光滑费米子分次代数”定义并研究为（高阶）几何对象，将会很有意思。

向融合范畴的范畴化

将我们的分类结果推广到更高维度将会很有意思。遗憾的是，以目前的知识和工具来看，这似乎力有未逮。Douglas、Schommer-Pries 和 Synder 正在开展一项工作，该工作始于 [DSPS20] ，预计将成为朝这一方向迈出的第一步。不过，我们认为，人们应该能够对部分答案提出有根据的猜想，并给出三维场论的显式构造。答案应当是我们为二维拓扑场论找到的结构的一种恰当范畴化。酉超融合范畴似乎是 C^*-代数的良好替代物。它们允许构造反射正定向三维场论 $\mathrm{Bord}_3^{\mathrm{SO}_3} \longrightarrow \mathrm{sVect}$。在离散定向玻色情形中，一个良好的代数输入似乎是球面 G分次融合范畴 [TV12]。这是一个 G分次范畴

$$\mathcal{C}_G = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$$

连同一个幺半群乘积 $\mathcal{C}_g \boxtimes \mathcal{C}_{g'} \longrightarrow \mathcal{C}_{gg'}$。我们将其视为分次代数的一种范畴化。对 $\mathcal{C}$ ，通常用枢轴结构取代对称 Frobenius 结构，而该结构

必须是球形的。[3] 最近，文献中还出现了按 2-群分次的球形融合范畴的定义，以及相应的三维拓扑场论构造 [SV22]。

融合范畴上的枢轴结构 $\mathcal{C}$ 由幺半函子 $(-)^{\vee\vee}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$的平凡化给出。 [DSPS20] 的一个结果表明，与 $(-)^{\vee\vee}$ 对应的双模是融合范畴 3-范畴中的 Serre 自同构。因此，枢轴结构产生了 Serre 自同构的一个平凡化。我们的结果表明，在存在费米子而非将 $(-)^{\vee\vee}$ 平凡化的情形下，我们应当将其与一个自同构 $(-1)^F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$相识别。函子 $(-1)^F$ 在对象和偶态射上均为恒等，在奇态射上则乘以 -1 。这些考虑恰好导向了 [ALW19], 提出的超枢轴融合范畴概念，即一个 sVect-富集融合范畴，连同一个幺半自然同构 $(-)^{\vee\vee} \Longrightarrow (-1)^F$。遵循 [DSPS20] 的做法，如果由此诱导的 $(-)^{\vee\vee\vee\vee}$ 平凡化与 Radford同构一致，那么将这种枢轴结构称为球面似乎是自然的。时间反演对称性或许可以通过如下条件编码：与张量积一个奇元素相对应的函子是 $\mathbb{C}$-反线性的。

基于这些观察，我们预期存在一种有趣的概念：由费米子 2-群分级的酉球形融合范畴。它既能归结为上述例子，又在 $2+1$ 维对称性保护相中发挥重要作用，还能用于构造结构群为 H_3 的 3 维拓扑场论。关于场论的精确定义和构造，我们留待后续工作。

任意维数

本文用于计算具有费米子对称性、反射结构和自旋统计的拓扑场论的主要策略，可以推广到任意维数。为说明这一点，设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半（∞, d）-范畴，带有对称幺半 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$-作用。令 $T = \mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ 为以 $\mathcal{C}$ 为目标的带框架拓扑场论空间。根据配边假设， T 配备了一个同伦 $O_d \times \mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$- 作用。注意，现在 O_d 在 T 上有两个作用：上述作用限制到 O_d，以及沿映射 $O_d \longrightarrow O_\infty \longrightarrow \pi_{\leq 1}O_\infty \cong \mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$ 限制到第二个因子。相应地，还有所谓的“对角作用”，我们将其称为星形作用：

$$BO_d \xrightarrow{\Delta} BO_d \times BO_d \xrightarrow{\mathrm{id}\times(w_1,w_2)} BO_d \times B\mathbb{Z}_2 \times B^2\mathbb{Z}_2.$$

设 G_b为一个李群，且 $(\theta,\omega)\colon BG_b \longrightarrow B\mathbb{Z}_2\times B^2\mathbb{Z}_2$ 为一个映射[4]。通过同伦纤维定义空间 $B\hat{H}_d$

$$B\hat{H}_d \longrightarrow BG_b \times BO_d \xrightarrow{w_2+\omega+\theta\cup w_1} B^2\mathbb{Z}_2$$

并通过其进一步的纤维定义空间 BH_d

$$BH_d \longrightarrow BG_b \times BO_d \xrightarrow{(w_1+\theta,w_2+\omega+\theta\cup w_1)} B\mathbb{Z}_2 \times B^2\mathbb{Z}_2.$$

ˆ 这与第3.3节中将群 H_d 和 H_d 分别定义为费米子张量积及其偶部相一致。因此，我们得到 $B\mathbb{Z}_2 \times B^2\mathbb{Z}_2$ 对 BH_d的一个同伦作用，它与正文中用于 $d = 1,\ 2$ 的作用一致。现在，我们通过令 G_b 经由 $\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2$ 作用，并令 O_d 通过星形作用，来定义中间因子 $BG_b \times BO_d$ 对 T的作用。这意味着，H_d 的限制作用由先投影到 BO_d 、再施以配边假设的作用给出。因此，这个限制作用的 H_d-不动点计算出 H_d-拓扑场论。具有反射结构和自旋-统计的拓扑场论空间，随后就是迭代不动点

$$\left(T^{hH_d}\right)^{h(\mathbb{Z}_2\times B\mathbb{Z}_2)} \cong T^{h(G_b\times O_d)} \cong \left(T^{hO_d}\right)^{hG_b}.$$

[3]注意，这并非对称 Frobenius 代数最直接的范畴化；最直接的范畴化应是线性范畴中的循环结合代数。关于循环结合代数的详细讨论，请参阅 [MW22]。[4]BG_b 可以替换为任意空间，但我们希望与正文中的记号保持一致。

本文对 $d = 1,\ 2$ 的情形进行了明确推导；我们发现，其中的 T^{hO_d} 分别是厄米超向量空间和星形 Frobenius 代数。

约定

这里为方便读者，总结我们的记号和约定。除非另有说明，诸如 sVect、sAlg 等线性范畴均定义在 $\mathbb{C}$ 上。(A、 B)-双模 M 被视为 sAlg 中的一个 1-态射 $B \longrightarrow A$，因此双模的复合由 $N \circ M := N \otimes_B M$ 给出。若 $\mathcal{C}$ 是一个双范畴，则 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ 表示其由完全可对偶对象构成的极大子双群胚。群 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在本文的许多不同情形中都会出现。因此，我们决定采用物理学约定，用特定字母标记这些群和生成元:

- 群 $\mathbb{Z}_2^c$ 由元素 c 生成，其中 $+1$-特征子空间对应整数自旋粒子，而 -1-特征向量具有半整数自旋;
- 群 $\mathbb{Z}_2^F$ 由元素 $(-1)^F$ 生成，该元素由费米子宇称给出；若自旋-统计关系成立，则将其与 c 等同;
- 群 $\mathbb{Z}_2^R$由实现反射作用 $A \longmapsto A_{\mathrm{op}}$的元素 R 生成。因此，这种作用的不动点通常是带厄米形式的向量空间、星形代数，或带反射结构的拓扑场论;
- 群 $O_1 \subseteq O_2$ 由 $\mathbb{R}^2$ 中的一个反射生成，记作 s，或简写为（–）；它通过配边假设以对偶作用;
- 群 $\mathbb{Z}_2^B$ 由实现复共轭（“横线”）的元素 B 生成，因此$s = RB$;
- 群 $\mathbb{Z}_2^T$ 表示平方为一的时间反演 T，视具体语境而定，它的作用方式可以是$\mathbb{Z}_2^B$，也可以是 O_1（若存在反射结构，则这两种作用视为相同）。我们还用记号 $\mathbb{Z}_4^T$ 表示平方为 c的时间反演。

致谢。 我们感谢 Stephan Stolz 和 Peter Teichner 向我们介绍本文涉及的诸多概念，并就反射结构进行了多次讨论，这些讨论对本文产生了重大影响。感谢 Bertram Arnold、Nils Carqueville、Theo Johnson-Freyd、David Reutter、Chris Schommer-Pries 和 Lukas Woike 提供真知灼见并提出宝贵意见。两位作者谨此感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所给予的支持。LM 谨此感谢西蒙斯全球范畴对称性合作项目给予的支持。周界理论物理研究所的研究部分由加拿大政府通过创新、科学与经济发展部以及安大略省通过学院与大学部提供支持。周界理论物理研究所位于哈尔迪曼地带，这片土地曾承诺归六族联盟所有。

2 拓扑场论

Atiyah [Ati88] 所定义的拓扑场论，是对度规无关量子场论的路径积分表述在时空流形的切割与粘合下所具有的形式性质进行公理化的数学理论。本节将简要回顾拓扑场论的概念，以及通过配边假设对其进行的分类。在概述一般情形后，我们将重点讨论二维情形，这与本文最为相关。

2.1 定义回顾

通俗地说，一个（定向的） d维拓扑场论 $\mathcal{Z}$ 是：

- 为所有闭的 $d-1$ 维流形 Σ 指定一个向量空间；这些就是该理论的态空间。

- 此外， $\mathcal{Z}$ 为每个配边 $M\colon \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ （即一个带边界的紧流形 M，以及其边界 ∂M 与 $-\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ 之间的一个同一化）指定一个线性映射 $\mathcal{Z}(M)\colon \mathcal{Z}(\Sigma_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(\Sigma_2)$；这就是“时间演化算符”。

此处， $-\Sigma$ 表示带反向定向的流形 Σ。要求沿边界粘合配边对应于线性映射的复合。物理系统通过取其态空间的张量积来叠加；在定义中，这通过要求 $\mathcal{Z}(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) \cong \mathcal{Z}(\Sigma_1) \otimes \mathcal{Z}(\Sigma_2)$ 来实现。

在给出形式化定义之前，我们需要更仔细地说明所考虑的流形类型。例如，在存在时间反演对称性的情况下，我们应当使用无定向流形；如果存在费米子，则所有流形都应配备自旋结构。一种便于处理所有与我们相关的可能结构的方法是使用切向结构。

定义 2.1. 设 H 是一个李群， $\rho\colon H \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 是一个李群同态， M 是一个 d 维流形。 M 上的一个切向 (H,ρ)-结构是一个同伦交换图表

$$\begin{array}{ccc} & & BH \\ & \overset{\psi}{\nearrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ M & \xrightarrow[TM]{} & B\,\mathrm{O}_d \end{array} \qquad (h)$$

其中 $TM\colon M \longrightarrow B\,\mathrm{O}_d \sim BGL_d(\mathbb{R})$ 是 M 的切丛的分类映射。切向结构的空间是从 $TM\colon M \longrightarrow B\,\mathrm{O}_d$ 到 $\rho\colon BG \longrightarrow B\,\mathrm{O}_d$ 的（导出）映射空间，其中映射空间取自以 $B\,\mathrm{O}_d$ 为对象的拓扑空间范畴 $\mathrm{Top}_{/B\mathrm{O}_d}$。此空间中的一条路径是一个切结构态射。

注记 2.2. 还存在一种以微分几何表述的等价定义。 M 上的切向 (H,ρ)-结构，也可以等价地描述为一个主 H-丛 $P \longrightarrow M$，以及 M 上向量丛的一个同构 $P \times_\rho \mathbb{R}^d \cong TM$。采用几何定义时，切向结构的态射将是一个规范变换 $P \longrightarrow P'$，使得复合

$$P \times_\rho \mathbb{R}^d \longrightarrow P' \times_\rho \mathbb{R}^d \longrightarrow TM$$

与另一种到 TM 的识别一致。然而，这与定义 2.1 中定义的态射不一致，后者在本质上更具同伦性。相反，我们要求两个复合之间存在一个向量丛同伦 $P \times_\rho \mathbb{R}^d \longrightarrow TM$。例如，流形上的 O_d-结构等价于其上的一个度量。从几何角度看，两个 O_d-结构同构，当且仅当它们等距。然而，从拓扑角度看，所有 O_d-结构都同构，因为映射 $BO_d \longrightarrow BGL_d(\mathbb{R})$ 是一个同伦等价。

例2.3. 本文主要关注与第3.3节中定义的内对称群相关联的结构群 H_d。作为 H_d 的特殊例子的切向结构的一些标准例子如下：

- 赋有映射 $* \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 对应的切向结构的流形，与带框架流形相同；也就是说，它是一个切丛已平凡化的流形。

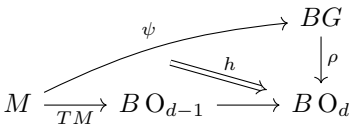
- 赋有恒等映射 $\mathrm{O}_d \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 对应的切向结构的流形，与无定向流形相同。

- 配备了针对包含映射 $\mathrm{SO}_d \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 的切向结构的流形，与定向流形相同。

- 配备了针对 $\mathrm{Spin}_d \longrightarrow \mathrm{SO}_d \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 的切向结构的流形，与自旋流形相同。

- 设 G 为一个李群。配备了针对映射 $G \times \mathrm{SO}_d \xrightarrow{\mathrm{prso}} \mathrm{SO}_d \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 的切向结构的流形，与配备了主 G-丛的定向流形相同。

为了将 Atiyah 对拓扑场论的定义推广到带有（H，ρ）结构的流形上，可在一个 $d-1$维流形 Σ上，通过其稳定一次后的切丛上的 H结构来定义切向结构。换言之，我们将切丛的分类映射与映射 $B\mathrm{O}_{d-1} \longrightarrow B\,\mathrm{O}_d$复合，即得到如下同伦交换图



拓扑场论可以用范畴论的语言简洁地定义。为此，引入一个对称幺半范畴 $\mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)}$ [Lur09, CS19]，其对象是配备了切向（$d-1$，ρ）结构的 $d-1$维闭流形 Σ，其态射是带切向结构的配边的微分同胚类。复合通过沿流形边界粘合来定义，而幺半群结构则由流形的不交并给出。

定义　拓扑场论的定义在任意对称幺半范畴中都有意义 $\mathcal{C}$.

定义 2.4. 设 (H,ρ) 是一个切向 d-型，且 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半范畴。取值于 $\mathcal{C}$ 的 拓扑(H,ρ)-场论 是一个对称幺半函子

$$Z\colon \mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)} \longrightarrow \mathcal{C} \quad .$$

对于物理应用而言，（超）向量空间范畴是最重要的例子，接下来我们将把注意力限制于此。以空流形为对象的取值，若拓扑场论为 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)} \longrightarrow \mathrm{sVect}$，且目标为复超向量空间，则带有一个到复数 $\mathcal{Z}(\emptyset) \cong \mathbb{C}$ 的首选同构，因为 $\mathcal{Z}$ 是对称幺半的。一个闭的 (H,ρ)-流形 M 定义了一个从空集到其自身的配边。$\mathcal{Z}$ 在 M 上的取值是一个线性映射$\mathcal{Z}(M)\colon \mathcal{Z}(\emptyset) \cong \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathcal{Z}(\emptyset)$，因而可以自然地识别为一个复数；这是场论在 M 上的配分函数。

在 Atiyah 的工作之后几十年间，这一定义至少以两种重要方式得到了扩展 [Lur09]。第一种方式在本文中并不起重要作用，因此我们只略作提及：在 $\mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)}$ 的定义中，我们将相对于边界微分同胚的配边视为相同。更自然的做法是通过高阶态射来追踪这些微分同胚及其同伦。这就得到一个配边的 $(\infty,1)$-范畴，其同伦范畴为 $\mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)}$ 。

第二点对本文至关重要：拓扑场论的定义使我们能够将时空流形切分成更简单的部分，从而计算配分函数。这可以理解为“局域性”的实现。然而，作为 $\mathrm{Bord}_d^{(H,\rho)}$ 的对象出现的 $d-1$ 维流形无法进一步分解。允许分解低维流形，会得到一个关于配边的对称幺半 d-范畴 $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{(H,\rho)}$，非正式地说，其对象是带有 $(H,\ \rho)$-结构的 0 维闭流形，1 维配边则是它们之间的

1-态射，配边的配边（某些带角的二维流形）是 2-态射，依此类推，直至 d 维带角流形作为 d-态射。复合通过粘合定义，对称幺半结构则通过不交并定义。严格定义高阶范畴 $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{(H,\rho)}$，颇为复杂；关于使用完全 d-重 Segal 空间给出的定义，请参见 [CS19]；关于对称幺半双范畴 $\mathrm{Bord}_{2\,0}^{(H,\rho)}$，的定义，请参见 [SP09]。我们不需要对完全扩张配边范畴作出详细定义，因为我们假定下一节将更详细说明的配边假设。它为我们提供了一个通过泛性质描述配边范畴的方法。

定义 2.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 d-范畴。取值于 $\mathcal{C}$ 的完全扩张 d维拓扑(H,ρ)场论是一个对称幺半函子

$$\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}_{d,0}^{(H,\rho)} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

对于任意对称幺半 d-范畴 $\mathcal{C}$，都可以定义一个对称幺半$(d-1)$-范畴$\Omega\mathcal{C}$:=$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$，它是 $\mathcal{C}$的对称幺半单位元的自态射范畴。通过迭代，我们还可以对所有 $0<k<d$定义 $\Omega^k\mathcal{C}$。我们引入记号 $\mathrm{Bord}_{d\,k}^{(H,\rho)} := \Omega^k\mathrm{Bord}_{d\,0}^{(H,\rho)}$。注意，$\mathrm{Bord}_{d\,d-1}^{(H,\rho)}$等于 $\mathrm{Bord}_{d}^{(H,\rho)}$。对于 $0<n<d$，取值于对称幺半 n-范畴 $\mathcal{D}$ 的 $n+1$层拓扑场论是一个在 n-范畴 $\mathrm{Bord}_{d}^{(H,\rho)}{}_{,d-n} \longrightarrow \mathcal{D}$之间的对称幺半函子。任意完全扩张场论 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}_{d}^{(H,\rho)}{}_{,0} \longrightarrow \mathcal{C}$ 都可以限制为部分扩张场论 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}_{d}^{(H,\rho)}{}_{,k} \longrightarrow \Omega^k\mathcal{C}$，其中 $0\le k\le d$。我们主要关注完全扩张的二维场论，因此必须选取一个对称幺半 2-范畴作为目标。[5] 我们将专门研究 $\mathcal{C}=\mathrm{sAlg}$，即由超代数、双模和偶双模交织算子构成的对称幺半 2-范畴。我们在附录 C 中给出关于这个双范畴所需的细节。注意，$\Omega\mathrm{sAlg}=\mathrm{sVect}$ 是超向量空间范畴。

2.2 配边假设

配边假设 [Lur09, BD95] 是对完全扩展拓扑场论的分类陈述。尽管文献中尚无完整的已发表证明，但它已在若干特殊情形下得到证明 [Pst22, SP09, HSV16, Soz19]，并且已有详细的证明概要 [Lur09, AF17]。对我们最有用的表述，需要将切向结构从群同态 $H\longrightarrow \mathrm{O}_d$ 推广到覆盖 $B\mathrm{O}_d$的任意拓扑空间。对于一个覆盖 $\rho\colon X\longrightarrow B\,\mathrm{O}_d$的空间 $B\,\mathrm{O}_d$，配边范畴 $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{(X,\rho)}$，的构造与上一节完全相同。配边假设等价于函子 $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{-}\colon$ 拓扑空间范畴$/BO_d \longrightarrow d$-$\mathrm{Cat}^{\otimes}$满足以下两个性质：

- $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{-}$ 保持余极限。
- 带框架配边范畴 $\mathrm{Bord}_{d\,0}^{X=*}$，是由一个完全可对偶对象生成的自由对称幺半 d-范畴。

谈到余极限时，我们始终指恰当的高阶范畴概念；例如，对于 $d=2$，我们指通常称为伪极限的概念 [JY21，第 5] 章。完全可对偶对象的一般定义对我们来说并不十分重要，因此我们在此援引以下任一参考文献 [Lur09、GS18、SP14]。第二点意味着，取值于 $\mathcal{C}$ 的带框架 d 维完全扩展拓扑场论范畴，等价于由所有完全可对偶对象构成的全子范畴的核心 $\mathcal{C}^{\mathrm{f.d.}}$。这个空间带有 $*\longrightarrow B\mathrm{O}_d$ 的自同构群的作用，其位于

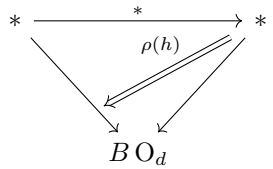
[5]在本文中，对于弱范畴这一概念，我们将交替使用“2-范畴”和“双范畴”这两个术语。

$\mathsf{Top}/B\mathsf{O}_d$，并且与 O_d 同伦等价。具体而言，O_d 中的一个元素通过旋转框架作用于带框架配边范畴，进而在带框架场论空间上诱导一个作用。

例 2.6. 超向量空间 $V \in \mathsf{sVect}$ 是一重可对偶化的，当且仅当它是有限维的。$\mathsf{O}_1 = \mathbb{Z}_2$ 作用将有限维向量空间映到其对偶 $V^* = \mathsf{Hom}(V_0, \mathbb{C}) \oplus \mathsf{Hom}(V_1, \mathbb{C})$。同构 $f\colon V \longrightarrow V'$ is 被映到线性映射 $f^{*-1}\colon V^* \longrightarrow V'^*$。这个基本例子已经表明，该作用仅定义在可逆可对偶化态射上。

域 $\mathbb{C}$ 上的超代数 $A \in \mathsf{sAlg}$ 是二重可对偶化的，当且仅当它是有限维且半单的 [Gun16，例 2.5]。我们在附录 C.5 中明确描述 O_2-作用。

具有一般切向结构 $G \longrightarrow \mathsf{O}_d$ 的拓扑场论空间，可以利用 $\mathsf{Bord}_{d\ ,0}^{-}$ 保余极限这一性质来计算。为此注意，作为 $\mathsf{Top}/B\,\mathsf{O}_d$中的对象，我们有 $BH \longrightarrow B\,\mathsf{O}_d = \mathsf{colim}_{BH}(* \longrightarrow B\,\mathsf{O}_d)$。余极限中出现的函子由映射 $H \longrightarrow \mathsf{O}_d$ 诱导，可以非正式地描述为：它将对象 $h \in H$ 映到自同构



属于 $* \longrightarrow B\,\mathsf{O}_d$，其中我们用 $\rho(h)$ 表示 $B\mathsf{O}_d$ 中对应于 $\rho(h) \in \mathsf{O}_d$ 的路径。将 $BH \longrightarrow B\mathsf{O}_d$ 写成余极限后，我们可以利用 $\mathsf{Bord}_{d\ 0}^{(-)}{}_{,}$ 保持余极限这一性质，得出

$$\mathsf{Bord}_{d,0}^{(H,\rho)} \simeq \mathrm{colim}_{BH}\, \mathsf{Bord}_{d,0}^{*} \quad .$$

方程 2.2 的一个直接推论是拓扑场论的分类结果（比较 [Lur09, 定理 2.4.18]）

$$\mathsf{Cat}_d^{\otimes}(\mathsf{Bord}_{d,0}^{(H,\rho)}, \mathcal{C}) \simeq \mathsf{Cat}_d^{\otimes}(\mathrm{colim}_{BH}\, \mathsf{Bord}_{d,0}^{*}, \mathcal{C}) \simeq \lim_{BH} \mathsf{Cat}_d^{\otimes}(\mathsf{Bord}_{d,0}^{*}, \mathcal{C}) \simeq \lim_{BH} \mathcal{C}^{f.d.}$$

其中，H 对 $\mathcal{C}^{f.d.}$ 的作用是沿群同态 $\rho(h)\colon H \longrightarrow \mathsf{O}_d$ 拉回 O_d 的作用。极限 $\lim_{BH} \mathcal{C}^{f.d.}$ 是该作用的同伦不动点范畴。

作为一个简单的例子，我们来看一维拓扑场论。一维中的切向结构由一个群同态 $\theta\colon H \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = O_1$ 给出，即一个 $\mathbb{Z}_2$-分次群。

命题 2.7. 具有切向结构 $\theta : H \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 的一维拓扑场论，由 H_0 的一个表示 (R, V) 以及一组非退化双线性型 ${}_g\langle .,. \rangle : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ 分类，其中每个 $g \in H \setminus H_0$ 都对应一个双线性型，并且对于所有 $h \in H_0$、所有 $g, g' \in H \setminus H_0$ 以及所有齐次向量 $v, w \in V$

$$\begin{aligned} {}_{gh}\langle v, w\rangle &= {}_g\langle R(h)v, w\rangle \\ {}_{hg}\langle v, w\rangle &= {}_g\langle v, R(h^{-1})w\rangle \\ {}_{g^{-1}}\langle v, w\rangle &= (-1)^{|v||w|}\, {}_{g'^{-1}}\langle w, R(gg')v\rangle \quad . \end{aligned}$$

证明。 我们需要计算由例 2.6 中诱导的作用所对应的同伦不动点。定义请参见注 A.13。它们由以下映射族组成

$$\begin{cases} F(g)\colon V \longrightarrow V \ , \ \text{for } \theta(g) = 1 \\ F(g)\colon V^* \longrightarrow V \ , \ \text{for } \theta(g) = -1 \end{cases}$$

对于 $g \in H$，该映射族必须与 H 中的群乘法相容。根据选择 $\theta(g) = \pm 1$ 和 $\theta(h) = \pm 1$，相关同伦不动点图表有四种形式。第一个图表表明，$R := F|_{G_0}$ 是 G_0 在 V 上的一个表示，且在超分次下为偶。对于 $g \in G_1 = G \setminus G_0$，我们将不动点结构 $F(g)\colon V^* \longrightarrow V$ 转化为双线性型 ${}_g\langle .,. \rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$，方法如下

$$ {}_g\langle v, w\rangle := F(g^{-1})^{-1}(v)(w). $$

我们在定义中选择 g^{-1} 的约定，是为了得到更简洁的公式。$F(g)$ 为偶的事实，意味着 V_0 和 V_1 正交。关于 $g_0 \in H_0$ 和 $g_1 \in H_1$ 的第二个图表如下

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F(g_0)} & V \\ & \nwarrow^{F(g_0 g_1)} & \uparrow{\scriptstyle F(g_1)} \\ & & V^* \end{array}$$

用双线性型记号展开后，我们得到

$$ {}_{g_1^{-1}}\langle v, w\rangle = {}_{g_1^{-1}g_0^{-1}}\langle R(g_0)v, w\rangle $$

这与第一个点等价。第三个图表如下

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F(g_1)} & V^* \\ & \nwarrow^{F(g_1 g_0)} & \uparrow{\scriptstyle F(g_0)^{*-1}} \\ & & V^* \end{array}$$

利用上一个图表的结果，我们得到

$$ {}_{g_1^{-1}}\langle v, R(g_0)w\rangle = {}_{g_0^{-1}g_1^{-1}}\langle v, w\rangle = {}_{g_1^{-1}}\langle R(g_1 g_0^{-1} g_1^{-1})v, w\rangle $$

换言之，$R(g_1 g_0^{-1} g_1^{-1})^T = R(g_0)^{-1}$，其中转置是相对于 ${}_{g_1}\langle .,. \rangle$ 而言的。偶线性映射 $T\colon V \longrightarrow V$ 相对于非退化双线性型 $\langle .,. \rangle$ 的转置定义为

$$ \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^T w\rangle. $$

注意，如果双线性型既非对称也非反对称，顺序就很重要。特别是，通常 $T^{TT} \neq T$。关于 $g,\ g' \in H_1$ 的最后一个图表是

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F(g)} & V^* \\ {\scriptstyle F(gg')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F(g')^{*-1}} \\ V & \xrightarrow[\sim]{} & V^{**} \end{array}$$

其中，同构 $\mathrm{ev}: V \cong V^{**}$ 映射 $v \in V$ 到求值映射 $\mathrm{ev}_v\colon V^* \longrightarrow \mathbb{C}$，该映射由 $\mathrm{ev}_v(f) = (-1)^{|f||v|} f(v)$ 给出。现在，若 $T\colon V \longrightarrow V^*$ 是一个偶线性映射，其对应的双线性型为 ${}_T\langle v, w\rangle := T(v)(w)$，那么在此同构 $V \cong V^{**}$ 下，对偶映射 $T^*\colon V \longrightarrow V^*$ 满足 ${}_{T^*}\langle v, w\rangle = (-1)^{|v||w|}{}_T\langle w, v\rangle$，因为

$$ [T^*(\mathrm{ev}_v)](w) = \mathrm{ev}_v(Tw) = (-1)^{|Tw||v|}(Tw)(v). $$

利用这一点，图表给出

$$ {}_{g^{-1}}\langle v, w\rangle = (-1)^{|v||w|}{}_{g'^{-1}}\langle w, R(gg')v\rangle \quad . $$

□

从数学上来说，不清楚如何在不作出不自然选择的情况下简化这些条件。不过请注意，所有其他双线性形式都可在一个不自然的参考元素 $g \in H \setminus H_0$ 之后，利用条件 2.7 由单个双线性形式 $\langle .,. \rangle := _{g^{-1}} \langle .,. \rangle$ 确定；也就是说，它是短正合列的一个集合论截面

$$1 \longrightarrow H_0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

已选定。

拓展到二维拓扑场论时，双范畴上的群作用和同伦不动点的概念会变得更加复杂 [HSV16]。我们在附录 A 中回顾所需的定义。对于目标为 Morita 2-范畴的场论，相关的同伦不动点双范畴已有一些计算结果：

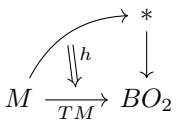
- 在 [HSV16、HV19 中，Morita 双范畴 $\mathrm{Alg}^{f.d.}$ 里的 Hes17] SO_2-同伦不动点已被确定为对称半单 Frobenius 代数。
- 在不使用配边假设的情况下，SP09] 中已根据（$\mathbb{C}$-线性的）星对称 Frobenius 代数对取值于 Alg 的无定向（即 O_2）场论进行了分类。这些代数是 $*$- 代数的 Morita 不变版本；关于 $\mathbb{C}$- 反线性变体的更多细节，见第 5.2 节。
- 对于有限群 G，令 $H := G \times SO_2$，其结构映射为投影到第二个因子。那么，$\mathrm{Alg}^{f.d.}$ 中的 H-同伦不动点已被确定为强 G-分次对称 Frobenius 代数 [Dav11]。这些结果已推广到 $G \times O_2$-不动点 [Soz19]。他的结果只有在某些群的情况下才能得到良好的代数描述。
- 在 [Gun16]Spin_2-同伦不动点在 sAlg 中已被计算出来。他给出的答案不像上述情形那样，能用一种优美的代数结构来描述。

从这些例子中我们得出的结论是：一旦切向结构涉及 Spin 结构（即费米子）或过多的反转定向元素，似乎就无法用代数对象很好地描述同伦不动点。本文的一个主要观点是，若纳入自旋-统计和反射结构，则这些情形中会出现优美的分类。

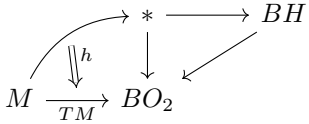
2.3 Pi维数中配边假设的函子性诠释 2

本节聚焦于取值于 sAlg 的二维完全扩展拓扑场论。我们的目标是更直观地描述这一背景下的配边假设。正如上一节所述，带框拓扑场论 $\mathrm{Bord}^{*}_{2,\ 0} \longrightarrow$sAlg 是对其他切向结构进行分类的起点。配边假设指出，带框拓扑场论的 2-群胚等价于完全可对偶化代数构成的子群胚 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{f.d.}}$。这里我们不从几何角度对此加以解释，而是请读者参阅文献中的以下论述 [Lur09、GS18、TMAK20]。$\mathbb{C}$ 上的完全可对偶超代数恰好是有限维半单超代数。

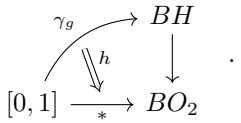
对于每个切向结构 $\rho\colon\ H \longrightarrow O_2$，都有一个典范函子 $\iota\colon \mathrm{Bord}^{*}_{2,\ 0} \longrightarrow \mathrm{Bord}^{H}_{,\ 2\ 0}{}^{\rho}{}_{,}$，它将一个带框架流形送到



to



其中新的三角形严格交换。因此，每个拓扑（H，ρ）场论 $\mathcal{Z}$：$\mathrm{Bord}^{H,2}_{\rho,0} \longrightarrow \mathrm{sAlg}$ 都有一个底层的带框架拓扑场论 $\mathcal{Z}_{\mathrm{fr}} \coloneqq \iota^*\mathcal{Z}$，它完全由其在正定向框架点上的取值决定，也就是说，它由一个完全可对偶代数 $A_{\mathcal{Z}} \in \mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 决定。我们将描述配边假设所要求考虑的附加数据，以便用 $\mathcal{Z}_{\mathrm{fr}}$ 完整描述 $\mathcal{Z}$。我们用 $+$ 表示正定向框架点，用 $-$ 表示负定向框架点，也用它们表示在 $\mathrm{Bord}^{H,2}_{\rho,0}$ 中的像。每个元素 $g \in H$ 都对应一条路径 γ_g：$[0,1] \longrightarrow BH$。$[0,1]$ 的切丛分类映射是平凡的，因此我们可以将其提升为一个（H，ρ）配边



其中，h 是将 $B\mathrm{O}_2$ 中的环路延续至其终点的同伦。明确地说，h 由映射给出

$$\begin{aligned} h\colon I \times I &\longrightarrow B\,\mathrm{O}_2 \\ (t,x) &\longmapsto \rho(\gamma_g(x+(1-x)t)) \quad . \end{aligned}$$

若 $\rho(g) \in \mathrm{O}_2$ 位于恒等元所在的连通分支中，则这定义了一个从 $+$ 到 $+$ 的1-态射；否则，它定义了一个从 $-$ 到 $+$ 的1-态射。我们按图1所示绘制这些1-态射。场论 $\mathcal{Z}$ 赋予



图1：$\mathrm{Bord}^{H,2}_{\rho,0}$ 中的一些1-态射。

在 $\rho(g) \in SO_2$ 的情况下，分别赋予它们一个 $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$-双模 $\mathcal{A}_g$；否则，赋予一个 $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{op}}$ 双模。对于这两种态射，我们还有它们的定向反转，这是通过将切向结构的同伦与 BO_2 中的非平凡环路复合而构造的。我们用反向箭头表示它们。与之对应的双模为 $\mathcal{A}^{\mathrm{op},\,g^{-1}}$ 其中 $^{-1}$ 表示选定的伴随逆。设 g 和 g' 是 H 的元素。存在一个典范同伦 ψ：$\gamma_{g'} \circ \gamma_g \to \gamma_{g'g}$，将其与一个缩放结合后，便得到 $\mathrm{Bord}^{H,2}_{\rho,0}$ 中的2-态射，我们按图2所示绘制。注意，这些图只描述了由映射 $I^2 \longrightarrow BH$ 给出的2-态射部分。切向结构中的同伦可像之前那样，通过沿着同伦 ψ 追踪至终点来构造。具体而言，它由以下内容给出

$$\begin{aligned} h\colon I \times I^2 &\longrightarrow B\,\mathrm{O}_2 \\ (t,x,y) &\longmapsto \rho(\psi(x+(1-x)t, y+(1-y)t)) \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

将 $\mathcal{Z}$ 作用于这些态射上，会得到双模交织算子 $\phi_{g,g'}$：$\mathcal{A}_{g'} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}} \mathcal{A}_g \longrightarrow \mathcal{A}_{g'g}$ for $\rho(g)\ \rho(g') \in \mathrm{SO}2$，$\phi_{g,g'}$：$\mathcal{A}_{g'} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}} \mathcal{A}_g \longrightarrow \mathcal{A}_{g'g}$ for $\rho(g) \in \mathrm{SO}_2$ and $\rho(g') \notin \mathrm{SO}2$，$\phi_{g,g'}$：$\mathcal{A}_{g'}^{\mathrm{op}^{-1}} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}} \mathcal{A}_g \longrightarrow \mathcal{A}_{g'g}$ for $\rho(g) \notin \mathrm{SO}_2$ and $\rho(g') \in \mathrm{SO}_2$，and $\phi_{g,g'}$：$\mathcal{A}_{g'} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{op}}} \mathcal{A}_g^{\mathrm{op}^{-1}} \longrightarrow \mathcal{A}_{g'g}$ for $\rho(g)\ \rho(g') \notin \mathrm{SO}_2$，，其中我们隐式地使用了典范同一化 $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{op}}\,\mathrm{op} \cong \mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$。

上述定义的态射满足图3中 $\mathrm{Bord}^{H}_{\text{所示}2\,\rho,0}$ 的这类关系，其中我们用一条直的红线表示恒等 2-态射。

对于每条路径 Γ：$g \longrightarrow g'$ 在 H 中，都存在一个同伦 Γ：$I^2 \longrightarrow BG$。从 Γ 构造 2-态射时，有一个重要的细微之处：我们将 2-态射定义为沿垂直边界保持不变，但如果直接使用向右上角的变形来定义切向结构，如

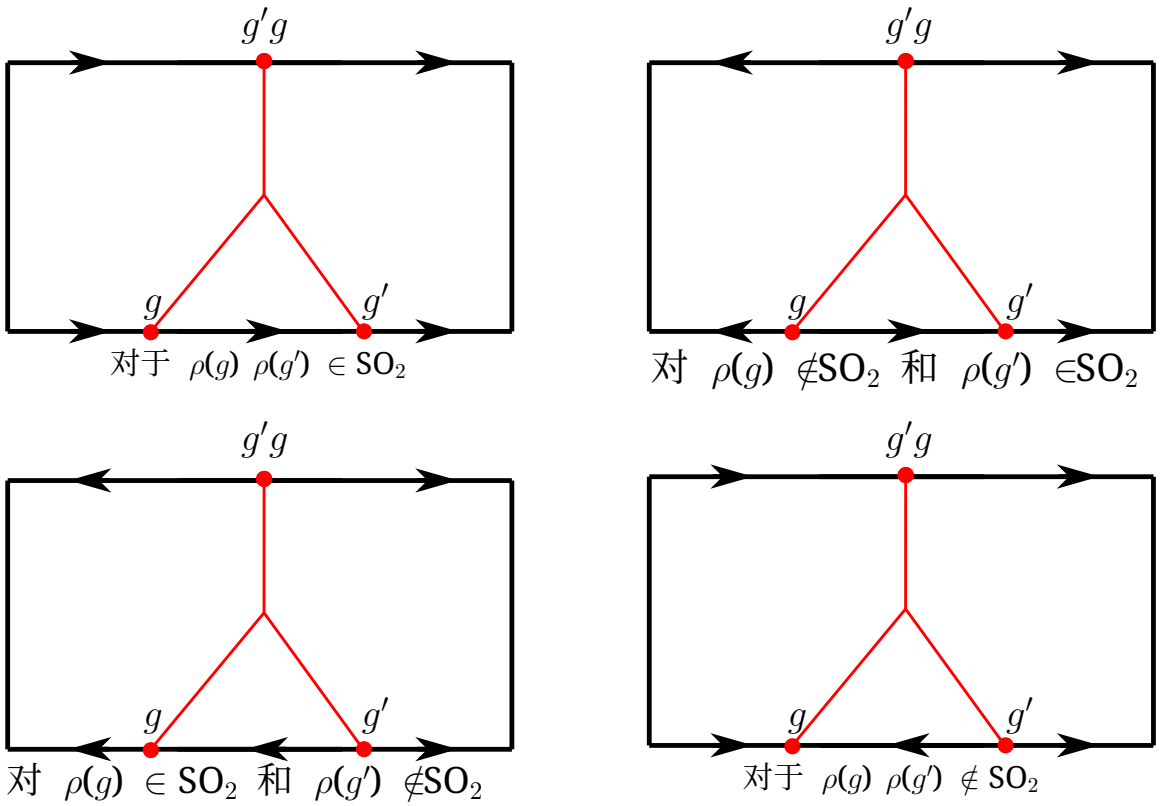


图2：$\mathrm{Bord}^{H}_{2,0}{}^{\rho}$，中的一些 2-态射。

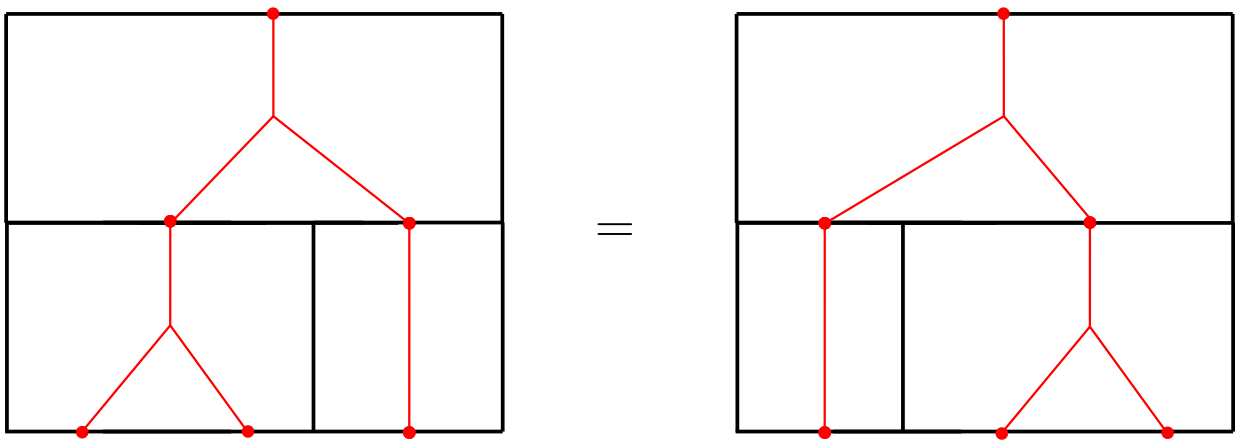


图3：$\mathrm{Bord}^{H}_{2,0}{}^{\rho}$，中的一种关系。

在公式（2.1）中，这种情况并非如此。沿左侧垂直边的切向结构变化对应于路径 $\rho(\Gamma) \in O_2$。我们可以通过将这条路径纳入该图形的顶边来解决这个问题

态射。我们按图4所示绘制这些图，其中 n 是一个整数，表示在 O_2 中使用的环路 $\rho(\Gamma)$

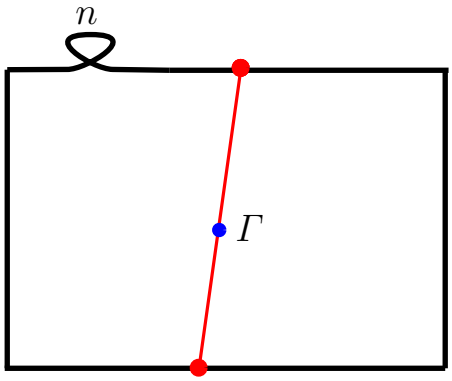


图4：$\mathrm{Bord}^{H,\,2\,0^{\rho},}$ 中的更多2-态射。

来定义顶部的态射。注意，刚定义的2-态射的目标，是某个 $\mathrm{Bord}^{*}_{2,\,0}$ 中的态射的像与对应于 g'的态射的复合。在 $\mathrm{Bord}^{*}_{2,\,0}$ 中，对应于 $n=1$ 的正号点的自同构称为*Serre* 自同构。 n 的所有其他取值都可以通过复合及取逆由它构造得到。Serre 自同构可以在任何完全对偶化双范畴中定义，并且是从恒等到自身的自然变换的一部分 [CS21，命题 3.2。]。它属于上一节提到的 O_2-作用；详情见附录 B.2 和 B.3。

将场论作用于图4中的2-态射，会得到一个交织算子 $\lambda_\Gamma\colon \mathcal{A}_g \longrightarrow \mathcal{A}_{g'}\circ S^n$，其中 S 是 $\mathcal{Z}$的 Serre 自同构。这些2-态射满足图5和图6所示形式的关系。对于第一个关系，我们省略 $m\circ n$ 与 $n+m$ 之间的同构；第二个关系则涉及 Serre 同构的自然性。二维配边假设的陈述可以理解为：这些态射和关系生成了 $\mathrm{Bord}^{H,\,2\,0^{\rho},}$，使其成为完全对偶化对称幺半双范畴。因此，给出一个完全可对偶的拓扑（H，ρ）场论，等价于给出一个完全可对偶的代数 A 双模 A_g、交织算子 $\phi_{g,\,g'}$，以及满足图3、图5和图6所示类型关系的交织算子 λ_Γ。关于 $G\times\mathrm{SO}_2$切向结构这一情形下该陈述的证明，请参见 [Soz19]。正如我们在附录 A 中解释的，这恰好与 G 在 sAlg 上的作用的同伦不动点数据相同。

注2.8. 类似但简单得多的图示描述也适用于一维。在这种情况下，对于每个元素 $g\in G$，都有如图1所示的态射。它们按照 G 的群运算复合。定向的处理方式与图2完全相同。更具体地说，在一维中，底部和顶部相等，而不是存在一个从底部到顶部的2-同构。

这种描述　可以通过使用立方体 I^d 而非正方形 I^2推广到任意维数　.

3 费米子群

本节将介绍费米子群，作为物理学中出现的对称群的一种模型，并研究其一些基本性质。我们还将定义与由费米子群描述的内部对称性相关联的时空结构群。

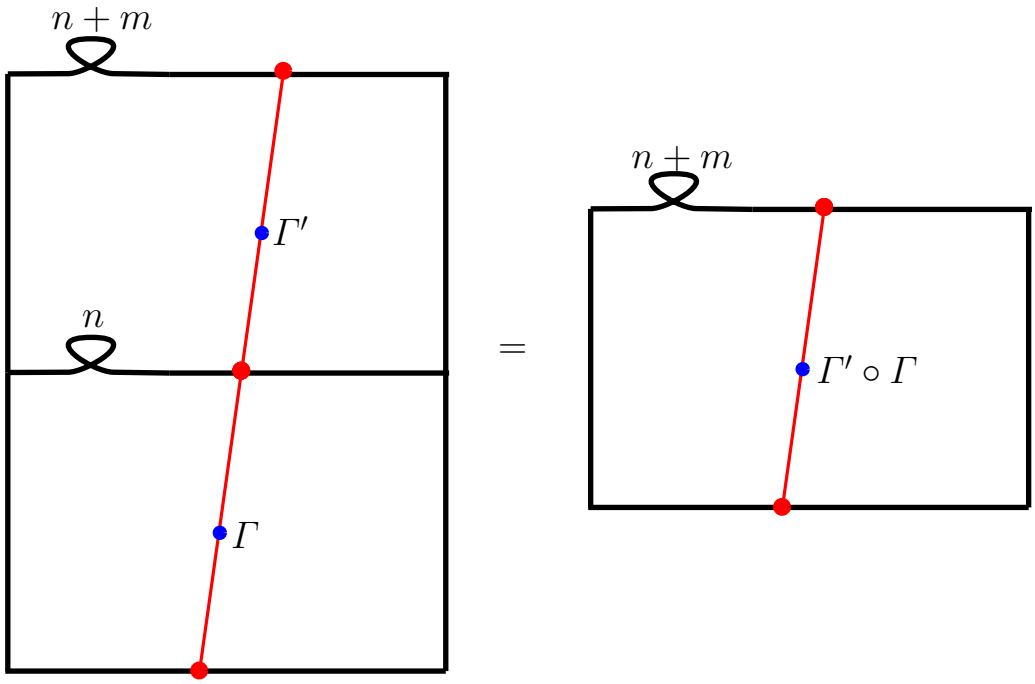


图5：Bord$^{H,2}_{0}{}^{\rho}$，中的更多关系。

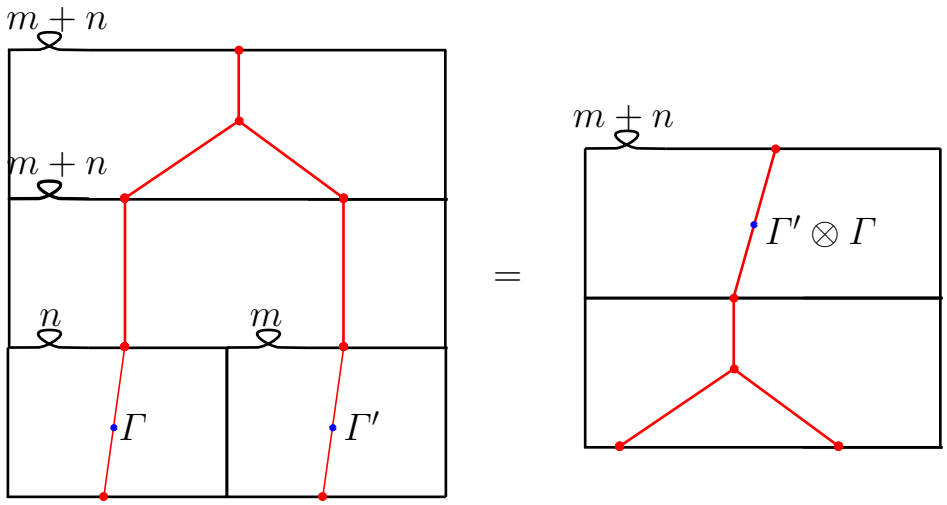


图6：Bord$^{H,2}_{0}{}^{\rho}$，中更多的关系。

3.1 作为内部对称性的费米子群

我们首先给出量子系统内部对称群的抽象定义，该系统可以同时包含玻色子和费米子。在此语境下，区分以幺正和反幺正方式作用于理论的希尔伯特空间上的对称性十分重要。例如，时间

反演对称性以反幺正方式作用。[6] 我们将用一个 $\mathbb{Z}_2^T$分次来编码这一信息。费米子宇称通常记作 $(-1)^F$，是任意量子系统的一种特殊对称性，我们用一个平方为 1 的偶中心元 c 来编码。我们在以下定义中抽象出这两条信息（该定义是我们从 Peter Teichner 处了解到的），用以描述内部对称群的结构：

定义 3.1. 一个费米子群 G 是一个李群，并带有

- 一个连续同态 $\theta\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}_2^T$，我们将其解释为一个 $\mathbb{Z}_2^T$分次 $G = G_0 \sqcup G_1$；
- 一个平方为 1 的偶中心元 $c \in G$，即 $\theta(c) = 0$。

一个费米子群同态 $f\colon (G,\ c_G,\ \theta_G) \longrightarrow (H,\ c_H,\ \theta_H)$ 是一个光滑群同态$f\colon G \longrightarrow H$，它保持分次，并满足 $f(c_G) = c_H$。

设 $(G,\ c,\ \theta)$ 为一个费米子群。我们用 G^{op} 表示具有与 G 相同的底层流形、c 和 θ，但乘法

$$g_1 *^{\mathrm{op}} g_2 = c^{\theta(g_1)\theta(g_2)} g_2 g_1 \quad .$$

若 c 等于 1，则称费米子群为玻色群。对于满足 $c \neq 1$ 的费米子群 $(G,\ c,\ \theta)$，我们将由 c 生成的中心子群记为 $\mathbb{Z}_2^c \subset G$，并将底层玻色群定义为商群$G_b \coloneqq G/\mathbb{Z}_2^c$。对于具有非平凡 c 且分次非平凡的费米子群 G，G_0 和 G_b 也都是费米子群（前者的分次平凡，后者具有 $c = 1$），并构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_2^c & = & \mathbb{Z}_2^c & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
G_0 & \hookrightarrow & G & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2^T \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
G_{0,b} & \hookrightarrow & G_b & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2^T
\end{array} \tag{3.1}$$

由费米子群构成的短正合列。

例3.2。设 $A = A_0 \oplus A_1$ 是一个实超代数。关于超代数的基础知识，参见附录 C。齐次单位元群 $A^\times$ 是一个费米子群，其 $\mathbb{Z}_2^T$ 分次由 A 和 $c = -1$ 的分次诱导。此外，球面 $S(A) = A^\times/\mathbb{R}_{>0}$ 是一个紧致费米子群，其中正实数通过数乘作用。

例 3.3。对于 $p,\ q$ 非负整数，Pin 群 $\mathrm{Pin}_{p,\,q}$（即由 $\mathbb{R}^{p,\,q}$ 在克利福德代数 $\mathrm{Cl}_{p,\,q}$ 中符号为（$p,\ q$）且范数为 ± 1 的元素生成的群）是一个费米子群。在此情况下，图表 (3.1) 变为

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}_{p,q} & \hookrightarrow & \mathrm{Pin}_{p,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{SO}_{p,q} & \hookrightarrow & \mathrm{O}_{p,q},
\end{array}$$

因此在 $\mathrm{Spin}_{p,q}$、$\mathrm{SO}_{p,q}$ 和 $\mathrm{O}_{p,q}$ 上定义了规范的费米子群结构，后两者为玻色的。$O_{p,q}$ 的映射的核中的特殊中心元 $c \in \mathrm{Pin}_{p,q}$ 与

[6]从相对论视角来看，时间反演并非内部对称性。因此，我们将采用通常的约定，把时间反演对称性称为内部对称性，尽管它们只有从空间视角来看才是内部的。

费米子宇称算子$(-1)^F$有关，这通过自旋-统计定理体现，进一步的动机请参见第 4.1 节。分次 θ 由行列式 $\theta:\mathrm{Pin}_{p,q}\longrightarrow O_{p,q}\xrightarrow{\det}\{\pm1\}\cong\mathbb{Z}_2^T$ 给出，这与克利福德代数上的$\mathbb{Z}_2$-分次一致。

定义 3.4. 设 (G,c_G,θ_G) 和 (H,c_H,θ_H) 是费米子群。费米子张量积$G\otimes H$是集合 $(G\times H)/\langle(c_G,c_H)\rangle$，其运算为

$$(g_1\otimes h_1)(g_2\otimes h_2)=c_G^{\theta_G(g_2)\theta_H(h_1)}g_1g_2\otimes h_1h_2,$$

中心元 $1\otimes c_H=c_G\otimes 1\in G\otimes H$ 和分次 $\theta_{G\otimes H}(g\otimes h)=\theta_G(g)+\theta_H(h)$。在上下文足够清楚时，为了提高可读性，我们省略下标 G 和 H。

不难证明，费米子张量积确实是一个群。注意，$G\otimes H$具有自然的双分次；存在一个同态 $\theta_G\otimes\theta_H:G\otimes H\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T\times\mathbb{Z}_2^T$。我们用来将 $G\otimes H$ 构造成费米子群的定义 3.4 中的分次，是将双分次与求和运算 $\mathbb{Z}_2^T\times\mathbb{Z}_2^T\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T$ 复合得到的。我们将经常考虑在此分次下的偶部 $(G\otimes H)_0$。注意，双分次的另一部分仍然给出一个分次 $(G\otimes H)_0=G_0\otimes H_0\sqcup G_1\otimes H_1$，因此构成另一个费米子群。

例3.5. 作为例3.2的一个具体特例，考虑具有一个平方为 -1 的奇生成元 f 的克利福德代数 $D=\mathrm{Cl}_{-1}$。那么 $S(D)=\{[1],[-1],[f],[-f]\}\cong\mathbb{Z}/4$。费子群结构由以下正合序列表示

$$1\longrightarrow\{\pm1\}\longrightarrow S(D)\xrightarrow{(-)^2}\{\pm1\}\longrightarrow 1.$$

这个费子群可识别为 $S(D)\cong\mathrm{Pin}_1^-=\mathrm{Pin}^{0,1}$。

考虑费子张量积 $G:=S(D)\otimes S(D)$。它由八个元素 $\pm a\otimes b$ 构成，其中 a 为 1 或 f。它由两个元素 $f\otimes 1$ 和 $1\otimes f$ 生成，这两个元素的平方均为 1，并且反交换，即

$$(f\otimes 1)(1\otimes f)=f\otimes f=(-1\otimes f)(f\otimes 1).$$

我们得出结论，G 同构于四元数群 $\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$。费子群结构由中心元 -1 和唯一的 $\mathbb{Z}/2$ 分次给出，使得 i 和 j 为奇（因此 k 为偶）。特别要注意，偶部 G_0 同构于 $S(D)$。显然，尽管前者是后者的子群，$S(D)$ 与 $\otimes S(D)\neq S(D\otimes_{\mathbb{R}}D)$。

注 3.6。具有非平凡 c 的费米子群定义有如下拓扑解释。它等价于给定一个李群 G_b 以及一个连续映射 $BG_b\longrightarrow B\mathbb{Z}_2^T\times B^2\mathbb{Z}_2^c$。事实上，由于 $\mathbb{Z}_2^c$ 是离散的，映射 $\omega:BG_b\longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c$ 等价于一个拓扑群扩张

$$1\longrightarrow\mathbb{Z}_2^c\longrightarrow G\longrightarrow G_b\longrightarrow 1.$$

注意，映射 $\mathbb{Z}_2^c\longrightarrow G$ 是单射意味着 $c\neq 1$；除此之外，具有这样的正合序列等价于在 G中有一个中心平方为单位元的元素。我们强调，将映射 $BG_b\longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c$取为平凡映射并不会得到具有 $c=1$的费米子群，而是得到平凡分裂费米子群$G=\mathbb{Z}_2^c\times G_b$。映射 $BG_b\longrightarrow B\mathbb{Z}_2^T$等价于一个同态 $\pi_0(G_b)\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T$，因此也等价于一个连续同态 $G_b\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T$。这又等价于一个同态$G\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T$，并且具有附加性质：$c$ 是偶数。

对偶费米子群在这种语言下也有一种解释。令 $\mathbb{Z}_4^{Tc}$ 表示满足 $T^2=c$ 的群。回想一下，斯廷罗德平方可以视为映射 $Sq^1:B\mathbb{Z}_2^T\longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c$，它分类了由相应的群的短正合列诱导的纤维化

$$B\mathbb{Z}_2^c\longrightarrow B\mathbb{Z}_4^T\longrightarrow B\mathbb{Z}_2^T$$

令 $\phi\colon B\mathbb{Z}_2^T \times B^2\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^T \times B^2\mathbb{Z}_2^c$ 表示投影到第一个因子的映射，而复合

$$B\mathbb{Z}_2^T \times B^2\mathbb{Z}_2^c \xrightarrow{Sq^1\times \mathrm{id}} B^2\mathbb{Z}_2^c \times B^2\mathbb{Z}_2^c \xrightarrow{+} B^2\mathbb{Z}_2^c$$

在第二个因子上。然后，将 $BG_b \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^T \times B^2\mathbb{Z}_2^c$ 与 ϕ 复合后，会将上同调类 $(\theta,\omega) \in H^1(BG_b;\mathbb{Z}_2^T) \times H^2(BG_b;\mathbb{Z}_2^c)$ 映射为

$$(\theta,\omega+Sq^1(\theta)) = (\theta,\omega+\theta^2) \in H^1(BG_b;\mathbb{Z}_2^T) \times H^2(BG_b;\mathbb{Z}_2^c)$$

其中 $\theta^2=\theta\cup\theta$。与 θ^2 对应的、以 $\mathbb{Z}_2^c$ 为核、以 G_b 为商的扩张，是集合 $\mathbb{Z}_2^c\times G_b$，其乘法为 $g_1 * g_2 = c^{\theta(g_1)\theta(g_2)} g_1g_2$，其中 $g_1,g_2\in G_b$。$H^2(G_b,\mathbb{Z}_2^c)$ 中的和对应于群扩张的 Baer 和。简短计算可得，$\phi(\theta,\omega)$ 是对 G^{op}进行分类的拓扑数据。

3.2 费米子群的表示

设 $V=V_0\oplus V_1$是一个复超向量空间。我们定义一个费米子群 $\mathrm{Aut}^f(V) = \mathrm{Aut}^f(V)_0 \sqcup \mathrm{Aut}^f(V)_1$，它由 V上的线性和反线性自同构组成。其偶分量 $\mathrm{Aut}^f(V)_0$是 V的 $\mathbb{C}$-线性自同构集合。奇分量 $\mathrm{Aut}^f(V)_1$则由 V的 $\mathbb{C}$-反线性自同构组成。优选元素 $c\in\mathrm{Aut}^f(V)$ 是分次对合 $(-1)_V^F$，它在 V_0上为恒等映射，在 V_1上为负恒等映射。物理直觉告诉我们，以下概念才是量子理论态空间上费米子内部对称群表示的正确概念。命题 4.10 将证实这一直觉。

定义 3.7。设 (G,c,θ_G) 是一个费米子群，V是一个复超向量空间。(G,c,θ_G) 在 V上的一个表示 是费米子群的一个同态 $\rho\colon G\longrightarrow\mathrm{Aut}^f(V)$。

设 $\rho\colon G\longrightarrow\mathrm{Aut}^f(V)$ 和 $\rho'\colon G\longrightarrow\mathrm{Aut}^f(V')$ 是 G的表示。态射 G-表示 是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $f\colon V\longrightarrow V'$，它与 G 的作用可交换。

具体而言，这意味着偶元素 $g\in G_0$ 通过 $\mathbb{C}$-线性映射 $\rho(g)\colon V\longrightarrow V$作用，奇元素通过 $\mathbb{C}$-反线性映射 $\rho(g)\colon V\longrightarrow V$作用，并且 $\rho(c)=(-1)_V^F$。表示的态射 是一个 $\mathbb{C}$-线性映射，满足 $f(\rho(g)[v]) = \rho'(g)[f(v)]$。条件 $\rho(c)=(-1)_V^F$ 可以理解为自旋-统计关系的一种实现，参见第 4.1 节。注意，费米子群在纯偶向量空间 $V=V_0$ 上的任何作用都通过群 G_b 分解；并且任何满足 $c=1$ 的费米子群都只在偶向量空间上有表示。

注 3.8. 我们从更抽象的角度探讨离散费米子群对超向量空间的作用，这种观点稍后会派上用场（不过目前可以放心略过）。2-群$\mathbb{Z}_2^T\times B\mathbb{Z}_2^F$作用于复超向量空间范畴 sVect（有关此作用的详细信息，请参见附录 C.1），其中 T通过将向量空间 V映为其复共轭向量空间V来作用，而 $(-1)^F$ 则通过自然同构 $(-1)^F\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}}$ 来作用。该自然同构在超向量空间 V 上的分量由分次自同构 $(-1)_V^F\colon V\longrightarrow V$ 给出，其定义为 $v\longmapsto(-1)^{|v|}v$。回顾注 3.6，费米子群等价地可以用 ∞-群的同态 $G_b\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T\times B\mathbb{Z}_2^F$来描述。这意味着 G_b 以下列方式作用于 sVect

$$\psi(g)\colon \mathsf{sVect}\longrightarrow\mathsf{sVect}$$
$$V\longmapsto\begin{cases}V & \text{if } \theta(g)=0\\ \overline{V} & \text{if } \theta(g)=1.\end{cases}$$

此外，该作用还带有相干同构 $\psi_{g,\,g'}\colon \psi(g')\circ\psi(g)\Longrightarrow\psi(g'g)$，其由 $(-1)^F$给出；如果对扩张进行分类的 2-余循环 $\omega(-,\,-)$

$$1\longrightarrow\mathbb{Z}_2^c\longrightarrow G\longrightarrow G_b\longrightarrow 1$$

在 g, g' 上求值时是非平凡的，而在其他情况下为恒等。该作用的同伦不动点（定义见附注 A.13）由一个向量空间 V 以及对所有 $g \in G_b$ 的线性映射 $\rho(g)$: $\psi(g)[V] \longrightarrow V$ 组成。这意味着， G_b 的偶元素线性作用，而奇元素反线性作用。这些映射必须满足扭曲复合律 $\rho(g') \circ \rho(g) = \psi_{g,\ g'V} \circ \rho(g'g)$。 G_b 的这种扭曲作用等价于中心扩张 G 的一个作用，其中 c 通过 $(-1)_V^F$ 作用。这表明，我们可以将 sVect 上 G_b 作用的同伦不动点范畴识别为 G 的费米子表示范畴。

在物理学中，酉表示发挥着重要作用。在定义费米子群的酉表示之前，我们需要说明与超厄米向量空间相关的约定。我们将讨论范围限定于有限维超向量空间，因为它们在本文中最为重要。不过，将这些概念推广到无限维情形十分直接。

定义 3.9. 给定一个超向量空间 $H \in \mathrm{sVect}$，将其复共轭 $\overline{H} \in \mathrm{sVect}$定义为与原空间相同的阿贝尔群，但采用复共轭标量乘法。厄米超向量空间 是指一个超向量空间 $H \in \mathrm{sVect}$连同一个同构 h_H: $H^* \longrightarrow H$，满足

$$H \cong (\overline{(\overline{H})^*})^* \xrightarrow{\overline{h_H}^*} \overline{H}^* \xrightarrow{h_H} H$$

是 H 上的恒等映射。酉态射 f: $(H, h_H) \longrightarrow (H', h_{H'})$ 由一个线性映射 f: $H \longrightarrow H'$ 给出，且其伴随 $f^\dagger$ 定义为

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^* & \xrightarrow{h_H} & H \\ {\scriptstyle \overline{f}^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^\dagger} \\ \overline{H'}^* & \xleftarrow[h_{H'}^{-1}]{} & H' \end{array}$$

是 f 的逆。

这里，典范同构 $((H)^*)^* \cong H$ 由$\overline{\text{求值}}$映射给出，并遵循相应的 Koszul 符号规则

$$v \longmapsto \mathrm{ev}_v : \overline{\overline{H}^*} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathrm{ev}_v(f) = (-1)^{|v||f|} f(v) \quad v \in \overline{H}, f \in \overline{\overline{H}^*}.$$

超向量空间上的厄米结构也可以等价地用内积$\langle -, - \rangle$来定义： $H \otimes H \longrightarrow H^* \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$ 使得 H_0和 H_1正交，并且 $\langle v, w \rangle = (-1)^{|v||w|} \langle w, v \rangle$。这意味着，两个偶元素的配对与通常一样是实数，而两个奇元素的配对则是纯虚数。超希尔伯特空间 是一个厄米超向量空间 H，满足$\langle v_0, v_0 \rangle \geq 0$ 对所有偶元素 $v_0 \in H_0$ 成立，且 $\frac{\langle v_1, v_1 \rangle}{i} \geq 0$ 对所有奇元素 $v_1 \in H_1$成立。我们所说的超厄米向量空间和超希尔伯特空间，与更常见的约定等价；我们将这种约定称为 $\mathbb{Z}_2$-分次厄米向量空间和 $\mathbb{Z}_2$-分次希尔伯特空间，其中配对$\langle -|- \rangle$ 满足

$$\langle v|w \rangle = \overline{\langle w|v \rangle}.$$

这种对应关系通过如下定义给出

$$\langle v|w \rangle := \begin{cases} \langle v, w \rangle & v, w \text{ even}, \\ \frac{\langle v, w \rangle}{i} & v, w \text{ odd} \end{cases}$$

对于次数不同的向量，结果为零。上述选用 i 而非 $-i$ 的符号约定，与以下约定一致：当 $v \in H$ 为奇数时，

$$\langle v, v \rangle \in i\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

换言之，该对应关系将超希尔伯特空间映射到通常意义上的 $\mathbb{Z}_2$分次希尔伯特空间，其中奇数 v也满足 $\langle v|v\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。

注 3.10. 对于超向量空间 H，同构 $H^* \cong H$ 的存在意味着 H 是有限维的。因此，为了得到无限维希尔伯特空间，我们必须对定义 3.9 作适当修改。由于本文只考虑拓扑场论，态空间将是有限维的，因此我们的定义足以满足需要。

设 (H, h_H) 是一个厄米超向量空间。若一个 $\mathbb{C}$-反线性映射 $H \longrightarrow H$（等价地，一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\overline{H} \longrightarrow H$）关于 H上的厄米结构 $(-1)^F_H \circ h_H$是酉的，我们就称其为反幺正。为说明定义中出现因子 $(-1)^F$ 的原因，我们指出，按照我们的约定，若 (H, h_H) 是一个超希尔伯特空间，那么 $(H, (-1)^F_H \circ h_H)$ 也是如此。然而，简单计算可知，只有当 H 是玻色的，(H, h_H) 才是希尔伯特空间。具体而言，这意味着当一个偶反线性映射 $T : H \longrightarrow H$ 满足

$$\langle Tv, Tw\rangle = (-1)^{|v|}\overline{\langle v, w\rangle}$$

对所有齐次 v 和 w。

我们将由 $U^f(H)$表示由酉和反酉自同构组成的 $\mathrm{Aut}^f(H)$ 的费米子子群。

定义 3.11。 设 H 是一个厄米向量空间，G 是一个费米子群。从酉表示 G到 H是费米子群同态 φ: $G \longrightarrow U^f(H)$。

例 3.12。 设 $G = \mathrm{Pin}^-_1 = \mathbb{Z}^{FT}_4$是由一个平方为 $(-1)^F$ 的时间反演对称性组成的费米子群。G 在超向量空间 $H = H_0 \oplus H_1$ 上的费米子表示由复反线性偶映射 $\phi(T) : H \longrightarrow H$ 给出，该映射的平方为分次自同构。因此，它由 H_0 上的实结构和 H_1上的四元数结构组成。特别地，注意到当且仅当 H_1 为偶数维时，这样的表示才存在。如果 H 进一步是超希尔伯特空间，且该表示是酉的，则还需额外要求 $\phi(T)$为反幺正。

3.3 时空结构群

本节令 (G, θ, c) 为任意一个内对称群。对于任意时空维数 d，都存在与 G 相关联的欧几里得时空结构群 H_d [FH21]。构造 H_d 时，需要将 G 中的内部对称性与时空的局域对称性相结合，并将洛伦兹号差 Wick 旋转为欧几里得号差。从内部对称群到时空结构群的过渡，可以用费米子群的语言，通过费米子张量积简洁地表述

$$H_d := (\mathrm{Pin}^+_d \otimes G)_0.$$

投影到第一分量会诱导一个映射 $\rho_d : H_d \longrightarrow \mathrm{Pin}^+_d / \mathbb{Z}^c_2 \cong O_d$。这使我们可以考虑具有切向 $H_d \xrightarrow{\rho_d} O_d$ 结构的 d 维流形。群

$$\hat{H}_d := \mathrm{Pin}^+_d \otimes G.$$

将在我们表述反射结构时发挥重要作用。

例3.13。 注意，$H_1 = (G \otimes \mathrm{Pin}^+_1)_{\mathrm{ev}}$ 一般并不同构于 G。相反，经过简短计算可知，它同构于 G^{op}，并具有到 O_1 的相应典范映射。

例3.14. 设 D 是 $\mathbb{R}$上的超除代数。回顾例3.2，球面$S(D)= \frac{D^\times}{\mathbb{R}_{>0}}$ 是一个带中心元 $[-1] \in S(D)$ 的费米子群，其分次由 D 上的分次诱导

而来。随着 D遍历十个两两不同构的超除代数 [， $S(D)$ 将遍历 Freed-Hopkins 十重分类 [FH21]中的十个“内部对称群” I 。这些费米子群

$$H_n(D) = (S(D) \otimes \mathrm{Pin}_n^+)_0$$

将给出 Freed-Hopkins 的十个时空结构群，见表1。

FH标签 s	0	1	0	1	2	3	4	−3	−2	−1
超除代数 D	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\mathrm{l}_1$	$\mathbb{R}$	Cl_{+1}	Cl_{+2}	Cl_{+3}	$\mathbb{H}$	Cl_{-3}	Cl_{-2}	Cl_{-1}
内部费米子对称性 $S(D)$	Spin_1^c	Pin_1^c	Spin_1	Pin_1^+	Pin_2^+	Pin_3^+	Spin_3	Pin_3^-	Pin_2^-	Pin_1^-
时空结构群 $H_n(D)$	Spin_d^c	Pin_d^c	Spin_d	Pin_d^-	$\mathrm{Pin}_d^{\tilde{c}-}$	G_d^+	G_d^0	G_d^-	$\mathrm{Pin}_d^{\tilde{c}+}$	Pin_d^+
对称类	A	AIII	D	BDI	AI	CI	C	CII	AII	DIII
对称性	Q	Q, K	-	K	Q, T'	S, K	S	S, T	Q, T	T

表1：十重分类中的内部对称群、时空结构群与超除代数之间的抽象数学关系。时空结构群的记号见[FH21]。在对称性一行中， Q 表示 U_1-电荷， K 表示反幺正粒子-空穴对称性（例如子晶格对称性），S 表示内部 Spin_3-对称性， T 表示平方为 $(-1)^F$ 的时间反演， T' 表示平方为 1 的时间反演对称性。

我们通过推导一个包含 H_d的正合序列来结束本节。该序列由以下一般命题得出，其证明是直接的。

命题 3.15. 设 G, H 为费米子群。若 H 有一个非平凡中心元 $c \in H$，则存在一个拓扑群正合序列

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} G \otimes H \xrightarrow{\pi} H_b \longrightarrow 1,$$

其中的映射由显然的包含映射和投影给出。若 G 还具有非平凡的分次同态，则可将其限制为一个正合序列

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{i} (G \otimes H)_0 \xrightarrow{\pi} H_b \longrightarrow 1.$$

推论 3.16. 设 G 是一个具有非平凡中心元且诱导的时空结构群为 H_d 的费米子群。该序列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}_d \longrightarrow H_d \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

是正合的。

3.4 费米子群的 2-群模型

本文的一个目标是给出拓扑场论的显式代数刻画。为了用有限数量的具体信息清晰地描述它们，方便的做法是使用尽可能精简、能够涵盖所有相关同伦信息的组合模型。例如，可以将空间 SO_2 构造成一个单纯集合，把圆划分为 m 个点和 m 条线段。从代数角度，我们可以将其描述为幺半范畴 $\mathcal{C}_m$ ，它的对象群为 $\mathbb{Z}_m$ ，并且

$$\mathrm{Hom}(n_1, n_2) = \{k \in \mathbb{Z} : n_2 - n_1 \equiv k \pmod m\}$$

其中复合由加法给出。当然，对于大多数应用而言，最容易使用的是 $m = 1$。与这一描述对应的单纯集合源于这样一个事实： $SO_2 = B\mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{C}_1 = *//\mathbb{Z}$ 的神经；后者是一个只有一个对象且有 $\mathbb{Z}$ 个态射的范畴。存在一个幺半等价 $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_m$ ，它将唯一的对象映射到 $0 \in \mathbb{Z}_m = \mathrm{ob}\,\mathcal{C}_m$ ，并将态射 $k \in \mathbb{Z}$ 映射到自同构 $mk \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(0,\ 0)$。注意，这不是严格同构，但它是全忠实且本质满的。由于范畴 $*//\mathbb{Z}$ 中所有同构对象都相等，我们称它为 $\mathcal{C}_m$ 的骨架模型。更抽象地看，范畴 $\mathcal{C}_m$ 可以视为 2-群的同伦商或半直积

$$\mathcal{C}_m = \mathbb{Z}_m \rtimes (*//\mathbb{Z})$$

其中， $*//\mathbb{Z}$ 对 $\mathbb{Z}_m$ 的作用由典范满同态 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m = Z(\mathbb{Z}_m)$诱导。关于 2-群的基本理论，请参阅附录 A；关于它们的半直积和短正合序列，请参阅附录 A.3。

从上面的引言可以得出，骨架模型通常最容易描述。然而，在本文对费米子群的应用中，稍大一些的模型更为方便。例如，从模型 $*//\mathbb{Z}$出发，我们可以轻松描述如下 2-群的正合序列：

$$1 \longrightarrow *//\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} *//\mathbb{Z} \longrightarrow *//\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow 1$$

它对应于拓扑空间的纤维化

$$B\,\mathrm{Spin}_2 \longrightarrow BSO_2 \longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c.$$

然而，如果我们想改为用以下正合序列来描述

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow SO_2 \longrightarrow 1$$

就 2-群而言，我们更倾向于使用模型 $\mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}_2^c \rtimes (*//\mathbb{Z})$，其中 Spin_2有两个对象 1 和 c。我们称之为 Spin_2的 费米子骨架模型。于是，映射到 $SO_2 = *//\mathbb{Z}$ 的映射，是将态射 $k \in \mathrm{Hom}(n_1,\ n_2)$（其中 $n_1,\ n_2 \in \mathbb{Z}_2$）映到其本身。根据上一段所述的等价 $*//\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2^c \rtimes (*//\mathbb{Z})$（取 $m{:=}\,2$的情形），映射 $*//\mathbb{Z} \cong \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow SO_2 = *//\mathbb{Z}$确实如上所述，是乘以 2。

我们将上述讨论从 Spin_2 推广到一般的、非玻色的费米子群 G ，即 $c \neq 1$。本文将证明，只需考察截断 $\mathcal{G} := \pi_{\leq 1}G$ ，其中我们消去了所有高阶同伦群；它是 BG 的基本 2-群。因此，我们将费米子群的定义改为费米子 2-群的定义：

定义 3.17. 费米子 2-群 是一个 $\mathbb{Z}_2^T$-分次 2-群 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \sqcup \mathcal{G}_1$ ，连同一个辫化幺半函子 $\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow Z(\mathcal{G})$，其中 $Z(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的 Drinfeld 中心，且其像落在 $\mathcal{G}$ 的零次分量中。

注 3.18. 展开从 $\mathbb{Z}_2^c$ 到 $Z(\mathcal{G})$ 的辫函子定义后，我们发现，这等价于指定一个元素 $c \in \mathcal{G}_0$ ，连同一个半辫 $\sigma_{c,\ g}\colon\ c \otimes g \longrightarrow g \otimes c$ ，满足 $\sigma_{c,\ c} = \mathrm{id}$，以及一个与半辫相容的同构 $c \otimes c \longrightarrow 1$ 。这精确刻画了平方为 1 的中心元 c 的编码。

给定一个费米子群 G，基本 2-群是一个费米子 2-群，其中大多数相干数据都是严格的。然而，基本 2- 群的规范 2- 群模型通常过于庞大，不便实际使用。因此，我们希望使用骨架模型，因为其中的相干数据通常会变得更有趣。不过，正如上文的费米子群 Spin_2 一样，我们不会为 $\pi_{\leq 1}G$ 使用骨架模型，而是从 $\pi_{\leq 1}G_b$ 的一个骨架模型 $\mathcal{G}_b$ 开始。

回顾注 3.6，扩张

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow G \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

可以等价地描述为映射 $\omega : BG_b \longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c$。这会诱导出映射 $B\pi_{\leq 1}G_b \longrightarrow BG_b \longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2^c$，我们也可以等价地将其表示为骨架 2-群之间的映射 $F : \mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$。

定义 3.19。设 G 为一个费米子群，并令 $\mathcal{G}_b$ 表示 2-群 $\pi_{\leq 1}G_b$ 的骨架模型。G 的费米子骨架模型是费米子 2-群

$$\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$$

其中 $\mathcal{G}_b$ 通过映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$.[7] 作用于 $\mathbb{Z}_2^c$

与 $\pi_{\leq 1}G$ 的典范模型不同，费米子骨架模型的结合子通常是非平凡的。然而，元素 $c \in \mathcal{G}$ 仍将严格平方为 1，并与其他对象交换。根据附录 A 中引理 A.4 给出的骨架 2-群之间映射的分类，我们可以如下明确描述 2-群同态 $F : \mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$。数据由一个映射 $\Xi : \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$（函子 F 的幺半性数据）以及一个映射 $\Gamma : \pi_1(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$（函子 F 在态射 $1 \longrightarrow 1$ 上的作用）组成。函子条件等价于以下等式

$$\Gamma(\gamma\delta) = \Gamma(\gamma)\Gamma(\delta) \qquad \Gamma(g\gamma g^{-1}) = \Gamma(\gamma)$$

对于 $\gamma, \delta \in \pi_1(G_b)$ 和 $g \in \pi_0(G_b)$。五边形条件等价于以下等式

$$\Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b} = dR$$

映射 $\pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$，其中 $\alpha_{\mathcal{G}_b} : \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \longrightarrow \pi_1(G_b)$ 是 $\mathcal{G}_b$ 的结合子。我们推导出条件：$\Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b} \in H^3(\pi_0(G_b)\ \mathbb{Z}_2^c)$ 在上同调中是平凡的，而且由 Ξ 唯一确定。

2-群的 2-态射是两个幺半函子之间不保基点的幺半自然变换。由引理 A.4 可知，在这种情况下，它们由满足 $\Xi_1 = \Xi_2 \cdot d\sigma$ 的映射 $\sigma : \pi_0(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$ 给出。换言之，$\Xi_1\Xi_2^{-1}$ 衡量了 σ 未能成为同态的程度。在特殊情形 $\Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b} = 0$ 下，我们推导出 $\Xi \in Z^2(\pi_0(G_b)\mathbb{Z}_2^c)$ 是一个上同调类，因此在 2-同构意义下，只有 Ξ 在 $H^2(\pi_0(G_b)\ \mathbb{Z}_2^c)$ 中的类是重要的。否则，当我们固定一个参考 Ξ_0，使其在上同调中平凡化 $\Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b}$ 时，所有其他 Ξ 在 2-同构意义下仍由 $H^2(\pi_0(G_b)\ \mathbb{Z}_2^c)$ 分类。换言之，若我们固定 Γ 使得方程 3.4 成立，且 $\Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b}$ 在上同调中为零，那么将其变为同态 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$ 的各种方式，在 2- 同构意义下由一个 $H^2(\pi_0(G_b)\ \mathbb{Z}_2^c)$-挠子分类。综上所述，我们有

命题 3.20。设 $\mathcal{G}_b$ 是一个骨架的 2-群。则同态的等价类 s

$$\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$$

组成短正合列

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow H^2(\pi_0(G_b), \mathbb{Z}_2^c) \longrightarrow \pi_0 \operatorname{Hom}(\mathcal{G}_b, */\!/\mathbb{Z}_2^c) \\ &\longrightarrow \{\Gamma \in \operatorname{Hom}(\pi_1(\mathcal{G}_b), \mathbb{Z}_2^c) : \Gamma(g\gamma g^{-1}) = \Gamma(\gamma), \Gamma \circ \alpha_{\mathcal{G}_b} = 0 \in H^3(\pi_0(\mathcal{G}_b), \mathbb{Z}_2^c)\} \longrightarrow 1 \quad . \end{aligned}$$

我们可以如下从原始费米子群推导出上述数据。李群的短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow G \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

[7]若 A 是一个阿贝尔群，则 2-群 $*/\!/A$ 通过恒等映射 $*/\!/A \longrightarrow */\!/A$ 作用于 A。明确地说，这意味着将 $*/\!/A$ 中对应于 $a \in A$ 的路径 $a : * \longrightarrow *$ 映射为双范畴 $*/\!/A$ 上恒等函子的自然自同构，该自同构将 $*$ 映射到 a。用幺半范畴的语言来说，$\rho(a)$ 是从 A 到 A 的无基点自然变换，其中 $\rho(a)_* = a$，其余部分为平凡变换。

诱导出一个同伦群长正合序列，其末尾部分如下所示

$$1 \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(G_b) \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(G_b) \longrightarrow 1.$$

特别要注意，同态 Γ 非零，当且仅当 1 和 c 在 G 中由一条路径连接。注意， Γ 由映射 $G_b \longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2$ 的 π_1 给出；根据同伦假设，这对应于幺半函子对恒等对象的自同构所执行的操作。因此，它对应于我们之前称为 Γ 的态射。当 Γ 平凡时，我们处于序列 3.20 中映射的核中，因此得到一个典范类 $\Xi \in H^2(\pi_0(G_b)\ \mathbb{Z}_2^c)$。这个类分类了短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(G_b) \longrightarrow 1.$$

更一般地说， Ξ 有一种同伦解释，即为 2-型映射 $\pi_{\leq 2}G_b \longrightarrow B^2\mathbb{Z}_2$ 的定义域和陪域的 k-不变量提供比较数据。在陪域的 k-不变量平凡这一特殊情况下，这归结为对复合映射的平凡化

$$B\pi_0(G) \xrightarrow{k} B^3\pi_1(G) \longrightarrow B^3\mathbb{Z}_2^c$$

至少当 $\pi_0(G)$ 对 $\pi_1(G)$ 的作用是平凡作用时如此。由于 k-不变量在同伦假设下对应于结合子，这就是之前对 R 的描述。

例 3.21. 考虑 $\pi_0 G_b = \mathbb{Z}_2$ 和 $\pi_1 G_b = \mathbb{Z}$的情形。 $\pi_0 G_b$ 对$\pi_1 G_b$ 有两种可能的作用：平凡作用和 $n \longmapsto -n$，我们将其记为 $\mathbb{Z}_-$。平凡作用对应的结合子分类群为$H^3(B\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}) = 0$，非平凡作用对应的结合子分类群为 $H^3(B\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_-) = \mathbb{Z}_2$。因此，具有 $\pi_0 G_b = \mathbb{Z}_2$ 和 $\pi_1 G_b = \mathbb{Z}$的 2-群有三个同构类。它们是以下空间的基本 2-群：

$$SO_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad O_2 \cong SO_2 \rtimes \mathbb{Z}_2 \text{ and } \mathrm{Pin}_2^- \cong \frac{SO_2 \rtimes \mathbb{Z}_4}{\mathbb{Z}_2}$$

例如， $H^3(B\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_-) \cong H^2(B\mathbb{Z}_2,\ U(1)_-)$ 中的非平凡元素对应于一个非平凡李群扩张： $\mathbb{Z}_2$ 被 $U(1)$ 扩张，且 $\mathbb{Z}_2$ 对 $U(1)$ 的作用是非平凡作用；该群就是 Pin_2^-。

我们研究对应于 O_2 的 2-群的可能映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2$。上同调群$H^2(BO_2,\ \mathbb{Z}_2^c) \cong \mathbb{Z}_2^2$ 由 w_2 和 w_1^2 生成，它们对应于李群的四种扩张

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow G \longrightarrow O_2 \longrightarrow 1.$$

它们分别是平凡扩张、Pin_2^+，Pin_2^-，以及这样一种扩张：当且仅当 $\det A_1 = \det A_2 = -1$ 时， A_1，$A_2 \in O_2$ 的乘积会多出一个 $c \in \mathbb{Z}_2^c$。用相应的骨架 2-群$\mathcal{G}_b = \mathbb{Z}_2 \rtimes */\!/\mathbb{Z}$来表示，我们可以如下描述这四个映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$。存在两个同态$\Gamma$： $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathcal{G}_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$；一个是平凡同态，另一个是满射。当 $\pi_0(G_b)$ 对 $\pi_1(G_b)$ 的作用非平凡时出现的附加条件 $\Gamma(n) = \Gamma(-n)$ 自动成立。五边形条件为空，因为 $\mathcal{G}_b$ 的结合子是平凡的。若 Γ 非平凡，则 G_b 中有一个环路可提升为路径 $1 \longrightarrow c$，因此该扩张只能是 Pin_2^+ 或 Pin_2^-。接下来， Ξ 在 2-同构意义下有两种可能，因为 $H^2(B\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2^c) = \mathbb{Z}_2$。

接下来，我们将费米子骨架模型 $\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$ 写成幺半范畴的定义。我们使用上述以 Γ表示的 2-群同态 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2$ 的显式描述，并应用附录 A 中半直积的定义。对象为集合 $\pi_0(G_b) \times \mathbb{Z}_2^c$，其张量积定义为

$$g_1 \otimes g_2 = \Xi_{g_1,g_2} g_1 g_2 \quad c \otimes c = 1 \quad c \otimes g = g \otimes c.$$

换言之，在 $1 \neq c \in \pi_0(G)$ 的情况下，这恰好就是 $\pi_0(G)$。然而，在另一种情况下，当$\pi_0(G) \cong \pi_0(G_b)$ 时，这个集合的大小是其两倍。给定 $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \in \{\pm 1\}$ 和 $g_1,\ g_2 \in \pi_0(G)$，同态集

$g_1 c^{\epsilon_1} \longrightarrow g_2 c^{\epsilon_2}$ 非空仅当 $g_1 = g_2$。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b}(gc^{\epsilon_1}, gc^{\epsilon_2}) = \{g\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_b}(g,g) : \Gamma(\gamma) = c^{\epsilon_1+\epsilon_2}\}$$

这里我们用到了这样一个事实：根据骨架模型的定义， $g \longrightarrow g$ 中所有的态射都具有如下形式： $g\gamma$，其中 $\gamma \in \pi_1(\mathcal{G}_b)$。 $\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$ 中的态射的复合与张量积，是在适当改变定义域和陪域后，由 $\mathcal{G}_b$中的复合与张量积给出的。结合子同样由 $\mathcal{G}_b$的结合子诱导而来。读者需注意，尽管带有平凡结合子的骨架 2-群 $\mathcal{G}_b$ 会给出带有平凡结合子的费米子骨架2-群，但 $\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$ 的骨架模型的结合子可能并非平凡。

为了让费米子骨架模型中的复合更直观，我们引入以下记号。给定 $\gamma \in \pi_1(G_b)$，我们用同一个符号表示 $\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$中的态射 $\gamma\colon 1 \longrightarrow \Gamma(\gamma)$。 $\mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$ 中在映射 $G \longrightarrow G_b$ 下投影到 $\gamma \in \pi_1(G_b)$的另一个态射，则由 $c\gamma = \mathrm{id}_c \otimes \gamma\colon c \longrightarrow c\Gamma(\gamma)$给出。这样，我们便可以在 $\mathcal{G}_b$ 中复合态射，同时牢记 $g_1 \otimes g_2 = \Xi_{g_1,\ g_2} g_1 g_2$当然， γg 可能在 $\mathcal{G}_b$中就已经不等于 $g\gamma$。例如，若 $\Gamma(\gamma) = c$，那么 $c\gamma \circ \gamma$ 就是 $\mathcal{G}$中的一个环路。

我们简要转而用 2-群的语言来描述对偶费米子群。注意，存在唯一一个非平凡的 2-群同构

$$\phi : \mathbb{Z}_2^T \times */\!/\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \mathbb{Z}_2^T \times */\!/\mathbb{Z}_2^c$$

它由恒等函子以及对象对 $(T,\ T)$ 上的非平凡幺半性数据给出。由于这是除 2-同构外唯一的非平凡 2-群同构，它在去环化下对应于注 3.6 中定义的映射 ϕ （它不可零伦同伦）。因此，若 $\mathcal{G}_b \longrightarrow \mathbb{Z}_2^T \times */\!/\mathbb{Z}_2^c$ 定义了一个费米子 2-群，要描述其对偶，我们必须计算复合

$$\mathcal{G}_b \longrightarrow \mathbb{Z}_2^T \times */\!/\mathbb{Z}_2^c \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2^T \times */\!/\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c.$$

由于 ϕ 作为函子是恒等的，对偶具有相同的 Γ。简短计算表明，其 Ξ变为 $\Xi^{\mathrm{op}}_{g_1,\ g_2} := c^{\theta(g_1)\theta(g_2)}\Xi_{g_1,\ g_2}$。

We 现在转而讨论时空结构群。回顾推论 3.1 中的正合序列 6

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}_d \longrightarrow H_d \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

我们希望将其限制为一个 2-群的正合序列

$$1 \longrightarrow \pi_{\leq 1}\,\mathrm{Spin}_d \longrightarrow \pi_{\leq 1} H_d \longrightarrow \pi_{\leq 1} G_b \longrightarrow 1$$

对于 $d = 1,2$ 这几种情况。和之前一样，我们将使用 $\pi_{\leq 1} G_b$ 的骨架模型以及 Spin_d 的费米子骨架模型。思路是取投影映射的一个集合论截面，并通过考察乘法下的行为来研究该正合序列。换句话说，我们希望计算后一个 2-群对前一个 2-群的作用，并按照附录 A.3 中的说明，将中间的 2-群构造成一个半直积。

令 $e_1 \in \mathrm{Pin}_d^+$ 表示对应于 $\mathbb{R}^d$ 中单位长度向量的生成元，并令 $\Xi\colon \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$ 和 $\Gamma\colon \pi_1(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$ 如前所述，用于分类 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$。令 $s\colon G_b \longrightarrow G$ 为一个截面，它通常既不是群同态，也不连续。于是我们可以定义 $H_d \longrightarrow G_b$ 的一个集合论截面： $s(g) \otimes e_1^{\theta(g)} \in H_d$，它导出一个集合论截面 $\mathrm{Obj}\,\pi_{\leq 1} G_b \longrightarrow \pi_{\leq 1} H_d$。这是计算附录 A.3 开头短正合列所产生的作用的主要要素。 g 对 $\pi_{\leq 1}\mathrm{Spin}_d$ 的作用是通过与该元素共轭实现的，结果表明，对 $d = 1$ 而言此作用是平凡的。简短计算

$$(s(g_1) \otimes e^{\theta(g_1)1})(s(g_2) \otimes e_1^{\theta(g_2)}) = c^{\theta(g_1)\theta(g_2)} s(g_1)s(g_2) \otimes e_1^{\theta(g_1)+\theta(g_2)} = c^{\theta(g_1)\theta(g_2)} \omega_{g_1,g_2} s(g_1 g_2) \otimes e_1^{\theta(g_1 g_2)}$$

表明，截面不满足乘法性的程度由与该扩张对应的 2-余循环 ω^{op}：$G_b\times G_b \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 度量。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow G^{\mathrm{op}} \longrightarrow G_b \longrightarrow 1.$$

由于这个 2-余循环在 2-群层面诱导出 Ξ^{op}，我们可以得出，对于 $d=1$，2-群的正合序列所诱导的 $\mathcal{G}_b$ 在 $\mathsf{Spin}_1=\mathbb{Z}_2^c$ 上的作用对应于分类 G^{op} 的映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$，因此由 Ξ^{op} 和 Γ 组成。

现在我们考虑 $d=2$，并希望理解 $\mathcal{G}_b$ 在 $\mathsf{Spin}_2=\mathbb{Z}_2^c\rtimes B\mathbb{Z}$ 上诱导的作用。由于我们已经计算了 $\mathcal{G}_b$ 在 $\mathbb{Z}_2^c\subseteq \mathsf{Spin}_2$，上的作用，现在考虑它在生成态射 $\eta\colon 1\longrightarrow c$（属于 Spin_2）上的作用。用明确的拓扑术语表示为

$$\eta(t)=\cos(\pi t)+e_1e_2\sin(\pi t),$$

其中，$e_2\in \mathsf{Pin}_2^+$ 来自 $\mathbb{R}^2$ 中一个与 e_1 正交的向量。现在我们计算 $g\in G_b$ 在 η 内部的作用：

$$\begin{aligned}\eta(t)(s(g)\otimes e_1^{\theta(g)}) &= s(g)\otimes (e_1^{\theta(g)}\cos(\pi t)+(e_1e_2)e_1^{\theta(g)}\sin(\pi t))\\ &= s(g)\otimes (e_1^{\theta(g)}\cos(\pi t)+c^{\theta(g)}e_1^{\theta(g)}(e_1e_2)\sin(\pi t))\\ &= s(g)\otimes (e_1^{\theta(g)}\cos((-1)^{\theta(g)}\pi t)+e_1^{\theta(g)}(e_1e_2)\sin((-1)^{\theta(g)}\pi t))\\ &= (s(g)\otimes e_1^{\theta(g)})\eta((-1)^{\theta(g)}t).\end{aligned}$$

注意，η 的逆是 $\eta(1-t)=c\eta(-t)$，因此 $t\longmapsto \eta(-t)$ 是 $c\eta^{-1}$。我们得到，$\pi_0(G_b)$ 在 $\theta(g)=0$ 时将 η 映射到 η；而在 $\theta(g)=1$ 时，则映射到另一个生成态射 $c\eta^{-1}\colon 1\longrightarrow c$。

描述这个作用还涉及更多数据（尤其是在态射层面），但按照附录 A.3，这些数据都很容易计算。

注 3.22. 为便于阐述，我们一直谨慎地区分例如将幺半范畴 $*/\!/\mathbb{Z}$ 视为一个 2-群，与其神经的实现 $B\mathbb{Z}$。在本文其余部分，我们常常会隐式地应用同伦假设，并用记号 $B\mathbb{Z}$ 来表示二者。

3.5 费米子分次代数

若 G 是一个离散群，则强 G-分次代数是一个代数 $\mathcal{A}$，并带有如下直和分解的向量空间：

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{g\in G} A_g$$

其性质是，乘法映射限制后得到向量空间同构 $A_g\otimes_A A_h\cong A_{gh}$。在 [Dav11], 中证明，目标为 Alg 且结构群为 $SO_2\times G$ 的二维扩展拓扑场论，可由带有对称 Frobenius 结构λ 的强分次 G-代数分类：$\mathcal{A}\longrightarrow\mathbb{C}$，其中对所有不等于 1 的 $g\in G$

$$\lambda(a_g)=0 \quad \forall a_g\in A_g.$$

由于接下来的几节在某种意义上将她的结果推广到 G为费米子群的情形，我们将简要讨论强分次代数在这一情形下的类似概念。

因此，设 $(G,\ c,\ \theta)$ 是一个离散费米子群。受物理学启发，我们认为 G 的时间反演元素应当与 i 反对易，这与定义 3.7 中要求它们以反线性方式作用类似。为了恰当地纳入费米子，我们必须将 $\mathbb{C}$ 上的代数替换为 $\mathbb{C}$ 上的超代数，它们定义为带有相应 Koszul 符号的 $\mathbb{Z}_2$-分次代数。在附录 C 中，我们总结了正文所需的超代数基本定义和技术结果。我们先给出一个未考虑费米子宇称元素 $c\in G$ 的定义：

定义 3.23。 一个强 $(G,\ \theta)$-分次代数 是一个复超向量空间 $\mathcal{A}$，它是 $\mathbb{R}$ 上的超代数，并附带一个复超向量空间的直和分解

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{g\in G}A_g$$

使得乘法定义了一个实线性同构 $A_g\otimes_{A_e}A_h\cong A_{gh}$ 和 $a_gi=(-1)^{\theta(g)}ia_g$ 若$a_g\in A_g$。

请注意，当 θ 是平凡的时，此定义恢复了 $\mathbb{C}$ 上的强 G分次代数的概念。现在，我们还希望施加条件，使 $c\in G$ 对应于超代数的 $\mathbb{Z}_2$分次；稍后将解释的自旋统计联系将为此提供动机。若 A 是超代数，我们将与分次同构$(-1)_A^F\colon\ A\longrightarrow A$ 相关联的$(A,\ A)$-双模记作 $A_{(-1)^F}$，参见定义 C.18。

定义 3.24. 一个*(*强*)*费米子分次代数是一个(G,θ)-分次代数 a

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{g\in G}A_g$$

使得 $A_c=A_{(-1)^F}$ 与乘法相容，具体而言

$$(-1)^F\cdot(-1)^F=1\quad(-1)^Fa_g=(-1)^{|a_g|}a_g(-1)^F\in A_{gc}$$

对所有 $a_g\in A_g$均成立。若 G 是玻色的，即 $c=1$，则我们称 $\mathcal{A}$ 为玻色子分次代数，并且仍要求 $A_c=A=A_{(-1)^F}$。

例3.25。 设 $\theta\colon\ H\longrightarrow\mathbb{Z}_2^T$是一个玻色群， $G=H\times\mathbb{Z}_2^c$ 是诱导分裂费米子群。设 $\mathcal{B}$ 是一个强 (H,θ)-分次代数。那么

$$\mathcal{B}\oplus\mathcal{B}_{(-1)^F}=\frac{\mathcal{B}[x=(-1)^F]}{(x^2-1,xb=(-1)^{|b|}bx)}$$

是一个费米子分次代数。例如，若 H 是平凡的，且 $\mathcal{B}=Cl_{p,q}$ 是一个克利福德代数，那么

$$\mathcal{B}\oplus\mathcal{B}_{(-1)^F}\cong\begin{cases}Cl_{p,q}\oplus Cl_{p,q} & p-q\equiv 0\pmod 4\\ Cl_{p,q+1} & p-q\equiv 1\pmod 4\\ \mathbb{C}l_{p,q} & p-q\equiv 2\pmod 4\\ Cl_{p+1,q} & p-q\equiv 3\pmod 4\end{cases}$$

为证明这一点，设 $\mathrm{vol}:=e_1\dots e_{p+q}$是一个体积元。注意， $a:=(-1)^F\mathrm{vol}$ 的次数为 $(-1)^{p+q}=(-1)^{p-q}$，并且与所有 e_i 分次交换。此外， $a^2=(-1)^{p+q}\mathrm{vol}^2$，简短计算表明，若 $p-q\equiv 0,1$（模 4），则 $\mathrm{vol}^2=1$；否则 -1。因此，当 $p-q\equiv 0,3$（模 4）时， $a^2=1$；否则−1。由此可见，如上所述共有四种情形。

例 3.26. 令 $G=\mathrm{Pin}_1^+=\mathbb{Z}_2^c\times\mathbb{Z}_2^T$ 为仅含一个平方为 1 的时间反演的费米子群。我们寻找满足 $A_1=\mathbb{C}$ 的费米子 G 分次代数 $\mathcal{A}$。令 $x_T\in A_T$ 表示一个优选基元素。一旦选择 $A_T=\mathbb{C}$ 还是 $\Pi\mathbb{C}$，以及 x_T 的平方为何，所有的 $\mathcal{A}$ 就都唯一确定了。由于在二维拓扑场论的语境下讨论此例时（例5.38），原因会变得显而易见，因此我们只考虑 $x_T^2=\pm 1$ 的情形。忽略

$\mathbb{Z}_2^T$ 分次，这些选择得到以下实超代数

$$A \oplus A_T \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & x_T^2 = 1, |x_T| = 0 \\ \mathbb{H} & x_T^2 = -1, |x_T| = 0 \\ Cl_{+2} & x_T^2 = 1, |x_T| = 1 \\ Cl_{-2} & x_T^2 = -1, |x_T| = 1 \end{cases}$$

从上一个例子中，我们还可以得到

$$\mathcal{A} \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R}) & x_T^2 = 1, |x_T| = 0 \\ \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} & x_T^2 = -1, |x_T| = 0 \\ \mathbb{C}l_2 & x_T^2 = 1, |x_T| = 1 \\ \mathbb{C}l_2 & x_T^2 = -1, |x_T| = 1 \end{cases}$$

请注意，尽管最后两个超代数同构，但它们作为G-分次代数并不同构。

如果我们一开始选用另一个在 Morita 等价意义下的 Morita 可逆复超代数 $A_1 = \mathbb{C}l_1$ ，则会得到类似的结果，如下所示。首先，请注意，仍有两个可逆（A、 A）-双模同构类，分别由 A和 ΠA给出。若 $|x_T| = 0$，则 x_T满足$ex_T = x_T e$；否则，不失一般性地有 $ex_T = -x_T e$，因为 $\Pi\mathbb{C}l_1 \cong (\mathbb{C}l_1)_{(-1)^F}$。当$|x_T| = 0$时， x_T和 i生成的代数 B同构于 $M_2(\mathbb{R})$（若 $x_T^2 = 1$），否则同构于 $\mathbb{H}$。由于这些生成元与 e 对易，我们得到

$$A \oplus A_T \cong B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}l_1 \cong M_2(\mathbb{C}l_1)$$

在这两种情况下，尽管它们作为分次代数并不同构。注意， $\mathbb{C}l_1 \oplus (\mathbb{C}l_1)_{(-1)^F} \cong \mathbb{C}l_2$，因为 $ie(-1)^F$ 和 e 是反对易的奇生成元，因此

$$\mathcal{A} \cong M_2(\mathbb{C}l_1)$$

在情形 $|x_T| = 1$ 中，三个生成元 T、 e和 iT均为奇元并且两两反对易，因此 $A \oplus A_T$是一个克利福德代数。计算平方 $(iT)^2 = T^2$得到

$$A \oplus A_T \cong \begin{cases} Cl_{+3} & T^2 = 1 \\ Cl_{1,2} & T^2 = -1 \end{cases}$$

总而言之，我们得到

$$\mathcal{A} \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{C}l_1) & x_T^2 = 1, |x_T| = 0 \\ M_2(\mathbb{C}l_1) & x_T^2 = -1, |x_T| = 0 \\ \mathbb{C}l_4 & x_T^2 = 1, |x_T| = 1 \\ \mathbb{C}l_{2,2} & x_T^2 = -1, |x_T| = 1 \end{cases}$$

现在，我们已经指定了八个两两不同构的费米子 G 分次代数，对于这些代数， A_1 是 Morita 可逆的。

稍后我们还需要将费米子分次代数的定义推广到 2-群。我们从最一般的定义开始

定义3.27。 设 $(\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \sqcup \mathcal{G}_1,\ \mathbf{1},\ \alpha,\ c,\ \sigma_{c,\,-},\ \omega\colon\ c \otimes c \longrightarrow \mathbf{1})$ 是一个费米子 2-群。一个 $\mathcal{G}$分次代数是一个复超向量空间

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})} A_g$$

以及

- 一个元素 $1 \in A_1$,
- $\mathbb{R}$-线性映射 $\cdot\colon\ A_g \otimes A_{g'} \longrightarrow A_{g\otimes g'}$,
- 以及对所有态射 $\gamma\colon\ g \longrightarrow g'$, $\mathbb{C}$-线性映射 $F_\gamma\colon\ A_g \longrightarrow A_{g'}$

使得 1 是乘法 $\cdot$ 的单位元，并且

$$\begin{aligned} F_{\alpha(g,g',g'')}[(a_g \cdot a_{g'}) \cdot a_{g''}] &= a_g \cdot (a_{g'} \cdot a_{g''}) \\ a_g i &= (-1)^{\theta(g)} i a_g \\ F_{\gamma_1\otimes\gamma_2}(a_{g_1} a_{g_2}) &= F_{\gamma_1}(a_{g_1}) F_{\gamma_2}(a_{g_2}) \text{ for all morphisms } \gamma_1 : g_1 \longrightarrow h_1, \gamma_2 : g_2 \longrightarrow h_2 \end{aligned}$$

并且 $A_c = A_{(-1)^F}$ 是 A_1 上的双模，使得 $\omega\colon\ c^2 \cong 1$ 的数据以如下意义诱导出乘法:

$$F_\omega[(-1)^F \cdot (-1)^F] = 1$$

成立，并且交换数据 $\sigma_{c,\ g}\colon\ g \otimes c \cong c \otimes g$ 以如下意义诱导出 $(-1)^F$ 的自然性:

$$F_{\sigma_{c,g}}[(-1)^F \cdot a_g] = (-1)^{|a_g|} a_g \cdot (-1)^F$$

成立。

注意，当费米子 2-群实际上是一个 1-群时，该定义就简化为上文给出的费米子分次代数定义。若乘法诱导出同构 $A_g \otimes_{A_e} A_{g'} \longrightarrow A_{g\otimes g'}$，则称费米子 2-群分次代数为强分次 。

注 3.28。 最好将 (A_1, A_1)-双模 $A_{(-1)^F}$ 和 A_c 之间的识别也作为数据纳入定义。不过，这两种定义都会导出等价的双范畴，因此我们不再赘述这一细微调整。

注 3.29。 回顾一下，2-群 $\mathcal{G}$ 中态射的复合由态射的张量积唯一确定：只需通过与 2-群中的对象作张量积，适当地平移可复合态射。利用这些观察，费米子 2-群分次代数必须满足的关于态射的条件等价于以下三个条件

$$\begin{aligned} F_\gamma \circ F_{\gamma'} &= F_{\gamma\circ\gamma'} \text{ for all composable morphisms } \gamma, \gamma' \\ a_{k'} \cdot F_\gamma(a_k) &= F_{k'\otimes\gamma}(a_{k'} \cdot a_k) \text{ for all } a_k \in A_k \text{ and } a_{k'} \in A_{k'} \\ F_\gamma(a_k) \cdot a_{k'} &= F_{\gamma\otimes k'}(a_k \cdot a_{k'}) \text{ for all } a_k \in A_k \text{ and } a_{k'} \in A_{k'} \end{aligned}$$

注 3.30. 定义中的许多数据都是冗余的。例如，只需为每个对象同构类选取一个代表元指定 A_g ，并为形如 $\gamma\colon\ 1 \longrightarrow g$ 的态射指定 F_γ 。一种非常高效的呈现方式是使用 2-群的费米子骨架模型。

4 非扩展拓扑场论的自旋统计与反射结构

我们在第3.3节中看到，如何将内对称群 G 与时空结构群 H_d 联系起来。本节将定义：取值于超向量空间的非扩张拓扑 H_d-场论满足自旋统计并具有反射结构，意味着什么。

4.1 定义的物理动机

我们先从物理视角说明这些定义的动机。对数学感兴趣的读者可以放心跳过本节。自旋统计联系告诉我们，可以根据粒子的自旋（整数/半整数）确定其统计性质（费米子/玻色），反之亦然。粒子的自旋由其在洛伦兹变换下的变换方式决定。为简单起见，假设采用欧几里得号差；在 Wick 旋转下，洛伦兹群成为基本的时空结构群 SO_d，其中 d 是时空的维数。玻色粒子属于 SO_d 的某个不可约表示（V、ρ）。这些表示由一个称为自旋的单个非负整数 $a \in \mathbb{Z}$ 分类。举例来说，若要定义一个自旋为 $a = 1/2$ 的粒子，就需要使用带有 2π 的旋转来得到 -1。这并不奇怪，因为半整数自旋粒子实际上不按 SO_d 的表示变换，而是按自旋群 Spin_d 的表示变换。自旋群是 $\mathrm{Spin}_d \longrightarrow SO_d$ 的双覆盖；其核有两个元素 $\mathbf{1}$ 和 c，且 $c^2 = 1$。整数自旋的表示满足 $R(c) = 1$，因此也给出 SO_d 的表示。然而，半整数自旋的表示并非如此，而是满足 $R(c) = -1$。因此，自旋-统计定理可以重新表述如下：若 $R(c)$ 以 -1 作用于粒子，则这些粒子应满足费米统计；若 $R(c)$ 以 $\mathbf{1}$ 作用于粒子，则这些粒子应满足玻色统计。

从数学上说，玻色统计与费米子统计的区别通过假设态希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是一个超空间，即具有 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$来形式化。如果 $\mathcal{H}$ 是某个单粒子希尔伯特空间的福克空间，那么分次算子就是费米子数 F的宇称 $(-1)^F$。换言之，$\mathcal{H}_0$ 由玻色子的多粒子态以及含有偶数个费米子的态组成。即使 $\mathcal{H}$ 不是二次量子化的单粒子空间，我们仍会滥用记号，将这一运算记为 $(-1)^F$。随后，通过要求超空间 $\mathcal{H}$中出现 Koszul 符号来实现真正的费米子统计。用数学术语来说，我们可以说，在幺半范畴 $(\mathrm{sVect}_{\mathbb{C}}, \otimes)$ 上取非平凡的（对称）编织。现在我们可以表述自旋统计联系：要求（欧几里得）自旋洛伦兹群中的元素 $c \in \mathrm{Spin}_d$ 在 $\mathcal{H}$上按 $(-1)^F$ 作用。回想一下，与内对称群 G 相关联的一般时空结构群 H_d 有一个优选元素 $c \in H_d$，因此先前的定义可以推广为 H_d。注意，如果 G 是玻色的，即 $c_G = 1$，那么任何满足自旋统计联系的表示都必须完全为偶。

一维拓扑场论的分类结果——命题 2.7——不仅在数学上令人不满意，在物理上也是如此。事实上，我们会期望时间反演对称性T 在 V 上反线性作用，也就是说，它是一个复线性映射 $V \longrightarrow V$。然而，拓扑场论的数学定义给出的是一个映射 $V^* \longrightarrow V$。幸运的是，在假设我们的态空间是希尔伯特空间这一自然前提下，希尔伯特空间内积将提供一个典范的同构选择$V \cong V^*$。此外，我们期望时间反演对称性以（反）酉方式作用。数学上，可以通过要求场论是酉的来实现这些要求；在当前的欧几里得框架中，这称为反射正。为了允许非酉场论，我们将采用较弱的反射结构概念，它以不一定正定的厄米结构取代希尔伯特空间。

为了说明反射结构这一概念，考虑我们的拓扑场论是结构群为 $H = SO_d$ 的玻色场论的情形。我们的流形和配边上有一种定向反转，我们将其启发性地记作 $Y \longmapsto Y$。于是，人们可能会想要为一个拓扑场论假设 $\mathcal{Z}(Y)$ 与 $\mathcal{Z}(\overline{Y})$ 之间存在某种关系；例如，可以要求配分函数满足 $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{Z}(X)$，其中 d 维流形 X 是闭的。在对象上，这种结构就成为了数据；利用定向反转赋予 $\mathrm{Bord}_d^{SO_d}$ 一个对称幺半 $\mathbb{Z}_2$-作用这一观察，我们可以用数学方式表达这些数据：

定义 4.1。一个 d 维（非扩展定向）TFT $\mathcal{Z}$ 上的 反射结构：$\mathrm{Bord}_d^{SO_d} \longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}$ 是作用 $Y \underline{\longmapsto} \overline{Y}$ 和 $V \longmapsto \overline{V}$ 的对称幺半 $\mathbb{Z}_2$ 等变数据。

现在我们进一步阐述这一定义与希尔伯特空间结构之间的关系：

态空间 $\mathcal{Z}(Y^{d-1})$。为此，我们指出，在对象层面， Y 可在范畴意义下表示为 Y 的对偶。换言之，存在一个非退化配对 $h_Y\colon Y \sqcup Y \longrightarrow \emptyset$。一般而言，这种配对可能不止一种，但在此情形下，沿周围时空 $Y \times \{0\} \subset Y \times (-\epsilon,\ \epsilon)$中的空间切片 Y进行反射后，便可得到一个由此诱导的规范选择。这也是历史上将其称为反射结构 [Jaf18] 的原因。此外，沿第d个坐标进行反射的这一选择，使配对 $h_Y\colon Y \sqcup Y \longrightarrow \emptyset$ 在某种意义上是对称的。如果我们恰好有一个具有反射结构的拓扑场论 $\mathcal{Z}$，就能得到一个非退化半双线性配对

$$\overline{\mathcal{Z}(Y)} \otimes \mathcal{Z}(Y) \cong \mathcal{Z}(\overline{Y}) \otimes \mathcal{Z}(Y) \cong \mathcal{Z}(\overline{Y} \sqcup Y) \xrightarrow{\mathcal{Z}(h_Y)} \mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbb{C}.$$

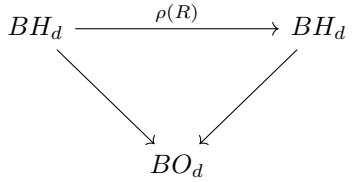
此外， h_Y的对称性意味着它满足厄米配对的条件。理解反射正定拓扑场论离不开这些考量；反射正定拓扑场论是指具有反射结构且上述配对为正定的拓扑场论。不过，本文只讨论较弱的概念，因此我们仍采用配备 $\mathbb{Z}_2$-等变数据的拓扑场论。

注 4.2. 此处讨论的反射结构有时也称为厄米拓扑场论。特别是，上述定义与 Turaev [Tur16, III.5] 意义下的厄米拓扑场论概念一致。

在下一节中，我们将进一步抽象这一概念，以便推广到费米子情形和一次扩展情形；在这些情形下会出现一些微妙之处。

4.2 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$在配边范畴上的作用

具有上一节所述性质的拓扑场论，用 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-等变函子的形式表述十分方便。 $BH_d \longrightarrow BO_d$上有一个 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$的作用；关于高阶群作用的定义，请参阅附录 A。 BH_d 上的作用由 H_d 上的一个作用诱导而来，其中元素 R 通过与 $\widehat{H}_d$ 中的 $e = e_d \otimes 1 \in \widehat{H}_d = \mathrm{Pin}_d^+ \otimes K$ 共轭，在 H_d 上作用，而 $(-1)^F$ 则通过中心元 $c \in H_d$作用。 ρ 在 BH_d 上的作用无法直接扩展为 $BH_d \longrightarrow B\mathrm{O}_d$ 上的作用，因为



不对易。不过，由于注意到$\rho_d \circ \rho(R)$： $H_d \longrightarrow \mathrm{O}_d$ 与 ρ_d 相差一个沿着 e_d 在O_d 中的反射所作的共轭，因此该方块在同伦意义下交换；这一反射诱导出填充该方块的同伦。

利用 $\mathrm{Bord}_d^{\neg}$ 的0 函子性，可在 d-范畴 $\mathrm{Bord}^{(H_d,\rho_d}{}_d$ 上诱导出一个-作用，0尤其是在 1-范畴 $\mathrm{Bord}^{(H_d,\rho_d}{}_d$ 上。注意，该作用涉及费米子群的所有结构。

注记 4.3. 我们将这一抽象视角进一步几何化，以便与上一节关于反射结构的讨论衔接。回顾注记 2.2，我们还可以用一个主 H 丛 $P \longrightarrow M$ 以及一个向量丛同构$\psi\colon P \times_{\rho_d} \mathbb{R}^d \longrightarrow TM$来描述切向 (H_d, ρ_d)-结构。通过后复合 $\rho(R)$ 得到的新切向结构，可由以下方式构造的数对 P, ψ 来描述：

• 由 P 可以构造主 H_d-丛 $\widehat{P} := P \times_{H_d} H_d$。现在可以将主丛 $\widehat{P}$ 定义为 $\widehat{P} \setminus P$。此丛同构于由 P 构造的丛，其中通过自同构 $\rho(R)$ 扭曲了 H_d作用。

• 同一化 ψ 由下式给出

$$\begin{aligned} \overline{\psi} \colon \overline{P} \times_{\rho_d} \mathbb{R}^d &\longrightarrow TM \\ [\overline{p}, x] &\longmapsto \psi[\overline{p} \cdot (e_d \otimes 1), R_{e_d} x] \quad , \end{aligned}$$

其中 R_{e_d} 是沿着 e_d的反射。

回顾注 3.8，sVect 上还有一个 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$作用。现在我们可以按照 [JF17, FH21]定义具有自旋-统计和反射结构的场论。

定义 4.4。一个拓扑反射与自旋统计(H_d, ρ_d)-场论是一个 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-等变函子

$$\mathcal{Z} \colon \mathsf{Bord}_d^{(H_d, \rho_d)} \longrightarrow \mathsf{sVect} \quad .$$

仅具有 $\mathbb{Z}_2$ 等变性或 $B\mathbb{Z}_2$等变性的函子分别称为反射场论或自旋统计场论。

具体而言，拓扑场论上的反射结构

$$\mathcal{Z} \colon \mathsf{Bord}_d^{(H_d, \rho_d)} \longrightarrow \mathsf{sVect}$$

由一个自然对称同构 $\omega \colon \mathcal{Z} \circ (-) \Longrightarrow (-) \circ \mathcal{Z}$ 构成，其平方为 $\overline{1_{\Sigma}} \circ \omega$ 在对象 Σ 上的分量给出一个自然同构 $\omega_{\Sigma} \colon \mathcal{Z}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{Z}(\Sigma)$。存在从 Σ 到范畴对偶 $\Sigma^{\vee}$ 的典范同构h_{Σ}，它们在 Σ [FH21]上定义了一个厄米结构。与上一节结尾的讨论类似，将这些同构与 ω 结合起来，便在态空间 $\mathcal{Z}(\Sigma)$上定义了一个厄米配对。

$$\overline{\mathcal{Z}(\Sigma)} \otimes \mathcal{Z}(\Sigma) \xrightarrow{\omega \otimes \mathrm{id}} \mathcal{Z}(\overline{\Sigma}) \otimes \mathcal{Z}(\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{Z}(h_{\Sigma}) \otimes \mathrm{id}} \mathcal{Z}(\Sigma^{\vee}) \otimes \mathcal{Z}(\Sigma) \cong \mathcal{Z}(\Sigma)^* \otimes \mathcal{Z}(\Sigma) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbb{C} \quad .$$

定义具有自旋-统计的场论所需的 $B\mathbb{Z}_2^F$-等变性，无须指定额外数据。它由以下条件给出：

$$\mathcal{Z}(c|_{\Sigma}) = (-1)^F_{\mathcal{Z}(\Sigma)}$$

对于所有 $\Sigma \in \mathsf{Bord}_d^{H_d, \rho_d}$，其中 c 是通过 c作用所诱导的 H_d-结构流形 Σ 的自同构。对于 $H_d = \mathrm{Spin}^d$，这恰好就是自旋翻转。

例 4.5。对于 $H_1 = \mathrm{Spin}_1 = \mathbb{Z}_2^c$ 一维拓扑场论 $\mathcal{Z}$，其分类由赋给正向定向点的超向量空间 $\mathcal{Z}(+)$ 上的一个 $\mathbb{Z}_2^c$-表示决定。只有满足条件 $-1 \in \mathbb{Z}_2$ 由分次算子 $(-1)^F$作用的表示，才能产生自旋统计场论。这表明，许多拓扑场论并不满足自旋-统计关系。有趣的是，每个完全扩张的二维 Spin_2-场论都满足自旋-统计关系。

4.3 一维分类

设 G 为一个内部对称群，$H_1 = (\mathrm{Pin}_1^+ \otimes G)_0 \cong G^{\mathrm{op}}$ 为相应的一维时空对称群。我们的首个结果是对以下理论中的反射和自旋统计 H_1-场论进行分类：

1维。回顾一下，这些是 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$等变对称幺半函子 $\mathcal{Z}\colon \mathsf{Bord}^{H_1,\,1}{}^{\rho_1} \longrightarrow \mathsf{sVect}$，其中 sVect 上的 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$ 作用由

$$R\colon \mathsf{sVect} \longrightarrow \mathsf{sVect}\ ,\quad V \longmapsto \overline{V}$$

and

$$(-1)^F\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}}\ ,\quad V \longmapsto (-1)^F{}_V$$

以及附录 C.1 中详细说明的规范相干同构。

除了计算 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-等变函子外，我们还可以计算函子范畴上联合作用的不动点。利用配边假设，这些不动点可以作为同伦不动点计算

$$(([\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}}, \mathsf{sVect}])^{H_1})^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} \simeq ((\mathsf{sVect}^\times)^{H_1})^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} \simeq (\mathsf{sVect}^\times)^{H_1 \rtimes_\rho (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)} \tag{4.1}$$

对于 $H_1 \rtimes_\rho (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$ 作用 ψ:

$$\psi(h)\colon \mathsf{sVect}^\times \longrightarrow \mathsf{sVect}^\times\ ,\quad V \longmapsto \begin{cases} V & \text{if } \rho_1(h) = 1 \\ V^* & \text{if } \rho_1(h) = -1 \end{cases}\ ,\quad f \longmapsto \begin{cases} f & \text{if } \rho_1(h) = 1 \\ (f^*)^{-1} & \text{if } \rho_1(h) = -1 \end{cases}$$

$$\psi(R)\colon \mathsf{sVect}^\times \longrightarrow \mathsf{sVect}^\times\ ,\quad V \longmapsto \overline{V}^*\ ,\quad f \longmapsto (\overline{f}^*)^{-1}$$

$$\psi((-1)^F)\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}^\times} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}^\times}\ ,\quad V \longmapsto (-1)^F_V$$

以及规范相干同构。对于下面的计算，只需使用 H_1 的一个 2-群模型；此外，不失一般性地，我们假设该模型是费米子骨架化的。

半直积 2-群 $H_1 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$ 有如下具体描述（见附录 A.3）：其对象为集合 $H_1 \times \{1, R\}$，其复合 $\otimes$ 给出为

$$(h \rtimes R^\epsilon) \otimes (h' \rtimes R^{\epsilon'}) = (h \otimes_{H_1} h' \otimes_{H_1} c^{\epsilon \cdot \theta(h')}) \rtimes R^{\epsilon+\epsilon'}$$

其中有 $\epsilon = 0,1$ 和 $\epsilon' = 0,1$。态射有两种类型。第一种形式为 $\gamma \rtimes \mathrm{id}\colon h \rtimes R^\epsilon \longrightarrow h' \rtimes R^\epsilon$，其中 γ 是 H_1 中从 h 到 h' 的态射。另一种形式为 $\gamma \rtimes (-1)^F\colon h \rtimes R^\epsilon \longrightarrow h' \rtimes R^\epsilon$，其中 γ 现在是一个态射 $h \longrightarrow h' \otimes c$。所有未指定的数据（例如态射的复合）都由 2-群 H_1 的数据规范地给出。更多细节请参阅附录。

我们计算的第一步是证明，在 $c \neq 1$ 的情况下，$H_1 \rtimes_\rho (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$ 同构于 2-群的直积 $G_b \times \mathbb{Z}_2^R$；这使我们能够通过先计算 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点，再计算诱导的 G_b-作用下的不动点，来求出 (4.1) 中出现的不动点。我们在注 4.11 中讨论较简单的情形 $c = 1$。

为了定义等价 $\sigma\colon G_b \times \mathbb{Z}_2^R \longrightarrow H_1 \rtimes_\rho (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$，我们回顾推论 3.16，其中指出存在一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow H_1 \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

李群。我们选取一个截面 $s\colon G_b \longrightarrow H_1$，满足 $s(g) \otimes s(g') = \omega^{\mathrm{op}}(g,\ g')s(gg')$，其中 $\omega^{\mathrm{op}}(g,\ g') = \omega(g,\ g') + \theta(g)\theta(g')$，这里 ω 是分类该中心扩张的上循环

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow G \longrightarrow G_b \longrightarrow 1\ .$$

这只是另一种说法，即 $H_1 = G^{\mathrm{op}}$。对于每条路径 $\gamma\colon\ g \longrightarrow g'$，都有一个典范提升 $s(\gamma)\colon s(g) \longrightarrow c^{\Gamma(\gamma)}s(g)$，满足 $\Gamma(\gamma) \in \{0, 1\}$。现在我们可以定义这个 2-群同构

$$\begin{aligned} \sigma\colon G_b \times \mathbb{Z}_2^R &\longrightarrow H_1 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2) \\ g \times R^\epsilon &\longmapsto s(g) \rtimes R^{\theta(g)}R^\epsilon \\ \gamma\colon g \longrightarrow g' &\longmapsto s(\gamma) \rtimes ((-1)^F)^{\Gamma(\gamma)}\colon \sigma(g) \longrightarrow \sigma(g')\ . \end{aligned}$$

函子 σ 与乘法并不严格相容。相反，存在一个相干同构$\sigma(g\times R^{\epsilon})\otimes\sigma(g'\times R^{\epsilon'})=s(g)\rtimes R^{\theta(g)}R^{\epsilon}\otimes s(g')\rtimes R^{\theta(g')}R^{\epsilon'}=s(gg')\otimes c^{\omega(g,g')+\epsilon\theta(g')}\rtimes R^{\theta(g)+\theta(g')+\epsilon+\epsilon'}$

$$\xrightarrow{1\rtimes(-1)^{F\omega(g,g')+\epsilon\theta(g')}}s(gg')\rtimes R^{\theta(g)+\theta(g')+\epsilon+\epsilon'}=\sigma(gg'\times R^{\epsilon+\epsilon'})$$

不难验证， σ 是一个2-群等价。我们计算的下一步是求出 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点。

Pro命题 4.6. 对于上文引入的作用，同伦不动点范畴

$$(\mathsf{sVect}^{\times})^{\mathbb{Z}_2^R}\simeq\mathsf{hsVect}^{\times u}$$

由厄米超向量空间及相容（即偶且酉）同构所构成的群胚给出。

证明。 我们采用注 A.13 中详述的同伦不动点定义。一个不动点由一个对象 $V\in\mathsf{sVect}$及一个态射 $h_V\colon\ \rho(R)(V)=V^*\longrightarrow V$构成，满足

$$V\simeq(\overline{(\overline{V})^*})^*\xrightarrow{\overline{h_V}^*}\overline{V}^*\xrightarrow{h_V}V=V\xrightarrow{\mathrm{id}_V}V\quad.$$

不难看出， h_V 在 V上定义了一个厄米结构。不动点态射$(V,\ h_V)\longrightarrow(V',\ h_{V'})$由映射 $f\colon\ V\longrightarrow V'$给出，满足

$$\begin{array}{ccc}\overline{V}^* & \xrightarrow{h_V} & V\\ {\scriptstyle(\overline{f}^*)^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ \overline{V'}^* & \xrightarrow[h_{V'}]{} & V'\end{array}$$

满足交换性。这意味着 f 的伴随与其逆相同，因此 f 必为酉的。 □

注 4.7。 2-群 $\mathsf{Spin}_1\rtimes(\mathbb{Z}_2^R\times B\mathbb{Z}_2^F)$ 等于 $(\mathbb{Z}_2^c\rtimes B\mathbb{Z}_2^F)\times\mathbb{Z}_2^R$，因为 $\mathbb{Z}_2^R$在 $\mathsf{Spin}_1=\mathbb{Z}_2^c$ 上作用平凡。此外，根据半直积的定义，我们可以直接看出， $\mathbb{Z}_2^c\rtimes B\mathbb{Z}_2^F$是可缩的（等价于只有一个对象和一个 1-态射的 2-群）。这表明，前一个命题同样按照超厄米向量空间对 Spin_1 反射与自旋统计场论进行了分类。

下一个命题描述了在 $\mathsf{hsVect}^{\times u}$ 上诱导的 G_b-作用。

命题 4.8。 在 $\mathsf{hsVect}^{\times u}$ 上诱导的 G_b-作用对于偶元素 $g\in G_b$ 是平凡的，并且由下式给出

$$\begin{aligned}\gamma(g)\colon\mathsf{hsVect}^{\times u}&\longrightarrow\mathsf{hsVect}^{\times u}\\ V&\longmapsto(\overline{V},(-1)^{\frac{F}{V}}\circ\overline{h_V})\\ f\colon V\longrightarrow V&\longmapsto\overline{f}\end{aligned}$$

对于带有关于 g 和 g' 的相干数据的 $g\in G_b$ 奇元素

$$\gamma_{g',g}=((-1)^F)^{\omega(g',g)}$$

结合双重取共轭与原向量空间的典范同一化，其中 $\omega(g',g)$ 是将中心扩张 $1\longrightarrow\mathbb{Z}_2^c\longrightarrow G\longrightarrow G_b\longrightarrow 1$分类的 $\mathbb{Z}_2^c$ 值 2-余循环。此外，态射 $P\colon\ g\longrightarrow g$ （注意，根据假设，所有态射都是环路）在 $\Gamma(\gamma)=0$ 时作用平凡，否则按 $(-1)^F$ 作用。

证明。 元素 $g \in G_b$ 将不动点 $(V,\ h_V)$ 映射为

$$\psi(\sigma(g))[V] = \psi\left(s(g) \rtimes R^{\theta(g)}\right) V = \begin{cases} V & \text{if } \theta(g) = 0 \\ \overline{V^*}^* \cong \overline{V} & \text{if } \theta(g) = 0 \end{cases}$$

配备新的厄米结构

$$\psi(R)[\psi(\sigma(g))[V]] = \psi(\sigma(R) \otimes \sigma(g))[V] \cong \psi(\sigma(R \otimes g))[V] = \psi(\sigma(g \otimes R))[V] \cong \psi(\sigma(g))[\psi(R)[V]]$$
$$\xrightarrow{\psi(\sigma(g))[h_V]} \psi(\sigma(g))[V]$$

展开来说，对于偶元素，它就是 h_V；对于奇元素，它就是 $(-1)^F_V \circ h_V \circ$ 相干同构由 σ 的相干同构诱导，从而直接得到命题中所述的公式。

态射的作用由 $\psi(\sigma(\gamma)) = \psi\left(s(\gamma) \rtimes ((-1)^F)^{\Gamma(\gamma)}\right)$ 的相应分量给出，正如所声称的那样。

□

注释 4.9. 注意，我们在此得到的厄米向量空间的复共轭上的厄米结构，与第 3.2 节中通过另一种论证得到的厄米结构相同。

为完成分类，我们必须计算诱导的 G_b-作用的不动点。我们已经在注 3.8 中根据定义 3.7 所定义的 G 的酉表示完成了这项工作，从而得到以下命题。

命题 4.10. 设 G 是一个费米子群。具有内对称群 G 的一维反射与 *Spin* 统计场论所成的群胚，等价于费米子群 $\pi_0(G)$的酉表示范畴的核心。

证明。 我们这里只讨论 $c \neq 1$ 的情形。我们将在下一条注释中讨论较简单的情形 $c = 1$。为了说明我们可以限制到费米子群 $\pi_0(G)$，而不必使用 2-群模型，我们需要区分另外两种情形。第一种情形是，在 G 中不存在从 1 到 c 的态射。在这种情况下，$\Gamma(\gamma)$ 总是 1，因此 G_b 中的所有态射都平凡作用，我们可以限制到 $\pi_0(G_b)$。如果存在态射 $\gamma\colon 1 \longrightarrow c$，且该态射属于 G，那么在 G_b 中存在态射 $\gamma'\colon 1 \longrightarrow 1$，满足 $\Gamma(\gamma') = c$。这意味着，对于每个同伦不动点 V，算子 $(-1)^F_V$ 在 V 上必定等于恒等映射，因此 V 完全是偶的。这意味着我们可以限制到偶向量空间构成的子范畴，其中所有态射的作用仍然是平凡的。现在，不动点与 $\pi_0(G)$-表示范畴之间的识别这一陈述，正是注 3.8 的内容。

□

注 4.11. 我们以预告过的关于 $c = 1$（即 $G = G_b$）的情形的注记结束本节。此时，半直积 $H_1 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times B\mathbb{Z}_2)$ 实际上就等于 $G \times \mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$。因此，计算同伦不动点时，我们可以先计算 $B\mathbb{Z}_2^F$-同伦不动点。这些由偶向量空间给出，而诱导的 $G \times \mathbb{Z}_2^R$是作用在 $G \times \mathbb{Z}_2^R$上的限制。现在，不动点的计算与上文完全相同，但所有的 $(-1)^F$-因子都消失了。

5 一旦扩展场论

我们将上一节的结果和定义推广到取值于超代数 Morita 双范畴 sAlg 的完全扩张二维拓扑场论。

5.1 扩展拓扑场论的自旋-统计与反射结构

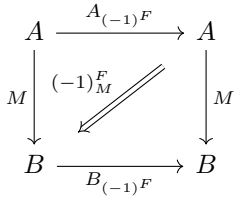
现在我们将　　将自旋-统计和反射结构的定义推广到一次扩张场论　　s

$$\mathcal{Z}\colon \mathsf{Bord}_{d,d-2}^{(H_d,\rho_d)} \longrightarrow \mathsf{sAlg}$$

扩展到取值于超代数的情形。第4.2节中构造的 $\mathsf{Bord}^{(H_d,\rho_d)}{}_{d,0}$ 上的 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用限制为对双范畴 $\mathsf{Bord}^{(H_d,\rho_d)}{}_{d,d-2}$ 的作用。为了推广 4.4，我们需要将 sVect 上的 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用扩展为 sAlg 上的作用。根据这样一个事实，可以抽象地构造这一扩张：将一个对称幺半范畴映到其中 E_1-代数的 Morita范畴的函子具有函子性。具体而言， $\mathbb{Z}_2^R$ 的生成元通过将超代数 A 映到其复共轭代数 A 来作用，见定义 C.17。$B\mathbb{Z}_2^F$ 的非平凡 1-态射 $(-1)^F$ 通过自然变换

$$(-1)^F\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sAlg}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sAlg}}$$

其在超代数 $A \in$sAlg 处的取值由定义 C.18 中的双模 $A_{(-1)^F}$ 给出，而在 1-态射 $M\colon A \longrightarrow B$ 处的取值则由填充给出



由以下公式给出

$$m \otimes a(-1)^F \longmapsto (-1)^F(-1)^{|m|+|a|} \otimes ma$$

这是一个双模同构。 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用的数据还包括 $(-1)^F$ 平方的平凡化。在这种情况下，它由 (A, A)-双模同构 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \cong A$ 给出，该同构由代数自同构 $(-1)^F \circ (-1)^F = \mathrm{id}_A$ 的复合诱导。明确地说，这意味着

$$a_1(-1)^F \otimes a_2(-1)^F \longmapsto (-1)^{|a_2|}a_1a_2.$$

直观地说，我们可以把 $(-1)^F$ 看作一个平方等于一的形式偶变量，使得 $(-1)^F a = (-1)^{|a|}a(-1)^F$。做好这些准备后，我们可以给出以下定义

定义 5.1. 扩展拓扑反射与自旋统计(H_d, ρ_d)-场论是一个 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-等变函子

$$\mathcal{Z}\colon \mathsf{Bord}_{d,d-2}^{(H_d,\rho_d)} \longrightarrow \mathsf{sAlg} \quad .$$

仅具 $\mathbb{Z}_2^R$ 或 $B\mathbb{Z}_2^F$-等变性的函子分别称为反射场论或自旋统计场论。

注 5.2. 注意，扩展拓扑反射与自旋统计场论通过限制到幺半单位的自态射，可以得到非扩展的反射与自旋统计场论。这是因为 sAlg 中单位元的自同态为 sVect，且诱导的$\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用与上一节所讨论的相同。

给定拓扑场论上的反射结构

$$\mathcal{Z}\colon \mathsf{Bord}_{d,d-2}^{(H_d,\rho_d)} \longrightarrow \mathsf{sAlg}$$

由大量数据构成，我们只会部分说明。对于每个对象 $S \in \mathrm{Bord}^{(H_d,\rho_d)}_{d,\ d-2}$ 我们都会得到一个可逆双模（$\mathcal{Z}(S)$ $\mathcal{Z}(S)$），作为自然同构的一部分

$$\mathcal{Z} \circ \overline{(-)} \Longrightarrow \overline{(-)} \circ \mathcal{Z} \quad .$$

此外，这些数据还包含一个修正，它将这个自然同构的平方（与 (–) 的相容态射结合）映到恒等映射。当我们将这些双模与 $\mathrm{Bord}^{(H_d,\rho_d)}_{d,d-2}$ 中的一个同构$S \longrightarrow S^\vee$ 结合时，就得到了向量空间上厄米结构这一概念的范畴化。这些是星代数，我们将在下一节详细讨论。

在扩展场论中，自旋-统计也成为数据。具体而言，对每个对象 $S \in \mathrm{Bord}^{(H_d,\rho_d)}_{d,d-2}$，都有一个双模同构 $\mathcal{Z}(c|_S) \longrightarrow \mathcal{Z}(S)^{(-1)^F}$，它满足各种相容条件。

注记 5.3。 注意，给定一个同时具有 $\mathbb{Z}_2^R$-等变数据和 $B\mathbb{Z}_2^F$-等变数据的一次扩展理论 $\mathcal{Z}$，要使其具有 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-等变性，还必须满足一个额外条件。具体而言，这意味着对于每个 $d-2$ 维闭流形 Y，2-态射图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{Z}(c|_{\overline{Y}}) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\overline{c|_Y}) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Z}(c|_Y)} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathcal{Z}(\overline{Y})_{(-1)^F} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Z}(Y)_{(-1)^F}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Z}(Y)_{(-1)^F}}
\end{array}$$

彼此交换。因此，具有反射与自旋统计理论，并不等同于分别指定 $\mathcal{Z}$上的自旋-统计关系和反射结构。

对2维时空中的分类，其一般方法遵循我们在第 4.3 节讨论过的一维情形。等变函子等价于函子范畴 $[\mathrm{Bord}^{(H_2,\rho_2)}_{2,0}, \mathsf{sAlg}]$上由 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用诱导的不动点。结合配边假设，我们可以将反射与自旋统计（H_2, ρ_2）场论计算为同伦不动点

$$\left(([\mathrm{Bord}_2^{\mathrm{fr}}, \mathsf{sAlg}])^{H_2}\right)^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} \simeq \left((\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{H_2}\right)^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} \simeq (\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)} \quad .$$

与一维情形类似，群 $H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$最终等价于直积 $O_2 \times G_b$（见第 5.6 节）。 O_2 部分的不动点可以通过将厄米结构推广至超代数来描述，我们接下来将介绍这一推广。

5.2 星形代数

在一维费米子理论中，我们已经看到，反射结构与超厄米向量空间密切相关。在深入探讨二维理论之前，我们将先对这一概念的二维类比进行纯代数处理。按照 [SP09]，的说法，我们称这些为星形代数，它们是对 $*$-代数概念的一种修正。[8] 我们将在附录 C.3 中详细讨论超 $*$-代数。

为了说明星形代数是厄米向量空间的范畴化，首先考虑对称幺半函子 $\mathrm{End} : \mathsf{sVect}^\times \longrightarrow \mathsf{sAlg}_1$，它从复超向量空间的核心映到代数与同构构成的 1-范畴。在态射上，它将线性算子映为由该算子给出的共轭作用。它将对偶向量空间 V^* 映为（分次）反代数 $(\mathrm{End}\, V)^{\mathrm{op}}$，并将复共轭向量空间 $\overline{V}$映为复共轭代数 $\mathrm{End}\, V$。相关定义请参见

[8]在 [SP09] 中，星形代数被引入为线性 $*$-代数的类比，后者是满足 $(ab)^* = b^*a^*$ 的线性映射 $*: A \longrightarrow A$。本文需要的则是复反线性（超）类比，其中 $*$ 是一个复反线性映射。

附录 C。若限制在有限维向量空间中，我们会看到，$\mathbb{Z}_2^R$-作用 $V \longmapsto V^*$ 在 End 下映为 $\mathbb{Z}_2^R$-作用 $A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$。由于厄米向量空间是有限维向量空间中的一个 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点，它会被映为 $\mathbf{sAlg}_1^{\mathrm{fd}}$ 中的一个 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点。具体而言，$A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$ 的不动点由一个复反线性偶映射 $*\colon A \longrightarrow A$ 构成，满足 $a^{**} = a$ 和 $(ab)^* = (-1)^{|a||b|} b^* a^*$。[9] 这称为（复反线性的）超 $*$-代数。由此可知，对于每个厄米向量空间 $(V,\ h)$，代数 End V 自然是一个 $*$-代数。星运算由相对于厄米形式的分次伴随给出

$$\langle Tv, w\rangle = (-1)^{|T||v|}\langle v, T^* w\rangle \quad T \in \operatorname{End} V, v, w \in V.$$

$*$-代数类似于厄米向量空间，这一点从代数量子力学的角度来看也不足为奇；在代数量子力学中，$*$-代数取代了希尔伯特空间。

然而，在扩展二维拓扑场论中，我们转而使用 Morita 2-范畴 $\mathbf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$，其对象是具有可逆 1-态射和 2-态射的有限维半单复超代数。我们通过类比将讨论推广到这种情形。这里仍有一个对称幺半 $\mathbb{Z}_2^R$-作用 $A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$，详情见附录 C。在 1-态射上，$R$ 通过 $M \longmapsto M^{\mathrm{op}^{-1}}$ 作用，使其成为协变的；而在 2-态射上，ϕ 则通过ϕ^{op}作用。现在，我们将考虑这一作用的不动点，将其视为厄米形式的二维版本。由此得到以下显式定义。

定义 5.4. (-反线性)星代数的 2-范畴具有

- **对象**称为星形代数，它们是三元组 (A, M, σ)，由超代数 A 以及一个可逆的 (A, A_{op}) 双模 M和一个双模同构 $\sigma\colon M \longrightarrow M_{\mathrm{op}}$构成，满足

  $$M \xrightarrow{\sigma} \overline{M}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\overline{\sigma}^{\mathrm{op}}} \overline{\overline{M}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}} = M$$

  是恒等映射。

- **1-态射**从 (A_1, M_1, σ_1) 到 (A_2, M_2, σ_2)，称为 (A_2, A_1)-星形双模，是由一个可逆的 (A_2, A_1)-双模 N 以及幺正性数据构成的有序对 (N, ϕ)，其中幺正性数据是一个双模同构

  $$\phi : N \otimes_{A_1} M_1 \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}} \longrightarrow M_2$$

  满足厄米性条件，该条件要求复合

  $$N \otimes_{A_1} \otimes M_1 \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\sigma_1\otimes\mathrm{id}} N \otimes_{A_1} \otimes \overline{M_1}^{\mathrm{op}} \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}} \cong \overline{N \otimes_{A_1} \otimes M_1 \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\overline{\phi}^{\mathrm{op}}} \overline{M_1}^{\mathrm{op}}$$

  和 $\sigma_2 \circ \phi$ 相等。

- **2-态射** 从 (N, ϕ) 到 (N', ϕ')，称为酉双模映射，是偶的可逆双模映射 $\psi\colon N \longrightarrow N'$，满足酉性条件：

  $$N \otimes_A M_1 \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\psi\otimes\mathrm{id}_{M_1}\otimes\overline{\psi}^{\mathrm{op}}} N' \otimes_{A_1} M_1 \otimes_{\overline{A_1}^{\mathrm{op}}} \overline{N'}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\phi'} M_2$$

  等于 ϕ。

(B, A)-星形模 (N_1, ϕ_1) 与 (C, B)-星形模 (N_2, ϕ_2) 的复合为 $(N_2 \otimes_B N_1, \phi_2 \circ \phi_1)$，其中 $\phi_2 \circ \phi_1$ 利用引理 C.3 的同构定义如下：

$$\begin{aligned}(N_2 \otimes_B N_1) \otimes_A M_1 \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{(N_2 \otimes_B N_1)}^{\mathrm{op}} &\cong N_2 \otimes_B (N_1 \otimes_A M_1 \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{N}_1^{\mathrm{op}}) \otimes_{\overline{B}^{\mathrm{op}}} \overline{N}_2^{\mathrm{op}} \\ &\xrightarrow{\phi_1} N_2 \otimes_B M_2 \otimes_{\overline{B}^{\mathrm{op}}} \overline{N}_2^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\phi_2} M_3.\end{aligned}$$

[9] 我们对自然同构 $A \cong A, A^{\mathrm{op}\mathrm{op}} \cong A$ 和 $\overline{A}^{\mathrm{op}} \cong A^{\mathrm{op}}$ 的选取是显然的等式，如附录 C 中所述。它们与函子 End 相容。

在将这个定义与代数的 2-范畴中的 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点进行比较之前，我们先通过比较星形代数与 $*$ $\mathbb{C}$ $*$ $*$ $A^{\mathrm{op}} \longrightarrow$-代数来提 A $\mathbb{C}$ $M = A_*$ A A^{op} 供一些直观理解。每个（-反线性的）超 -代数 : 都可如下导出一个 -线性的星形结构。定义 : 为由同态 $*$ 和 σ 诱导的 (,)- 双模： $M^{\mathrm{op}} \longrightarrow M$ 双模映射 $\sigma(a_*{}^{\mathrm{op}}) = (a^*)_*$。利用 $*$ 是对合，很容易验证 $\sigma^{\mathrm{op}}\sigma = \mathrm{id}$。$*$- 代数之间双模上的幺正性数据等价于某种代数值内积。在 C^*-代数文献中常会讨论类似的内积，并称其为 Hilbert C^*-模。

命题 5.5. 设 A, B 是视为星代数的 $\mathbb{C}$-反线性超 $*$-代数，且 N 是一个可逆(B, A)-双模。那么， N 上的幺正性数据等价于一个半双线性配对 $\langle ., . \rangle : N \times N \longrightarrow B$，它关于左侧自变量复线性，关于右侧自变量复反线性，并满足

$$\begin{aligned}
\langle n_2, bn_1 \rangle &= (-1)^{|b||n_1|} \langle n_2, n_1 \rangle b^* \\
\langle n_2 a, n_1 \rangle &= (-1)^{|a||n_1|} \langle n_2, n_1 a^* \rangle \\
\langle bn_2, n_1 \rangle &= b \langle n_2, n_1 \rangle \\
\langle n_2, n_1 \rangle^* &= (-1)^{|n_1||n_2|} \langle n_1, n_2 \rangle.
\end{aligned}$$

星(B, A)-模之间的可逆双模映射 $\psi \colon N \longrightarrow N'$ 满足酉性条件，当且仅当

$$\langle \psi(n_1), \psi(n_2) \rangle_{N'} = \langle n_1, n_2 \rangle_N.$$

对所有 $n_1, n_2 \in N$ 均成立。对于第三个 $*$-代数 C，星(B, A)-双模 N_1 和星(C, B)-双模 N_2，张量积 $N_2 \otimes_B N_1$ 上的配对为

$$\langle n_2 \otimes n_1, n_2' \otimes n_1' \rangle_{N_2 \otimes_B N_1} = (-1)^{|n_2'||n_1'|} \langle n_2 \langle n_1, n_1' \rangle_{N_1}, n_2 \rangle_{N_2}.$$

注 5.6. 第一个条件

$$\langle n_2, bn_1 \rangle = (-1)^{|b||n_1|} \langle n_2, n_1 \rangle b^*$$

是多余的，因为它可以由第三个和第四个条件推出。不过，为求完整起见，我们仍将其列出，因为前三个条件等价于一个双模映射

$$\phi : N \otimes_A M_1 \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{N}^{\mathrm{op}} \longrightarrow M_2.$$

注 5.7。 由于本文聚焦于配边假设，我们只定义了星形代数的 2-群胚。不过，上述定义可以推广，从而得到一个星形代数的 2-范畴，其中双模和双模映射不必可逆。除了一个微妙之处外，这一推广都很直接：对于星形代数 (A_1, M_1, σ_1) 与 (A_2, M_2, σ_2) 之间一个不可逆的 (A_2, A_1)-双模 N，应对其幺正性数据 ϕ 作何要求。例如，若 $A_1 = A_2 = \mathbb{C}$ 带有平凡星形结构，则 N 是一个向量空间，而我们希望在 N 上定义一个非退化厄米形式。特别地，要求 ϕ 是同构显然过于严格，因为这会意味着 N 可逆，因而是一维的。因此，我们需要改为对 ϕ 加以非退化性条件。更准确地说，它使 $M_1 \otimes_{A_1{}^{\mathrm{op}}} N^{\mathrm{op}}$ 成为 $(M_2)^{-1} \otimes_{A_2} N$ 在 2-范畴 sAlg 中的右伴随，参见附录 B.1。

注 5.8. 上述星形代数双范畴的定义使配对在右侧自变量上反线性，且取值于目标 $*$-代数中。我们选择这种约定，是因为我们对 $\mathbb{Z}_2$-不动点态射的方向（例如定义 A.8 中的 $* : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow A$）作了这样的定义。遗憾的是，我们的约定与算子代数文献中的常见约定并不一致。对于熟悉 C^*-代数文献的读者，我们简要说明如何转换。

我们的星形模约定类似于“可伴随算子从右侧作用的左希尔伯特模”。通过令 $*$ 从.....映射

A^{op} 到 A，即可得到更常见的约定（至多相差符号）。这给出一个半双线性配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon N\times N\longrightarrow A$，它对右侧自变量复线性，对左侧自变量复反线性，使得

$$\begin{aligned}\langle n_1, n_2 a\rangle &= \langle n_1, n_2\rangle a\\ \langle n_1 a, n_2\rangle &= (-1)^{|n_1||a|} a^*\langle n_1, n_2\rangle\\ \langle b n_1, n_2\rangle &= (-1)^{|b||n_1|}\langle n_1, b^* n_2\rangle.\end{aligned}$$

上述三个条件中的前两个表示我们有一个希尔伯特 C^*-右 A-模，而最后一个条件表示 N 是一个通过可伴随算子作用的 B-表示。

需要单独注意的是，C^*-代数文献采用这样的约定：$\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数满足 $(ab)^* = b^*a^*$，而希尔伯特模满足 $\langle n_2, n_1\rangle = \langle n_1, n_2\rangle^*$；相比之下，我们更倾向于使用适当的 Koszul 符号。关于我们对分次结构的约定之间的关系，请参见附录 C.3

我们称之为超 C^*-代数的 $*$-代数，以及更常见的 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数。在这一对应关系下，通常意义下的 $\mathbb{Z}_2$-分次希尔伯特双模与带有适当 Koszul 符号的希尔伯特双模之间也存在一一对应关系，另请参见引理 5.32。

第三个区别是，我们不要求任何正性条件；A 和 B 不必是 C^*-代数，并且 N 上的配对不必为正。这些考虑对于定义幺正拓扑场论以及推广到非拓扑场论都很重要，参见 1.5 节的讨论。特别是，我们无法在希尔伯特双模上得到范数，因此不考虑完备性性质。

例 5.9。我们证明，$\mathbb{C}$ 上恰有两种彼此不 Morita 等价的 $\mathbb{C}$-反线性星形结构。通过复共轭给出的典范代数同构 $\mathbb{C}\cong\overline{\mathbb{C}}$，我们将 $\mathbb{C}$ 与 $\overline{\mathbb{C}}$ 等同。注意，具有底层模$M_1=\mathbb{C}$ 和 $M_2=\Pi\mathbb{C}$ 的两个星代数（$\mathbb{C}$，M_1，σ_1），（$\mathbb{C}$，M_2，σ_2）绝不会 Morita 等价。事实上，若 N 是这样的 Morita 等价，则$N=\mathbb{C}$ 或 $N=\Pi\mathbb{C}$，因此$N\otimes M_1\otimes\overline{N}$ 绝不可能与 M_2同构，而这与 σ_1 和 σ_2的定义无关。

现在我们证明，若 $(\mathbb{C},M_1,\sigma_1)$,$(\mathbb{C},M_2,\sigma_2)$ 是星形结构，且 $M_1=M_2$，那么这两个星形结构是 Morita 等价的。给定 M_1 是 $\mathbb{C}$ 或 $\Pi\mathbb{C}$ 之一，交织算子 $\sigma_1\colon M_1\longrightarrow M_1^{\mathrm{op}}$ 满足 $\sigma_1^{\mathrm{op}}\circ\sigma_1=\mathrm{id}$ 是一维向量空间 $\mathbb{C}$ 或 $\Pi\mathbb{C}$ 上的实结构。这些由 $\sigma_1\colon z\longmapsto a_1 z$ 给出，其中 $a_1\in U(1)$。类似地，我们得到 $\sigma_2(z)=a_2 z$，其中 $z\in M_2$。现在取 $N:=\mathbb{C}$ 为平凡双模。要使 N 成为星形双模，我们必须为其赋予幺正性数据$\phi\colon M_1=\overline{N}\otimes_{\mathbb{C}} M_1\otimes_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}} N^{\mathrm{op}}\longrightarrow M_2=M_1$。这样的可逆双模映射必然由乘以某个 $b\in\mathbb{C}^\times$ 给出。接下来，我们将找出合适的 b，使映射 ϕ 满足将其构成星代数间 1-态射所要求的厄米性条件。推导这一条件可得方程

$$\bar{b}a_1 = a_2 b \iff a_1 = a_2\frac{b^2}{|b|^2}$$

取 $b\in U(1)$ 为 a_1/a_2 的一个平方根。由于 a_1,a_2 的范数为单位范数，因此所示方程成立，而 ϕ 定义了 Morita 等价 N 上的幺正性数据。这使得 (N,ϕ) 成为星形代数 2- 范畴中的一个 1- 同构。

例 5.10. 由于星代数是 Morita 不变概念，上一个例子也表明，$M_n(\mathbb{C})$ 上存在两种星形结构。另请注意，由 $*$-代数诱导的 $M_n(\mathbb{C})$ 上的星代数结构总是以 $M\cong M_n(\mathbb{C})$ 为双模，因此它们彼此 Morita 等价，进而给出等价的星形结构。由于矩阵代数存在并非 C^* 的 $*$-结构，这尤其表明，成为一个 C^*-代数并非 Morita 不变概念。

例 5.11. 如果 (A,M,σ) 是一个星代数，那么 $(A,\Pi M,\Pi\sigma)$ 也是一个星代数。如果我们从 $*$-代数 A,B，那么 A_* 与 ΠB_* 之间的星形双模是一种类似于命题 5.5 的配对，

唯一的区别是，此时配对的次数为奇数。对于 ΠA_* 与 B_*之间的星形双模，也有类似的结论。 ΠA_* 与 ΠB_* 之间的星形双模和 A_* 与 B_*之间的星形双模一一对应。

例 5.12. 设 (A, M, σ) 是一个 $\mathbb{C}$-反线性星代数。那么，(A, A)-双模 $A_{(-1)^F}$按如下方式成为一个星形模。首先注意到 $(A^{\mathrm{op}})_{(-1)^F}$ 是 $A_{(-1)^F\mathrm{op}}$ 的逆

$$(\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F} \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \overline{A}^{\mathrm{op}} \quad \overline{a}_1^{\mathrm{op}}(-1)^F \otimes \overline{a_2(-1)^F}^{\mathrm{op}} \longmapsto \overline{a}_1^{\mathrm{op}}\overline{a}_2^{\mathrm{op}} = (-1)^{|a_1||a_2|}\overline{a_2 a_1}^{\mathrm{op}}$$

以及一个方向相反的类似映射。请注意，与人们可能预期的相反，在上述方程中交换 a_2 和 $(-1)^F$ 时不会产生符号 $(-1)^{|a_2|}$ 。这使我们能够补全所需的交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A_{(-1)^F}} & A \\ {\scriptstyle M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M} \\ \overline{A}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{(\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F}} & \overline{A}^{\mathrm{op}} \\ & \underset{\overline{A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}}}{\curvearrowleft} & \end{array} .$$

对于中间的交换图，我们用到了 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 是自然变换这一事实。这得到幺正性数据

$$a(-1)^F \otimes_A m \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{b(-1)^F}^{\mathrm{op}} \longmapsto (-1)^{|m|} am\overline{b}^{\mathrm{op}}.$$

请注意，令人困惑的是，相对于 b又没有符号。例如，若 (A, M, σ) 来自一个 $*$-代数，那么相应的 A-值内积在 $A_{(-1)^F}$ 上为

$$\langle a(-1)^F, b(-1)^F\rangle = ab^*.$$

这是一个满足所需方程的半双线性、非退化厄米配对。例如

$$\begin{aligned}\langle a(-1)^F a_0, b(-1)^F\rangle &= (-1)^{|a_0|}aa_0b^* = (-1)^{|a_0|+|b||a_0|}a(ba_0^*)^* = (-1)^{|a_0|+|b||a_0|}\langle a(-1)^F, ba_0^*(-1)^F\rangle \\ &= (-1)^{|b||a_0|}\langle a(-1)^F, b(-1)^F a_0^*\rangle.\end{aligned}$$

例 5.13. 简单计算可知，恰好存在两种复反线性超 $*$-结构 $*_\pm$ ，定义在 $\mathbb{C}l_1$ 上，由 $e^{*\pm} = \pm ie$ 给出。它们诱导的两种复反线性星形结构并不 Morita 等价。假设它们等价。设 M 是来自 $*$-结构 $*_+$ 和 $*_-$ 的星代数之间的一个可逆星形 $(\mathbb{C}l_1, \mathbb{C}l_1)$- 双模。于是我们计算 $(\mathbb{C}l_1, *_-)$- 值内积

$$e\langle 1, 1\rangle = \langle e, 1\rangle = \langle 1, e^{*+}\rangle = \langle 1, ie\rangle = \langle 1, i\rangle e^{*-} = -\langle 1, i\rangle ie = -\langle 1, 1\rangle e$$

由于 $\langle 1, 1\rangle$ 是偶的，它是 1 的倍数，因此计算表明它为零。这与配对应当是非退化的这一事实矛盾。

例 5.14. 给定一个星代数 A，乘法映射

$$A \otimes_A A \longrightarrow A$$

是酉的。例如，对于 A 一个 $*$-代数，这可由以下计算得出

$$\langle a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2\rangle_{A\otimes_A A} = (-1)^{|b_1||b_2|}\langle a_1\langle a_2, b_2\rangle_A, b_1\rangle_A = (-1)^{|b_1||b_2|}a_1a_2b_2^*b_1^* = \langle a_1a_2, b_1b_2\rangle_A$$

以下定理与分类不一定满足自旋-统计关系、具有反射结构的二维拓扑场论相关。

定理 5.15。 反线性星代数stAlg 的核心与 $\mathbb{Z}_2^R$不动点的2范畴之间存在双范畴等价$(\mathsf{sAlg}^{fd})^{\mathbb{Z}_2^R}$，其作用为 $A \longmapsto A^{op}$。

证明。 一个 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点由一个超代数 A、一个可逆的（A，A^{op}）双模 M以及一个 2-同构组成

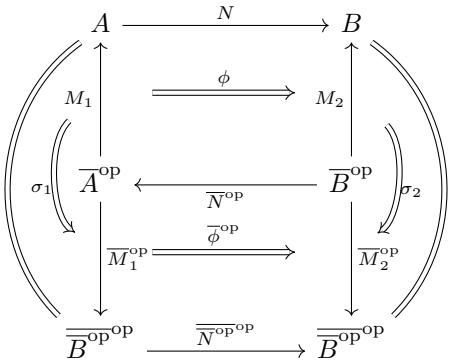
$$\sigma := \phi_{R,R} : M \longrightarrow \overline{M}^{\mathrm{op}},$$

参见定义 A.8。唯一的非平凡条件是当 $g = g' = g'' = R$ 时的图表 A.1。这给出了所需的条件 $\sigma^{\mathrm{op}}\sigma = \mathrm{id}$。

根据定义 A.11，不动点（A，M_1，σ_1）与（B，M_2，σ_2）之间的一个 1-态射由一个 B-A 双模 N 以及一个 2-同构 $\phi := f_R$ 组成，它填充了这个方块

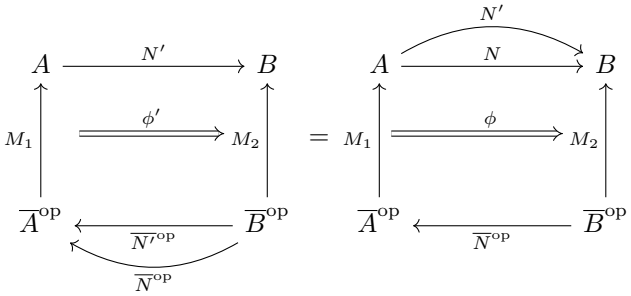
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{N} & B \\ {\scriptstyle M_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M_2} \\ \overline{A}^{\mathrm{op}} & \xleftarrow[\overline{N}^{\mathrm{op}}]{} & \overline{B}^{\mathrm{op}} \end{array}$$

将其具体展开，可得具有所需定义域和目标的幺正性数据。成为不动点之间的 1-态射的唯一条件是等式



这等价于厄米性条件。1-态射的复合由星形双模的复合给出，如定义 5.4 所述。

A 2-不动点态射 $(N, \phi) \Longrightarrow (N', \phi')$ 是一个双模映射 $\psi\colon N \longrightarrow N'$满足 at



其中我们用 ψ 填入 $N \Longrightarrow N'$，并用 ψ^{op} 填入 $N^{\mathrm{op}} \Longrightarrow N'^{\mathrm{op}}$。这等价于 ψ 的酉性条件。

□

我们以类似于第 3.2 节中为厄米超向量空间定义复共轭的方式，定义星代数的复共轭，从而结束本节。事实上，若 (A, M, σ) 是一个星代数，那么利用 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上 $\mathbb{Z}_2^R$ 与 $\mathbb{Z}_2^B$ 作用的交换数据以及上述

定理，我们便可在 A 上得到一个典范的星代数结构。不过，与时空维数为一的情形类似，我们需要通过 $(-1)^F$ 改变这一星形结构，才能在接下来的各节中得到二维反射理论的正确分类。

定义 5.16。将 A 上的星形结构定义为

$$\overline{M}\otimes_{A^{\mathrm{op}}}A^{\mathrm{op}}_{(-1)^F}\cong\overline{A}_{(-1)^F}\otimes_{\overline{A}}\overline{M}$$

with

$$\overline{M}\otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}}\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F}\xrightarrow{\overline{\sigma}\otimes\mathrm{id}}\overline{\overline{M}}^{\mathrm{op}}\otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}}\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F}\cong\overline{(\overline{A}_{(-1)^F}\otimes_{\overline{A}}\overline{M})}^{\mathrm{op}}\cong\overline{\overline{M}\otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}}\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}}$$

在具体的示意公式中，双模映射并不

$$\overline{m}(-1)^F\longmapsto(-1)^{|m|}\overline{\sigma(m)}(-1)^F.$$

如果星形结构来自 $*$-代数结构，那么这个公式与附录 C.3 中说明的 A 上的 $*$-代数结构一致。

若 (A_1,M_1,σ_1),(A_2,M_2,σ_2) 是两个星代数，且 N是一个 (A_2,A_1)-双模，则依据上述 A_i 上的星形结构，通过填充图表，可将 (A_2,A_1) 双模 N 赋予星形双模结构

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\overline{A_1}}^{\mathrm{op}} & \xleftarrow[\overline{\overline{N}}^{\mathrm{op}}]{} & \overline{\overline{A_2}}^{\mathrm{op}} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{M_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{M_2}} \\
\overline{A_1} & \xrightarrow{\overline{N}} & \overline{A_2} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{A_1}_{(-1)^F}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{A_2}_{(-1)^F}} \\
\overline{A_1} & \xrightarrow{\overline{N}} & \overline{A_2}
\end{array}$$

下方的方块由 $(.)_{(-1)^F}$ 的自然性填充，上方的方块则由反变函子 $(.)^{\mathrm{op}}$的函子性数据填充。在 A_1 和 A_2 为 $*$-代数的情况下，我们可以对此作出明确描述。回顾附录 C.3，A_i 上的 $*$-代数结构定义为 $a^*=(-1)^{|a|}a^*$，这与定义 5.16 一致。令 $\langle .,.\rangle$ 表示 N上的 A_2-值内积。由此得到的 N 上的内积为

$$\langle\overline{n}_1,\overline{n}_2\rangle=(-1)^{|n_2|}\overline{\langle n_1,n_2\rangle}$$

这个奇怪的符号确实使其成为 $*$-结构上的希尔伯特双模。比如

$$\begin{aligned}\langle\overline{n}_1,\overline{bn_2}\rangle&=(-1)^{|b|+|n_2|}\overline{\langle n_1,bn_2\rangle}=(-1)^{|b|+|n_2|+|b||n_2|}\overline{\langle n_1,n_2\rangle b^*}=(-1)^{|n_2|+|b||n_2|}\overline{\langle n_1,n_2\rangle}\cdot\overline{b}^*\\&=\langle\overline{n}_1,\overline{n}_2\rangle\overline{b}^*\end{aligned}$$

对于 $b\in A_2$。

5.3 $\mathrm{Spin}_2\rtimes(\mathbb{Z}_2^R\times B\mathbb{Z}_2^F)$ 不动点和星形弗罗贝尼乌斯代数

在第 4.3 节中，我们计算了有限维复超向量空间中 $\mathbb{Z}_2^R\cong\mathrm{Spin}_1\rtimes(\mathbb{Z}_2^R\times B\mathbb{Z}_2^F)$-不动点的范畴（见注 4.7）。结果是超厄米向量空间范畴。我们通过进一步计算 G_b-不动点，得到了适用于一般费米子对称群的分类。本节将研究二维情形的对应版本。因此，我们将把二维自旋拓扑场论计算为有限维半单超代数中 $\mathrm{Spin}_2\rtimes(\mathbb{Z}_2^R\times B\mathbb{Z}_2^F)$-不动点所成的双范畴。所得双范畴的对象是有限维半单 Frobenius 代数，它们在非分次意义下是对称的，并带有相容的星形结构。下一节中，我们将计算该双范畴上的 G_b-作用及其不动点。

回顾一下附录 C.4 中所示的 sAlg 上存在对称幺半 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用。对称幺半性与配边假设共同导出 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F \times O_2$-作用，附录 C.6 中对此作了明确说明。我们将稍微调整这一作用，使其成为所需的 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$-作用。首先，反射作用 $\mathbb{Z}_2^R$ 是横线 $\mathbb{Z}_2^B$ 与 $s \in O_1 \subseteq O_2$ 通过对偶函子给出的作用的复合（对偶函子在 1-态射上定义为对偶逆）。因此，我们将关注对角元 $R := Bs$，并将其作为生成元。由于 B 与 O_2-因子交换，R 与 SO_2-因子也满足和 s 相同的非平凡交换关系，即对于 2-群 SO_2 中的 1-态射 γ，有 $R\gamma = \gamma^{-1}R$。由此，我们在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上得到一个 $\mathbb{Z}_2^B \rtimes (SO_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F))$-作用，其中 $B\mathbb{Z}_2^F$ 在 SO_2 上的作用是平凡的，而 $\mathbb{Z}_2^R$ 的作用则由 $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ 在态射上的作用给出。现在，我们希望将此作用相容地提升为 $\mathbb{Z}_2^B \rtimes (\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F))$-作用，使之与双覆盖映射 $\mathrm{Spin}_2 \longrightarrow SO_2$ 相容。为此，我们必须选择 $B\mathbb{Z}_2^F$ 在 Spin_2 上的作用方式。为了正确体现自旋统计联系，我们取该作用为 $c \in \mathrm{Spin}_2$，的包含映射；它确为中心元，且平方为单位元。因此，我们在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上得到一个 $\mathbb{Z}_2^B \times (\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F))$- 作用。为了计算具有反射结构和自旋统计联系的二维自旋拓扑场论，我们将限制此作用，只计算 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$-不动点。然而，对于带有时间反演对称性的对称群，事实证明我们需要 $\mathbb{Z}_2^B$-作用，因此保留它很有用。

为便于理解一般情形，我们先限制到 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2^F$ 不动点，也就是满足自旋-统计但没有反射结构的自旋理论。这项计算对于分类具有一般费米子对称群、但没有反射结构的二维自旋-统计理论也很有意义。回顾一下，我们使用 Spin_2 的费米子骨架模型，其中有两个对象 $\mathbf{1}$，c 和一个生成态射 $\eta\colon 1 \longrightarrow c$。在到 SO_2 的双覆盖下，η 被映射为 $\pi_1(SO_2)$ 的一个生成元。该生成元将 A 映射为 A 的 Serre 自同构；它是 sAlg 中由线性对偶 $A^* = \mathrm{Lin}(A, \mathbb{C})$ 给出的 (A, A)-双模。我们强调，它与 sAlg 中对象 $A \in$ 的对偶毫无关系，后者由 A^{op} 给出。一般双范畴中 Serre 自同构的定义见 B.2 节，关于 sAlg 的具体信息见 C.5 节。该自同构作为从恒等函子到自身的自然变换，其对 A 的自然性包含更多数据，详见附录 C.5。$B\mathbb{Z}_2^F$ 通过 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 作用，并且我们有一个 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$ 作用，因为该方块的两个填充

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A_{(-1)^F}} & A \\ {\scriptstyle A^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A^*} \\ A & \xrightarrow[A_{(-1)^F}]{} & A \end{array}$$

对应于 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 的自然性和 $A \longmapsto A^*$ 的自然性相等。这已经是 $(-1)^F$ 为对称幺半自然变换的结果，因此它保持 SO_2 作用；不过我们也在例 C.24 中直接验证了这一点。

引理 5.17。二维 Spin_2-拓扑场论的双范畴，即有限维半单超代数核心中的 Spin_2-不动点，与下列双范畴等价：

- 对象：**</style>**强 -分次有限维半单超代数，以及一个可逆的 (A, A)-双模同构 $A_\nu\colon A \longrightarrow A^* \otimes_A A_c$，使得

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes_A A_c \otimes_A A_c & \longrightarrow & A_c \otimes_A A^* \otimes_A A_c \\ {\scriptstyle A_\nu}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A_\nu} \\ A \otimes_A A_c & \longrightarrow & A_c \otimes_A A \end{array}$$

  交换，其中上方的水平箭头由 *Serre* 自然性 S_{A_c} 给出。

- ***1***-态射 ***sms***：从 $(A \oplus A_c, A_\nu)$ 到 $(B \oplus B_c, B_\nu)$ 由一个 (B, A)-双模 N 和一个双模 *le*

同构 f_c： $N \otimes_A A_c \longrightarrow B_c \otimes_B N$ 构成，使得图表

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A A_c \otimes_A A_c & \longrightarrow & N \\ {\scriptstyle f_c \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \uparrow \\ B_c \otimes_B N \otimes_A A_c & \xrightarrow[\mathrm{id} \otimes f_c]{} & B_c \otimes_B B_c \otimes_B N \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes_A A_c \otimes_A N & \longrightarrow & N \otimes_B B^* \otimes_B B_c \\ {\scriptstyle A_\nu}\uparrow & \nearrow_{B_\nu} & \\ N & & \end{array}$$

交换。

- **2-**态射：从 (N, f_c) 到 (N', f_c') 的是双模同构 χ： $N \longrightarrow N'$，满足

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A A_c \otimes_A A_c & \longrightarrow & N \\ {\scriptstyle f_c \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \uparrow \\ B_c \otimes_B N \otimes_A A_c & \xrightarrow[\mathrm{id} \otimes f_c]{} & B_c \otimes_B B_c \otimes_B N \end{array}$$

交换。

证明。 我们对定义正合列应用分解定理（见命题 A.18）

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow SO_2 = B\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

因此，第一步是计算平凡 $\mathbb{Z}_2^c$-作用下的 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点。在这个双范畴中，对象是四元组（A, A_c, ϕ_c, c：$A_c \otimes_A A_c \longrightarrow A$），由一个有限维半单超代数 A、一个可逆的（A, A）-双模 A_c 以及一个偶双模同构 ϕ_c, c： $A_c \otimes_A A_c \longrightarrow A$组成。它们满足以下条件：由 ϕ_c, c 定义的两个映射 $A_c \otimes_A A_c \otimes_A A_c \longrightarrow A$ 相等。这等价于 $A \oplus A_c$ 是一个强 $\mathbb{Z}_2^c$-分次超代数。在这个双范畴中，从（A, A_c, ϕ_c, c）到（B, B_c, ψ_c, c）的 1-态射由一个可逆的（B, A）-双模 N 以及一个偶双模同构 f_c： $N \otimes_A A_c \longrightarrow B_c \otimes_B N$ 组成，使得图表

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A A_c \otimes_A A_c & \xrightarrow{\phi_{c,c}} & N \\ {\scriptstyle f_c \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi_{c,c}} \\ B_c \otimes_B N \otimes_A A_c & \xrightarrow[\mathrm{id} \otimes f_c]{} & B_c \otimes_B B_c \otimes_B N \end{array}$$

交换。由 (N, f_c) 到 (N', f_c') 的 2-态射是偶可逆双模映射 χ：$N \longrightarrow N'$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A A_c & \xrightarrow{\chi} & N' \otimes_A A_c \\ {\scriptstyle f_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_c'} \\ B_c \otimes_B N & \xrightarrow[\chi]{} & B_c \otimes_B N' \end{array}$$

交换。

接下来，我们计算 $B\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点上的作用。只要给出 $B\mathbb{Z}$ 的一个生成元的作用，这个作用就被唯一确定。选取一个提升到态射 ν：$1 \longrightarrow c$ in Spin_2 的生成元，并注意它不是环路。在 Spin_2 对完全可对偶超代数核心的原始作用中， $\rho(\nu)$ 是从恒等到 $\rho(c)$ 的自然变换。尽管 $\rho(c)$ 也是恒等变换，但分解定理给出的 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点上的诱导作用要求我们使用不动点数据 A_c，从而得到 $\rho(c) \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}}$。因此，$SO_2$ 在 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点上的作用将 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c})$ 映射到这个 1-态射

不动点 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c}) \longrightarrow (A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c})$，其中 $A^* \otimes_A A_c$ 是 sAlg 中的一个 1-态射。（等价地，我们也可以选择使用 $A_c \otimes_A A^*$；利用 Serre 自然性并应用于 A_c，这会给出等价的作用。）为了使其成为 $(\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathbb{Z}_2^c}$ 中的一个 1-态射，我们还必须给出一个同构

$$(A^* \otimes_A A_c) \otimes_A A_c \longrightarrow A_c \otimes_A (A^* \otimes_A A_c)$$

它由 Serre 自然性给出。

计算任意 Spin2-拓扑场论的数据的最后一步，是在 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点范畴上计算 $B\mathbb{Z}$-不动点。该不动点由生成态射 ν 上的不动点唯一确定；它是 $\mathbb{Z}_2^c$ 不动点双范畴中的一个 2-态射 $A_\nu\colon A \longrightarrow A^* \otimes_A A_c$。换言之，它是一个偶可逆双模同构，使得图表

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes_A A_c \otimes_A A_c & \longrightarrow & A_c \otimes_A A^* \otimes_A A_c \\ {\scriptstyle A_\nu}\uparrow & & {\scriptstyle A_\nu}\uparrow \\ A \otimes_A A_c & \longrightarrow & A_c \otimes_A A \end{array}$$

交换。因此，Spin2-不动点双范畴中的一个对象由一个四元组 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c},\ A_\nu)$ 给出。

不动点之间的一个 1-态射 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c},\ A_\nu) \longrightarrow (B,\ B_c,\ \psi_{c,\ c},\ B_\nu)$ 随后由一个可逆 $(B,\ A)$-双模 N 以及一个可逆偶双模映射 $f_c\colon N \otimes_A A_c \longrightarrow B_c \otimes_A N$ 给出，它满足之前的条件，此外还满足图表条件

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes_A A_c \otimes_A N & \longrightarrow & N \otimes_B B^* \otimes_B B_c \\ {\scriptstyle A_\nu}\uparrow & \nearrow_{B_\nu} & \\ N & & \end{array}$$

交换。水平箭头由 f_c 与 Serre 自然性的复合给出。Spin2-不动点之间的一个 2-态射 $(N,\ f_c) \Longrightarrow (N',\ f_c')$ 由一个偶双模同构 χ 给出：$N \longrightarrow N'$，使得图表 5.3 像之前一样交换。

□

注 5.18。我们对 Spin2-拓扑场论的描述，等价于一种先验上更简单的描述：在 Serre 自同构平方 $A \longmapsto A^* \otimes A^*$ 生成的 $B\mathbb{Z}$-作用下取不动点。在这种方法中，Spin2-不动点由单个双模同构 $A \longmapsto A^* \otimes_A A^*$ 这一数据描述，而不是由较为复杂的四元组 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c},\ A_\nu)$ 描述。二者之间的关系是，一个四元组可以映射为

$$A \xrightarrow{A_\nu \otimes A_\nu} A^* \otimes_A A_c \otimes_A A^* \otimes_A A_c \longrightarrow A^* \otimes_A A^* \otimes_A A_c \otimes_A A_c \xrightarrow{\phi_{c,c}} A^* \otimes_A A^*$$

这里用到了 Serre 自然性。

本文件中采用这种方法有两个原因：在处理具有非平凡特殊中心元 $c \in G$ 的费米内部对称群 G 时，子群 $\mathbb{Z}_2^c \subseteq G$ 的不动点可以等同于 $\mathbb{Z}_2$-分次超代数 $A \oplus A_c$。这些数据与其余不动点结构十分自然地契合。其次，我们主要关注具有自旋统计联系的拓扑场论；在这类理论中，正如我们将在命题 5.20 中所示，$A \oplus A_c$ 可以被规范地等同于 $\mathbb{Z}_2$-分次超代数 $A \oplus A_{(-1)^F}$。

注释 5.19。存在一个 2-群同构 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F \cong B\mathbb{Z}$，它将 c 映为 1，将 $(-1)^F$ 映为恒等元，并将 $\gamma\colon 1 \longrightarrow c$ 映为一个生成元。在此同构下，$\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的 $B\mathbb{Z}$-作用为 $A \longmapsto A_{(-1)^F} \otimes_A A^*$。

命题 5.20。满足自旋-统计的 Spin2-拓扑场论的双范畴，即 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2^F$-不动点，等价于双范畴 ungrFrob，该双范畴由如下无分次对称 *Frobenius* 代数定义：

- 对象：有限维半单超代数 A 以及一个泛函 $\lambda\colon\ A \longrightarrow \mathbb{C}$其在奇元素上为零，并且配对 $(a,b) \longmapsto \lambda(ab)$ 是非退化的，且 $\lambda(ab) = \lambda(ba)$
- ***1-*态射**：从 (A,λ) 到 (A',λ') 是可逆的 (A',A)-双模 M，使得 ***Serre*自然性同构**

$$S_M : A'^* \otimes_{A'} M \longrightarrow M \otimes_A A^*$$

满足

$$S_M(\lambda' \otimes m) = (-1)^{|m|} m \otimes \lambda.$$

- ***2-*态射**：从 M 到 N 是任意的偶双模同构。

证明。最直接的证明是直接应用注释 5.19，证明之后紧接着的注释中也有讨论。一般而言，分解定理的工具很有用，因此我们在当前情形下对其加以说明。于是我们考虑如下 2-群的正合序列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^F \longrightarrow 1.$$

回顾一下，相应的 $B\mathbb{Z}_2^F$ 作用是通过选取 Spin_2 中的非平凡对象 c 来给出的，该对象是中心的。换言之，在 2-群 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$ 中，它定义了一个态射 $1 \longrightarrow c$。和之前一样，这意味着，为了在 Spin_2 不动点上得到 $B\mathbb{Z}_2^F$ 作用，我们必须将自然变换 $(-1)^F : \mathrm{id} \longrightarrow \rho(c)$ 与 $\mathbb{Z}_2^c$ 的不动点数据复合。使用上一个引理证明中的记号，结果是 Spin_2 不动点 $(A, A_c, \phi_{c,c}, A_\nu)$ 被映射到 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中的 1-态射 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_c$。要使其成为 Spin_2 不动点的 1-态射，还需要我们称为 f_c 的数据。在此情形下，它由 $(-1)^F$ 的自然性给出

$$A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_c \longrightarrow A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c$$

定义这个 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用的其余数据是修正 $(-1)^F \circ (-1)^F \Rightarrow \mathrm{id}$，其中自然变换是 Spin_2-不动点双范畴上的函子之间的自然变换。左侧自然变换通过将 Spin_2-不动点 $(A, A_c, \phi_{c,c}, A_\nu)$ 映射到双模 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c$ 来给出，并附上双模同构

$$(A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c) \otimes_A A_c \cong A_c \otimes_A (A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c)$$

通过将之前的映射应用两次给出。$(-1)^F$ 平方为一的数据由将 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 的自然性与乘法映射 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A$ 和 $\phi_{c,c}$复合而成：

$$A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \longrightarrow A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes A_c \longrightarrow A.$$

至此，我们计算出了 Spin_2-不动点上的 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用。

现在我们计算此作用的不动点，以求得带有自旋统计联络的 Spin_2-理论的双范畴。对象由一个 Spin_2-不动点 $(A,\ A_c,\ \phi_{c,\ c},\ A_\nu)$ 和一个双模同构 $A_\gamma\colon\ A \longrightarrow A_{(-1)^F} \otimes_A A_c$ 组成，并满足若干条件。我们将作用于 Spin_2-不动点的态射 $(-1)^F \in B\mathbb{Z}_2^F$ 记为 γ。首先，A_γ 必须是 Spin_2-不动点之间的 2-态射，从而得到交换图

$$\begin{array}{ccc} A_c & \xrightarrow{A_\gamma} & (A_{(-1)^F} \otimes_A A_c) \otimes_A A_c \\ \| & & \downarrow \\ A_c & \xrightarrow{A_\gamma} & A_c \otimes_A (A_{(-1)^F} \otimes_A A_c) \end{array}$$

令 $c \in A_c$ 为满足 $A_\gamma(1) = (-1)^F \otimes c$的唯一元素。则上述交换图等价于（$A$，$A$）-双模 A_c中的交换关系 $ac = (-1)^{|a|} ca$。接下来，这不仅是一个 $B\mathbb{Z}$，而且是一个 $B\mathbb{Z}_2$-不动点这一事实给出了如下复合条件：

$$A \xrightarrow{A_\gamma \otimes A_\gamma} A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \longrightarrow A$$

为恒等映射，其中最后一个态射由方程 5.3 给出。关于 A_γ 的这一条件等价于$\phi_{c,\ c}(c,\ c) = 1$，即 $c^2 = 1$ 属于 $\mathbb{Z}_2^c$-分次超代数 $A \oplus A_c$。

现在转向 1-态射

$$\underline{A} := (A, A_c, \phi_{c,c}, A_\nu, A_\gamma) \longrightarrow \underline{B} := (B, B_c, \psi_{c,c}, B_\nu, B_\gamma)$$

在具有自旋统计联系的 Spin$_2$-拓扑场论之间。作为 Spin$_2$-不动点中的 1-态射，它们由一个可逆的 $(B,\ A)$-双模 N和一个可逆的偶双模映射 f_c：$N \otimes_A A_c \longrightarrow B_c \otimes N$构成；它们将 $\phi_{c,\ c}$ 与 $\psi_{c,\ c}$ 交织起来，并将 A_ν 与 B_ν 交织起来，如图 5.17 所示。$(N,\ f_c)$ 作为 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点之间的态射还需满足的附加条件是

$$\begin{array}{ccc} A_{(-1)^F} \otimes_A A_c \otimes_A N & \longrightarrow & N \otimes_B B_{(-1)^F} \otimes_B B_c \\ {\scriptstyle A_\gamma}\uparrow & \nearrow_{B_\gamma} & \\ N & & \end{array}$$

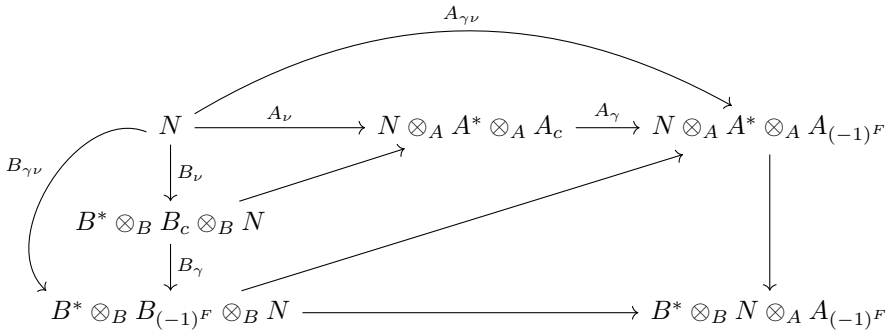
其中我们用到了 f_c 以及水平箭头中的 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 的自然性。$\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点之间的 2-态射 $\chi : (N,\ f_c) \longrightarrow (N',\ f_c')$，就是 Spin$_2$-拓扑场论中的 2-态射。

我们声称，这个双范畴等价于由非分次对称 Frobenius 代数组成的双范畴 ungFrob。关键思路是，A_ν 提供了 A_c 与 $A_{(-1)^F}$之间的典范同构，使我们能够有效地将 A_c 与 $A_{(-1)^F}$视为相同。请注意，无需谨慎区分A_c 及其逆，因为我们已经得到了一种典范方式，通过$\phi_{c,\ c}$将 A_c 与其自身的逆等同起来。由于该同构保留了所有相关数据，例如将同构$\phi_{c,\ c}$ 映射到平方为一的 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用的数据 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A$，因此我们可以遗忘信息$A_c$、$\phi_{c,\ c}$ 和 A_γ。更准确地说，令 $A_{\gamma\nu}$：$A \longrightarrow A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$ 表示 A_ν 与由 A_γ给出的识别 $A_c \cong A_{(-1)^F}$ 的复合。这样的双模同构等价于如下的无分次对称 Frobenius 结构 λ。它由 $A_{\gamma\nu}(1) \in A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$唯一确定；不失一般性，该元素的形式为 $\lambda \otimes (-1)^F \in A_{(-1)^F} \otimes A^*$，其中 $\lambda \in A^*$是某个元素。 $A_{\gamma\nu}$ 是双模映射这一条件等价于 $\lambda(ab) = \lambda(ba)$。它可逆这一条件等价于配对 $(a, b) \longmapsto \lambda(ab)$ 非退化。 $A_{\gamma\nu}$ 为偶这一条件等价于 λ为偶，也就是说，它在 A的奇元素上为零。由此，我们构造了一个从 $(\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F}$ 的对象到 ungFrob 的对象的映射 F。现在我们将把 F 扩展为一个函子。

在 1-态射上，我们映射

$$\underline{A} \xrightarrow{(N, f_c)} \underline{B}$$

到 1-态射 N。考虑以下图表



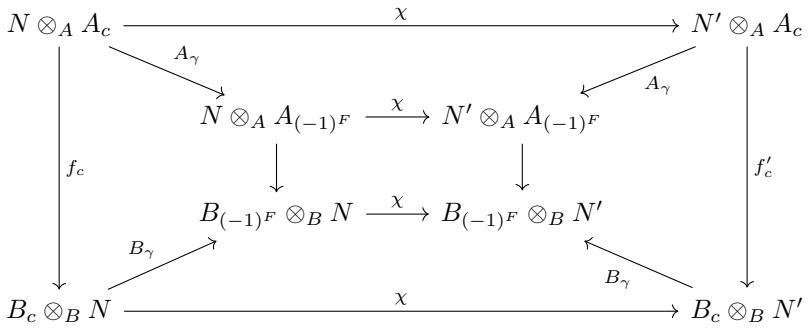
左上三角形可交换，因为 N 是 Spin$_2$-不动点之间的 1-态射，见图 5.17。中间部分可交换，因为 $(N,\ f_c)$ 是 $B\mathbb{Z}_2^F$-不动点之间的 1-态射。右下三角形严格可交换。将该图表作用于任意 $n \in N$，即可得到所需的方程

$$S_N(\lambda_B \otimes n) = (-1)^{|n|} n \otimes \lambda_A.$$

对于 2-态射，该函子是恒等的。这显然定义了态射范畴之间的一个函子

$$\mathrm{Hom}_{(\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F}}(\underline{A}, \underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{ungrFrob}}((A, \lambda_A), (B, \lambda_B)).$$

我们通过证明偶双模同构 $\chi\colon N \longrightarrow N'$ 是 Spin_2-不动点的 2-态射这一条件自动成立，来说明它是全忠实且本质满的。为此，考虑图表



中间的方块由 $A_{(-1)^F}$ 的自然性可交换。左侧四边形可交换，因为 $(N, f_c) : A \longrightarrow B$ 是 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点的 1-态射；右侧四边形可交换，因为 (N', f_c') 是。上方和下方的四边形根据定义可交换。由此得到的外部图表表明，χ 是 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点的 2-态射。我们得出

$$\mathrm{Hom}_{(\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F}}(\underline{A}, \underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{ungrFrob}}((A, \lambda_A), (B, \lambda_B)).$$

是范畴等价。

函子 F 将 $(\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F}$ 中 1-态射的复合严格保留到无分次对称 Frobenius 代数中。它也保留恒等态射。我们证明 F 本质满。给定一个无分次对称 Frobenius 代数 (A, λ)，代数 A 借助 $A_c := A_{(-1)^F}$、平凡的 A_γ, $\phi_{c,c}$、乘法映射 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A$，以及满足 $A_\nu(1) = \lambda \otimes (-1)^F$ 的双模映射 $A_\nu\colon A \longrightarrow A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$，组成一个 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点。事实上，由于 $A_{(-1)^F}$ 是一个 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用，这就定义了一个 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点。

现在我们证明这是一个 Spin_2-不动点。首先注意到，由于将 $(-1)^F$ 应用于双模 $A_{(-1)^F}$ 的自然性数据是恒等的，因此这两个双模同构

$$A^* \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A_{(-1)^F} \otimes_A A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$$

分别由对双模 $A^* \oplus_A A_{(-1)^F}$ 应用自然性，以及对 A^* 应用自然性后再与 $\mathrm{id}^{A_{(-1)^F}}$ 张量化得到的双模同构相等。此外，对于任意的偶双模映射 $\psi\colon N \longrightarrow N'$（介于 (B, A)-双模之间），图表

$$\begin{array}{ccc} N' \otimes_A A_{(-1)^F} & \longrightarrow & B_{(-1)^F} \otimes_B N' \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ N \otimes_A A_{(-1)^F} & \longrightarrow & B_{(-1)^F} \otimes_B N \end{array}$$

由 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用的自然性可知该图表交换（或者更具体地说，因为 ψ 是偶的）。现在，为了证明 $A_\nu\colon A \longrightarrow A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$ 是 $\mathbb{Z}_2^c$-不动点的一个 2-态射，我们需要证明图表

$$\begin{array}{ccc} (A^* \otimes_A A_{(-1)^F}) \otimes_A A_{(-1)^F} & \longrightarrow & A_{(-1)^F} \otimes_A (A^* \otimes_A A_{(-1)^F}) \\ {\scriptstyle A_\nu}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A_\nu} \\ A \otimes_A A_{(-1)^F} & \longrightarrow & A_{(-1)^F} \otimes_A A \end{array}$$

交换，其中我们在上方使用了 Serre 自同构的自然性。根据例 C.24，Serre 自同构作用于 (A, A)-双模 $A_{(-1)^F}$ 时的自然性数据，与$B\mathbb{Z}_2^F$-作用在 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上作用于 A^* 时的自然性数据一致，因此可以用 $(-1)^F$-自然性替代 Serre 自然性。现在，结合上述说明以及上述在 $B = A, N = A, N' = A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$和 $\psi = A_\nu$ 情形下的图表，可知最后一个图表交换。因此我们定义了一个 Spin_2-不动点。最后，(A, A)-双模 $A_{(-1)^F}$满足 $a(-1)^F = (-1)^{|a|}(-1)^F a$，且 $\phi_{c,c}$ 满足 $((-1)^F)^2 = 1$，因此 A_γ 是 Spin_2-不动点的一个 2-态射。我们已经证明 $(A, A_{(-1)^F}, \phi_{c,c}, A_\nu, A_\gamma)$ 是一个 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes B\mathbb{Z}_2^F$-不动点。显然，它在 F下映射到 (A, λ)，故可得 F是本质满的，因此它是 2-范畴的一个等价。

□

注5.21。对于两个未分次对称 Frobenius 代数之间的 (A', A)-双模 N，使其成为 ungFrob 中的 1-态射的条件，也可以通过指出图表

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes \lambda} & N \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A A^* \\ {\scriptstyle \lambda' \otimes \mathrm{id}_N}\downarrow & & \downarrow \\ A'_{(-1)^F} \otimes_{A'} A'^* \otimes_{A'} N & \longrightarrow & A'_{(-1)^F} \otimes_A N \otimes_A A^* \end{array}$$

可交换来表述，其中 两个未标记的箭头分别表示 Serre 自同构的自然性和 $A_{(-1)^F}$。

现在我们转向 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上完整的 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$-作用，因此将给出一些其余相干数据的显式形式；详情见附录 C。$\mathbb{Z}_2^R$-作用 $A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$ 与 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用结合成 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用这一事实由 2-同构

$$(\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F} \cong \overline{{}_{(-1)^F}A}^{\mathrm{op}} = \overline{A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}-1}.$$

剩余的 Spin_2-作用与 $\mathbb{Z}_2^R$-作用结合成 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2^R$-作用的数据是 2-同构

$$(\overline{A}^{\mathrm{op}})^* \cong \overline{A^*}^{\mathrm{op}}.$$

这对应于等式 $\gamma R = Rc\gamma^{-1}$。事实上，请注意，上述方程右侧没有逆，且 R 在 1-态射上作用为对偶逆。

现在我们引入星形弗罗贝尼乌斯代数的概念，旨在证明定理 5.23。

定义 5.22。星形弗罗贝尼乌斯代数 stFrob 所成的双范畴是这样一个双范畴：

- **对象：** 是由有限维半单非分次对称弗罗贝尼乌斯超代数 $(A, \lambda) \in$ ungrFrob 和复反线性的星形结构 $(M \in \mathbf{Bim}(A, A_{\mathrm{op}})\ \sigma\colon M_{\mathrm{op}} \longrightarrow M)$ 构成的四元组 (A, M, σ, λ)。Frobenius 结构与星形结构相容，其意义是，以下由 (A, A_{op})-双模构成的范畴中的图表可交换 —

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\overline{\lambda}^{\mathrm{op}}} & M \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} \overline{A^* \otimes_A A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & M \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} (\overline{A}^{\mathrm{op}})^* \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} (\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F} \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & & & \uparrow \\ A^* \otimes_A A_{(-1)^F} \otimes_A M & & \longrightarrow & & A^* \otimes_A M \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} (\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F} \end{array}$$

- **1-态射：** $(A, M, \sigma, \lambda) \longrightarrow (A', M', \sigma', \lambda')$ 是星形 (A', A)-双模 (N, h)，它们以如下意义交织 Frobenius 结构：N 是 ungFrob 中的一个 1-态射。
- **2-态射：** $(N_1, h_1) \Longrightarrow (N_2, h_2)$ 是酉偶双模映射。

定理 5.23. 自旋统计与反射场论的双范畴等价于星形 *Frobenius* 代数的双范畴 stFrob。

证明。 我们将分解定理应用于正合序列

$$1 \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^F \rtimes \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) \rtimes \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^R \longrightarrow 1$$

根据命题 5.20，我们知道 $(\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{B\mathbb{Z}_2^F \rtimes \mathrm{Spin}^2}$ 等价于稍小一些的双范畴 ungFrob。因此，只需计算 ungFrob 上诱导的 $\mathbb{Z}_2^R$-作用的不动点。

我们首先利用分解定理计算 ungFrob 上的这个 $\mathbb{Z}_2^R$-作用。回顾命题 5.20 的证明，Frobenius 结构 $\lambda\colon\ A \longrightarrow A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$ 在等价 $(\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{B\mathbb{Z}_2^F \rtimes \mathrm{Spin}^2} \cong$ ungFrob 下对应于关于路径 $c\gamma\nu\colon\ 1 \longrightarrow 1$ in $B\mathbb{Z}_2^F \rtimes \mathrm{Spin}_2$ 的不动点。因此，函子 $\rho(R)$: ungFrob $\longrightarrow$ ungFrob 将一个非分次 Frobenius 代数 (A, λ) 映至具有如下 Frobenius 结构的 A^{op}

$$\overline{A}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\overline{\lambda}^{\mathrm{op}}} \overline{A^* \otimes_A A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}} \cong (\overline{A}^{\mathrm{op}})^* \otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}} (\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F}.$$

在最后一行中，我们使用了函子 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}} \longrightarrow \mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 之间的自然同构 $\rho(R)\rho(c\gamma\nu) \cong \rho(\gamma^{-1}\nu)\rho(R)$，该自然同构由 $\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$ 中相应的交换关系给出。由于 ungFrob 中的 1-态射和 2-态射是带有额外条件的 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中的 1-态射和 2-态射，函子 $\rho(R)$ 就等于 R 在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上对这些态射的作用。特别地，保持 1-态射的复合M的数据：$(A,\ \lambda_A) \longrightarrow (B,\ \lambda_B)$ N：$(B,\ \lambda_B) \longrightarrow (C,\ \lambda_C)$，由相应的自然同构给出

$$\overline{N \otimes_B M}^{\mathrm{op}-1} \cong \overline{N}^{\mathrm{op}-1} \otimes_{\overline{B}^{\mathrm{op}-1}} \overline{M}^{\mathrm{op}-1}$$

在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中。同样，给定 $(A,\ \lambda_A) \in$ ungFrob，自然同构 $A^{\mathrm{op}-1^{\mathrm{op}-1}} \cong A$ 就只是 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中相应的自然同构。

现在我们转向不动点。$\mathrm{ungFrob}^{\mathbb{Z}_2^R}$ 中的对象由一个无分次对称 Frobenius 代数 $(A,\ \lambda)$、ungFrob 中的一个 1-态射 $\rho(R)(A,\ \lambda) \longrightarrow (A,\ \lambda)$，以及 ungFrob 中的某个 2-态射组成。忽略它们是 ungFrob 中的 1-态射和 2-态射这一事实，并将它们视为 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中的态射，可以看出，这两项数据以与定理 5.15 的证明中相同的方式组合成 A 上的星形结构。现在，上述 ungFrob 中的 1-态射是一个可逆的 $(A,\ A^{\mathrm{op}})$-双模 M，且满足这样的条件： A 和 A^{op} 的 Frobenius 结构彼此相容。考察A^{op}上的 Frobenius 结构的定义可知，这恰好就是所需定理陈述中给出的对象条件。

因此我们转向 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点之间的 1-态射。它们由 ungFrob 中的一个 1-态射 $N\colon (A,\ \lambda) \longrightarrow (A',\ \lambda')$，以及 ungFrob 中满足某个条件的 2-态射 h 组成。ungFrob 中的 2-态射就是 ungFrob 中的 2-态射，而关于 h 的条件与其作为 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$中 $\mathbb{Z}_2^R$-不动点之间的态射所满足的条件相同。现在我们可以重复定理 5.15 证明中的相关部分，从而得出 h 是 N上的一项幺正性数据。类似地，$\mathrm{ungFrob}^{\mathbb{Z}_2^R}$ 中的 2-态射就是 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 中的 2-态射，它们满足两个星形模之间的相容条件，因此我们可以再次归结为定理 5.15 并得出结论。

□

注 5.24。 设 $(A,\ M,\ \sigma)$ 是一个有限维半单星形代数。注意，由于 $A \longmapsto A_{(-1)^F}$ 的自然性， $A_{(-1)^F}$ 成为了一个星形双模。这与例 5.12 中讨论的星形双模结构一致。然而，由于 R 与 ν 之间存在扭交换关系， A^* 并不会由于 Serre 自同构的自然性而成为星形双模。相反，

它填充了略有不同的图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A^*} & A \\ {\scriptstyle M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M} \\ \overline{A}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[(\overline{A}^{\mathrm{op}})^*]{} & \overline{A}^{\mathrm{op}} \end{array}$$

该方块由 Serre 自然性填满，另外两个复合则由同构 $(A^{\mathrm{op}})^* \cong A^{*\mathrm{op}}$给出，它表达了 R 与 $\overline{S}O_2$之间非平凡的交换关系。特别是，我们无法将 Stellar 代数与无分次对称 Frobenius 结构 λ相容这一条件表示为 $\lambda : A_{(-1)^F} \longrightarrow A^*$ 的幺正性。

例 5.25. 我们通过考察 Stellar 结构来自 $*$-代数的情形，为 Stellar 结构与 Frobenius 结构相容这一条件提供一些直观解释。现在我们将证明，在这种情况下，该条件等价于

$$\lambda(a^*) = (-1)^{|a|}\overline{\lambda(a)} = \overline{\lambda(a)}$$

其中最后一个方程由以下事实得出：当 a为奇数时， λ 消失。对于来自 $*$-代数的 Stellar 代数，我们有 $M = A_*$。在这种情况下，星形模对应于取值于 A 的内积，称为希尔伯特模，正如我们在第 5.2 节中所见。例 5.12 中以这种方式描述了星形模 $A_{(-1)^F}$。将 A^* 明确地描述为希尔伯特模稍显不便，因为这需要为 A^*选取一个逆，因此我们在此不作这种描述。不过，这种情况下 Serre 同构的自然性已在附录的例 C.22 中说明。

5.4 带有自旋-统计和反射结构的二维拓扑场论的计算

本节将计算具有费米子对称性 G、反射结构和自旋-统计的二维扩展拓扑场论的双范畴。不失一般性，从现在起我们假设G 是一个费米子 2-群。与第 4.3 节中的计算类似，我们将从 $c \neq 1$ 的情形开始，并在注 5.31 中稍后讨论较简单的情形。回想一下，根据配边假设，这意味着我们需要计算以下作用的不动点：

$$H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$$

该作用于 $\mathbb{C}$ 上有限维半单超代数的双范畴。这里的 $\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用与上一节相同，而 H_2 通过映射到 O_2，借助配边假设发挥作用。考虑到迭代不动点的分解定理命题 A.18，以及我们对星形弗罗贝尼乌斯代数的理解，我们转而研究以下正合序列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) \longrightarrow H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) \longrightarrow G_b \longrightarrow 1.$$

事实证明，这个正合序列是分裂的，我们很快就会证明这一点。

不过，我们先回顾上一节的内容：存在一个 2-群同构 s

$$\mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) \cong (\mathbb{Z}_2^c \rtimes B\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) \longrightarrow B\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2^R \cong O_2$$

其定义是消去 c 和 $(-1)^F$，并将 η 映射到一个生成环路。我们再次强调，诱导的O_2作用在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的方式并非由配边假设给出。相反，非平凡对象通过 $(.)^{\mathrm{op}}$作用，而环路通过 $A \longmapsto A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$作用，参见注释 5.19 及其上方的证明。这也与定理 5.23 一致，该定理指出，这个 O_2作用的不动点是星形 Frobenius 代数。

接下来，我们通过指定一个逆

$$\sigma : O_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$$

将 R 映射到自身，并将 $B\mathbb{Z}$ 中优选的生成环路映射到

$$1 \xrightarrow{\eta} c \xrightarrow{(\mathrm{id}_c \rtimes (-1)^F)} 1.$$

这里我们回顾一下，$(-1)^F\colon 1 \longrightarrow 1$ 在半直积中将其陪域改为 $1 \rtimes (-1)^F\colon 1 \longrightarrow c$，这是因为 $\rho((-1)^F)_* = c$ 属于 $B\mathbb{Z}_2^F$ 对 $\mathbb{Z}_2^c$ 的作用 ρ，参见定义 A.17。

To s关于正合序列的分裂，我们想要构造一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Spin}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) & \longrightarrow & H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F) & \longrightarrow & G_b & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} & & \uparrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & O_2 & \longrightarrow & O_2 \times G_b & \longrightarrow & G_b & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中所有向上的箭头都是同构。因此，我们必须将上面指定的映射 σ 扩展到定义域 $O_2 \times G_b$。由此可知，根据五引理，所得的 σ 仍然是 2-群的同构。事实上，上述两个水平正合序列在分类空间上诱导出纤维化，而σ 定义了这些纤维化之间的一个映射。纤维化的同伦群长正合序列具有函子性。根据五引理，我们便得到 σ 是一个弱同伦等价。

令 s 表示正合序列的典范截面

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}_2 \longrightarrow H_2 \longrightarrow G_b \longrightarrow 1$$

这是因为我们使用了费米子骨架模型

$$H_2 = \mathrm{Spin}_2 \rtimes G_b.$$

回顾第 3.4 节末尾对这个半直积和截面的说明：首先，我们有$s(g) = 1 \rtimes g$，而截面不保持乘法这一点可由下式度量:

$$\Xi^{\mathrm{op}}(g_1, g_2) := \Xi(g_1, g_2) + \theta(g_1)\theta(g_2)$$

也就是说

$$s(g_1) \otimes s(g_2) = \Xi^{\mathrm{op}}(g_1, g_2)s(g_1 g_2).$$

需要提醒读者的是，一般而言， Ξ 不是 $\pi_0(G_b)$上的 2-余循环。由于 G_b 是骨架的，我们只关注提升自同构 $\gamma\colon g \longrightarrow g$，它们会提升为态射，其中陪域可能经由 c改变:

$$s(\gamma) = 1 \rtimes \gamma : g \longrightarrow g \otimes \Gamma(\gamma).$$

注意，这些态射的复合性质良好，即

$$s(\gamma_2 \circ \gamma_1) = (s(\gamma_2 : g \longrightarrow g) \otimes \mathrm{id}_{\Gamma(\gamma_1)}) \circ s(\gamma_1 : g \longrightarrow g)$$

此外，第 3.4 节中还证明了

$$(\eta \rtimes 1) \otimes \mathrm{id}_{s(g)} = \begin{cases} \mathrm{id}_{s(g)} \otimes (\eta \rtimes 1) & \theta(g) = 0 \\ \mathrm{id}_{s(g)} \otimes (c\eta^{-1} \rtimes 1) & \theta(g) = 1 \end{cases}$$

我们继续将 σ 扩展到 G_b。关键技巧是通过使用态射 $1 \rtimes (-1)^F$ 从 1 移动到 c，将截面 s 扰动为一个 2-群态射。定义

$$\sigma(g) = s(g) \rtimes R^{\theta(g)}$$

在对象上，对于态射 $\gamma: g \longrightarrow g$，我们定义态射 $\sigma(g) \longrightarrow \sigma(g)$ 如下：

$$\sigma(\gamma)=\begin{cases} s(\gamma) \rtimes \mathrm{id}_{R^{\theta(g)}} & \Gamma(\gamma)=1 \\ (\mathrm{id}_c \rtimes(\mathrm{id}_{R^{\theta(g)}} \otimes(-1)^F))(s(\gamma) \rtimes \mathrm{id}_{R^{\theta(g)}}) & \Gamma(\gamma)=c. \end{cases}$$

请注意，即使在后一种情况下，这也是一个自同构，因为 $s(\gamma) \rtimes \mathrm{id}_{R^{\theta(g)}}$ 是从 $R^{\theta(g)}$到 $R^{\theta(g)}c$的态射。回想一下，γ在 s 下复合良好，且 Γ 是一个群同态 $\mathrm{Aut}(g) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$。此外，利用 $B\mathbb{Z}_2^F$ 在 G_b部分上平凡作用这一点，根据半直积中的水平复合定义可得

$$(1 \rtimes(-1)^F)(\mathrm{id}_k \rtimes 1)=(\mathrm{id}_{kc^{\theta(k)}} \rtimes 1)(1 \rtimes(-1)^F).$$

因此，s 定义了一个函子：利用 R 通过其在 G_b部分上的分次同态 θ，以乘法作用于 H 的对象这一点，我们计算得

$$\begin{aligned} \sigma(g_1)\sigma(g_2) &= (s(g_1) \rtimes R^{\theta(g_1)})(s(g_2) \rtimes R^{\theta(g_2)}) = s(g_1)s(g_2)c^{\theta(g_2)\theta(g_1)} \rtimes R^{\theta(g_1)+\theta(g_2)} \\ &= s(g_1g_2)\Xi(g_1,g_2) \rtimes R^{\theta(g_1g_2)} = \Xi(g_1,g_2)\sigma(g_1g_2). \end{aligned}$$

因此，对于幺半群数据

$$s(g_1g_2) \cong s(g_1)s(g_2)$$

我们取同构 $1 \rtimes((-1)^F)^{\Xi(g_1,g_2)}$。类似地，$R$ 与 G_b之间的交换关系也可能存在偏差 c。事实上，定义 $\sigma(gR) := \sigma(g)\sigma(R)$，那么反向相乘可得

$$\begin{aligned} \sigma(Rg)=\sigma(gR)=\sigma(g)\sigma(R)=s(g) \rtimes R^{\theta(g)+1} \\ \sigma(R)\sigma(g)=c^{\theta(g)}s(g) \rtimes R^{\theta(g)+1} \end{aligned}$$

因此，我们将幺半群数据 $\sigma(Rg) \cong \sigma(R)\sigma(g)$ 定义为 $1 \rtimes(-1)^F$，若 $\theta(g)=1$。至少有一个元素形如 Rg 时，幺半群数据也类似定义。现在我们需要证明这些幺半群数据满足所需的结合条件。对于 G_b 中的三个元素，这可由 Ξ、Γ 与 G_b的结合子之间的关系推出，见第 3.4 节。对于涉及 R 的情况，我们还需将 $1 \rtimes(-1)^F$ 与 G_b中的某些元素交换。注意，对于 $\theta(g)=1$，$1 \rtimes R$ 与 $\sigma(g) \rtimes 1$ 和 $\sigma(\gamma)=s(\gamma) \rtimes 1$ 具有相同的交换关系，因此

$$\sigma(\gamma) \otimes \sigma(\mathrm{id}_g)=\sigma(\mathrm{id}_g) \otimes \sigma(\gamma)$$

幺半性同构的自然性由 $(-1)^F$、c和 η之间的交换性质推出。

令 ψ表示 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上完整的 $H_2 \rtimes(\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)$-作用。我们利用分裂 σ：首先取O_2-不动点，随后得到的 G_b-不动点现在可以作为分解定理（命题 A.18）的特例相对简单地计算，其中半直积是直积。唯一需要注意的是，要记录我们在上文多个步骤中引入了多少个 $(-1)^F$s，以使 σ 成为一个 2-群同态。等价的 $O_2 \times G_b$-作用如下所示

1. $\psi(\sigma(R)) = \overline{(\cdot)}^{\mathrm{op}}$；2. $\psi(\sigma(g)) = \psi(s(g) \rtimes R^{\theta(g)}) = \psi(s(g) \rtimes 1)\psi(1 \rtimes R^{\theta(g)})$ 在 $\theta(g)=0$ 且 $(\cdot)^{\mathrm{opop}} = (\cdot)$ if$\theta(g)=1$ 时是恒等；3. 我们有 $\psi(\sigma(g))\psi(\sigma(R)) = \psi(\sigma(gR))$，但 $\psi(\sigma(R))\psi(\sigma(g)) \cong \psi(\sigma(Rg))$多了一个 $(-1)^F$ if$\theta(g)=1$。4. $\psi(\sigma(\eta: 1 \longrightarrow 1))$ 由 Serre 与 $(\cdot)^{(-1)^F}$ 的水平复合给出，例如 $\psi(\sigma(\eta))[A] = A_{(-1)^F} \otimes_A A^*$；

5. $\psi(\sigma(\gamma\colon\ g\longrightarrow g))$ 由恒等$\psi(s(g))$ 以及可能的 $(\cdot)^{(-1)^F}$ if $\Gamma(\gamma)=c$ 的水平复合给出，例如

$$\psi(\sigma(\gamma))[A]=\begin{cases}A & \theta(g)=0,\Gamma(\gamma)=1\\ \overline{A} & \theta(g)=1,\Gamma(\gamma)=1\\ A_{(-1)^F} & \theta(g)=0,\Gamma(\gamma)=c\\ \overline{A}_{(-1)^F} & \theta(g)=1,\Gamma(\gamma)=c\end{cases}$$

其中，我们约定，例如将 A 视为一个 $(A,\ A)$-双模；$\overline{\quad}$ $\quad\overline{\quad}\ \overline{\quad}$

6. 考察 σ的幺半性数据，自然变换 $\psi(\sigma(g_1))\psi(\sigma(g_2))\cong\psi(\sigma(g_1g_2))$ 在 $\Xi(g_1,\ g_2)=1$时为恒等变换。若 $\Xi(g_1,\ g_2)=c$，则它由 $(\cdot)^{(-1)^F}\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}}\Longrightarrow\mathrm{id}_{\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}}$ if$\theta(g_1g_2)=0$ 给出；否则与 $(\cdot)$ 进行 whiskering；

7. 对应于关系 $R\eta=\eta^{-1}R$，我们有修正

$$\overline{A_{(-1)^F}\otimes_A A^*}^{\mathrm{op}-1}\cong\overline{A_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}-1}\otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}-1}}\overline{A^*}^{\mathrm{op}}\cong((\overline{A}^{\mathrm{op}})_{(-1)^F})^{-1}\otimes_{\overline{A}^{\mathrm{op}}}((\overline{A}^{\mathrm{op}})^*)^{-1}$$

它在上一节中星形代数的出现过程中已发挥了重要作用。

该作用的所有其他数据，都是通过组合三个对象或两个 1-态射得到的修正，它们要么是平凡的，要么是典范定义的。

我们转而考察 G_b 在 O_2-不动点上的作用 ξ，这些不动点根据定理 5.23 是星形弗罗贝尼乌斯代数。我们先计算 $g\in G_b$为一个对象时， $\xi(g)$ 在对象上的取值。设 $(A,\ M,\ \sigma,\ \lambda)$ 是一个星形弗罗贝尼乌斯代数。我们描述星形弗罗贝尼乌斯代数 $\xi(g)[A,M,\sigma,\lambda]$。若 $\theta(g)=0$，这就是原对象，因此假设 $\theta(g)=1$。其底层代数为 A。星形模由 R 的不动点数据计算得到，其中需要用到 R 与 g之间有趣的交换关系：

$$\overline{\overline{A}^{\mathrm{op}}}=\psi(\sigma(R))\psi(\sigma(g))A\cong\psi(\sigma(Rg))A=\psi(\sigma(gR))A\cong\psi(\sigma(g))\psi(\sigma(R))A\xrightarrow{\psi(\sigma(g))[M]}\psi(\sigma(g))A=\overline{A}.$$

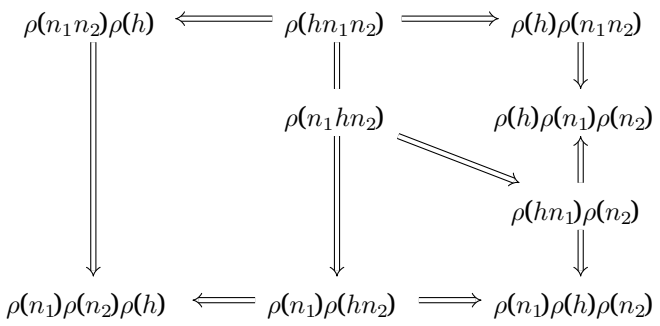
因此我们看到， A 上的星形结构是 $M\otimes_{A^{\mathrm{op}}}\overline{A}^{\mathrm{op}}\overset{(-1)^F}{=}$。这是我们在第 5.2 节末尾引入的$A$-上的星形模。现在我们将证明， σ 也如该处所述。

令 $c_{n,h}\colon\ \rho(n)\rho(h)\Longrightarrow\rho(n)\rho(h)$ 表示自然同构 $R_n^{-1}{}_{,h}$ 和 $R_{h,n}$ 的复合，其中用到了 $hn=nh$。为了定义 $\xi(h)[F]_{n_1,n_2}$，我们填入以下内容

$$\begin{array}{ccccc}
\rho(n_1n_2)\rho(h)[F] & \xrightarrow{c_{n_1n_2,h}[F]} & \rho(h)\rho(n_1n_2)[F] & \xrightarrow{\rho(h)[F_{n_1n_2}]} & \rho(h)[F]\\
\Big\downarrow{\scriptstyle R_{n_1,n_2}[\rho(h)[F]]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(h)[R_{n_1,n_2}[F]]} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \rho(g)[F_{n_1}]}\\
 & & \rho(h)\rho(n_1)\rho(n_2)[F] & \xrightarrow{\rho(h)\rho(n_1)[F_{n_2}]} & \rho(h)\rho(n_1)[F]\\
 & & \Big\uparrow{\scriptstyle c_{n_1,h}[\rho(n_2)[F]]} & & \Big\uparrow{\scriptstyle c_{n_1,h}[F]}\\
\rho(n_1)\rho(n_2)\rho(h)[F] & \xrightarrow[\rho(n_1)[c_{n_2,h}[F]]]{} & \rho(n_1)\rho(h)\rho(n_2)[F] & \xrightarrow[\rho(n_1)\rho(h)[F_{n_2}]]{} & \rho(n_1)\rho(h)[F]
\end{array}$$

右上方的方块由 $\rho(h)[F_{n_1,n_2}]$ 填充。右下方的方块是 $c_{n_1,\ h}$ 的自然性数据。

左矩形可展开如下



左矩形可由$\omega_{n_1,\ n_2,\ h}$填充，右上部分可由 $\omega_{h,\ n_1,\ n_2}$ 填充，而右下部分可由$\omega_{n_1,\ h,\ n_2}$填充。

要了解 σ 在 g的作用下如何变化，我们需要取上图中的 $n_1 = n_2 = R$ 和 $h = g$。利用 $A_{(-1)^F}$的自然性，可得

$$\overline{M} \otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}} \overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F} \xrightarrow{\overline{\sigma}\otimes\mathrm{id}} \overline{\overline{M}}^{\mathrm{op}} \otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}} \overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F} \cong \overline{(\overline{A}_{(-1)^F} \otimes_{\overline{A}} \overline{M})}^{\mathrm{op}} \cong \overline{\overline{M} \otimes_{\overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}} \overline{\overline{A}}^{\mathrm{op}}_{(-1)^F}}^{\mathrm{op}}$$

这正是我们在第 5.2 节中定义的星形结构。

为了计算 A 上的 Frobenius 结构，我们必须将时间反演的 g 与 η 交换。这对应于同构 $A^* \otimes_A A_{(-1)^F} \cong A^* \otimes_A A_{(-1)^F}$，因此 Frobenius 结构就是如下复合

$$\overline{A} \xrightarrow{\overline{\lambda}} \overline{A^* \otimes_A A_{(-1)^F}} \cong \overline{A}^* \otimes_{\overline{A}} \overline{A}_{(-1)^F}$$

将相关同构代入后，这就简化为

$$\overline{a} \longmapsto \overline{\lambda(a)}.$$

现在我们已经确定了对象上的 $\xi(g)$。

现在设 $(N,\ h) : (A_1,\ M_1,\ \sigma_1,\ \lambda_1) \longrightarrow (A_2,\ M_2,\ \sigma_2,\ \lambda_2)$ 是 O_2-不动点之间的一个 1-态射，也就是说，它是一个星形双模，并如定理 5.23 所述交织无分次 Frobenius 结构。我们希望为双模 N 配备一个适用于星形结构的幺正性数据，使其形式如上文所述的 $(A_1)_{(-1)^F} \otimes_{A_1} M_1$。2-群的直积的不动点之间的 1-态射的一般图表为

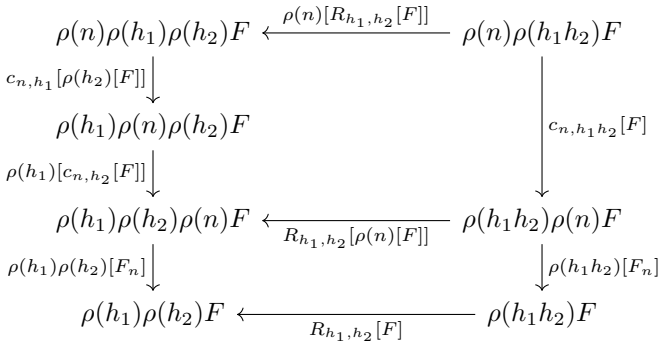
$$\begin{array}{ccc}
\rho(n)\rho(h)F & \xrightarrow{\rho(n)\rho(h)f} & \rho(n)\rho(h)F' \\
{\scriptstyle c_{n,h}[F]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{n,h}[F']} \\
\rho(h)\rho(n)F & \xrightarrow{\rho(h)\rho(n)f} & \rho(h)\rho(n)F' \\
{\scriptstyle \rho(h)[F_n]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho(h)[F'_n]} \\
\rho(h)F & \xrightarrow{\rho(h)f} & \rho(h)F'
\end{array}$$

上方的方块由 $c_{n,h}$ 的自然性填充，下方的方块则由 $\rho(h)[f_n]$ 填充。针对当前情形作特化并使用 $A^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}}$，即可恢复定义 N 的图表，正如第 5.2 节末尾所述：

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\overline{A_1}}^{\mathrm{op}} & \xleftarrow{\overline{N}^{\mathrm{op}}} & \overline{\overline{A_2}}^{\mathrm{op}} \\
{\scriptstyle \overline{M_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{M_2}} \\
\overline{A_1} & \xrightarrow{\overline{N}} & \overline{A_2} \\
{\scriptstyle \overline{A_1}_{(-1)^F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{A_2}_{(-1)^F}} \\
\overline{A_1} & \xrightarrow[\overline{N}]{} & \overline{A_2}
\end{array}$$

由于函子 $\xi(g)$ 在遗忘星形弗罗贝尼乌斯结构后便简化为 $(.):\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}} \longrightarrow \mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$，且星形 Frobenius 代数在 2-态射上只有额外的条件（而非数据），因此 $\xi(g)$ 的其余数据现已确定。

接下来我们计算自然同构 $\xi(g_1g_2) \cong \xi(g_1)\xi(g_2)$。回顾一下，根据$\Xi(g_1,g_2)$和 $\theta(g_1g_2)$的不同，它们由额外的 $(-1)^F$ 和/或 $(。)$ 给出。剩下唯一要做的就是计算它们上的星形双模结构。一般的图表如下所示



下半部分由 R_{h_1,h_2} 的自然性填充。上半部分则以类似图表 5.4 的方式由各种 ω 填充。代入 $n=R$ 后，便得到典范 $(A^{\theta(g_1)})_{\theta(g_2)}{}_A{}^{\theta(g_1g_2)}$-双模上所需的星形结构。根据 $\theta(g_1)$ 和 $\theta(g_2)$，竖直箭头可以包含额外的 $(-1)^F$；根据 $\Xi(g_1,g_2)$，水平箭头可以包含额外的 $(-1)^F$。因此，视具体情况，可能需要使用 $(-1)^F$-自然性数据；除此之外，酉性数据显而易见。我们在下述定理中总结目前为止的计算。

定理 5.26。 G_b在 stFrob 上的作用如下所示。

1. 对于 $g \in G_b$，函子 $\psi(g)$ 在 $\theta(g) = 0$时是恒等函子。否则，它将一个星形弗罗贝尼乌斯代数 (A, M, σ, λ) 映射为星代数 $(A, A_{(-1)^F} \otimes_A M, \sigma, \lambda)$，并将一个星形模 (N,h)：$(A_1, M_1, \sigma_1, \lambda_1) \longrightarrow (A_2, M_2, \sigma_2, \lambda_2)$ 映射为 (N,h)。 $\psi(g)$ 的其他数据与 sAlg^{fd} 上的函子 $(\cdot)$ 相同。*2.* 对于 $g_1, g_2 \in G_b$，自然变换 $\rho(g_1g_2) \Longrightarrow \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$ 在 (Ξ, g_1) g_2非平凡时由 $(-1)^F$给出（如果 $\theta(g) = 1$，则适当地与 $(\cdot)$ 作水平复合）。此自然变换上的星形双模结构由 $(-1)^F$ 和 $(\cdot) \cong (\cdot)$ 的自然性数据规范地给出。*3.* 对于 G_b 中的态射 $\gamma : g \longrightarrow g$，自然变换 $\rho(\gamma)$：$\rho(g) \Longrightarrow \rho(g)$ 在 $\Gamma(\gamma) = c$ 时由 $(-1)^F$ 给出，否则为恒等变换（如果 $\theta(g) = 1$，则适当地与 $(\cdot)$ 作水平复合）。*4.* 作用 $(R_{\gamma,\gamma'}, \alpha_{\gamma,\gamma'}, \omega_{g_1,g_2,g_3}$ 等$)$ 的所有其他数据，均由 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用的自然性规范地诱导得到。

—

为了陈述我们的主定理，我们需要将关于费米子 2-群上的强分次代数的定义（定义3.27）与非分次对称星状弗罗贝尼乌斯代数的定义结合起来：

定义5.27。 设 $\mathcal{G}$ 为一个费米子 2-群。强 $\mathcal{G}$-分次星形弗罗贝尼乌斯代数 是一个强 $\mathcal{G}$-分次代数

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{G}} A_g$$

满足

1. $A := A_1$ 配备了星形 Frobenius 代数的结构（M、σ、λ），特别是 A 是有限维半单的。

2. 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 g，(A、$A^{\theta(g)}$)-双模 A_g 是星形 Frobenius 代数中的 1-态射。换句话说，它们配备了星形双模的结构，其中 A 上的星形结构由(M、σ)按照定义 5.16 诱导，且该双模与 A 和 A 上的 Frobenius 结构相容。

3. 对于每个态射 $\gamma: g \longrightarrow g'$，映射 $F_\gamma: A_g \longrightarrow A_{g'}$ 是酉的；对于每对对象 g_1、g_2，乘法映射 $A_{g_1} \otimes_{A^{\theta(g)}} {}^{\theta}A_{g_2}(g_1) \longrightarrow A_{g_1 g_2}$ 是酉的。这里，我们为双模的复共轭赋予第 5.2 节末尾所说明的星形结构。

在继续证明主定理之前，我们先将其中一些条件表述得更明确。

命题 5.28。对于强 $\mathcal{G}$-分次的星形 *Frobenius* 代数，要求 $(A, A^{\theta(g)})$-双模 A_g 保持 A 上的 *Frobenius* 结构 λ 以及它在 $A^{\theta(g)}$ 上诱导的 *Frobenius* 结构，这一条件等价于

$$\lambda(a_g a_{g^{-1}}) = \overline{\lambda(a_{g^{-1}} a_g)}^{\theta(g)}$$

对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$均成立。

证明。回顾命题 5.20，A_g 保持 Frobenius 结构等价于要求 Serre自然性同构 S_g：$A^* \otimes_A A_g \cong A_g \otimes_{A^{\theta(g)}} (A^{\theta(g)})^*$ 满足

$$S_g(\lambda \otimes_A a_g) = (-1)^{|a_g|} a_g \otimes_A \overline{\lambda}^{\theta(g)}$$

其中 $\overline{\lambda}$是定理 5.26 中给出的 A 上的非分次对称 Frobenius 结构。在引理 C.25 中，我们证明该条件等价于对所有 $a_g \in A_g$ 和$a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$，要求所需的 $\lambda(a_g a_{g^{-1}}) = \overline{\lambda(a_{g^{-1}} a_g)}^{\theta(g)}$。

□

例5.29. 为了获得更直观的理解，我们考虑 A 是超 $*$-代数的情形。由于 A_g 是星形 $(A, A^{\theta(g)})$-双模，它配备了一个取值于$\overline{A}$ 的内积，并满足希尔伯特模类型的恒等式；唯一涉及符号的细微之处出现在 A 上的 $*$-结构 $a^* = (-1)^{|a|} a^*$ 中。例如，这使得在 A_g 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足如下关系：情形 $\theta(g) = 1$

$$\langle a_g \overline{a}, a'_g \rangle = (-1)^{|a'_g||a|+|a|} \langle a_g, a'_g a^* \rangle$$

因为在右侧的表达式中，我们必须计算 $a^* = (-1)^{|a|} a^*$。根据复合上的星形结构的定义，乘法映射 $A_g \otimes_{A^{\theta(g)}} A_h^{\theta(g)} \longrightarrow A_{gh}$ 为酉映射，这要求

$$\langle a_g a_h, b_g b_h \rangle_{A_{gh}} = (-1)^{|b_g||b_h|} \langle a_g \langle a_h, b_h \rangle_{A_h}, b_g \rangle_{A_g}$$

对于 $\theta(g)$，这是平凡的。对于非平凡的 $\theta(g)$，同样的计算得到

$$\langle a_g a_h, b_g b_h \rangle_{A_{gh}} = (-1)^{|b_g||b_h|} \langle a_g \langle \overline{a}_h, \overline{b}_h \rangle_{\overline{A_h}}, b_g \rangle_{A_g} = (-1)^{|b_g||b_h|+|b_h|} \langle a_g \overline{\langle a_h, b_h \rangle_{A_h}}, b_g \rangle_{A_g}$$

其中的符号来自星形模 A_h 的复共轭，正如本节开头所讨论的那样。例如，当 $h = g^{-1}$ 时，这给出

$$a_g a_{g^{-1}} (b_g b_{g^{-1}})^* = (-1)^{|b_g||b_{g^{-1}}|+\theta(g)|b_{g^{-1}}|} \langle a_g, \langle a_{g^{-1}}, b_{g^{-1}} \rangle_{A_{g^{-1}}} b_g \rangle_{A_g}.$$

现在我们证明主定理。

定理 5.30。 设 (G, c, θ) 为一个费米子群，且 $\mathcal{G}$ 是 G的基本2群。那么，具有费米子对称性 G、自旋-统计和反射结构的二维拓扑场论，由强 $\mathcal{G}$-分次星形 *Frobenius* 代数分类。

证明。 根据配边假设，我们需要计算

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}(\mathsf{Bord}^{H_2}, \mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} &= ((\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{H_2})^{\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F} = (\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{H_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F)} \cong (\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{O_2 \times G_b} \\ &\cong ((\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}})^{O_2})^{G_b} \cong \mathsf{stFrob}^{G_b}.\end{aligned}$$

令 $\mathcal{G}_b$ 表示 G_b 的基本 2-群。回顾一下，将扩张分类到 $\mathcal{G}$ 的 2-群映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^c$，如第 3.4 节所述，由一对 (Γ, Ξ) 给出。沿着这些同构依次推演，只需计算定理 5.26 中给出的作用在星代数上的 $\mathcal{G}_b$-不动点。我们按照定义 A.8 明确给出所有数据。这些数据包括

1. 一个 Frobenius 星形代数 $(A, M, \sigma, \lambda) \in \mathrm{ob}\,\mathsf{stFrob}$;

2. 对每个 $g^b \in \mathrm{ob}\,\mathcal{G}_b$，一个保 Frobenius 结构的星形 $(A, A^{\theta(g^b)})$-双模 A_{g^b}；其中我们在 A 上取 $(-1)^F$-扭曲的星形结构，详见第 5.2 节末尾；

3. 一个酉双模同构

$$\phi_{g_1^b, g_2^b} : A_{g_1^b} \otimes_{\overline{A}^{\theta(g_1^b)}} \overline{A}^{\theta(g_1^b)}_{g_2^b} \otimes_{\overline{A}^{\theta(g_1^b g_2^b)}} R_{g_1^b, g_2^b}[A] \longrightarrow A_{g_1^b g_2^b}$$

对于每个 $g_1^b,\ g_2^b \in \mathrm{ob}\,\mathcal{G}_b$ 其中

$$R_{g_1^b, g_2^b}[A] := \begin{cases} \overline{A}^{\theta(g_1^b g_2^b)} & \Xi(g_1^b, g_2^b) = 1 \\ (\overline{A}^{\theta(g_1^b g_2^b)})_{(-1)^F} & \Xi(g_1^b, g_2^b) = c. \end{cases}$$

4. 对于每条路径 $\gamma^b : g_1^b \longrightarrow g_2^b$ 在 $\mathcal{G}_b$ 一个酉双模同构

$$F_{\gamma^b} : A_{g_1^b} \longrightarrow A_{g_2^b}$$

当 $\Gamma(\gamma^b) = 1$ 且

$$F_{\gamma^b} : A_{g_1^b} \longrightarrow A_{g_2^b} \otimes_{\overline{A}^{\theta(g_2^b)}} (\overline{A}^{\theta(g_2^b)})_{(-1)^F}$$

当 $\Gamma(\gamma^b) = c$。

在讨论这些数据必须满足的条件之前，我们先引入一些记号，以衔接定理的陈述。我们将使用 $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2^c \rtimes \mathcal{G}_b$ 的基本群胚模型，其中半直积是利用 (Γ, Ξ) 构造的。这为我们提供了 2-群正合序列的一个优选分裂

$$1 \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^c \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_b \longrightarrow 1.$$

具体而言，这意味着 $\mathcal{G}$ 的对象具有 $g = c^\epsilon \rtimes g^b$的形式，其中 $\epsilon = 0$ 或 $\epsilon = 1$，且 g^b 是 $\mathcal{G}_b$中的一个对象。给定这样一个对象，我们定义星形双模

$$A_g := \begin{cases} A_{g_b} & \epsilon = 1 \\ A_{g_b} \otimes_{\overline{A}^{\theta(g^b)}} (\overline{A}^{\theta(g^b)})_{(-1)^F} & \epsilon = -1. \end{cases}$$

我们将 ϕ 的定义推广到 ϕ_{g_1,g_2} 上的 $g_1,g_2\in\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$，并在适当之处插入酉同构 $A_{g_b}\otimes_{A^{\theta(g_b)}}({}^{\theta(g_b)}A)\xrightarrow{-}{}_{(-1)^F}\cong A_{(-1)^F}\otimes_A A_{g_b}$ 和 $A_{(-1)^F}\otimes_A A_{(-1)^F}\longrightarrow A$。这些同构分别由 $(-1)^F$ 的自然性以及 $(-1)^F$ 平方为恒等映射这一数据所诱导。由于它们与 $\mathbb{Z}_2^R$-作用 $A\longmapsto A^{\mathrm{op}}$的相关相容性数据，它们是酉的。回顾一下，复共轭（或恒等）函子之间的自然同构 $\rho(g_1^b g_2^b)\cong\rho(g_1^b)\circ\rho(g_2^b)$在 $\Xi(g_1^b,g_2^b)$ 非平凡时会额外获得一个 $(-1)^F$。因此，根据 $\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$, ϕ_{g_1}上的张量积定义，$_{g_2}$成为一个双模映射 $A_{g_1}\otimes_{A^{\theta(g_1)}}{}^{\theta}A_{g_2}(g_1)\longrightarrow A_{g_1g_2}$。定义 $\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$-分次复超向量空间 $\underline{}$——

$$\mathcal{A}:=\bigoplus_{g\in\mathrm{ob}\,\mathcal{G}}A_g.$$

我们首先在遗忘函子 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{C}}\longrightarrow\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{R}}$ 的像中进行处理，在该像下，复共轭函子变为恒等函子。在那里，ϕ 定义了一个 $\mathbb{R}$-线性的乘法映射 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$，它是强 $\mathcal{G}_b$-分次的。在证明的其余部分，我们将这个乘法记为 $\cdot$，尽管我们将看到，它只在 $\mathcal{G}$ 的结合子意义下满足结合律。

给定 $\gamma^b:\ g^b\longrightarrow h^b$，一个 $\mathcal{G}_b$ 中的态射，F_{γ^b} 变为一个酉双模映射 $A_{g_b}\longrightarrow A_{\Gamma(\gamma^b)\rtimes h_b}$。注意，$\mathcal{G}$ 中的所有态射 $\gamma:\ g\longrightarrow h$ 都具有如下形式：$\gamma^b\rtimes c^\epsilon:\ g^b\rtimes c^\epsilon\longrightarrow h^b\rtimes\Gamma(\gamma^b)c^\epsilon$，其中 $\gamma^b:\ g^b\longrightarrow h^b$ 是 $\mathcal{G}_b$ 中的某个态射，且 $\epsilon=0,1$。定义 $F_\gamma:\ A_g\longrightarrow A_h$，令 F_{γ^b} 在 $\epsilon=0$ 的情况下取该值，否则令其为复合

$$\begin{aligned}A_g=A_{g_b}\otimes_{\overline{A}^{\theta(g^b)}}(\overline{A}^{\theta(g^b)})_{c^\epsilon}&\xrightarrow{F_{\gamma^b}\otimes\mathrm{id}}A_{h_b}\otimes_{\overline{A}^{\theta(h^b)}}(\overline{A}^{\theta(h^b)})_{\Gamma(\gamma^b)}\otimes_{\overline{A}^{\theta(g^b)}}(\overline{A}^{\theta(g^b)})_{c^\epsilon}\\&\longrightarrow A_{h_b}\otimes_{\overline{A}^{\theta(h^b)}}(\overline{A}^{\theta(g^b)})_{c^\epsilon\Gamma(\gamma^b)}\end{aligned}$$

ot否则。至此，我们已经提供了定理陈述中承诺的全部数据 .

接下来讨论将图 (A.1) 给出的三个元素合并时，α-扭曲结合条件要求$\phi_{g_1^b,g_2^b}$ 满足的条件。关于 ϕ 的结合性图表恰好说明，以下两个陪域略有不同的 2-态射

$$A_{g_1}\otimes_{\overline{A}^{\theta(g_1)}}\overline{A_{g_2}}^{\theta(g_1)}\otimes_{\overline{A}^{\theta(g_1g_2)}}\overline{A_{g_3}}^{\theta(g_1g_2)}\longrightarrow A_{(g_1g_2)g_3},A_{g_1(g_2g_3)}$$

对于形如 $g_i=1\rtimes g_i^b\in\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$ 的元素，它们之间存在 $F_{\alpha(g_1,g_2,g_3)}$ 关系。为了证明 $\mathcal{A}$ 满足相关的结合公理，我们还必须证明，对于任意满足 $\epsilon_i\in\{\pm\}$ 的元素 $g_i=c_i^\epsilon\rtimes g_i^b\in\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$，扭曲结合性也成立。对于 $g_i=1$，这由 $A\oplus A_{(-1)^F}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次超代数的结合性推出。一般而言，我们必须运用 $A_{(-1)^F}$ 的自然性数据与 2-态射的复合以及 $A\oplus A_{(-1)^F}$ 中乘法之间的相容性，其含义是

$$\begin{array}{ccc}M\otimes_A A_{(-1)^F}&\longrightarrow&B_{(-1)^F}\otimes_B M\\\downarrow&&\downarrow\\N\otimes_A A_{(-1)^F}&\longrightarrow&B_{(-1)^F}\otimes_B N\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}M\otimes_A A_{(-1)^F}\otimes_A A_{(-1)^F}&\longrightarrow&B_{(-1)^F}\otimes_B M\otimes_A A_{(-1)^F}\\\downarrow&&\downarrow\\M&\longleftarrow&B_{(-1)^F}\otimes_B B_{(-1)^F}\otimes_B M\end{array}$$

在 (B,A)-双模 M和 N以及双模映射 $M\longrightarrow N$之间可交换。由此可得，$\mathcal{A}$作为 $\mathbb{R}$ 上的超代数满足扭曲结合条件。强 $\mathbb{Z}_2^c$-分次超代数 $A\oplus$

根据定义，$A_{(-1)^F} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 $((-1)^F)^2 = 1$。此外，已知对于（B, A）-双模 M，$(-1)^F$ 的自然性定义为

$$M \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow B_{(-1)^F} \otimes_B M \quad m \otimes (-1)^F \longmapsto (-1)^{|m|}(-1)^F \otimes m$$

乘法的定义 $A_{g^b} \otimes_{A^{\theta(g^b)}} A_c^{\theta(g^b)} \longrightarrow A_{c \rtimes g^b}$ 和 $A_c \otimes_A A_{g^b} \longrightarrow A_{c \rtimes g^b}$ 意味着，对于所有 $a_{g^b} \in A_{g^b}$，都有 $(-1)^F a_{g^b} = (-1)^{|a_{g^b}|} a_{g^b} (-1)^F$。同一公式也适用于在 $A_{gc} = A_{g^b}$ 中将 $a_g \in A_g$ 与 $(-1)^F$ 相乘的情形，只要 $g = c \rtimes g^b$。要求 A_{g^b} 作为 $\mathbb{R}$-超代数 A 上的 (A, A)-双模，同时也是 $\mathbb{C}$-超代数 A 上的 $(A, A^{\theta(g^b)})$-双模，这等价于要求满足条件：对于所有 $a_{g^b} \in A_{g^b}$，都有 $ia_{g^b} = (-1)^{\theta(g^b)} a_{g^b} i$。由于 $A_{(-1)^F}$ 是一个 (A, A)-双模，因此这一结论可从 $g^b \in \mathrm{ob}\, G_b$ 推广到任意 $g \in \mathrm{ob}\, \mathcal{G}$，且 $(-1)^F$ 是“$\mathbb{C}$-线性的”。乘法映射 $\phi_{g_1^b, g_2^b}$ 的复线性由将 i 与元素 $a_{g_1^b} \in A_{g_1^b}$ 和 $A_{g_2^b} \in A_{g_2^b}$ 相乘的结合性自动保证。

我们现在已经应用了由 ϕ 的结合性图表导出的所有条件，接下来处理图 (A.2)。该图说明了 $F_{\gamma_1^b}$，$F_{\gamma_2^b}$ 和 $F_{\gamma_1^b \otimes \gamma_2^b}$ 之间的关系，其中 γ_i^b：$g_i^b \longrightarrow h_i^b$ 是 $\mathcal{G}_b$ 中的两个态射。我们得到态射 γ_i：$1 \rtimes g_i^b \longrightarrow \Gamma(\gamma_i) \rtimes h_i^b$，它们属于 $\mathcal{G}$。在这种情况下推演该图，得到方程

$$F_{\gamma_2 \otimes \gamma_1}(a_{g_1^b} a_{g_2^b}) = F_{\gamma_1}(a_{g_1^b}) F_{\gamma_2}(a_{g_2^b})$$

对所有 $a_{g_1^b} \in A_{g_1^b}$ 和 $a_{g_2^b} \in A_{g_2}$ 均成立。注意，这个方程是有意义的，因为 $\Gamma(\gamma_2 \otimes \gamma_1) = \Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_1)$，而且 c 是中心的。接下来只需证明任意 $\mathcal{G}$ 态射都满足同一公式；这类态射具有如下形式：$c^{\epsilon_i} \gamma_i$，其中 $\epsilon_i = 0, 1$。根据 $F_{c\gamma_i}$ 的定义以及元素上的乘法，我们得到一个需要证明可交换的大图。利用 $F_{\gamma_1^b}$，$F_{\gamma_2^b}$ 与 $F_{\gamma_1^b \otimes \gamma_2^b}$ 之间的关系，以及上方交换方块所表达的 $B\mathbb{Z}_2^F$ 作用的自然性条件的若干应用，即可证明这一点。 □

注 5.31。现在我们讨论对称群 G 为玻色情形，即 $c = 1$。在这种情况下，经过下述少量调整后，类似但稍为简化的证明将导出对具有反射结构的自旋-统计 G-拓扑场论的类似分类。我们仍有一个强 $\mathcal{G} := \pi_{\leq 1} G$-分次代数

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{G}} A_g$$

它特别满足 $A := A_1 = A_c = A_{(-1)^F}$。我们仍有 A_1 是星代数，且 A_g 具有星形结构，使得乘法是酉的。路径 $\gamma : g \longrightarrow g'$ 仍将给出双模映射 $F_\gamma : A_g \longrightarrow A_{g'}$，并满足相应的相容条件；请记住，$A_c = A$。Serre 平凡化给出一个 (A, A)-双模同构 $A \cong A^*$，现在它将给出一个分次对称 Frobenius 结构。此外，在命题 5.28 和引理 C.25 的类似证明中，现在会出现 Koszul 符号。因此，结果是 A_g 保持 Frobenius 结构，当且仅当

$$\overline{\lambda(a_g a_{g^{-1}})}^{\theta(g)} = (-1)^{|a_g||a_{g^{-1}}|} \lambda(a_{g^{-1}} a_g)$$

对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$。

在下一节中，我们将详细说明上述对自旋-统计和反射拓扑场论的刻画所带来的一些具体代数后果。

5.5 示例与计算

实际上，大多数拓扑场论自然以 $*$-代数的形式出现，而非星形代数。为了使这一框架能够涵盖许多例子，我们因此考察如下特殊情形：

我们的星代数是一个 $*$-代数。下面我们证明一个关于具有反射结构和自旋-统计的二维拓扑场论的构造引理。为简单起见，在此引理中我们将讨论范围限制为离散对称群。

回顾一下我们关于 $\mathbb{Z}_2$-分次与超 $*$-代数的约定；超 $\mathbb{Z}_2$-分次代数 $(A,\dagger)$ 满足 $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$，其中不带 Koszul 符号；而超 $*$-代数 $(A,*)$ 满足 $(ab)^* = (-1)^{|a||b|} b^* a^*$。在复数域上，超 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数之间存在一一对应，因此二者等价:

$$a^* = \begin{cases} a^\dagger & |a| = 0 \\ ia^\dagger & |a| = 1. \end{cases}$$

我们已经看到，在这种情形下，A_g 将带有希尔伯特双模结构，并且已经明确说明了乘法映射为酉映射意味着什么。映射 F_γ 为酉映射，等价于元素 a_γ 在 A中为酉元，即 $aa^* = a^*a = 1$。对于情形 $\Gamma(\gamma) = 1$，这可由以下事实直接得出：酉双模映射 $A \longrightarrow A$ 恰好是满足 $aa^* = 1$的可逆元$a \in A$。对于情形 $\Gamma(\gamma) = c$，结论同样成立；例 5.12 中关于 $A_{(-1)^F}$ 上星形模结构定义的微妙符号并无影响，因为 a_γ 是偶的。事实上，注意到映射 $A \longrightarrow A_{(-1)^F}$ 为酉映射等价于

$$\langle 1,1\rangle_A = \langle a_\gamma, a_\gamma\rangle = (-1)^{|a_\gamma|} a_\gamma a_\gamma^* = a_\gamma a_\gamma^*.$$

下面的定理从一个 G 分次 $*$代数出发，构造具有反射结构和自旋-统计性质、对应于离散对称群的二维拓扑场论 G。

命题 5.32. 设(G,θ,c) 是一个非玻色的离散费米子群。将 G 视为一个仅含平凡态射的费米子2-群，并令

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

是一个费米子分次代数。假设 $\mathcal{A}$ 还具有一个 $\mathbb{Z}_2$分次的实 $*$代数结构，使得 $i^\dagger = -i$且 $A_g^\dagger = A_{g^{-1}}$。在 A_g 上定义取值于 A的内积如下:

$$\langle a_g, b_g\rangle := \begin{cases} a_g b_g^\dagger & |b_g| = 0 \\ i a_g b_g^\dagger & |b_g| = 1 \end{cases}$$

通过限制 $\mathcal{A}$上的 $\mathbb{Z}_2$分次 $*$代数结构，将 A 赋予超 $*$代数结构。于是，A_g 是一个星形$(A,{}^{A^{\theta(g)}})$-双模，其中我们在 A 上使用定义 *5.16* 中有趣的星形结构，并且 $\mathcal{A}$ 的乘法是酉的。此外，若 λ 是 A 上的未分次对称 *Frobenius* 结构，且 $\lambda(a_g a_{g^{-1}}) = \lambda({}^{a_{g^{-1}}a_g})^{\theta(g)}$，则它与诱导的星形结构相容，当且仅当

$$\lambda(a^\dagger) = \overline{\lambda(a)}$$

在这种情况下，$\mathcal{A}$ 是一个强 G分次星形弗罗贝尼乌斯代数。

证明。 我们先假设存在一个如下形式的公式

$$\langle a_g, b_g\rangle := \alpha(a_g, b_g) a_g b_g^\dagger$$

其中 $\alpha(a_g, b_g) = \alpha_{\theta(g)}(|a_g|,|b_g|) \in \mathbb{C}$ 仅取决于 $|a_g|,|b_g|$和 $\theta(g)$。接着我们证明，A_g是星形模等价于 $\alpha_{\theta(g)}(0,0)$ 和 $\alpha_{\theta(g)}(1,0)$ 为实数，并且

$$\begin{aligned} \alpha_{\theta(g)}(0,1) &= i\alpha_{\theta(g)}(1,0) \\ \alpha_{\theta(g)}(1,1) &= i\alpha_{\theta(g)}(0,0) \\ \alpha_{\theta(g)}(1,0) &= \alpha_{\theta(g)}(0,0) \end{aligned}$$

接着我们证明，乘法是酉的，当且仅当 α 如命题所述（但 i 也可以替换为 $-i$；不过事实证明，按照我们对复数域 $*$-代数上的星形结构所采用的约定，选择 $+i$ 是固定的）。

接下来逐一考察命题 5.5 的四个条件，略去第一个，因为它是冗余的。注意，对于 $a \in A$，A 上 $\mathbb{Z}_2$ 分次结构与超 $*$ 结构的比较为

$$\overline{a}^* = (-1)^{|a|}\overline{a^*} = \begin{cases} \overline{a^\dagger} & |a| = 0, \\ i\overline{a^\dagger} & |a| = 1. \end{cases}$$

因此 $a^\dagger = a^\dagger$。于是，对于 $\theta(g) = 1$，我们得到

$$\begin{aligned}(-1)^{|a||b_g|}\langle a_g, b_g\overline{a}^*\rangle &= (-1)^{|a||b_g|}\langle a_g, b_g i\overline{a^\dagger}\rangle = (-1)^{|a||b_g|}\alpha(a_g, b_g\overline{a^\dagger})a_g(b_g i\overline{a^\dagger})^\dagger \\ &= -i(-1)^{|a||b_g|}\alpha(a_g, b_g\overline{a^\dagger})a_g\overline{a}b_g^\dagger\end{aligned}$$

其中，蓝色符号仅在 $|a| = 1$ 时出现。将此与

$$\langle a_g\overline{a}, b_g\rangle = \alpha(a_g\overline{a}, b_g)a_g\overline{a}b_g^\dagger$$

比较可得

$$\alpha(a_g\overline{a}, b_g) = -i(-1)^{|a||b_g|}\alpha(a_g, b_g\overline{a^\dagger}).$$

情形 $\theta(g) = 0$ 得到相同的方程。代入全部八种可能性后，我们发现这等价于 5.5 的前两个方程。

接下来考察厄米性条件，它指出

$$\alpha(a_g, b_g)a_g b_g^\dagger = (-1)^{|a_g||b_g|}\langle b_g, a_g\rangle^* = (-1)^{|a_g||b_g|}\overline{\alpha(b_g, a_g)}\, i\, (b_g a_g^\dagger)^\dagger$$

当且仅当 $|a_g| + |b_g| = 1$ 时，蓝色的虚数单位才会出现。由此可得

$$\alpha(a_g, b_g) = (-1)^{|a_g||b_g|} i\,\overline{\alpha(b_g, a_g)}$$

列出所有四种度数可能性后，我们得出 $\alpha_{\theta(g)}(0,0)$ 是实数，$\alpha_{\theta(g)}(1,1)$ 是虚数，并且

$$\alpha_{\theta(g)}(0,1) = i\,\overline{\alpha_{\theta(g)}(1,0)}.$$

结合方程 5.5，可知 $\alpha_{\theta(g)}(1,0)$ 是实数，因此我们恰好得到了证明开头所述关于 α 的条件。命题 5.5 中关于作为希尔伯特模的第三个条件显然成立。

唯一尚待验证的是乘法是酉的。对于 $\theta(g) = 0$，我们计算得

$$\begin{aligned}\alpha(a_g a_h, b_g b_h)a_g a_h(b_g b_h)^\dagger = \langle a_g a_h, b_g b_h\rangle &= (-1)^{|b_g||b_h|}\langle a_g\langle a_h, b_h\rangle, b_g\rangle = (-1)^{|b_g||b_h|}\langle a_g\alpha(a_h, b_h)a_h b_h^\dagger, b_g\rangle \\ &= (-1)^{|b_g||b_h|}\alpha(a_g\alpha(a_h, b_h)a_h b_h^\dagger, b_g)a_g\alpha(a_h, b_h)a_h b_h^\dagger b_g^\dagger \\ &= (-1)^{|b_g||b_h|}\alpha(a_g a_h b_h^\dagger, b_g)\alpha(a_h, b_h)a_g a_h b_h^\dagger b_g^\dagger\end{aligned}$$

由此得到条件

$$\alpha(a_g a_h, b_g b_h) = (-1)^{|b_g||b_h|}\alpha(a_g a_h b_h^\dagger, b_g)\alpha(a_h, b_h)$$

对 $\theta(g) = 1$ 作同样的计算，得到

$$\alpha(a_g a_h, b_g b_h) = (-1)^{|b_g||b_h|+|b_h|}\alpha(a_g a_h b_h^\dagger, b_g)\overline{\alpha(a_h, b_h)}$$

由此前关于 α 的所有条件可得$\alpha_{\theta(g)}(0,0) = \alpha_{\theta(g)}(1,0) = 1$ 以及$\alpha_{\theta(g)}(0,1) = \alpha_{\theta(g)}(1,1) = \pm i$，且与 $\theta(g)$无关。此外，虚数单位前的符号在 $\theta(g)$的两种选择下相同。当 A 是一个 $*$-代数时，Frobenius 结构与星形结构之间的相容性为 $\lambda(a^*) = \lambda(a)$；由于 λ 在奇元素上为零，而在偶元素上有 $a^\dagger = a^*$，这就给出了最后一个结论。证明至此完成。 □

注记 5.33。 需要提醒读者，如果 θ 非平凡，那么 $\dagger : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 不是 $\mathbb{C}$-反线性映射，因为

$$(ia_g)^\dagger = a_g^\dagger i^\dagger = -a_g^\dagger i = ia_g^\dagger$$

对于 $\theta(g) = 1$。

注记 5.34。 上述命题立即通过以下关系蕴含了 Frobenius 结构上的实条件

$$\overline{\lambda(1)} = \lambda(1^\dagger) = \lambda(1) \in \mathbb{R}^\times.$$

我们给出几个具体的拓扑场论示例，它们可以利用上述引理构造，并在此过程中指出一些向 G 不是离散情形的推广。

示例 5.35。 考虑有限费米群 G 上的平凡理论，它具有由其规范的 C^*-代数结构诱导的星形结构 $A = \mathbb{C}$，其 Frobenius 结构由 $\lambda(z) = z$给出。费米子 G-分次代数是费米群代数

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbb{R}[i, x_g : g \in G]}{(i^2 = -1, x_g i = (-1)^{\theta(g)} i x_g, x_g x_h = x_{gh})}$$

定义为纯偶的。注意， λ 满足所需条件。我们通过 $x_g^\dagger = x_{g^{-1}}$ 和 $i^\dagger = -i$将其构造成一个 $\mathbb{Z}_2$-分次实 $*$-代数。显然，对于 $z \in A_1 = \mathbb{C}$， $\lambda(z^\dagger) = \lambda(z)$，因此根据命题 5.32，这定义了一个具有自旋-统计和反射结构的 H-拓扑场论。注意，我们从平凡理论出发得到了一个相当有趣的代数。特别是，由于 $\mathcal{A}$ 是半单的，我们可以将 Frobenius 代数 $\mathcal{A}$ 赋给一个点，从而定义一个结构群为 O_2的二维拓扑场论。我们预期，该理论是对上述平凡理论进行量子化所得，其方式是对 G-背景进行路径积分。另请注意，如果 G 仅包含保时对称性，那么所得理论是定向的。

对于显式计算而言，尽量减少描述拓扑场论所需的代数信息量是很有用的。为此，我们取费米子 2-群 $\mathcal{G} = \pi_{\leq 1} G$ 的费米子骨架模型。我们回顾一下，它定义为 $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2^c \rtimes_{\Gamma,\ } \Xi\, \mathcal{G}_b$ 其中 $\mathcal{G}_b$ 是 $\pi_{\leq 1} G_b$ 的骨架模型。这里， $\mathcal{G}_b$ 在 $\mathbb{Z}_2^c$ 上的作用由映射 $\mathcal{G}_b \longrightarrow */\!/\mathbb{Z}_2^c$ 定义，该映射对 G_b 通过 $\mathbb{Z}_2^c$ 的扩张进行分类；这一作用由数据 $\Gamma\colon\ \pi_1(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$ 以及 $\Xi\colon\ \pi_0(G_b) \times \pi_0(G_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^c$ 概括，如第 3.4 节所述。这种情形的第一个优点是，对象构成了相对较小的集合 $\pi_0(G_b) \times \mathbb{Z}_2^c$，代数将在其上进行分次。此外，1-态射上的许多数据由环路决定。

那么令

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathbb{Z}_2^c \times \pi_0(G_b)} A_g$$

表示一个强 $\mathcal{G}$ 分次的星形弗罗贝尼乌斯代数。注意，如果 $\gamma^b \in \pi_1(G_b)$ 是一个环路，那么双模同构 F_{γ^b}: $A \cong A_{\Gamma(\gamma^b)}$的数据等价于选择一个偶可逆元 $a_{\gamma^b} \in A_{\Gamma(\gamma^b)}$，并满足附加条件：

$$a_{\gamma^b} a = a a_{\gamma^b} \quad \forall a \in A.$$

我们有时会利用典范生成元（-1）$^F \in A_{(-1)^F}$，将 a_{γ^b} 与 A 的一个可逆元 a'_{γ^b} 等同起来。但鉴于 ^{F} 满足扭曲交换条件（-1），这也会改变对 a'_{γ^b}的中心性条件。也就是说，当 Γ（γ^b）$= 1$ 时，它是中心的，并且满足

$$a_{\gamma^b} a = (-1)^{|a|} a a_{\gamma^b} \quad \forall a \in A$$

当 $\Gamma(\gamma^b) = c$时。我们强调，后一个条件并不是说 a_{γ^b} 属于分次中心，因为 a_{γ^b} 是偶的，因此它属于非分次中心与属于超中心这两个条件是相同的。

注意，对于两个环路 γ_1^b, γ_2^b，关于 F_γ 的条件等价于 $a_{\gamma_1^b\gamma_2^b} = a_{\gamma_1^b} a_{\gamma_2^b}$ 与 $\Gamma(\gamma_i^b)$ 无关。此外，利用 $F_{\mathrm{id}_g} \otimes \gamma$ 与 F_γ 之间的关系，将路径平移为以恒等元为起点后，只需指定所有由元素 a_{γ^b} 确定的路径 $1 \longrightarrow 1$ 和 $1 \longrightarrow c$ 上的数据，即可确定 F_γ 的数据。它们还满足一个额外条件，该条件来自 $\pi_0(G)$ 通过共轭对 $\pi_1(G)$ 的作用。事实上，将图 A.2 应用于 g 处的常值路径和环路 γ^b，会得到一个将 $F_{g\gamma^b g^{-1}}$ 与 F_γ 联系起来的条件，其中用到了 $F_{\mathrm{id}_g} = \mathrm{id}^{A_{g^{-1}}}$；这也可以作为 F_γ 必须满足的方程的一个特例得到。在元素层面上，这导致

$$a_{g\gamma^b g^{-1}} = a_\gamma \quad g \in \pi_0(G), \gamma \in \pi_1(G).$$

注 5.36. 如果此外，$\pi_{\leq 1} G_b$ 的骨架模型的结合子为零，那么 $\mathcal{G}$ 的费米子骨架模型中的结合子也为零，因此 $\mathcal{G}$ 的对象集是一个群。或者，我们可以将 $\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$ 看作由 $\pi_0(G_b)$ 通过 $\mathbb{Z}_2^c$ 扩张得到的扩张，其中该扩张由 Ξ 定义；由于我们假设结合子是平凡的，Ξ 是 $\pi_0(G_b)$ 上的一个 2-余循环。特别地，$\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$ 带有规范的费米子群结构，而代数 $\mathcal{A}$ 在这个 1-群下也具有强费米子分次。

在 G_b 具有非平凡结合子的情况下，$\mathrm{ob}\,\mathcal{G}$ 上的乘法不一定是结合的。当且仅当 $\Gamma \circ \alpha = d\Xi \neq 0$ 时，情况才是如此；这说明 $g_1(g_2g_3)$ 与 $(g_1g_2)g_3$ 相差 $\Gamma(\alpha(g_1, g_2, g_3)) \in \mathbb{Z}_2^c$。乘法 $\mathcal{A}$ 不满足结合律——即使 $\Gamma \circ \alpha = 0$ 也如此——这一点现在由元素 $a_{\alpha(g_1,g_2,g_3)} \in A$ 控制，该元素是通过取路径 $\gamma := \alpha(g_1, g_2, g_3) \in \pi_1(G_b)$ 得到的。更准确地说，对于所有 $g_1, g_2, g_3 \in G$，$a_{g_1} \in A_{g_1}$，$a_{g_2} \in A_{g_2}$ 和 $a_{g_3} \in A_{g_3}$，我们有

$$a_{g_1}(a_{g_2}a_{g_3}) = (a_{g_1}a_{g_2})a_{g_3}a_{\alpha(g_1,g_2,g_3)} \in A_{g_1(g_2g_3)}.$$

注意，由于 $a_\gamma \in A_{\Gamma(\gamma)}$，这个方程两边属于同一个集合。

例 5.37。取 $G = \mathrm{Spin}_2$，使得 $G_b = SO_2$ 且 $H_d = \mathrm{Spin}_d^c$。在物理学文献中，这个内对称群通常记作 $G = U_1$，因为它通常出现在带电粒子的情形中。我们决定不采用这一记号，因为 Spin_2 有一个非平凡的中心元 c，它施加了自旋-电荷关系。一个 G-拓扑场论由一个星形弗罗贝尼乌斯代数 $(A, M, \sigma, \lambda) \in \mathrm{stFrob}$，以及一个偶可逆元 $a_\gamma \in A_{(-1)^F}$ 构成，使得对于所有 $a \in A$ 都有 $a_\gamma a = a a_\gamma$，且与它相乘定义了一个酉映射 $A \longrightarrow A_{(-1)^F}$。若 A 是一个 $*$-代数，则要求 $a_\gamma \in A_{(-1)^F}$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次超 $*$-代数 $A \oplus A_{(-1)^F}$ 的酉元素。等价地，$a'_\gamma := a_\gamma(-1)^F$ 是 A 的偶可逆酉元素，并且满足 $a'_\gamma a = (-1)^{|a|} a a'_\gamma$。

例5.38。取 $G = \mathrm{Pin}_1^+$ 为平方为 1 的时间反演 g，因此 $G_b = O_1$ 和 $H_d = \mathrm{Pin}_d^-$。那么，具有自旋统计联系和反射结构的 G-拓扑场论包含有限维半单超代数 A 以及如下形式的、关于 $\mathbb{R}$ 的强 $\mathbb{Z}_2^c \times \mathbb{Z}_2^g$-分次超代数的数据

$$\mathcal{A} = A \oplus A_{(-1)^F} \oplus A_g \oplus (A_g \otimes_A A_{(-1)^F})$$

由强 $\mathbb{Z}_2$-分次超代数 $A \oplus A_g$ 确定，使得 $i a_g = -a_g i$ 且 $\lambda(a_g b_g) = \lambda(b_g a_g)$。若 A 是一个 $*$-代数，则 A_g 具有取值于 A 的非退化内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$（按我们的约定，对右侧自变量复线性），使得

$$\langle a_g \overline{a}, a'_g \rangle = (-1)^{|a'_g||a|+|a|} \langle a_g, a'_g a^* \rangle$$

且乘法为酉等价于

$$a_g a'_g (b_g b'_g)^* = (-1)^{|b_g||b'_g|+|b_g|} \langle a_g, \langle a'_g, b'_g \rangle_{A_g} b_g \rangle_{A_g}$$

对所有 $a_g, a'_g, b_g, b'_g \in A_g$。

假设我们处于构造引理所述的情形中，这个取值于 A 的内积由 $\mathcal{A}$ 上满足额外条件的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$ 代数结构 $\dagger$ 诱导而来。我们通过专门考察 $A = \mathbb{C}$ 的情形来说明这一情况，正如我们在例 3.26 中所做的那样。令 x_g 表示 A_g 的一个生成元。将 x_g 乘以 $\mathbb{C}$ 中一个适当的元素后，不失一般性，可以假设 $x_g^2 \in U_1$。暂且假设 x_g 是偶的，这便唯一确定了作为超代数的 $\mathcal{A}$。A 上 Frobenius 结构的选取由 $\lambda(1) \in \mathbb{R}^\times$ 唯一确定。它与 A_g 相容的条件给出$\lambda(x_g^2) = \lambda(x_g^2)$，这意味着 $x_g^2 = \pm 1$。因此必有 $x_g^\dagger = \pm\overline{x_g}$，且任一种选择都会使$\mathcal{A}$成为一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$ 代数。注意，$A \oplus A_g$ 是一个 C^* 代数（同构于 $M_2(\mathbb{R})$ 或 $\mathbb{H}$）当且仅当两个符号选择 $x_g^2 = \pm 1$ 和 $x_g^\dagger = \pm x_g$ 一致；而这当且仅当 A_g 上取值于 A 的内积为正。如果是这种情况，那么该反射结构是反射正的。

现在反过来假设 x_g 是奇数。我们有 $A \oplus A_g \cong Cl_{\pm 2}$，由 $i \longmapsto e_1 e_2$ 和 $x_g \longmapsto e_1$ 给出。A $*$-代数结构在 $Cl_{\pm 2}$ 上由两个符号选择 $e_i^* = \pm e_i$ 唯一确定；当且仅当这些符号与符号 e_i^2 一致时，这又给出一个 C^*-结构。我们的构造引理中的一个条件意味着

$$-e_1 e_2 = -i = i^\dagger = (e_1 e_2)^\dagger = e_2^\dagger e_1^\dagger = -e_1^\dagger e_2^\dagger$$

因此，两个符号选择 $e_i^\dagger = \pm e_i$ 必须相等。所以，$A \oplus A_g$ 是否为 C^*-代数，同样取决于单个符号选择。特别要注意，如果像 x_g 为偶数的情形那样，我们选择符号 $x_g^\dagger = \pm x_g$ 等于符号 x_g^2，就会得到 A_g 具有一个正定的 A 值内积。事实上，在这种情况下我们有

$$z x_g (z x_g)^\dagger = z x_g x_g^\dagger \bar{z} = |z|^2 \geq 0.$$

因此，这一选择将定义一个酉理论。它对应于酉可逆场论群 $\mathrm{Hom}(\Omega_2^{\mathrm{Pin}^-}, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}_8$中的一个生成元的两倍。

例 5.39。令 $G = \mathrm{Pin}_1^-$ 由单个平方为 $(-1)^F$ 的时间反演 T 组成，因此 $G_b = O_1$和 $H_d = \mathrm{Pin}_d^+$。具有自旋-统计联系和反射结构的 G-TFT 是一个星形弗罗贝尼乌斯代数 A，即一个强 $\mathbb{Z}_4$-分次超代数

$$\mathcal{A} = A \oplus A_{(-1)^F} \oplus A_T \oplus (A_T \otimes_A A_{(-1)^F})$$

满足 $i a_T = -a_T i$。Frobenius 结构的条件为 $\lambda(a_T b_{T^{-1}}) = \lambda(b_{T^{-1}} a_T)$。由于 $T^{-1} = \overline{cT}$，这等价于

$$\lambda(a_T b_T (-1)^F) = \overline{\lambda(b_T (-1)^F a_T)} = (-1)^{|a_T|}\overline{\lambda(b_T a_T (-1)^F)}$$

对所有 $a_T,\ b_T \in A_T$。A_T 是一个星形双模，并且乘法映射 $A_T \otimes_A A_T \longrightarrow A_{(-1)^F}$ 是酉的。乘法为酉等价于

$$(-1)^{|b_T||b'_T|+|b_T|}\langle a_T, \langle a'_T, b'_T\rangle_{A_T} b_T\rangle_{A_T} = \langle a_T a'_T, b_T b'_T\rangle_{A_{(-1)^F}} = a_T a'_T (-1)^F (b_T b'_T (-1)^F)^* = a_T a'_T b_T b'_T$$

对于所有 a_T、a'_T、b_T、$b'_T \in A_T$，参见例 5.12。

请注意，另一种做法是通过赋予一个非结合的$\mathbb{Z}_2$-分次代数 $A \oplus A_T$，并采用诸如以下的扭曲结合条件，来实现扭曲余循环 Ξ

$$a_T (b_T a) = (-1)^{|a|}(a_T b_T) a \quad a_T, b_T \in A_T, a \in A.$$

在该约定下，Frobenius 结构满足

$$\lambda(a_T b_T) = (-1)^{|a_T|}\overline{\lambda(b_T a_T)}$$

不过，我们更倾向于使用规模大两倍的结合代数 $\mathcal{A}$。

例5.40. 再来看一个更复杂的例子：内对称群由电荷和一个平方为 $(-1)^F$ 的时间反演组成。在拓扑物态文献中，这也称为 AII 类。这意味着

$$G = \mathrm{Pin}_2^- \cong \frac{\mathrm{Spin}_2 \rtimes \mathbb{Z}_4^T}{\mathbb{Z}_2^c}$$

具有非平凡的 θ 和非平凡的 c，使得 $G_b = O_2$。我们在例 3.21 中看到，G 的骨架模型具有 $\pi_0(G) = \mathbb{Z}_2$，它对 $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$ 的作用非平凡，且具有非平凡的 k-不变量。不过，我们将使用费子骨架模型。因此，从 $G_b = O_2$的骨架模型开始，该模型具有 $\pi_0(G_b) = \mathbb{Z}_2$，它对 $\pi_1(G_b) = \mathbb{Z}$ 的作用非平凡，且结合子平凡。我们得到费米子骨架模型 $\mathcal{G}$，它有一族由 $\mathbb{Z}_4$参数化的对象：$\mathbf{1}$，c，T和 cT，其中 $T^2 = c$是平面中某个反射在 Pin_2^-中的一个提升。令 $\gamma : 1 \longrightarrow c$ 为 $\pi_1(G_b)$的一个生成元在 $\mathcal{G}$中的提升，在李群表示中，我们可以将其明确写为

$$\gamma(t) = e^{i\pi t} \in U_1 \cong \mathrm{Spin}_2 \subseteq \frac{\mathrm{Spin}_2 \rtimes \mathbb{Z}_4^T}{\mathbb{Z}_2^c}$$

对于 $t \in [0, 1]$。由于半直积，我们得到关系 $T\gamma(t) = \gamma(t)^{-1}cT$。

现在我们考虑具有自旋-统计和反射结构、内部对称群为G的二维拓扑场论。由于 Pin_1^- 自然包含于 $\mathcal{G}$，我们可以从照搬例 5.39 中的数据开始。特别地，我们有一个 $\mathbb{Z}_4$分次代数

$$A \oplus A_{(-1)^F} \oplus A_T \oplus (A_T \otimes_A A_{(-1)^F})$$

带有反线性 A_T。路径 γ 诱导出一个偶可逆元 $a'_\gamma \in A$，使得对所有 $a \in A$，都有 $aa'_\gamma = (-1)^{|a|}a'_\gamma a$，如例 5.37 所示。$T$ 与 γ 之间的交换关系给出如下关系

$$a'_\gamma a_T = (-1)^{|a_T|}a_T a'^{-1}_\gamma$$

对所有 $a_T \in A_T$均成立。事实上，这可由如下关系推出

$$a_T a'_\gamma (-1)^F = a_T a_\gamma = F_{T\gamma}(a_T) = F_{\gamma^{-1}cT}(a_T) = (a'_\gamma)^{-1}(-1)^F a_T.$$

本例中我们将省略对星形弗罗贝尼乌斯结构的讨论。

例5.41。取 $G = SU_2$，其中 $c \in SU_2$ 是唯一的二阶元素。由于 $\pi_{\leq 1}SU_2 = 0$，内部费米子2-群是平凡的，因此直到时空维数为三时，我们才会看到 SU_2 的高阶同伦群中任何有趣的内容。不过请注意，$G_b = SO_3$，并且我们有 $\pi_{\leq 1}G_b = */\!/\mathbb{Z}_2$，所以所得的拓扑场论既不同于对称群为 $\mathbb{Z}_2^c$的理论，也不同于玻色对称群平凡的理论。现在，Γ 是 $\mathbb{Z}_2$ 上的恒等映射，其费米子骨架模型为 $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \rtimes */\mathbb{Z}_2$。因此，对称群为 G 的二维拓扑场论的分类，等同于 $G = \mathrm{Spin}_2$ 的分类，但需附加条件 $a_\gamma^2 = 1$。

更一般地，假设费米子对称群具有形式 $G = \frac{SU_2 \times K}{\mathbb{Z}_2}$，其中 K 是有限费米子群，商群是按对角 $\mathbb{Z}_2^c$ 取商得到的。费米子宇称为 $(c, 1) = (1, c)$，并且 $\theta : G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 是 $\theta : K \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 的唯一扩张。那么 $\mathrm{ob}\,\mathcal{G} = K$ 和 Γ 仍为恒等元。因此，除了情形 $G = SU_2$ 中的数据外，我们还拥有一个费米子 K-分次代数，并且所有 A_k 都是具有酉乘法的星形模，使得对所有 $k \in K$，$\lambda(a_k b_{k^{-1}}) = \lambda(b_{k^{-1}}a_k)$。

5.6 其他类型二维拓扑场论的分类

我们的主定理对具有费米子对称性、反射结构和自旋统计联系的二维全局域拓扑场论进行了分类。本节将概述，当我们修改上一句中的几个修饰语时，结果如何扩展。此外，我们还将与文献中的已有结果进行比较。

在注 5.31 中讨论的玻色子情形下，很容易看出，省去自旋统计联系会产生什么影响。唯一的变化是，我们不再将 $A \cong A_{(-1)^F}$ 识别，因此只得到一个 $(G,\ \theta)$-分次代数。然而，事实证明，有限维半单超代数具有分次对称 Frobenius 结构，当且仅当 $A \cong A_{(-1)^F}$。例如，假设 $\mathbb{C}l_1 = {}^{\mathbb{C}[e]}{}_{(e^2=1)}$ 具有分次对称 Frobenius 结构 $\lambda:\ A \longrightarrow \mathbb{C}$。那么

$$\lambda(1) = \lambda(e^2) = -\lambda(e^2) = -\lambda(1)$$

因此，由于 λ 是偶映射，Frobenius 形式是退化的。

在对称群不是玻色的情况下，省略自旋-统计会更加棘手。在这种情况下，我们无法将任意的 $\mathbb{Z}_2^c$ 分次超代数 $A \oplus A_c$ 与 $\mathbb{Z}_2^c$ 分次超代数 $A \oplus A_{(-1)^F}$ 识别起来。因此，Frobenius 结构被满足对称性条件的偶双模同构 $A \longrightarrow A^* \otimes_A A_c$ 所取代。如果分次代数 $A \oplus A_c$ 是由自同构 ϕ 诱导的：$A \longrightarrow A$，且 $A_c = A_\phi$ 与乘法相容，那么该双模同构可以替换为 A 上具有 Nakayama 自同构 $(-1)_A^F \circ \phi$ 的偶 Frobenius 结构。此讨论也适用于 Spin^r-拓扑场论 [CS21]；在我们的框架中，它们由 $\mathbb{Z}_r$ 分次超代数给出

$$\mathcal{A} = A_1 \oplus A_g \oplus \cdots \oplus A_{g^{r-1}}$$

连同一个满足某条件的双模同构 $A \longrightarrow A^* \otimes_A A_g$。若 A_g 是由阶为 r 的自同构 ϕ 诱导的，则这个双模映射等价于一个 Nakayama 同构为 $(-1)_A^F \circ \phi$ 的 Frobenius 结构。

在 θ 也平凡的玻色情形下，去掉反射结构后，我们便可通过一个有限维强 $\pi_0(G)$-分次代数，对任意的 $H_2 = G \times SO_2$-拓扑场论进行分类

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \pi_0(G)} A_g$$

连同定义在 A 上的分次对称 Frobenius 结构 λ，使得

$$\lambda(a_g a_{g^{-1}}) = (-1)^{|a_g||a_{g^{-1}}|}\lambda(a_{g^{-1}} a_g)$$

对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$，以及偶可逆元 $a_\gamma \in Z(A)$，对每个满足条件的 $\gamma \in \pi_0(G)$

$$a_{g\gamma g^{-1}} = a_\gamma$$

对所有 $g \in \pi_0(G)$。

特别地，进一步限制到 G 不含任何态射的情形后，我们便可以与 Dav11] 的结果进行比较（仅有一处细微差异：我们讨论超代数，而她讨论未分次代数）。要证明上述描述与 Davidovich 的分类等价，唯一需要指出的非平凡之处是，我们对分次对称 Frobenius 结构 λ: $A_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ 所要求的条件 $\lambda(a_g a_{g^{-1}}) = (-1)^{|a_g||a_{g^{-1}}|}\lambda(a_{g^{-1}} a_g)$，恰好等价于说，$\lambda$ 可扩展为定义在 $\mathcal{A}$ 上的分次对称 Frobenius 结构，并满足如下性质：除非 $g = 1$，否则 $\lambda(a_g) = 0$。

请注意，与在非玻色情形中省略自旋-统计类似，在时间反演情形中省略反射结构会使结果更难解读，无论我们是否允许费米子。例如，仅具有平方为一的时间反演对称性 T 和反射结构的玻色拓扑场论，由玻色 $\mathbb{Z}_2^T$-分次代数分类

$$A \oplus A_T$$

其中 A_T 的元素与 i 反交换。这里 A 是星代数，A_T 是星形双模，使得乘法为酉，且 A 具有分次对称 Frobenius 结构，使得 $\lambda(a_T b_T) =$

$(-1)^{|a_T||b_T|}\overline{\lambda(b_T a_T)}$ 对所有 a_T，$b_T \in A_T$ 都成立。无需假设反射结构，这些拓扑场论已在 [SP09] 中完成分类（他使用的是目标分次未分级的代数，但推广很直接）。除了 A 上的分次 Frobenius 结构外，额外数据是 A 上的复线性星结构。换言之，它由一个 $(A,\ A^{\mathrm{op}})$-双模 N 和一个双模同构 $\tau\colon N^{\mathrm{op}} \longrightarrow N$ 组成，满足 $\tau^2 = \mathrm{id}_N$。复线性星结构与 Frobenius 结构之间还需满足一个额外的相容条件，见 [SP09，定义 3.82]。请注意，我们用于分类带有额外反射结构的此类拓扑场论的数据，特别给出了这样一个 $\mathbb{C}$-线性星代数；通过利用 $\mathbb{C}$-反线性星结构将 A^{op} 与 A 识别，我们可以将 A_T 与 N 识别，并将乘法映射 $A_T \otimes_A A_T \longrightarrow A$ 与 τ 识别。

2-群及其在双范畴上的作用

本附录介绍了关于 2-群及其在双范畴上的作用的一些细节和约定。我们假定读者熟悉双范畴的基本定义。有关详情，请参阅 [SP09, 附录 A]。我们用 BiCat 表示双范畴构成的三范畴。本附录还包含一些新结果，特别是关于半直积的不动点范畴的结果，见命题 A.18。对于相干同构，我们并不总是统一其方向。这从来不是问题，因为我们总可以用它们的（伴随）逆来替代。主要原因是，在不同情形下，不同的方向选择似乎更自然。

A.1 2-群

2-群是普通群的范畴化。

定义 A.1. （弱）*2-*群是一个幺半群胚 $(\mathcal{G}, \otimes, \alpha_{\mathcal{G}}, 1)$，其中每个对象 $g \in \mathcal{G}$ 关于张量积都是可逆的，即存在 $g^{-1} \in G$ 使得 $g \otimes g^{-1} \cong 1 \cong g^{-1} \otimes g$。

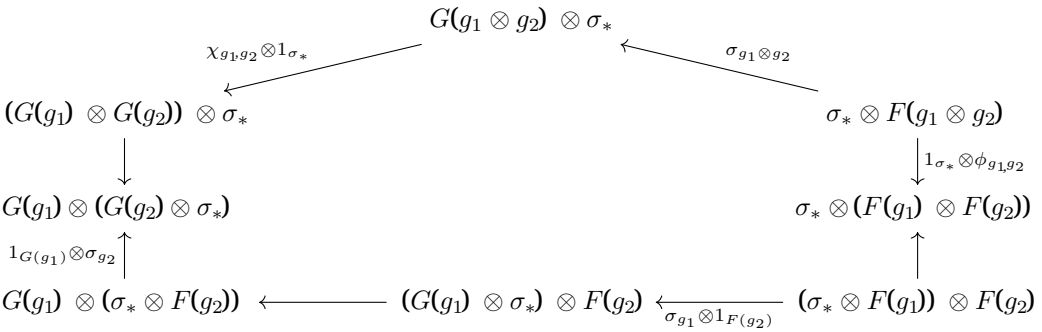
等价地，2-群可以描述为一个只有一个对象 $*$、且以 $\mathcal{G}$ 为自态射范畴的 2-群胚 $B\mathcal{G}$。

例 A.2. 设 G 是一个拓扑群。它的基本群胚 $\Pi_1(G)$，即以点 $g \in G$ 为对象、以路径的同伦类为态射的范畴。其幺半群结构由 G 中的乘法诱导。相应的 2-群胚 $B\Pi_1(G)$ 等价于分类空间 $\Pi_2(BG)$ 的基本 2-群胚。

由于（弱）2-群 $\mathcal{G}$ 本身就是一个幺半范畴，$B\mathcal{G}$ 是一个只有一个对象的双范畴。通过双范畴的函子、自然变换和修正的定义，我们得到 2-群之间的 1-、2-和 3-态射的概念。现在我们用 [**?** 、附录 A.1] 来详细说明。需要谨慎处理的主要问题是，我们不希望假设 2-态射和 3-态射是基点保持的。因此，例如，2-态射比单纯的幺半自然变换稍微一般一些。由此得到以下定义（它同样适用于幺半范畴，但我们主要关注 2-群）。

定义 A.3. 2-群的*1-*态射 $F\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ 是一个幺半函子。*2-*态射 $\sigma\colon F \longrightarrow G$ 由一个对象 $\sigma_* \in \mathrm{ob}\ \mathcal{G}_1$ 和一组自然同构 $\sigma_g\colon \sigma_* \otimes F(g) \longrightarrow G(g) \otimes \sigma_*$ 组成

对于每个 $g \in \mathrm{ob}\,\mathcal{G}_1$，使得图表



对所有代数都成立 1_{g_1}，$g_2 \in \mathrm{ob}\,\mathcal{G}_1$ (这里，ϕ 和 χ 分别是 F 和 G 的幺半性数据)，and

$$\begin{array}{ccc} \sigma_* \otimes F(e) & \xrightarrow{\sigma_{1_1}} & G(e) \otimes \sigma_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_* \otimes 1_2 & \longrightarrow & 1_2 \otimes \sigma_* \end{array}$$

其中图表交换；未标记的垂直同构是 F 和 G 的幺半性数据的一部分，而水平同构则由 $\mathscr{G}_2$中的单位元约束构造而成。若 σ 是带基点的，即若σ 是幺半自然变换，则称其满足此性质。3-态射 $m\colon\ \sigma \longrightarrow \tau$ 是一个态射 $m_*\colon\ \sigma_* \longrightarrow \tau_*$，满足

$$\begin{array}{ccc} \sigma_* \otimes F(g_1) & \xrightarrow{\sigma_{g_1}} & G(g_1) \otimes \sigma_* \\ {\scriptstyle m_* \otimes F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f) \otimes m_*} \\ \tau_* \otimes F(g_2) & \xrightarrow{\tau_{g_2}} & G(g_2) \otimes \tau_* \end{array}$$

对于 $\mathcal{G}_1$中的所有态射 $f\colon\ g_1 \longrightarrow g_2$，图表均交换。注意，所有带基点的3-态射都是平凡的。我们将由2-群构成的三范畴记为2Grp；它是由2-群胚构成的三范畴2Grpd的满子范畴。

若每个对象同构类只包含一个对象，则称2-群是骨架的。每个2-群都等价于一个骨架的2-群，称为其骨架模型。骨架模型可以由以下组合数据重构

$$(\pi_0(\mathcal{G}), \pi_1(\mathcal{G}_1), \alpha : \pi_0(\mathcal{G}) \curvearrowright \pi_1(\mathcal{G}), k \in H^3(\pi_0(\mathcal{G}), \pi_1(\mathcal{G})_\alpha)).$$

Here

1. $\pi_0(\mathcal{G})$ 是对象同构类的集合，其群结构由下式给出 $\otimes$;
2. $\pi_1(\mathcal{G})$ 是 1-态射 $1 \longrightarrow 1$ 的集合，带有阿贝尔群结构，该结构由 $\otimes$ 或复合给出（根据 Eckman-Hilton 定理，两者相等且可交换）；
3. α 是 $\pi_0(\mathcal{G})$ 在 $\pi_1(\mathcal{G})$ 上的作用，由 $\gamma \longmapsto 1_g \otimes \gamma \otimes 1_{g^{-1}}$ 给出；
4. $k(g_1, g_2, g_3)$ 是结合子 $(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 \longrightarrow g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$。

每个这样的 4-元组都给出一个骨架 2-群，其对象为 $\pi_0(\mathcal{G})$；从 g_1 到 g_2 的态射在 $g_1 = g_2$ 时等于 $\pi_1(\mathcal{G})$，否则为空。给定 $g \in \pi_0\mathcal{G}$，将对应于 $\gamma \in \pi_1(\mathcal{G})$ 的 $\mathrm{Aut}\,g$ 中的元素记为 $\gamma_{g\circ}$ 于是，张量积 $\mathrm{Aut}\ g_1 \times \mathrm{Aut}\,g_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,g_1 g_2$ 在我们的约定下定义为

$$\gamma_{g_1} \otimes \delta_{g_2} = (\gamma(\alpha(g_1)\delta))_{g_1 g_2}$$

换言之，我们有 $\gamma_g = \gamma \otimes 1_g$，但 $1_g \otimes \gamma = (\alpha(g)\gamma)_g$。按照这一约定，幺半群结构的五边形恒等式等价于 k 是取值于左 $\pi_0(\mathcal{G})$-模 $\pi_1(\mathcal{G})$ 中的 3-余循环：

$$k(g_1, g_2, g_3 g_4)k(g_1 g_2, g_3, g_4) = \alpha(g_1)(k(g_2, g_3, g_4))k(g_1, g_2 g_3, g_4)k(g_1, g_2, g_3).$$

骨架模型之间的态射也可以明确地描述如下：

引理 A.4. 骨架2-群 $F\colon (\mathcal{G}, \alpha, k) \longrightarrow (\mathcal{H}, \beta, l)$ 之间的同态由一个同态 $F_1\colon \pi_1(\mathcal{G}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H})$、一个映射 $F_0 : \pi_0(\mathcal{G}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H})$ 以及满足以下条件的

$$F_1(\gamma \cdot \alpha(g_1)(\delta)) = F_1(\gamma) \cdot \beta(g_1)(F(\delta))$$

对每个 $g_1, g_2 \in \pi_0(\mathcal{G})$，一组元素 $\phi(g_1, g_2) \in \pi_1(\mathcal{H})$ 组成，且满足

$$F_1(k(g_1, g_2, g_3))\phi(g_1 g_2, g_3)\phi(g_1, g_2) = \phi(g_1, g_2 g_3) \cdot \beta(F_0(g_1))(\phi(g_2, g_3)) \cdot l(F_0(g_1) F_0(g_2) F_0(g_3))$$

对所有 $g_1, g_2, g_3 \in \pi_0(\mathcal{G})$。

骨架 2-群的 2-态射 $\sigma : (F_0, F_1, \phi) \Longrightarrow (G_0, G_1, \chi)$ 由一个对象 $\sigma_* \in \pi_0(\mathcal{H})$和一组 $\sigma(g) \in \pi_1(\mathcal{H})$ 组成，其中对每个 $g \in \pi_0(\mathcal{G})$ 均满足

$$\begin{aligned} &l(G_0(g_1), G_0(g_2), \sigma_*)\chi(g_1, g_2)\sigma(g_1 g_2) \\ &\quad = \beta(G_0(g_1))(\sigma(g_2)) \cdot l(G_0(g_1), \sigma_*, F_0(g_2)) \cdot \sigma(g_1) \cdot l(\sigma_*, F_0(g_1), F_0(g_2)) \cdot \beta(\sigma_*)(\phi(g_1, g_2)) \quad . \end{aligned}$$

两个 2-态射 $\sigma : (F_0, F_1, \phi) \Longrightarrow (G_0, G_1, \chi)$ 和 $\tau : (G_0, G_1, \chi) \Longrightarrow (H_0, H_1, \psi)$ 的（竖直）复合由 $(\tau \circ \sigma)_* = \tau_* \cdot \sigma_*$ and $(\tau \circ \sigma)(g) = \tau(g) \cdot \beta(\tau_*)(\sigma(g))$ 给出。

证明。首先注意，我们不妨假设幺半单位被严格保留。骨架 2-群之间的幺半函子 $F : (\mathcal{G}, \alpha, k) \longrightarrow (\mathcal{H}, \beta, l)$ 由一个同态 $F_1 : \pi_1(\mathcal{G}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H})$、一个映射 $F_0 : \pi_0(\mathcal{G}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H})$，以及一组同构$\phi_{g_1,g_2}$：$F(g_1 g_2) \cong F(g_1)F(g_2)$ 构成，它们对应于每个 $g_1, g_2 \in \pi_0(\mathcal{G})$ 时的 $\phi(g_1, g_2) \in \pi_1(\mathcal{H})$。不妨假设对所有 $g \in \pi_0(\mathcal{G})$ 都有 $\phi_{1,g} = 1$，因此 F_1 由$F_1(\gamma_g) = F_1(\gamma \otimes 1_g) = F_1(\gamma)_g$确定。交换图

$$\begin{array}{ccc} F_0(g_1 \otimes g_2) & \xrightarrow{F_1(\gamma_{g_1} \otimes \delta_{g_2})} & F_0(g_1 \otimes g_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1,g_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1,g_2}} \\ F_0(g_1) \otimes F_0(g_2) & \xrightarrow{F_1(\gamma_{g_1}) \otimes F_1(\delta_{g_2})} & F_0(g_1) \otimes F_0(g_2) \end{array}$$

利用骨架数据可将其转化为以下公式。首先注意到

$$F_1(\gamma_{g_1} \otimes \delta_{g_2}) = F_1((\gamma \cdot \alpha(g_1)(\delta))_{g_1 g_2})$$

类似地

$$F_1(\gamma_{g_1}) \otimes F_1(\delta_{g_2}) = F_1(\gamma)_{g_1} \otimes F_1(\delta)_{g_2} = (F_1(\gamma) \cdot \beta(g_1)(F_1(\delta)))_{g_1 g_2}$$

我们得到以下关于 $\pi_1(\mathcal{H})$ 的方程

$$\phi(g_1, g_2)F_1(\gamma \cdot \alpha(g_1)(\delta)) = F_1(\gamma)\beta(g_1)(F_1(\delta))\phi(g_1, g_2).$$

由于 $\pi_1(\mathcal{H})$ 是阿贝尔的，我们可以去掉 $\phi(g_1, g_2)$。

另一个说明 F 是幺半函子的图表如下

$$\begin{array}{ccc} (F(g_1) \otimes F(g_2)) \otimes F(g_3) & \xrightarrow{l_{F(g_1),F(g_2),F(g_3)}} & F(g_1) \otimes (F(g_2) \otimes F(g_3)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1,g_2} \otimes 1_{F(g_3)}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{F(g_1)} \otimes \phi_{g_2,g_3}} \\ F(g_1 \otimes g_2) \otimes F(g_3) & & F(g_1) \otimes F(g_2 \otimes g_3) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1 g_2, g_3}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1, g_2 \otimes g_3}} \\ F((g_1 \otimes g_2) \otimes g_3) & \xrightarrow{F(k_{g_1,g_2,g_3})} & F(g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)) \end{array}$$

注意到 $1_{F(g_1)} \otimes \phi_{g_2,\ g_3} = \beta(F(g_1))(\phi_{g_2,\ g_3})$，这就完成了对骨架 2-群之间的态射形式的证明。2-态射和 3-态射的表达式可直接由上述定义中的相关图表得出。

□

A.2 作用与同伦不动点

本附录部分将介绍 2-群在双范畴上的作用所对应的同伦不动点定义的一些细节，基本遵循 [HSV16]。这样做的动机是，本文主体部分要计算拓扑群在双范畴上的作用所对应的同伦不动点。正如我们现在要说明的，在我们关心的所有情形中，这等价于计算一个 2-群作用的不动点。为定义拓扑群 G 在双范畴上的作用，我们按如下方式进行。记 BG 为 G 的分类空间，并将其视为一个 ∞-群胚。现在，双范畴上的一个 G-作用可以由一个 3-函子 $\rho\colon BG \longrightarrow \mathrm{BiCat}$ 描述，该函子将经由基本 3-群胚 $\Pi_3(BG)$分解。由于本文只关注紧李群（因此是满足 $\pi_2(G) = 0$的群），我们可以用 $\Pi_2(BG)$替换 $\Pi_3(BG)$。 $\Pi_2(BG)$ 是一个 2-群 $\Pi_{\leq 1}(G)$的去环化。

现在我们明确写出 2-群 $\mathcal{G}$ 在双范畴上的作用所对应的数据。由于$B\mathcal{G}$ 只有一个对象，我们可以将作用 $\rho\colon B\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{BiCat}$（其中 $\rho(*) = \mathcal{B}$）等价地描述为一个幺半函子 $\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathcal{B}$。这里，定义域的幺半群结构由函子的复合给出；对于 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{B}$ 中 1-态射的复合，我们固定了自然变换的水平复合方式。

定义 A.5（另见注 3.8 [HSV16]）。设 $\mathcal{B}$为一个双范畴，且 $(\mathcal{G}, \otimes, \alpha_{\mathcal{G}}, 1)$ 为一个 2-群。 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的作用 由双范畴之间的一个函子 $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathcal{B}$ 以及幺半性数据构成；幺半性数据是一组自然同构 $R_{g',g}\colon \rho(g' \otimes g) \xRightarrow{\sim} \rho(g') \circ \rho(g)$，它们关于 g 和 g' 自然。具体而言，这些数据如下：

- 对于每个对象 $g \in \mathcal{G}$，一个函子 $\rho(g)\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$
- 对于每个态射 $\gamma\colon g \longrightarrow g' \in \mathcal{G}$，一个自然同构 $\rho(\gamma)\colon \rho(g) \longrightarrow \rho(g')$。具体而言，它们由 1-同构 $\rho(\gamma)(b)\colon \rho(g)[b] \longrightarrow \rho(g')[b]$ 对所有 $b \in \mathcal{B}$ 以及 2-同构组成

$$\begin{array}{ccc} \rho(g)[b] & \xrightarrow{\rho(\gamma)(b)} & \rho(g')[b] \\ {\scriptstyle \rho(g)[f]}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow_{\rho(\gamma)(f)} & \downarrow{\scriptstyle \rho(g')[f]} \\ \rho(g')[b'] & \xrightarrow[\rho(\gamma)(b')]{} & \rho(g')[b'] \end{array}$$

对所有 $f\colon b \longrightarrow b' \in \mathcal{B}$，满足自然相干条件。

- 对于每一对可复合态射 $\gamma\colon g \longrightarrow g'$ 和 $\gamma'\colon g' \longrightarrow g''$，一个可逆修正

$$\begin{array}{ccc} & & \rho(g) \\ & {\scriptstyle \rho(\gamma)}\swarrow & \| \\ \rho(g') & \Longrightarrow_{\alpha_{\gamma',\gamma}} & \| {\scriptstyle \rho(\gamma' \circ \gamma)} \\ & {\scriptstyle \rho(\gamma')}\searrow & \| \\ & & \rho(g'') \end{array}$$

• 对于每一对对象 g，$g' \in \mathcal{G}$ 自然同构 $R_{g',\,g}$：$\rho(g' \otimes g) \longrightarrow \rho(g') \circ \rho(g)$。具体而言，它们由 1-同构 $R_{g',\,g}(b)$：$\rho(g' \otimes g)[b] \longrightarrow \rho(g') \circ \rho(g)[b]$ 对所有 $b \in \mathcal{B}$ 以及 2-同构组成

$$\begin{array}{ccc} \rho(g' \otimes g)[b] & \xrightarrow{R_{g',g}(b)} & \rho(g') \circ \rho(g)[b] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(g' \otimes g)[f]} & \swarrow\!\!\swarrow{\scriptstyle R_{g',g}(f)} & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(g') \circ \rho(g)[f]} \\ \rho(g' \otimes g)[b'] & \xrightarrow[R_{g',g}(b')]{} & \rho(g') \circ \rho(g)[b'] \end{array}$$

对所有满足自然相干条件的 f：$b \longrightarrow b' \in \mathcal{B}$。

• 前一点所述的结构在 g 上具有函子性，g'，也就是说，对于每一对态射 γ：$g_1 \longrightarrow g_2$ 和 γ'：$g_1' \longrightarrow g_2'$，我们都需要指定一个修正

$$\begin{array}{ccc} \rho(g_1' \otimes g_1) & \overset{R_{g_1',g_1}}{\Longrightarrow} & \rho(g_1') \circ \rho(g_1) \\ {\scriptstyle \rho(\gamma' \otimes \gamma)}\Big\Downarrow & \swarrow\!\!\swarrow{\scriptstyle R_{\gamma',\gamma}} & \Big\Downarrow{\scriptstyle \rho(\gamma') \bullet \rho(\gamma)} \\ \rho(g_2' \otimes g_2) & \underset{R_{g_2',g_2}}{\Longrightarrow} & \rho(g_2') \circ \rho(g_2) \end{array}$$

其中我们用圆点表示水平复合。

• 对于每组三个对象 g''，g'，$g \in \mathcal{G}$ 可逆修正

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho(g'') \circ \rho(g') \circ \rho(g) & & \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}_{\rho(g'')} \bullet R_{g',\,g}} \nearrow & & \nwarrow {\scriptstyle R_{g'',\,g'} \bullet \mathrm{id}^{\rho(g)}} & \\ \rho(g'') \circ \rho(g' \otimes g) & & \swarrow {\scriptstyle \omega_{g'',\,g',\,g}} & & \rho(g'' \otimes g') \circ \rho(g) \\ {\scriptstyle R_{g'',g' \otimes g}}\Big\Uparrow & & & & \Big\Uparrow{\scriptstyle R_{g'' \otimes g',g}} \\ \rho(g'' \otimes (g' \otimes g)) & & \xrightarrow[\rho(\alpha_{\mathcal{G}}(g'',\,g',\,g))]{} & & \rho((g'' \otimes g') \otimes g) \end{array}$$

满足五边形型恒等式 HTA1 [Hes17，图2。1] [GPS95]

使恒等式严格保持[10]

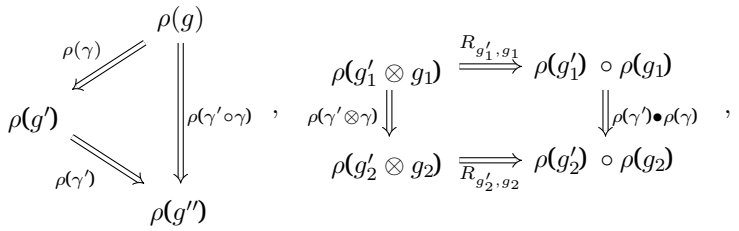
注 A.6。我们常会用到这样一个事实：在 2-群中，态射的复合由态射的张量积决定。例如，这意味着上述定义中的 α 是多余的。

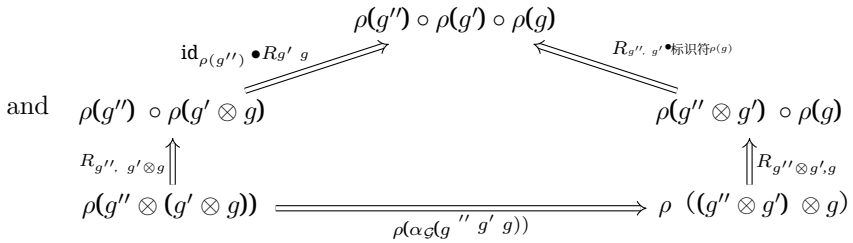
注 A.7。将普通范畴视为仅含恒等 2-态射的双范畴，可以将上述定义特化到普通范畴的情形。具体而言，2-群 $(\mathcal{G},\ \otimes,\ 1,\ \alpha)$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 上的作用由以下数据组成

- 一个等价 $\rho(g)$：$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 对所有 $g \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$,
- 自然同构 $R_{g',\,g}$：$\rho(g' \otimes g) \Longrightarrow \rho(g') \circ \rho(g)$，对所有对象对 g'，$g \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$,
- 以及自然同构 $\rho(\gamma)$：$\rho(g) \Longrightarrow \rho(g')$，适用于 $\mathcal{G}$ 中所有态射 γ：$g \longrightarrow g'$

[10]总可以在同构意义下作此假设。

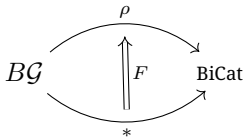
使得图表





可交换，并且 $\rho(1)=\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$。注意，双范畴上的每个作用都会在同伦 1-范畴上诱导出这种意义下的作用。

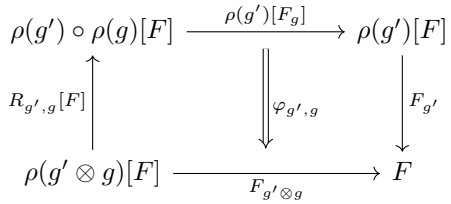
定义了双范畴上的群作用后，我们便可以定义相应的同伦不动点概念。借助三范畴，可以给出一个简洁的定义。设 $\rho\colon B\mathcal{G}\longrightarrow \mathbf{BiCat}$ 描述了 $\mathcal{G}$ 在双范畴 $\mathcal{B}$上的作用。一个同伦不动点是一个自然变换



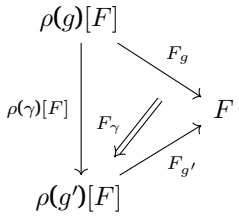
从取值为双范畴 $*$ 的常值函子出发，其中该双范畴只有一个对象，且只有恒等态射。按照 [HSV16] 的做法，我们具体写出 2-群作用情形下的定义。

定义 A.8. 设 $(\mathcal{G},\otimes,\alpha_{\mathcal{G}},1)$ 是一个 2-群，其在双范畴 $\mathcal{B}$ 上具有作用 $(\mathcal{B},\rho(-)\ R_{-,-},\alpha,\omega)$。一个同伦不动点 由以下数据组成

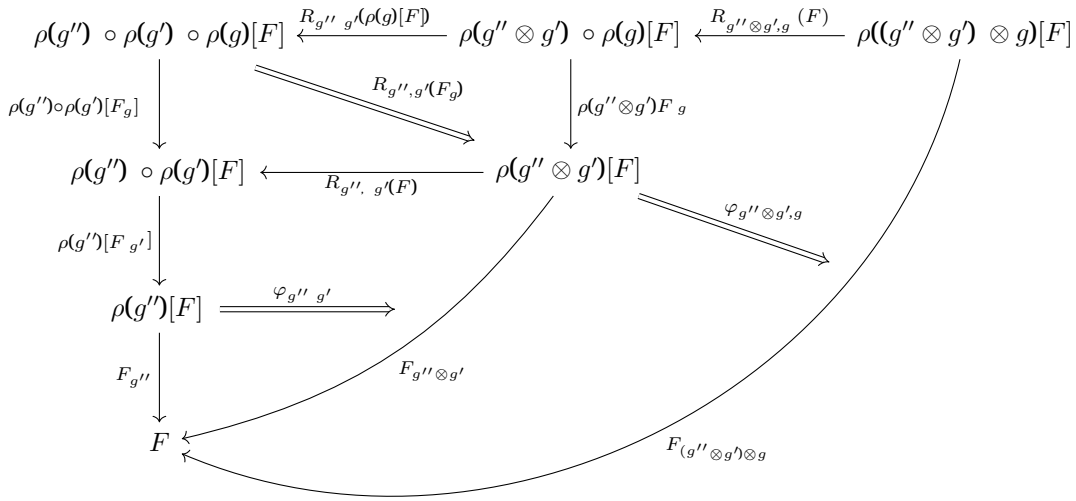
- 一个对象 $F\in\mathcal{B}$
- 对于所有元素 $g\in\mathcal{G}$，一个 1-同构 $F_g\colon \rho(g)[F]\longrightarrow F$
- 对所有元素对 $g,\ g'\in\mathcal{G}$ 2-同构



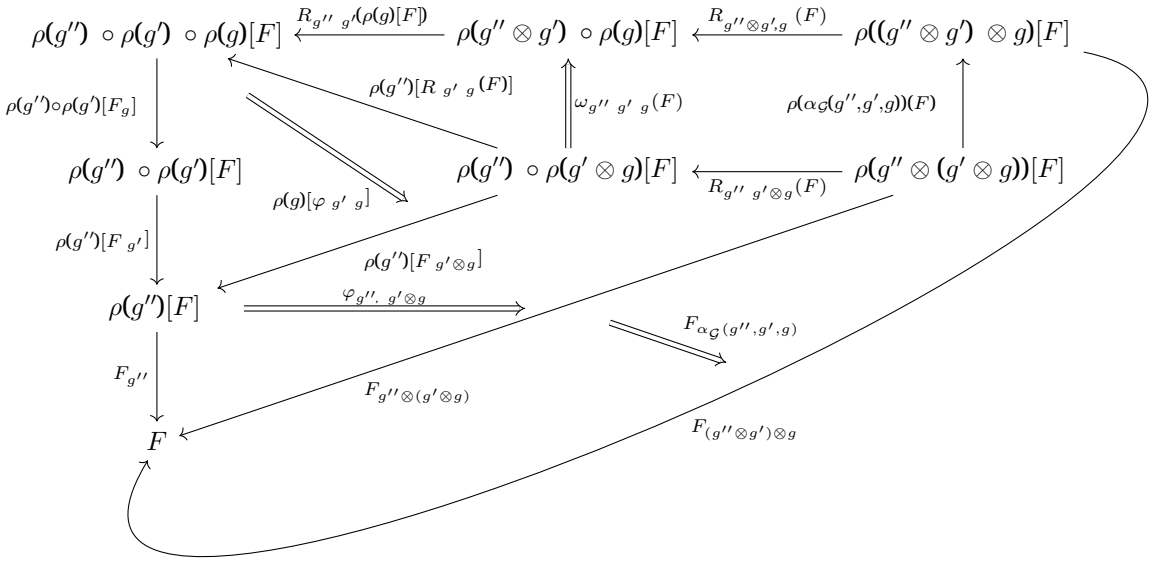
- 对所有 1-态射 $\gamma\colon\ g \longrightarrow g'$ 在 $\mathcal{G}$ 2-同构中



使得所有单位元都严格保持不变，即 $F_e\colon \rho(e)[F] = F$恒等映射$\xrightarrow{F} F$, $F_{\mathrm{id}_g} =$恒等映射F_g并且 $\varphi_{g',\ g}$只要其中一个分量是平凡的，它就是平凡的。此外，这些数据必须满足以下两个关系

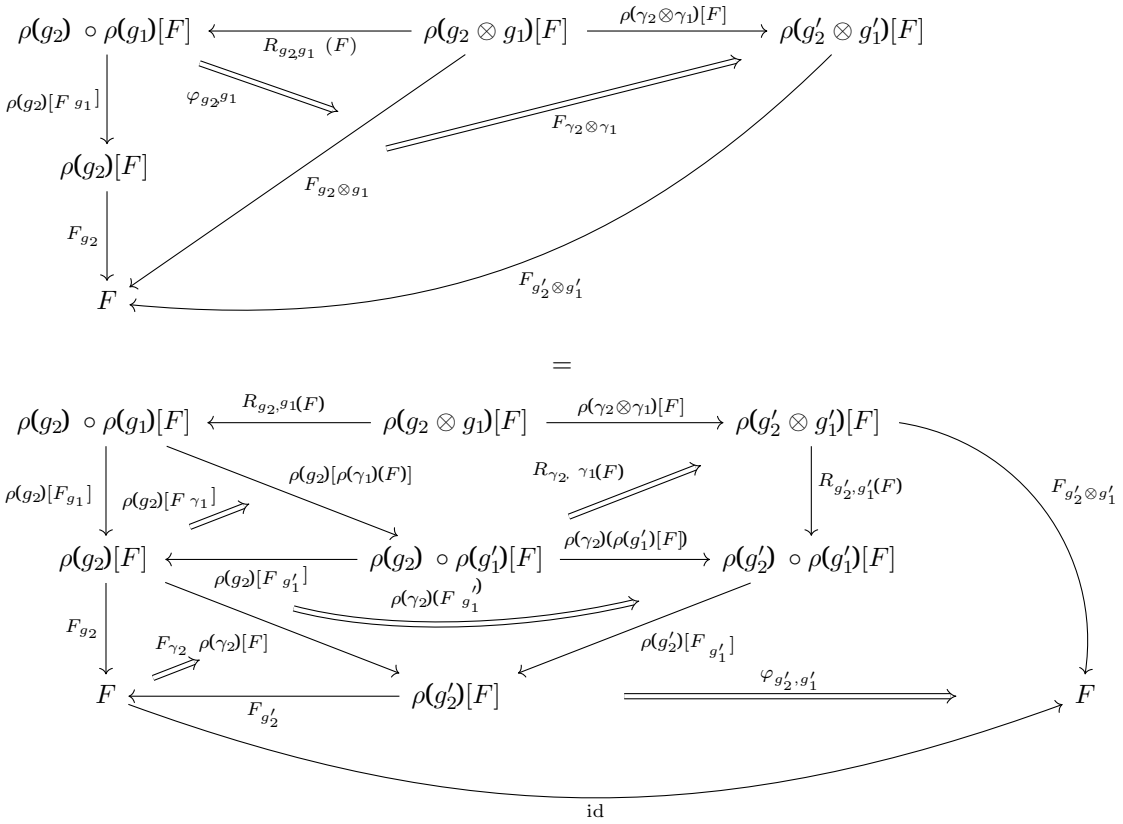

$\rho(g'') \circ \rho(g') \circ \rho(g)[F]$
$R_{g'' \ g'}(\rho(g)[F])$
$\rho(g'' \otimes g') \circ \rho(g)[F]$
$R_{g'' \otimes g', g}(F)$
$\rho((g'' \otimes g') \otimes g)[F]$
$\rho(g'') \circ \rho(g')[F_g]$
$R_{g'', g'}(F_g)$
$\rho(g'' \otimes g')F_g$
$\rho(g'') \circ \rho(g')[F]$
$R_{g'', \ g'}(F)$
$\rho(g'' \otimes g')[F]$
$\varphi_{g'' \otimes g', g}$
$\rho(g'')[F_{\ g'}]$
$\rho(g'')[F]$
$\varphi_{g'' \ g'}$
$F_{g''}$
$F_{g'' \otimes g'}$
F
$F_{(g'' \otimes g') \otimes g}$

=


$\rho(g'') \circ \rho(g') \circ \rho(g)[F]$
$R_{g'' \ g'}(\rho(g)[F])$
$\rho(g'' \otimes g') \circ \rho(g)[F]$
$R_{g'' \otimes g', g}(F)$
$\rho((g'' \otimes g') \otimes g)[F]$
$\rho(g'') \circ \rho(g')[F_g]$
$\rho(g'')[R_{\ g' \ g}(F)]$
$\omega_{g'' \ g' \ g}(F)$
$\rho(\alpha_{\mathcal{G}}(g'', g', g))(F)$
$\rho(g'') \circ \rho(g')[F]$
$\rho(g'') \circ \rho(g' \otimes g)[F]$
$R_{g'' \ g' \otimes g}(F)$
$\rho(g'' \otimes (g' \otimes g))[F]$
$\rho(g)[\varphi_{\ g' \ g}]$
$\rho(g'')[F_{\ g'}]$
$\rho(g'')[F_{\ g' \otimes g}]$
$\rho(g'')[F]$
$\varphi_{g'', \ g' \otimes g}$
$F_{\alpha_{\mathcal{G}}(g'', g', g)}$
$F_{g''}$
$F_{g'' \otimes (g' \otimes g)}$
F
$F_{(g'' \otimes g') \otimes g}$

(A.1)

对于所有 g''，g'，$g \in \mathcal{G}$ 和



(A.2)

对于所有态射 $\gamma_2 \colon g_2 \longrightarrow g_2'$ 和 $\gamma_1 \colon g_1 \longrightarrow g_1'$，其中 $\mathcal{G}$。

根据定义，我们可以直接得到

命题 A.9。 设$(\mathcal{G}, \otimes, \alpha_{\mathcal{G}}, 1)$ 是一个 *2*-群。双范畴 $\mathcal{B}$ 上平凡作用的同伦不动点，是配备了 $\mathcal{G}$-作用的对象 $b \in \mathcal{B}$。

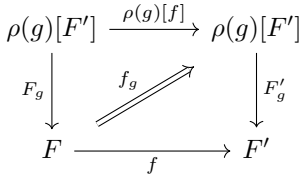
注记 A.10。 一般的同伦不动点可以理解为被双范畴上的 $\mathcal{G}$-作用扭曲的作用。事实上，设 G 是一个普通离散群，它通过 2-余循环 $\alpha \in C^2(G;\mathbb{C}^\times)$ 作用于 1-范畴 Vect。该作用的同伦不动点恰好是带有扭曲 α 的 G 的射影表示。

同伦不动点自然构成一个双范畴 HFP(ρ):

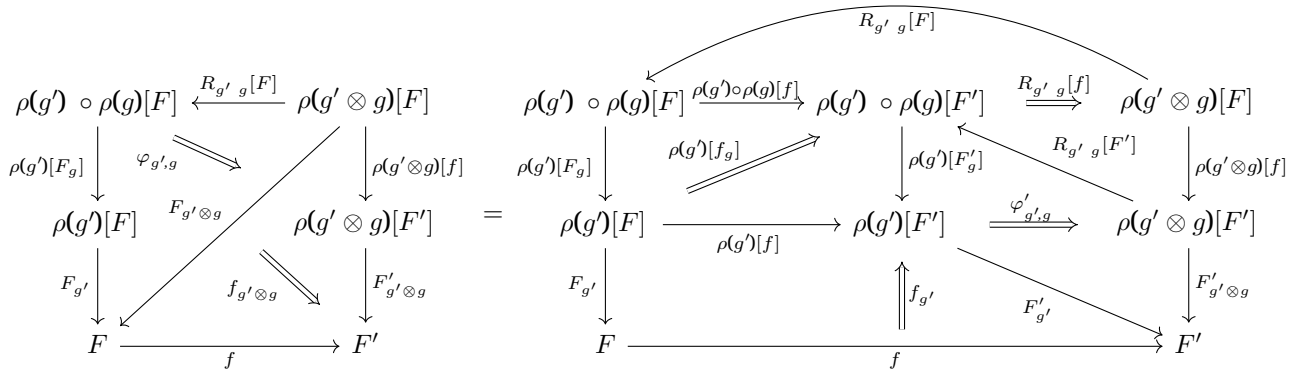
定义 A.11。 设 $(\mathcal{G}, \otimes, \alpha, 1)$ 是一个 2-群，其在双范畴 $\mathcal{B}$ 上的作用为 $(\mathcal{B}, \rho(-)\ R_{-,-}, \alpha, \omega)$。同伦不动点 $(F, F_g, F_\gamma, \varphi_{g',g})$ 与 $(F', F_g', F_\gamma', \varphi_{g',g}')$ 之间的一个*1*-态射 由以下内容构成

- 一个 1-态射 $f \colon\ F \longrightarrow F'$ 在 $\mathcal{B}$ 中,

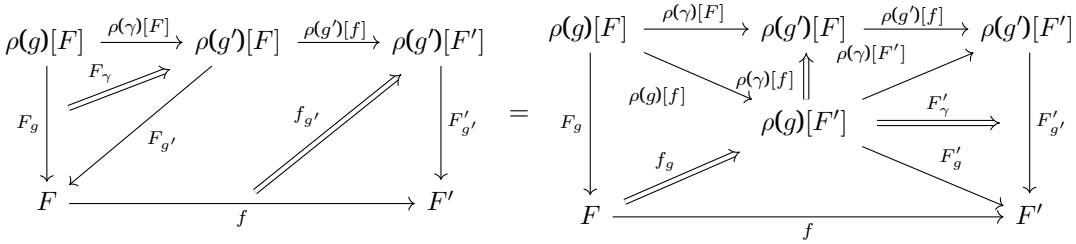
- 对于每个 $g \in \mathcal{G}$，一个 2-同构



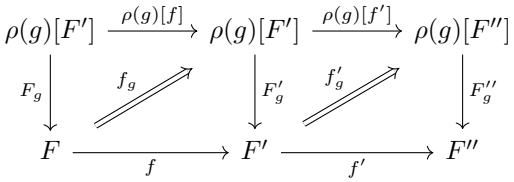
与恒等映射相容，并且满足



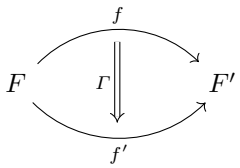
对所有 g'，$g \in \mathcal{G}$ 以及



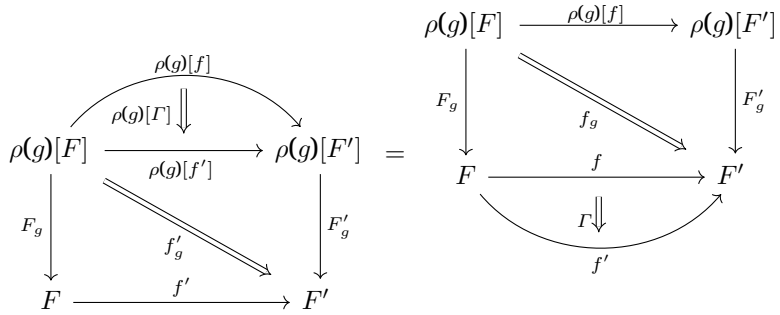
对于所有 $\gamma\colon\ g \longrightarrow g'$。1-态射的复合 $(F, F_g, F_\gamma, \varphi_{g'}, g) \xrightarrow{(f, f_g)} (F', F'_g, F'_\gamma, \varphi'_{g'}, g)$ 和 $(F', F'_g, F'_\gamma, \varphi'_{g'}, g) \xrightarrow{(f', f'_g)} (F'', F''_g, F''_\gamma, \varphi''_{g'}, g)$ 由 $f' \circ f$ 给出，并伴有如下 2-同构



定义 A.12. 设 $(\mathcal{G}, \otimes, \alpha_\mathcal{G}, 1)$ 是一个 2-群，其在双范畴 $\mathcal{B}$ 上的作用为 $(\mathcal{B}, \rho(-)\ R_{-,-}, \alpha, \omega)$。此外，设 (f, f_g) 和 (f', f'_g) 是同伦不动点的 1-态射 $(F, F_g, F_\gamma, \varphi_{g'}, g) \longrightarrow (F', F'_g, F'_\gamma, \varphi'_{g'}, g)$。同伦不动点的一个 2-态射由一个 2-态射构成

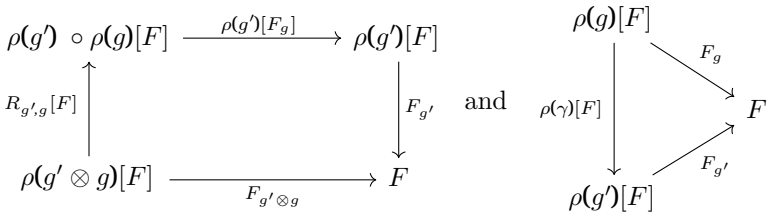


使得



对所有 $g \in \mathcal{G}$。

注 A.13. 如注 A.7 所述，我们可以将同伦不动点的定义限制在普通范畴中。设 $(\mathcal{G},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \alpha)$ 是一个 2-群，且 $(\rho(-)\ R_{-,\ -})$ 是 $\mathcal{G}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个作用。ρ 的一个同伦不动点由一个对象 $F \in \mathcal{C}$ 及同构 $F_g\colon\ \rho(g)[F] \longrightarrow F$ 组成，对所有对象 $g \in \mathcal{G}$ 均成立，并且满足以下图表



在 $\mathcal{C}$ 和 $F_1 = \mathrm{id}_F$ 中交换。

同伦不动点之间的 1-态射由态射 $f\colon\ F \longrightarrow F'$ in $\mathcal{C}$ 给出，满足$f \circ F_g = F'_g\rho(g)[f]$。同伦不动点之间不存在非平凡的 2-态射。因此，同伦不动点构成一个 1-范畴 $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$。

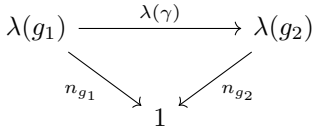
A.3 2-群的正合列与半直积

现在我们来讨论 2-群的正合列与半直积。离散群的正合序列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\lambda} H \longrightarrow 1$$

由一个满射群同态 λ 及其核 $K \xrightarrow{\iota} G$组成。为了将正合序列的定义推广到 2-群，我们从以下定义开始

定义 A.14. 设 $\lambda\colon\ \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H}$是一个 2-群同态。其核 $\lambda^{-1}[1]$ 是一个幺半范畴，其对象由 $g \in \mathrm{ob}\,\mathcal{G}$ 以及一个同构 $n_g\colon\ \lambda(g) \longrightarrow 1$ (“零化子”)组成，其态射 $(\gamma\colon\ g_1 \longrightarrow g_2) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{G}$ 满足



可交换。

幺半群结构由对象上的 $n_{g_1} \otimes n_{g_2}$ 给出，这显然是一个函子。$\ker \lambda$ 中对象之间的结合子就是 $\mathscr{G}$ 中的结合子。

Let

$$1 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \mathscr{G} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{H} \longrightarrow 1$$

是一列2-群，并配有一个带基点的2-同构 $\epsilon\colon \lambda \circ \iota \longrightarrow 1$。2-同构 ϵ定义了一个2-群态射

$$\begin{aligned} \iota^{\epsilon}\colon \mathscr{N} &\longrightarrow \lambda^{-1}[1] \\ k &\longmapsto (\iota(n), \lambda \circ \iota(n) \xrightarrow{\epsilon_n} 1) \end{aligned}$$

定义 A.15。 2-群的正合序列 是一列2-群

$$1 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \mathscr{G} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{H} \longrightarrow 1$$

并配有一个带基点的2-同构 $\epsilon\colon \lambda \circ \iota \longrightarrow 1$，使得映射 ι^{ϵ} 是2-群等价。

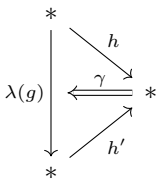
注 A.16。 我们也可以用一列2-群胚等价地描述2-群的正合序列

$$1 \longrightarrow B\mathscr{N} \xrightarrow{\iota} B\mathscr{G} \xrightarrow{\lambda} B\mathscr{H} \longrightarrow 1$$

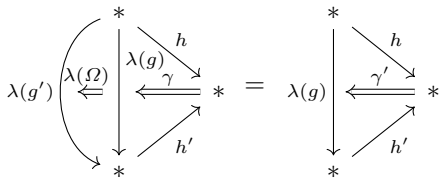
以及一个带基点的1-态射 $\epsilon\colon \lambda \circ \iota \longrightarrow 1$，使得诱导映射 $B\mathscr{N} \longrightarrow \lambda/*$ 是等价。在这种情况下，我们可以得出切片范畴 $\lambda/*$ 是连通的，并且存在一个2-群胚等价 $B\lambda^{-1}[1] \longrightarrow \lambda/*$。因此，2-群的典范映射 $\mathcal{N} \longrightarrow \lambda^{-1}[1]$ 也是等价。

与普通群的情形一样，正合序列会在 $B\mathscr{N}$ 上诱导出 $\mathscr{H}$ 的一个作用。通过注意到 $\mathscr{H}$ 可通过后复合在切片 $\lambda/*$ 上典范地作用，可以抽象地构造出该作用。由于 ι^{ϵ} 是一个等价，我们可以将该作用转移到 $B\mathscr{N}$ 上。我们描述 ϵ 为恒等且 λ 为纤维化时诱导出的作用。这个假设只是简化了论述，并且足以涵盖本文所考察的扩张。不过，将其推广到非平凡的 ϵ 情形也很直接。为此，我们更具体地描述双范畴 $\lambda/*$：它由以下部分组成

- **对象：** 态射 $h\colon\ \lambda(*) \longrightarrow *$ 在 $B\mathscr{H}$ 中。
- **1-态射：** 由一对 1-态射 $g\colon\ * \longrightarrow *$（属于 $\mathscr{G}$）和一个 2-态射组成

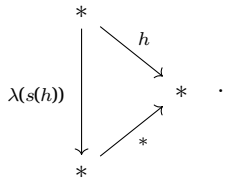


- **2-态射：** 2-态射 $\Omega\colon\ (g,\ \gamma) \Longrightarrow (g',\ \gamma')$ 是一个 2-态射 $\Omega\colon\ g \longrightarrow g'$（属于 $B\mathscr{G}$），满足

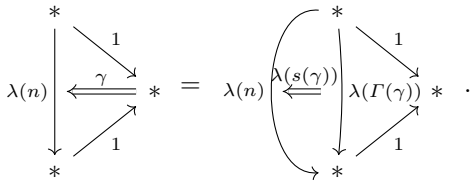


[11]更抽象地说，它是纤维化 $\lambda\colon\ B\mathscr{G} \longrightarrow B\mathscr{H}$ 的直化。

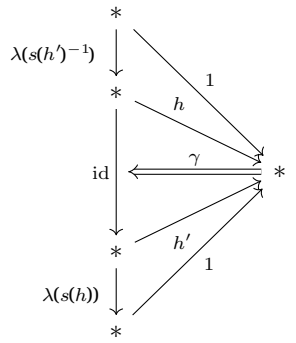
配上显然的复合。由于 $\iota\colon B\mathscr{N} \longrightarrow \lambda/*$ 是本质满的，对于每个元素 $\lambda(*) \xrightarrow{h} *$，都存在一个图表



取一个元素 $s(h) \in \mathscr{G}$，并且可以假设它严格交换。对于所有$h \in \mathscr{H}$，我们都选取这样一个元素，也就是说，在对象层面选取一个集合论截面。在 1-态射层面本质满意味着，对于所有 1-态射 $(n,\gamma)\colon (*,1) \longrightarrow (*,1)$，存在一个元素$\Gamma(\gamma) \in \mathscr{N}$以及一条路径 $s(\gamma)\colon \Gamma(\gamma) \longrightarrow n$，位于 $\mathscr{G}$中，使得



我们再次选取这些“提升”。特别地，对于 $\mathscr{H}$中的每条路径 $\gamma\colon h \longrightarrow h'$，我们可以考虑



(A.3)

并得到一条路径 $s(\gamma)\colon \Gamma(\gamma) \longrightarrow s(h') \otimes s(h)^{-1}$，或者等价地，一条路径 $s(\gamma)\colon s(h) \longrightarrow \Gamma(\gamma)^{-1}s(h')$，也就是说，将 γ 提升为 $\mathscr{G}$ 中的一条路径，该路径始于 $s(h)$，但不终于 $s(h')$。一般而言，不可能找到一条同时终于$s(h')$的提升。在恒等态射可以作为提升的情形下，我们总是选取它。基于这些选择，我们可以选取 $\iota\colon B\mathscr{N} \longrightarrow \lambda/*$: 的一个特定逆:

$$\iota^{-1}\colon \lambda/* \longrightarrow B\mathscr{N},\quad (h\colon \lambda(*) \longrightarrow *) \longmapsto *$$
$$(g,\gamma)\colon h \longrightarrow h' \longmapsto \Gamma(s(h') \otimes \gamma \otimes s(h)^{-1})$$

其中，我们将 $s(h') \otimes \gamma \otimes s(h)^{-1}$ 记为由 (g,γ) 构造出的、形式类似于公式 (A.3) 的 1-态射。2-态射 $\Omega\colon (g_1,\gamma_2) \longrightarrow (g_2,\gamma_2)$ 上的取值可构造为该 2-态射

$$\Gamma(\lambda(s(h')) \otimes \gamma_1 \otimes \lambda(s(h)^{-1})) \xrightarrow{s(\lambda(s(h'))\otimes\gamma_1\otimes\lambda(s(h)^{-1})} s(h') \otimes g_1 \otimes s(h)^{-1} \xrightarrow{\Omega} s(h') \otimes g_2 \otimes s(h)^{-1}$$
$$\xrightarrow{s(\lambda(s(h'))\otimes\gamma_1\otimes\lambda(s(h)^{-1})^{-1}} \Gamma(\lambda(s(h')) \otimes \gamma_2 \otimes \lambda(s(h)^{-1}))$$

这是 $B\mathscr{N}$ 中的一个2-态射，因为 ι 在2-态射上是全忠实的。根据构造，我们有$\iota^{-1} \circ \iota = \mathrm{id}$以及一个典范自然同构 $\iota \circ \iota^{-1} \longrightarrow \mathrm{id}_{\lambda/*}$。

元素 $H \in \mathscr{H}$ 在 $B\mathscr{N}$ 上的作用现在是 $\psi(H)$: $B\mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \lambda/* \xrightarrow{H\circ -} \lambda/* \xrightarrow{\iota^{-1}} B\mathscr{N}$，它具体将1-态射 n 映射为 $s(H) \otimes n \otimes s(H)^{-1}$，将2-态射 $\gamma_{\mathscr{N}}$ 映射为诱导的2-态射 $s(H) \otimes \gamma_{\mathscr{N}} \otimes s(H)^{-1}$。

路径 $\gamma_{\mathscr{H}}$ 通过自然变换 $\psi(\gamma_H)$: $\psi(H) \longrightarrow \psi(H')$ 作用，其在 $* \in B\mathscr{N}$ 处的值为 $\Gamma(\gamma)$。使其成为自然变换的数据由 2-同构 $s(\gamma)$: $\Gamma(\gamma) \Longrightarrow s(h') \otimes s(h)^{-1}$ 诱导。

根据这一描述，我们还可以推导出涉及两个元素 $H,\ H' \in \mathscr{H}$ 的相干同构。抽象地说，它由下式给出：

$$B\mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \lambda/* \xrightarrow{H\circ -} \lambda/* \xrightarrow{\iota^{-1}} B\mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \lambda/* \xrightarrow{H'\circ -} \lambda/* \xrightarrow{\iota^{-1}} B\mathscr{N}$$

这个自然同构在基点处的分量为

$$\iota^{-1}\left(\begin{array}{ccccc} & & * & \overset{H'}{\searrow} & \\ & {\scriptstyle \lambda(s(H)^{-1})}\downarrow & & \overset{1}{\searrow} & \\ * & \xrightarrow[H]{} & * & \xrightarrow[H']{} & * \end{array}\right) = s(H' \circ H) \circ s(H)^{-1} \circ s(H')^{-1}$$

它衡量了 s 与 $B\mathscr{H}$ 中的复合不相容的程度。

所有群的正合列都可以通过扭曲半直积从 $\mathscr{H}$ 对 $\mathscr{N}$ 的作用重建。现在我们来说明 2-群的类似构造。设 $\mathscr{G}$ 是一个 2-群，并且作用于另一个 2-群 $\mathscr{N}$。我们将明确地定义半直积 2-群。从概念上说，最简单的做法是先写出这种作用应有的（导出）余不变元（即同伦商）。为此，我们将 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{N}$ 视为双范畴，并将半直积描述为函子 ρ: $B\mathscr{G} \longrightarrow$ BiCat 的余极限，其中这些三范畴描述了该作用。之后，我们从中推导出以幺半范畴表示的表达式。虽然这些表达式在概念上不够直观，但便于计算。根据幺半范畴的相干定理，以下我们不失一般性地省略 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{N}$ 的结合子。这样可以简化本已繁琐的公式，而且在实际应用中推广到非平凡结合子的情形也很直接。

具体而言，双范畴 $B(\mathcal{N} \rtimes \mathcal{G})$ 的 1-态射由一个 1-态射 $g: * \longrightarrow *$of $B\mathcal{G}$ 以及一个对象 $n: * = \rho(g)(*) \longrightarrow *$ of $\mathcal{N}$组成。(n', g') 与 (n, g) 的复合可以定义为取复合

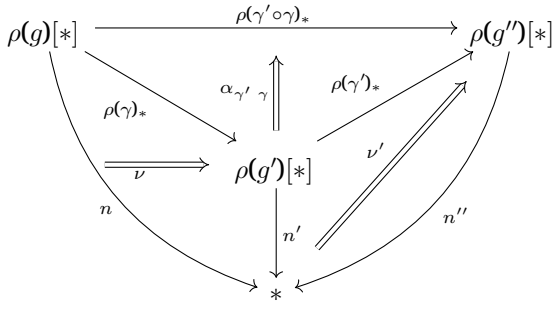
$$\rho(g' \otimes g)[*] \xrightarrow{R_{g',g}(*)} \rho(g')[\rho(g)[*]] \xrightarrow{\rho(g')[n]} \rho(g')[*] \xrightarrow{n'} *$$

作为第一项，并令 $g' \otimes g$ 为第二项。类比于群的扭曲半直积，我们认为半直积 2-群中的乘法由“条件” $gng^{-1} = \rho(g)(n)$ 和“扭曲2-余循环” $R_{g',g}$ 指定。从 (n, g) 到 (n', g') 的 2-态射由 $B\mathcal{G}$ 中的一个 2-态射 γ: $g \longrightarrow g'$ 以及 $B\mathcal{N}$ 中一个填充该图表的 2-态射组成

$$\begin{array}{ccc} \rho(g)[*] & & \\ \downarrow{\scriptstyle n} & \overset{\rho(\gamma)_*}{\searrow} & \\ & \overset{\nu}{\Longrightarrow} & \rho(g')[*] \\ * & \overset{n'}{\swarrow} & \end{array}$$

2-态射的纵向复合 $\gamma:\ g \longrightarrow g', \nu:\ n \longrightarrow n' \otimes \rho(\gamma)_*$ 以及 $\gamma':\ g' \longrightarrow g'', \nu:\ n' \longrightarrow$

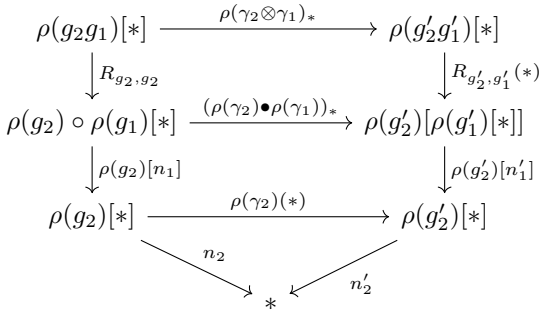
$n'' \otimes \rho(\gamma')_*$ 由下式给出



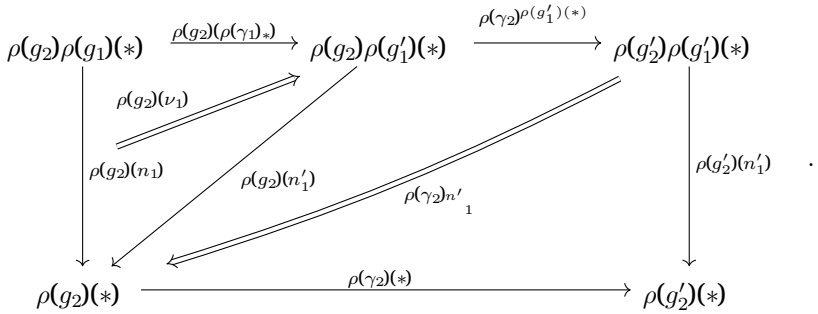
对于 $\gamma_i\colon\ g_i \longrightarrow g_i'$，$\nu_i\colon\ n_i \longrightarrow n_i' \otimes \rho(\gamma_i)_*$ 关于 $i = 1$，2 的水平复合，我们需要给出一个态射

$$n_2 \otimes \rho(g_2)[n_1] \otimes R_{g_2,g_1}(*) \longrightarrow n_2' \otimes \rho(g_2')[n_1'] \otimes R_{g_2',g_1'}(*) \otimes \rho(\gamma_2 \otimes \gamma_1)_*.$$

因此，我们希望填充该图表

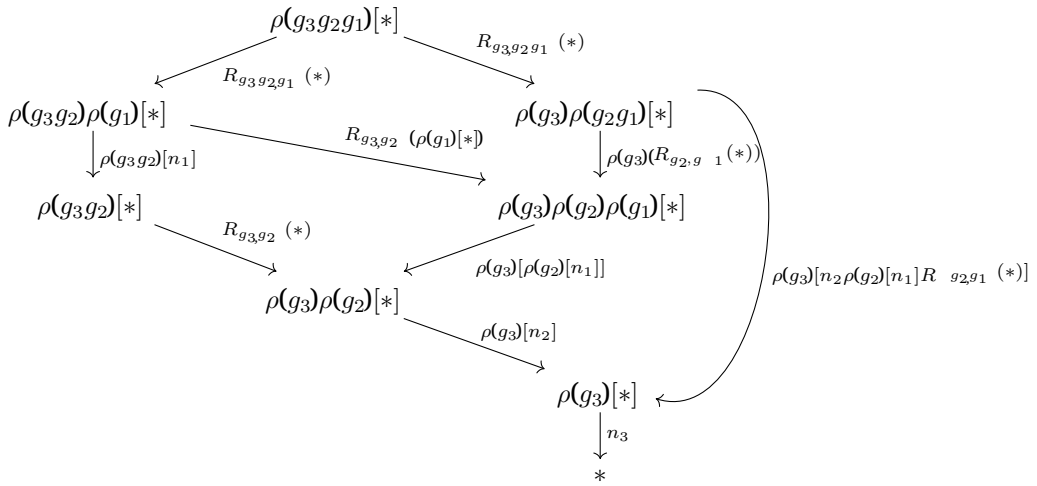


上方的矩形可以填入$R_{\gamma_2,\ \gamma_1}(*)$，下方的三角形则可以填入 ν_2。代入自然变换的水平复合定义后，中间的矩形可以如下填入：



对于结合子，我们来考虑 $(n_3,\ g_3)$，$(n_2,\ g_2)$ 和 $(n_1,\ g_1)$ 的三重张量积。以下两种可能的张量积顺序分别是 1-态射的最左复合和最右复合

图表:



我们可以用 $\omega_{g_3,g_1,g_1}(*)$ 填充上方的四边形，用自然性同构$R_{g_3,g_2}(n_1\colon \rho(g)[*]\longrightarrow *)$ 填充下方的四边形。利用幺半函子 $\rho(g_3)$ 的幺半性数据，可以得到最右侧的弯箭头。

将上述公式翻译过来，我们便得到半直积作为幺半范畴的一种等价描述。

定义 A.17. 半直积 $\mathcal{N}\rtimes\mathcal{G}$是一个幺半范畴，其对象为形如 (n,g) 的有序对，其中$g\in\mathcal{G}$ 和 $n\in\mathcal{N}$，并配有幺半群乘积

$$(n',g')\otimes(n,g)=(n'\otimes\rho(g')(n)\otimes R_{g',g}(*),g\otimes g').$$

态射 $(n,g)\longrightarrow(n',g')$ 由一个态射 $\gamma\colon g\longrightarrow g'$（属于 $\mathcal{G}$）和一个态射 $\nu\colon n\longrightarrow n'\otimes\rho(\gamma)_*$（属于 $\mathcal{N}.$）组成。$(\nu,\gamma):(g,n)\longrightarrow(g',n')$ 与 $(\nu',\gamma'):(n',g')\longrightarrow(n'',g'')$ 的复合定义为由 $\gamma'\circ\gamma$ 和以下复合组成的有序对

$$n\xrightarrow{\nu}n'\otimes\rho(\gamma)_*\xrightarrow{\nu'\otimes\mathrm{id}_{\rho(\gamma)_*}}n''\otimes\rho(\gamma')_*\otimes\rho(\gamma)_*\xrightarrow{\mathrm{id}_{n''}\otimes\alpha_{\gamma',\gamma}}n''\otimes\rho(\gamma'\circ\gamma)_*.$$

$(\nu_1,\gamma_1):(n_1,g_1)\longrightarrow(n_1',g_1')$ 与 $(\nu_2,\gamma_2):(n_2,g_2)\longrightarrow(n_2',g_2')$ 的水平复合由包含 $\gamma_2\otimes\gamma_1$ 和复合的有序对定义

$n_2\otimes\rho(g_2)[n_1]\otimes R_{g_2,g_1}(*)$ $\nu_2\otimes$恒等映射$\xrightarrow{\rho(g_2)[n_1]\otimes R_{g_2,g_1}(*)}$,$n_2'\otimes\rho(\gamma_2)_*\otimes\rho(g_2)[n_1]\otimes R_{g_2,g_1}(*)$ 恒等映射 $\xrightarrow{n_2'\otimes\rho(\gamma_2)_*\otimes\rho(g_2)[\nu_1]\otimes R_{g_2,g_1}(*)}$ ( ) 恒等映射 ,$n_2'\otimes\rho(\gamma_2)_*\otimes\rho(g_2)[n_1']\otimes\rho(g_2)[\rho(\gamma_1)_*]\otimes R_{g_2,g_1}(*)$ 恒等映射 $\xrightarrow{n_2'\otimes\rho(\gamma_2)[n_1']\otimes\rho(g_2)[\rho(\gamma_1)_*]\otimes R_{g_2,g_1}(*)}$ ( ) 恒等映射 ,$n_2'\otimes\rho(g_2')[n_1']\otimes\rho(\gamma_2)_*\otimes\rho(g_2)[\rho(\gamma_1)_*]\otimes R_{g_2,g_1}(*)$ 恒等映射 $\xrightarrow{n_2'\otimes\rho(g_2')[n_1']\otimes R_{\gamma_2,\gamma_1}(*)}$ $n_2'\otimes\rho(g_2')[n_1']\otimes R_{g_2',g_1'}\otimes\rho(\gamma_2\otimes\gamma_1)_*$

(n_3,g_3),(n_2,g_2) 与 (n_1,g_1) 的结合子是该同构

$$((n_3,g_3)\otimes(n_2,g_2))\otimes(n_1,g_1)=(n_3\rho(g_3)[n_2]R_{g_3,g_2}(*)\rho(g_3g_2)[n_1]R_{g_3g_2,g_1}(*),g_3g_2g_1)\longrightarrow$$
$$(n_3,g_3)\otimes((n_2,g_2)\otimes(n_1,g_1))=(n_3\rho(g_3)[n_2\rho(g_2)[n_1]R_{g_2,g_1}(*)]R_{g_3,g_2g_1}(*),g_3g_2g_1)$$

它在 $g_3g_2g_1$ 上是恒等映射，并由以下复合给出

$$n_3\rho(g_3)[n_2]R_{g_3,g_2}(*)\rho(g_3g_2)[n_1]R_{g_3g_2,g_1}(*) \xrightarrow{\mathrm{id}_{n_3\rho(g_3)[n_2]}\otimes R_{g_3,g_2}(n_1)\otimes \mathrm{id}_{R_{g_3g_2,g_1}(*)}}$$
$$n_3\rho(g_3)[n_2]\rho(g_3)[\rho(g_2)[n_1]]R_{g_3,g_2}(*)R_{g_3g_2,g_1}(*) \xrightarrow{\mathrm{id}_{n_3\rho(g_3)[n_2]\rho(g_3)[\rho(g_2)[n_1]]}\otimes\omega_{g_3,g_2,g_1}(*)}$$
$$n_3\rho(g_3)[n_2]\rho(g_3)[\rho(g_2)[n_1]]\rho(g_3)[R_{g_2,g_1}(*)]R_{g_3,g_2g_1}(*) \cong n_3\rho(g_3)[n_2\rho(g_2)[n_1]R_{g_2,g_1}(*)]R_{g_3,g_2g_1}(*)$$

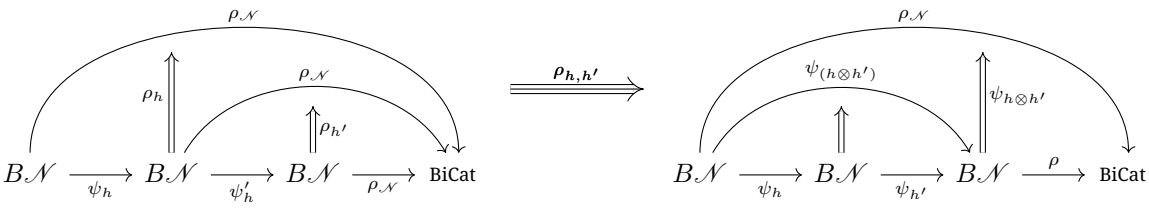
在 $\mathcal{N}$ 因子上。

分解作用 每个 2-群的正合序列 $B\mathcal{N} \longrightarrow B\mathcal{G} \longrightarrow B\mathcal{H}$ 都对应于 $\mathcal{H}$ 在 $B\mathcal{N}$上的一个作用 ψ 。在这种情况下，双范畴 $B\mathcal{G}$ 可以由该作用重构为余极限 $\mathsf{colim}_{B\mathcal{H}}\,\psi$，它可以用上一节所述的半直积显式建模。余极限的描述可用于根据 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{N}$来描述双范畴 $\mathcal{B}$ 上的 $\mathcal{G}$-作用。利用余极限的泛性质

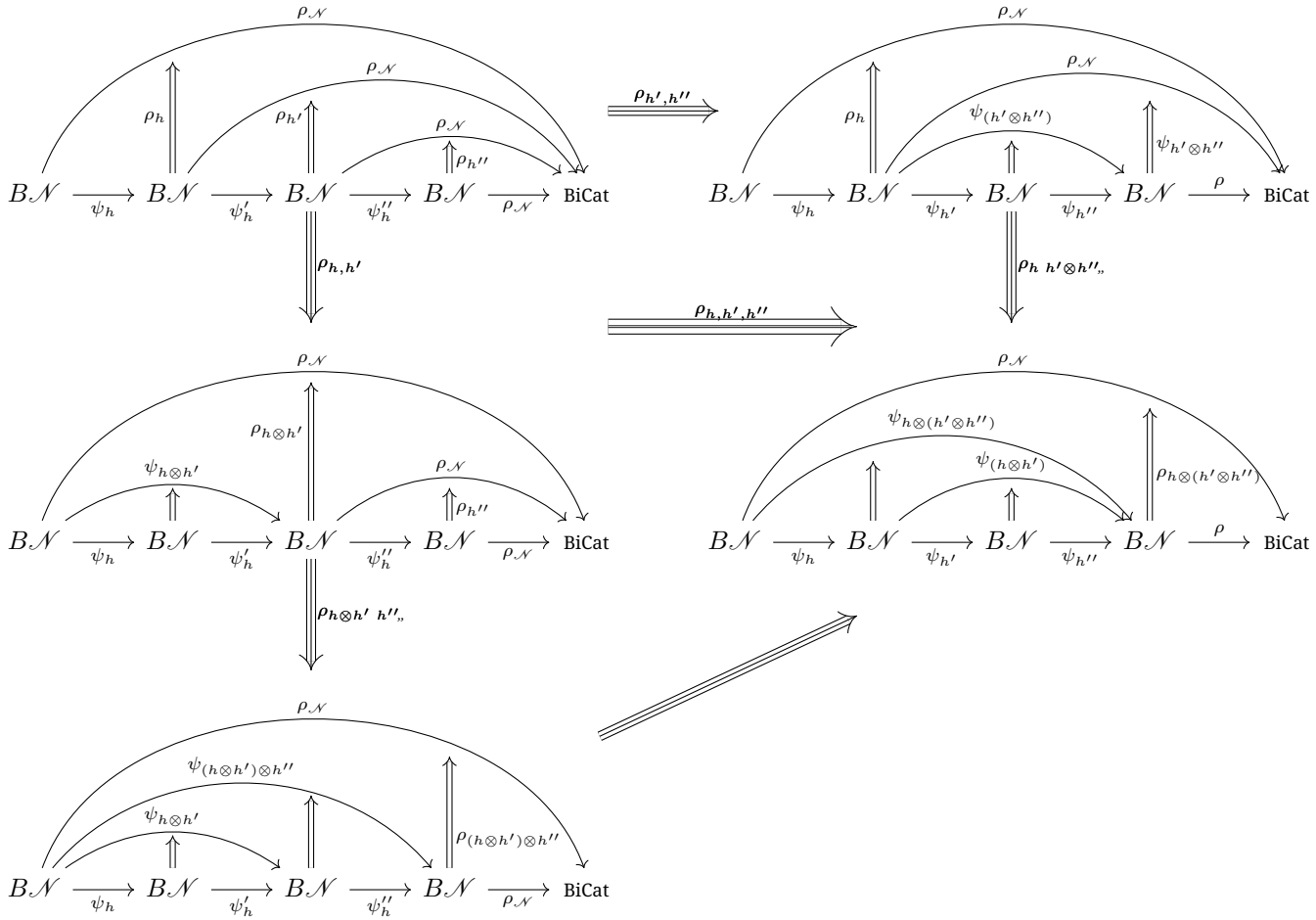
$$\mathsf{TriCat}(\mathrm{colim}_{B\mathcal{H}}\,\psi, \mathsf{BiCat}) \cong [B\mathcal{H}, \mathsf{TriCat}](\psi, \Delta\mathsf{BiCat})$$

其中 ΔBiCat 是取值恒为三范畴 BiCat 的常值图表。这意味着我们可以通过 4-函子的自然变换 $\rho\colon \psi \Longrightarrow \Delta$ BiCat 来描述一个$\mathcal{G}$-作用。具体而言，这包括

- 一个 3-函子 $\rho_{\mathcal{N}}\colon B\mathcal{N} \longrightarrow$BiCat，即 $\mathcal{N}$在双范畴 $\mathcal{B}$上的一个作用。
- 对于所有 1-态射 $h \in B\mathcal{H}$a，一个可逆自然变换 $\rho_h\colon \rho\circ\psi_h \Longrightarrow \rho_h$。
- 对于所有成对的 1-态射 $h,\ h' \in B\mathcal{H}$可逆修正

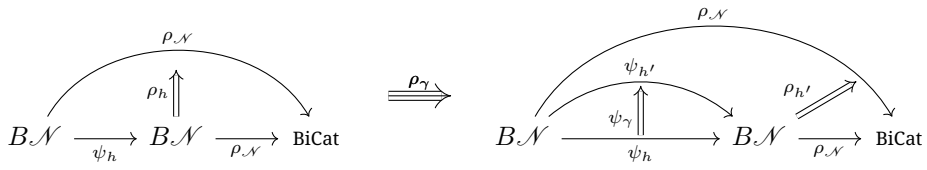


- 对于所有三元组的 1-态射 $h,\ h',\ h'' \in B\mathcal{H}$可逆扰动

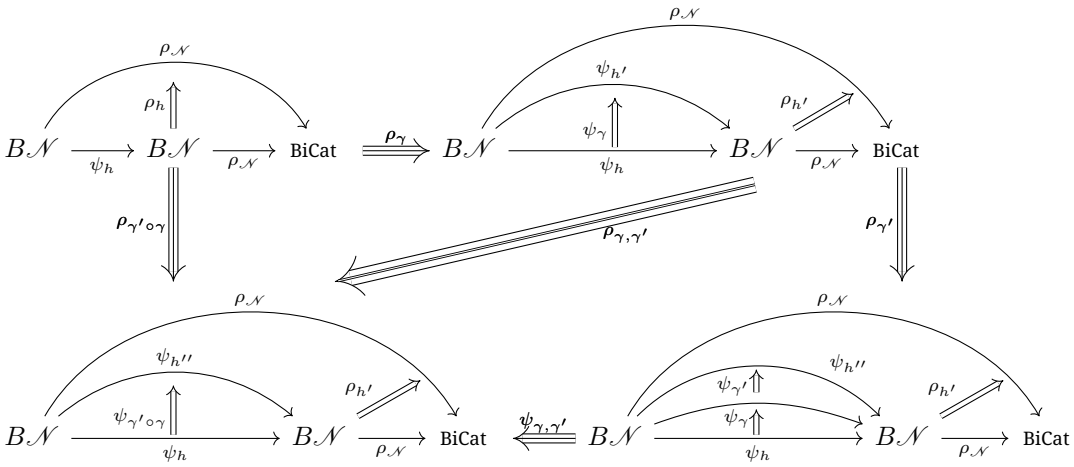


其中未标记的态射是 $\mathscr{H}$在 $B\mathscr{N}$上的作用的一部分

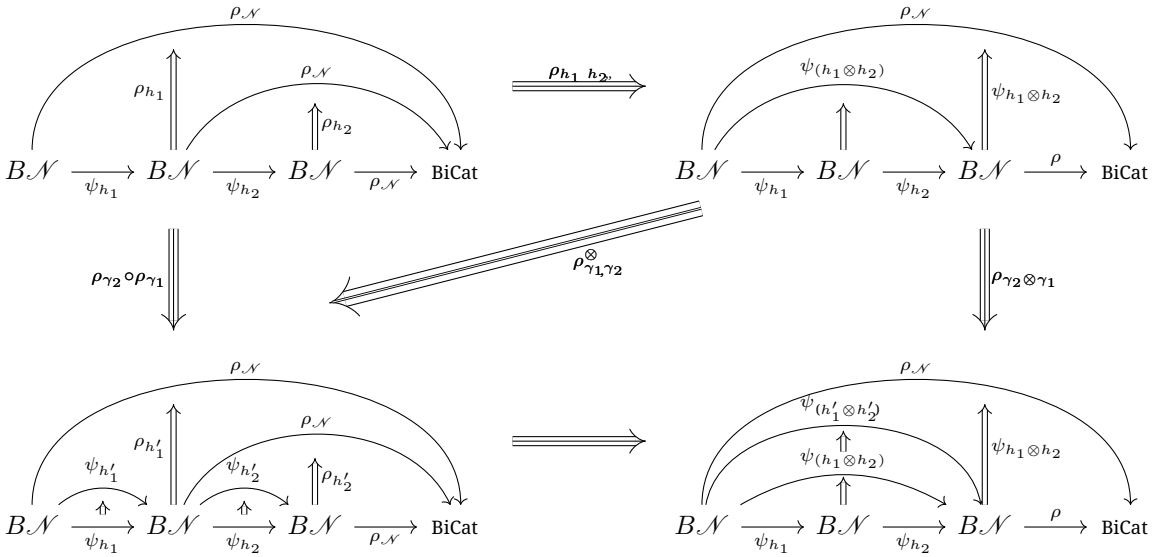
- 对于所有2-态射 $\gamma\colon\ h \longrightarrow h'$ 修正



• 对于所有成对可复合的2-态射 $\gamma_1\colon\ h \longrightarrow h'$ 和 $\gamma_2\colon\ h' \longrightarrow h''$ 扰动

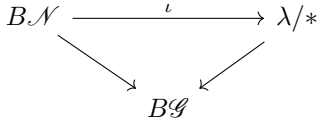


• 对于任意一对 2-态射 $\gamma_1\colon\ h_1 \longrightarrow h_1'$ 和 $\gamma_2\colon\ h_2 \longrightarrow h_2'$ 扰动

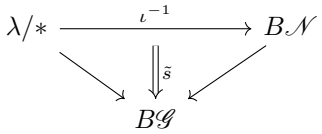


满足一长串相干条件。由于 4-范畴的理论基础略显薄弱，我们想强调，上述数据可用于显式构造 $\mathcal{N} \rtimes_{\psi} \mathscr{H}$ 的作用所需的数据，而这些相干条件恰好对应于将其定义为一个作用的要求。

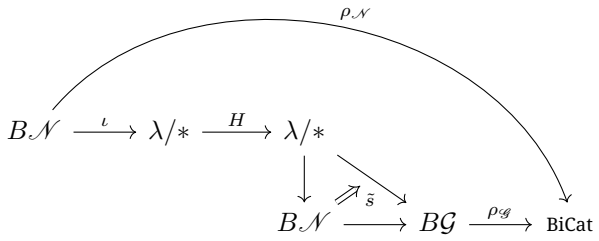
现在，我们将明确概述如何从满足上述相同简化假设的正合序列 $B\mathcal{N} \longrightarrow B\mathscr{G} \longrightarrow B\mathscr{H}$开始构造这些数据。设 $\rho_{\mathscr{G}}\colon\ B\mathscr{G} \longrightarrow$ BiCat 是 $\mathscr{G}$ 在一个双范畴上的作用。相应的 $\mathcal{N}$表示为 $\rho_{\mathcal{N}} = \iota^* \rho_{\mathscr{G}}$。为了描述其他数据，我们使用上文所述的逆 $\iota^{-1}\colon\ \lambda/* \longrightarrow B\mathcal{N}$。注意，



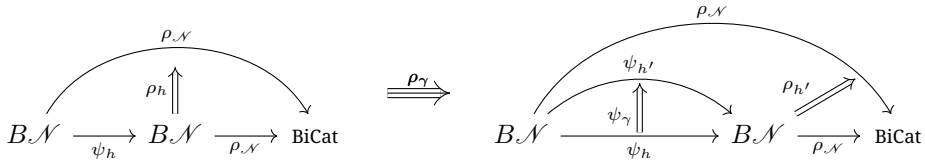
严格交换，因此



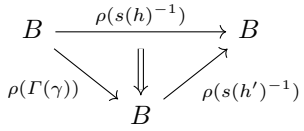
在一个自然同构 $\tilde{s}$ 下交换。 $\tilde{s}$ 在对象 $\lambda(*) \xrightarrow{h} *$ 处的值为 $s(h)^{-1}$。利用 $\tilde{s}$，我们为所有 $H \in \mathscr{H}$定义自然同构



其中上半部分严格交换。这定义了 ρ_H，其具体形式为 $\mathcal{B} \xrightarrow{\rho_{\mathscr{G}}(s(H)^{-1})} \mathcal{B}$。对于 2-态射 $\gamma_{\mathscr{H}}$: $h \longrightarrow h'$，在 $B\mathscr{N}$ 中，修正的一部分



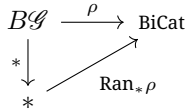
是自然变换



这是通过将 ρ 应用于由 $s(\gamma)$ 构造的态射 $s(h)^{-1} \longrightarrow s(h'^{-1}) \otimes \Gamma(\gamma)$ 得到的。其余数据也可以类似地构造。

不动点范畴的分解 在本节的最后部分，我们给出一个关于同伦不动点范畴分解的公式。我们在 3-范畴框架中使用 Kan 延拓，以抽象方式推导出结果。尽管我们只需要最基本的性质，但我们并不清楚这方面的理论发展得如何。因此，我们还将在注 A.19 中对结果作更明确的描述。

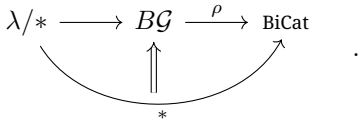
设 $1 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \mathscr{G} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{H} \longrightarrow 1$ 是一个 2-群的正合序列，为简单起见，我们假设 ϵ 是恒等映射。等价地，这可以描述为拓扑空间（∞-群胚）范畴或 2-群胚中的一个纤维序列 $B\mathscr{N} \longrightarrow B\mathscr{G} \longrightarrow B\mathscr{H}$。设 ρ: $B\mathscr{G} \longrightarrow$ BiCat 是 $\mathscr{G}$ 在双范畴 $\mathcal{B}$ 上的一个作用。同伦不动点双范畴定义为极限 $\mathcal{B}^{\rho} := \lim \rho$。这个极限计算的是右 Kan 延拓



利用右 Kan 延拓的复合律，我们可以分两步计算不动点范畴。首先考虑函子 $\mathrm{Ran}_\lambda\rho$: $B\mathscr{H} \longrightarrow \mathrm{BiCat}$。这对应于一个新的双范畴，它带有 $\mathscr{H}$ 的作用，使得其 $\mathscr{H}$-不动点双范畴与 $\mathcal{B}^\rho$ 一致。接下来我们将明确地描述这个双范畴：根据右 Kan 延拓的极限公式，我们可以将 $\mathrm{Ran}_\lambda\rho$ 的值识别为切片 2-范畴 $\lambda/*$ 上的极限。由于该序列正合，包含映射 ι: $B\mathscr{N} \longrightarrow \lambda/*$ 是双范畴等价。这进而意味着 $\mathrm{Ran}_\lambda\rho \simeq \lim_{B\mathscr{H}} \iota^*\rho \simeq \mathcal{B}^{\iota^*\rho}$。结合以上讨论，我们证明了以下命题

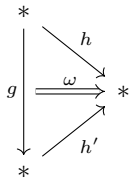
命题 A.18。 设 $1 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \mathscr{G} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{H} \longrightarrow 1$ 是一个 2-群的正合序列，且 ρ: $B\mathscr{G} \longrightarrow$BiCat 是 $\mathscr{G}$ 在双范畴 $\mathcal{B}$上的作用。由此诱导出一个 $\mathscr{H}$-作用 $\rho_{\mathscr{H}}$，作用于 $\mathscr{N}$-不动点双范畴 $\mathcal{B}^{\iota^*\rho}$，使得其不动点双范畴等价于 ρ-不动点双范畴。

注 A.19。 我们将明确描述 $\mathcal{B}^{\mathscr{N}}$上的 $\mathscr{H}$-作用。为此，我们先描述 $\lim^{\lambda/*}\rho$上的较简单作用。这是由如下形式的自然变换构成的 2-范畴

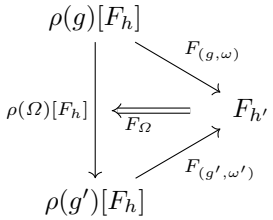


这种自然变换有一个明确的描述，与定义 A.8 中给出的描述类似。其对象由以下内容构成：

- 对 $\lambda/*$中的每个对象 $* \xrightarrow{h} *$，都有一个对象 $F_h \in \mathcal{B}$
- 对于所有 1-态射



  一个 1-态射 $F_{(g,\omega)}$: $\rho(g)[F_h] \longrightarrow F_{h'}$。
- 2-态射 $F_{(g,\ \omega),\ (g',\ \omega')}$ 实现了与$\lambda/*$中 1-态射的复合相容。
- 对所有 2-态射 Ω: $(g',\ \omega') \longrightarrow (g,\ \omega)$ 的 2-同构

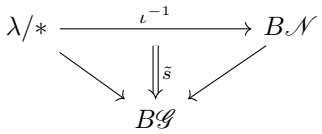


满足与定义 A.8 中类似的关系。一态射和二态射有类似的描述。现在， $\mathscr{H}$ 在此范畴上的作用由以下函子诱导

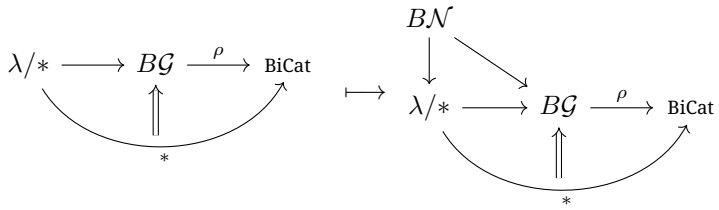
$$H\colon\ */\lambda \longrightarrow \lambda/*$$
$$* \xrightarrow{h} * \longmapsto * \xrightarrow{h} * \xrightarrow{H} *$$

对于 $H \in \mathscr{H}$。

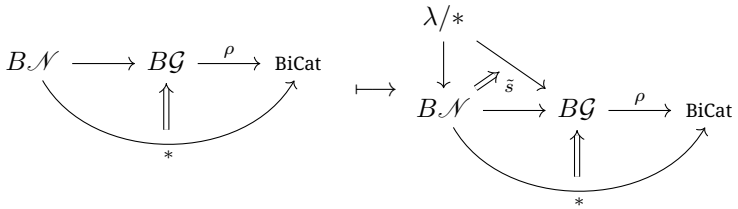
为了在 $\mathscr{N}$-不动点上构造作用，我们照例选取一个逆 $\iota^{-1}\colon \lambda/* \longrightarrow B\mathscr{N}$。回顾一下，我们有如下自然等价



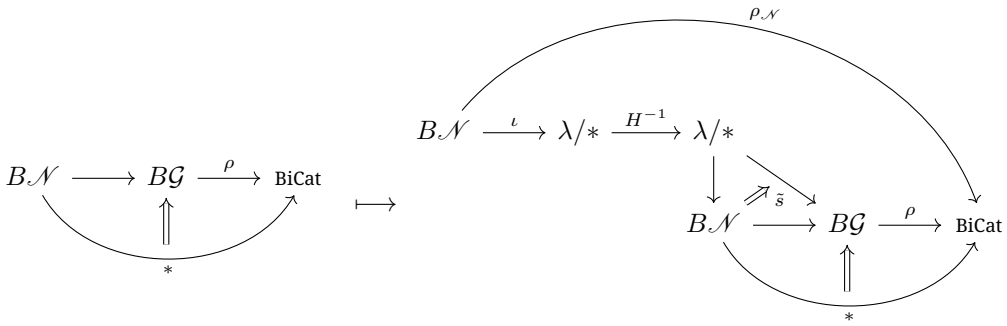
现在，不动点范畴之间的等价为



其中右侧的三角形严格交换。反方向的映射为



同伦不动点双范畴上的 $\mathscr{H}$ 作用，是通过这些等价转移得到的。抽象地说，元素 $H \in \mathscr{H}$ 的作用为



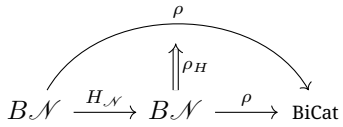
这也使路径 $\gamma\colon H \longrightarrow H'$ 的作用显而易见。

让我们更明确地说明这些映射的形式。映射 A.19 对一个 $\mathscr{N}$不动点 $(F, F_n, F_{n,n'}, F_{\gamma_n})$ 的像可描述如下：其底层对象族为 $F_h = \rho(s(h)^{-1})[F]$，态-射 $F_{g,\omega}\colon \rho(g)\rho(s(h)^{-1})F \simeq \rho(g \otimes s(h)^{-1})F \xrightarrow{\rho(s(g,\omega))} \rho(s(h')^{-1} \otimes \Gamma(g,\omega))F \simeq \rho(s(h')^{-1})\rho(\Gamma(g,\omega))F \xrightarrow{F_{\Gamma(g,\omega)}} \rho(s(h')^{-1})F$，等等。映射 A.19 只需选取分量 $F_{H^{-1}} = \rho(H)[F]$ 及其对应的结构。例如，态射 $\rho(n).F_{H^{-1}} \longrightarrow F_{H^{-1}}$ 是 $F_{(n,\mathrm{id})}$ 在 (n, id) 处的取值，其中 (n, id) 被视为从 $* \xrightarrow{H^{-1}} *$ 到 $* \xrightarrow{H^{-1}} *$ 的一个 1-态射。现在也很容易读出 $\mathscr{H}$ 中路径的作用。

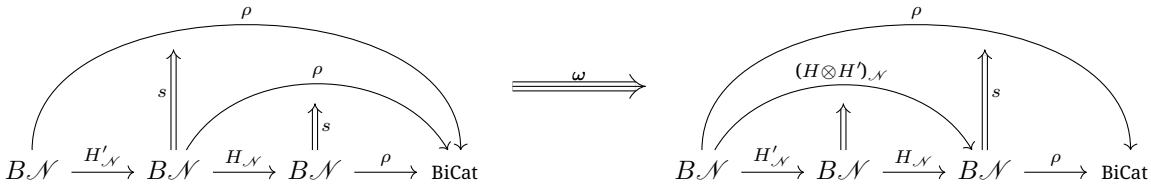
我们简要讨论一下此作用的相干同构。为此，我们注意到

$$H_{\mathscr{N}} : B\mathscr{N} \xrightarrow{\iota} \lambda/* \xrightarrow{H} \lambda/* \xrightarrow{\iota^{-1}} B\mathscr{N}$$

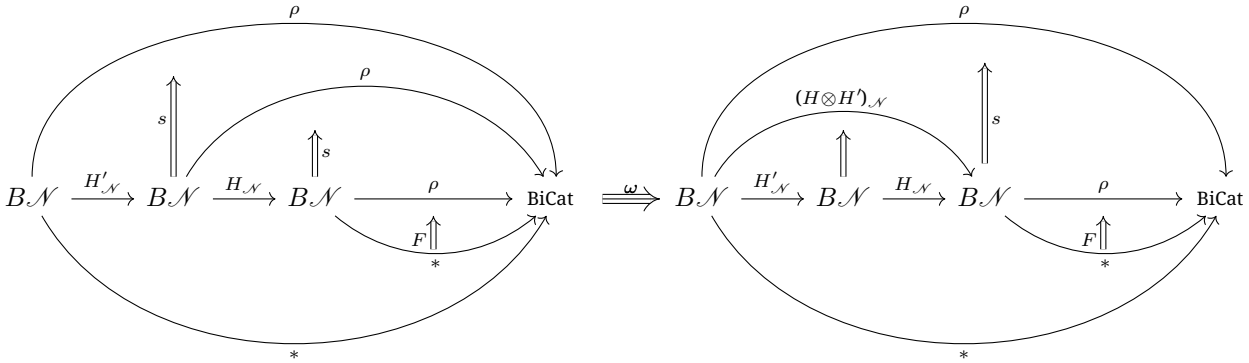
恰好是 $\mathscr{H}$ 在 $B\mathscr{N}$ 上的作用，对应于伴随自然同构 $H'_{\mathscr{N}} \circ H_{\mathscr{N}} \Longrightarrow (H' \otimes H)_{\mathscr{N}}$ 的正合序列。自然同构 $\tilde{s}$ 诱导出一个自然变换

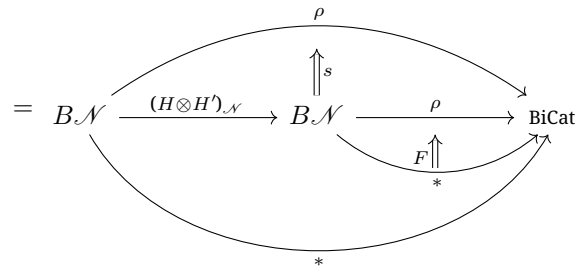


这恰好是上述 $\mathscr{G}$-作用分解为 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{H}$ 的一部分。因此存在可逆修正 ω



它满足自然的相干条件。利用 ω，我们可以具体描述相干同构。它由下式给出





其中，最后一个等式源于这样一个事实：从 $*$ 到 $*$ 不存在非平凡的自然变换。所有其他相干数据也可以从作用的分解中推导出来。

B 对称幺半双范畴中的对偶可对偶性

在本附录中，我们将回顾对称幺半双范畴中的对偶可对偶性。在第一小节中，我们定义态射的伴随、对象的对偶以及完全可对偶对象。我们还讨论对偶的唯一性

，以及对称幺半函子和自然变换关于对偶的行为。在第二小节中，我们讨论 Serre 自同构，以及它如何在完全可对偶对象的核心上定义一个 SO_2-作用。接下来，我们给出完整的 O_2-作用，并讨论它与其他 2-群的对称幺半作用的相容性。

B.1 对偶与伴随

我们简要 列出下一节将用到的关于对偶的必要定义，以及主要 xt.

定义 B.1. 设 $f : c_1 \longrightarrow c_2$ 是双范畴中的一个 1-态射。 f 的右伴随 是一个 1-态射f^R: $c_2 \longrightarrow c_1$，以及满足通常蛇形关系的 2-态射 coev_f^R: $\mathrm{id}_{c_1} \Rightarrow f^R \circ f$和 ev_f^R: $f \circ f^R \Rightarrow \mathrm{id}_{c_2}$。在这种情况下，我们也称 f 为 f^R的左伴随 。

例 B.2. 范畴的双范畴中一个 1-态射的伴随就是一个伴随函子。

例 B.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个视作具有一个对象的双范畴 $B\mathcal{C}$ 的幺半范畴。那么， $B\mathcal{C}$ 中的一个态射$c : * \longrightarrow *$ 与 $\mathcal{C}$中的一个对象相同。 $c \in B\mathcal{C}$ 的左伴随是 $c \in \mathcal{C}$的左对偶。[12]

伴随在存在性和唯一性方面与幺半范畴中的对偶类似。例如，若一个1-态射具有伴随，则任意两个伴随的选择都2-同构，并且存在唯一一个保持伴随的单位元和余单位的此类2-态射 [SP09，命题 A.29]。请注意，尽管我们将只在对称幺半双范畴中工作，1-态射的右伴随和左伴随仍可能不同。回顾一下，若 1-态射 $f : c_1 \longrightarrow c_2$ 有一个（拟）逆 $g : c_2 \longrightarrow c_1$，即 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都与某个恒等1-态射同构，则称其为1-同构或等价。我们将经常使用以下结果。若 f 既是等价，又有右伴随，则其在同构意义下唯一的右伴随（f^R， ev， coev）实现了 f^R 作为 f的逆，也就是说，ev 和 coev 可逆。 [SP09，命题 A.27]。若 $f : c_1 \longrightarrow c_2$ 和 $g : c_2 \longrightarrow c_3$ 有右伴随 f^R 和g^R，则 $f^R g^R$ 是 gf 的右伴随，其中 gf 的求值映射和余求值映射由 f 和 g的相应映射诱导。

若 $\phi : f \Longrightarrow g$ 是 1-态射 $c_1 \longrightarrow c_2$ 之间的 2-态射，且它们指定了右伴随 f^R 和 g^R以及求值数据，则存在一个诱导的 2-态射 $\phi^R : g^R \Longrightarrow f^R$。其存在性和唯一性，与幺半范畴中具有指定对偶数据的对象之间的态射之对偶的存在性和唯一性类似。更确切地说，我们可以通过以下显式复合定义 ϕ^R

$$g^R = \mathrm{id}_{c_1} \circ g^R \overset{\mathrm{coev}_f^R}{\Longrightarrow} f^R \circ f \circ g^R \overset{\phi}{\Longrightarrow} f^R \circ g \circ g^R \overset{\mathrm{ev}_g^R}{\Longrightarrow} f^R \circ \mathrm{id}_{c_2} = f^R$$

或者等价地，将其定义为使下图交换的唯一 2-态射

$$\begin{array}{ccc} f \circ g^R & \overset{\phi}{\Longrightarrow} & g \circ g^R \\ \Big\Downarrow{\scriptstyle \phi^R} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_g^R} \\ f \circ f^R & \overset{\mathrm{ev}_f^R}{\Longrightarrow} & 1 \end{array}$$

。

定义 B.4. 设 $\mathcal{C}$ 为一个对称幺半双范畴。对象 c 的一个（左）对偶由对象 $c^\vee$、1-态射 $\mathrm{ev}_c : c^\vee \otimes c \longrightarrow 1$ 和 $\mathrm{coev}_c : 1 \longrightarrow c \otimes c^\vee$，以及所谓的尖点 2- 同构 α 和 β 组成；它们分别将蛇形恒等式与 $c^\vee$ 和 c 上的恒等 1- 态射相等化。若 c有对偶，则称其为*1-*可对偶。若 ev_c 和 coev_c 都有右伴随和左伴随，则称 c 为完全可对偶或 2-可对偶。

[12]有些参考文献则将其称为右对偶。

右伴随和左伴随。令 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}} \subseteq \mathcal{C}$ 表示完全可对偶对象上的极大子 2-群胚。明确地说，这意味着

- **对象**是完全可对偶对象 $c \in \mathcal{C}$;
- 1-**态射**是两个完全可对偶对象之间的 1-同构;
- 2-**态射**是这类 1-同构之间的 2-同构。

注意，对称幺半双范畴中的一个对象是 1-可对偶的，当且仅当它在同伦 1-范畴中是可对偶的；但在双范畴中将两个对象实现为彼此的对偶，需要比在同伦范畴中将它们实现为彼此的对偶更多的数据。

注 B.5. 此外还有右对偶的概念。与对称幺半 1-范畴类似，左对偶和右对偶通过对称编织典范同构。

注 B.6. 要使 c 完全可对偶，只需要求求值映射 ev_c 具有两个伴随。也只需要求 ev_c 和 coev_c 都具有左伴随。 [Pst22]

注 B.7. 对于幺半1-范畴，对偶在如下意义下是唯一的：若 $(c^\vee, \mathrm{ev}_c, \mathrm{coev}_c), (c'^\vee, \mathrm{ev}'_c, \mathrm{coev}'_c)$ 是对象 c 的对偶数据，则存在唯一的同构 $s\colon c'^\vee \cong c^\vee$，使求值映射与余求值映射相互交织。具体而言， s 由以下复合给出

$$c'^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}_c} c'^\vee \otimes c \otimes c^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}'_c \otimes \mathrm{id}} c^\vee$$

其逆为

$$c^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}'_c} c^\vee \otimes c \otimes c'^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}_c \otimes \mathrm{id}} c'^\vee.$$

对于 2-范畴，也有一个类似但更技术性的结论，详情请参见 [Pst22] 。若c 是 1-可对偶的，则它总是具有所谓的相容对偶数据，参见 [Pst22、图3、图4、推论 2.8]。此外，若 $(c^\vee, \mathrm{ev}_c, \mathrm{coev}_c, \alpha, \beta)$ 和 $(c'^\vee, \mathrm{ev}'_c, \mathrm{coev}'_c, \alpha', \beta')$ 是两组相容对偶数据，则存在一个可逆 1-态射 $s\colon c^\vee \longrightarrow c'^\vee$，以及两个填充图表的 2-态射



满足与 αs 和 βs 的两个相容条件。此外，比较数据的选择在保持上述两个三角形的填充不变的 2-态射选择意义下是唯一的 [Pst22，引理 2.18]。例如， s 可以由与上文幺半1-范畴中的表达式类似的表达式给出。不过，在这个范畴层次上， s 仅在典范 2-同构意义下确定，因此在实践中，我们可能会选择另一个 s，并为其配备保持求值和余求值不变的数据。

类似的推理也适用于双范畴中 1-态射的对偶情形；我们可以直接用一个公式来定义它们:

定义 B.8。 若 c_1, c_2 是配备对偶数据的 1-可对偶对象，且 $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ 是一个 1-态射，则其 对偶 定义为以下复合

$$c_2^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}_{c_1}} c_2^\vee \otimes c_1 \otimes c_1^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f\otimes \mathrm{id}} c_2^\vee \otimes c_2 \otimes c_1^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}_{c_2}\otimes \mathrm{id}} c_1^\vee$$

这构成了一个范畴等价 [Pst22，引理 2.5]

$$\mathrm{Hom}(c_1, c_2) \cong \mathrm{Hom}(c_2^\vee, c_1^\vee)$$

不过，按照泛性质来定义它们可能更自然：在 1-范畴情形中，泛性质能唯一确定它们；而在 2-范畴情形中，则只能确定到典范 2-同构。更具体地说，若 c_1，c_2 是配备了对偶数据的 1-可对偶对象，且 $f : c_1 \longrightarrow c_2$ 是一个 1- 态射，我们可以将 f 的对偶定义为一个 1- 态射 $f^\vee : c_2^\vee \longrightarrow c_1^\vee$，并配以填充图表的 2-同构

$$\begin{array}{ccc} c_2^\vee \otimes c_1 & \xrightarrow{f} & c_2^\vee \otimes c_2 \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{c_2}} \\ c_1^\vee \otimes c_1 & \xrightarrow[\mathrm{ev}_{c_1}]{} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} c_2 \otimes c_1^\vee & \xleftarrow{f^\vee} & c_2 \otimes c_2^\vee \\ \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{coev}_{c_2}} \\ c_1 \otimes c_1^\vee & \xleftarrow[\mathrm{coev}_{c_1}]{} & 1 \end{array}$$

满足某些自然相干条件。HV19 的引理 2.6] 验证了对偶的这一另一种定义。不过，由于我们主要研究 1-态射的对偶之逆，因此我们将直接定义：当 $f^{\vee -1} : c_1^\vee \longrightarrow c_2^\vee$ 配备了填充同一图表的结构、但 $f^\vee$ 的方向相反时，称其为 f 的对偶逆：

$$\begin{array}{ccc} & & c_2^\vee \otimes c_2 \\ & \nearrow{\scriptstyle f^{\vee -1} \otimes f} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{c_2}} \\ c_1^\vee \otimes c_1 & \xrightarrow[\mathrm{ev}_{c_1}]{} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & c_2 \otimes c_2^\vee \\ & \nearrow{\scriptstyle f \otimes f^{\vee -1}} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{coev}_{c_2}} \\ c_1 \otimes c_1^\vee & \xleftarrow[\mathrm{coev}_{c_1}]{} & 1 \end{array}$$

我们所见到的所有“对偶的选择本质上唯一”这一类陈述，都可以简洁地概括如下。若 $\mathcal{C}$ 是一个所有对象都存在对偶的对称幺半双范畴，那么存在一个双范畴 $\mathsf{CohDualPair}\,\mathcal{C}$，其对象是相干对偶对，1-态射是由一个态射及其对偶逆的选择组成的对。由相干对偶对到 $\mathcal{C}$ 的极大子 2-群胚 $\mathcal{C}^\cong$ 的遗忘映射指定了底层对象

$$\mathsf{CohDualPair}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\cong$$

的双范畴等价。在实践中，给定 c 中的一个对象，通常存在一个规范的对偶数据选择；否则，选择对偶数据也很有用。涉及“相干地选择对偶”所需的几乎所有选择，都可以在选择逆映射 $s : \mathcal{C}^\cong \longrightarrow \mathsf{CohDualPair}\,\mathcal{C}$ 以及指定 s 是遗忘映射之逆的数据之后得到。今后我们假设已经作出了这一可缩选择。

现在我们简要讨论如何构造来自配边假设的、作用于可对偶对象之 2-群胚的 O_1-作用，因为这似乎尚未见诸文献。构成该作用的函子可以这样指定：如上所述，为每个对象任意选取对偶数据，并为每个可逆 1-态射任意选取一个对偶逆。此外，这些数据还可以函子性地选取。在对称幺半双范畴中，所需的典范同构 $\hat{}\, R_c := (R_{-,-})_c : c \cong c^{\vee\vee}$ 用于说明该作用复合自身等于恒等；它是对偶的唯一性的一个特例。事实上，类似于 1-范畴的情形，我们需要认识到二者都是 $c^\vee$ 的对偶；c 是 $c^\vee$ 的右对偶，不过由于对称性，这并不重要。利用同一对象的两个对偶之间的典范态射的标准公式，我们得到 1-同构 $\hat{}R_c$，其表达式为

$$c \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}_{c^\vee}} c \otimes c^\vee \otimes c^{\vee\vee} \xrightarrow{\sigma_{c,c^\vee} \otimes \mathrm{id}} c^\vee \otimes c \otimes c^{\vee\vee} \xrightarrow{\mathrm{ev}_c \otimes \mathrm{id}} c^{\vee\vee}.$$

$\hat{}$然而，由于 R_c 仅在典范 2-同构意义下唯一，实际应用中，为了保留对偶数据，以另一种方式选取它会很有用。另请注意，存在一个 2-同构 $\omega_c : \hat{}\, R_c^\vee \circ \hat{}R_{c^\vee} \cong \mathrm{id}_{c^\vee}$，它由如下事实唯一确定：两个 1-态射 $\hat{}R_{c^\vee}^{-1}$ 和 $\hat{}\, R_c^\vee$ 都保留对偶

ˆ 数据，而这类同构在典范 2-同构意义下唯一。事实上，$R_{c^\vee}$ 被定义为典范 1-同构，用以表明 $c^\vee$ 和 $c^{\vee\vee\vee}$ 都是 $c^{\vee\vee}$的对偶。

一种无需做任何选择来确定对偶函子的便捷框架，是在等价的 2-群胚 CohDualPair$\mathcal{C}$ 中进行处理。此时，对象上的对偶函子最方便的定义方式是

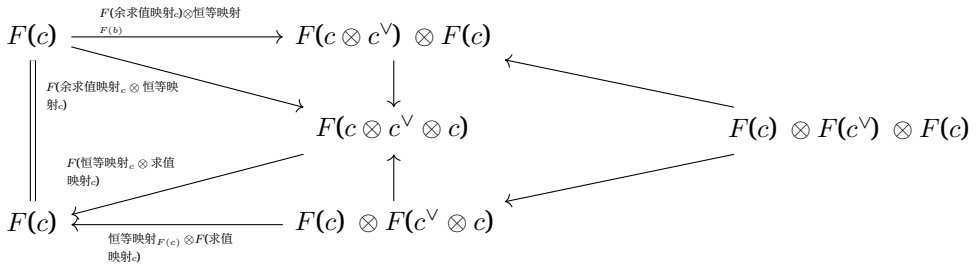
$$(c, c^\vee, \mathrm{ev}, \mathrm{coev}, \alpha, \beta) \longmapsto (c^\vee, c, \mathrm{ev} \circ \sigma_{c,c^\vee}, \sigma_{c^\vee,c} \circ \mathrm{coev}, \alpha', \beta')$$

从而利用 2-同构 $\sigma_{c^\vee,c} \circ \sigma_{c,c^\vee} \cong \mathrm{id}_{c\otimes c^\vee}$，使双对偶等于恒等。由于同伦 1-范畴中存在类似且已充分理解的情形，我们知道，存在使上述结构成为相干对偶对的 α' andβ' 选择，而且也应当能够明确地指定它们。接着，我们可以沿着等价，利用逆 $\mathcal{C} \longrightarrow$ CohDualPair$\mathcal{C}$ 的一个选择，明确地传输以这种方式得到的 O_1-作用。这样便为每个对象选定一个对偶 $c^\vee$，并为每个可逆 1-态射 $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ 选定一个逆对偶 $f^{\vee-1}\colon c_1^\vee \longrightarrow c_2^\vee$。因此，截面 s 为我们指定了一个协变函子 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，它在 1-态射上是逆对偶。

现在我们简述对称幺半函子如何保持对偶。设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是对称幺半双范畴之间的对称幺半函子。为简单起见，假设所有数据都严格满足单位律，且 $\mathcal{C}$ 关于幺半群乘积具有恒等结合子。利用对偶的唯一性，只需将 $F(c^\vee)$ 构造成 $F(c)$ 的对偶。因此，设 $(c, \text{余求值}_c, \text{求值映射}_c, \alpha, \beta)$ 是 c 的对偶数据。求值映射将由以下复合给出

$$F(c^\vee) \otimes F(c) \longrightarrow F(c^\vee \otimes c) \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_c)} F(1) = 1$$

余求值也类似。指定蛇形恒等式的 2-同构由图表的填充给出



右侧由 F 作为幺半范畴的结合数据填充，左侧三角形由 $F(\beta)$ 填充，剩余的两个三角形则由 $F(c_1 \otimes c_2) \cong F(c_1) \otimes F(c_2)$ 的自然性数据以及单位性填充。另一个蛇形恒等式也有类似的填充。这表明 $F(c^\vee)$ 是 $F(c)$ 的对偶。

特别地，1-同构 $F(c^\vee) \cong F(c)^\vee$ 由一个与 1-范畴情形类似的公式给出 cal case

$$F(c^\vee) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}_{F(c)}} F(c^\vee) \otimes F(c) \otimes F(c)^\vee \cong F(c^\vee \otimes c) \otimes F(c)^\vee \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_c)\otimes \mathrm{id}} F(c)^\vee$$

复合与恒等之间的典范 2-同构

$$F(c) \xrightarrow{F(\phi_c)} F(c^{\vee\vee}) \cong F(c^\vee)^\vee \cong F(c)^{\vee\vee} \xrightarrow{\phi^{-1}_{F(c)}} F(c)$$

是通过注意到以下事实得到的：我们正在比较两个 1-同构，它们比较的是 $F(c)^\vee$ 的两种对偶选择，而这样的 1- 同构在典范 2- 同构意义下是唯一的。

B.2 Serre 自同构

本节将考察对称幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 中完全可对偶对象上的 Serre 自同构。

定义 B.9. 若 c 在 $\mathcal{C}$ 中完全可对偶，则其 ***Serre*** 自同构 S_c 定义为以下复合

$$c \xrightarrow{\mathrm{ev}_c^R} c \otimes c \otimes c^\vee \xrightarrow{\sigma_{c,c}} c \otimes c \otimes c^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}_c} c.$$

注记 B.10. "Serre 自同构"这一名称源于它与 Serre 对偶的关系，参见[Lur09，注记 4.2.4]。

以下结果即为 [Hes17，命题 4.23]。

命题 B.11. 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半双范畴。***Serre*** 自同构是完全可对偶对象核心上的恒等函子的幺半自然自同构。

Serre 自同构以下述意义定义了 SO_2-部分的 O_2-作用于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$。双范畴上的一个 SO_2-作用由恒等函子的一个生成自然自同构指定，因为 SO_2是一个 $B\mathbb{Z}$。由配边假设得到的 SO_2-作用于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$，是利用上述命题[HV19] [Lur09，例 2.4.14]，由 Serre 自同构诱导的作用。实际而言，这意味着正整数 $n > 0$ 将通过以下方式作用

$$\rho(n)c = \underbrace{S_c \circ \cdots \circ S_c}_{n}.$$

对于负整数 $n < 0$，我们必须选取 S_c 的一个逆 S_c^{-1}（它在 2-同构意义下唯一），并定义

$$\rho(n)c = \underbrace{S_c^{-1} \circ \cdots \circ S_c^{-1}}_{-n}.$$

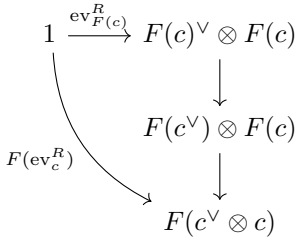
实际上，有一个由以下复合给出的典范选择

$$c \xrightarrow{\mathrm{ev}_c^L \otimes \mathrm{id}} c^\vee \otimes c \otimes c \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \sigma_{c,c}} c^\vee \otimes c \otimes c \xrightarrow{\mathrm{ev}_c \otimes \mathrm{id}} c$$

，见 [DSP S20，第 1.3] 节。我们将在下一节把这个 SO_2-作用增强为一个 O_2-作用 .

命题 B.12. 设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个对称幺半函子。假设每个对象都是完全可对偶的，并令 $S : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 表示 ***Serre*** 同构。存在一个自然修正 $F(S_c) \Rrightarrow S_{F(c)}$

证明。 2-同构 $F(S_c) \cong S_{F(c)}$ 由如下事实唯一确定：每个对称幺半函子都会保持 1-态射的对偶与伴随。例如，回顾求值映射的定义，以将 $F(c^\vee)$ 实现为 $F(c)$ 的对偶，以及对偶唯一性同构 $F(c^\vee) \cong F(c)^\vee$，我们得到



由伴随的唯一性可知。此定义中使用的所有相关 2-同构都定义了修正。 □

B.3 O_2 对完全可对偶化对象的作用

如果 $\mathcal{C}$ 是一个每个对象都完全可对偶的双范畴，配边假设指出，$\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ 上存在一个典范的 O_2 作用；$\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中由完全可对偶对象构成的全子 2-群胚。本节

将明确阐述这一作用，读者可对照第16节以及 [SP14] 的后续内容。 SO_2 子群通过 B.2 节中的 Serre 自同构作用，而反射则通过 B.1 节中解释的对偶作用。在本节的抽象框架中，我们因此常假设 $s\colon\ \mathcal{C}^{\cong} \longrightarrow \mathrm{CohDualPair}\,\mathcal{C}$ 是遗忘映射的一个指定逆。

由于 O_2 是一个同伦 1-型，因此它等于其截断 2-群 $\pi_{\leq 1}(O_2)$。我们将使用骨架 2-群模型，现将其明确描述为半直积 $\mathbb{Z}_2 \rtimes B\mathbb{Z}$。具体而言，我们有 $\pi_0(O_2) \cong \mathbb{Z}/2$，$\pi_1(O_2) \cong \mathbb{Z}$，而平面中的任意反射都给出正合序列的一个分裂 $O_2 \cong SO_2 \rtimes \mathbb{Z}/2$

$$1 \longrightarrow SO_2 \longrightarrow O_2 \longrightarrow O_1 \longrightarrow 1$$

从而该 2-群的结合子是平凡的。换言之，空间 BO_2 具有平凡的 k-不变量。选定这样的一个反射后，我们得到如下的 2-群骨架模型。它的对象 $\{+,-\}$在 $\otimes$下同构于 $\mathbb{Z}/2$。态射是 $\mathrm{Hom}(-,\ -) \cong \mathrm{Hom}(+,\ +)$，在复合下 $\cong \mathbb{Z}$，而另外两个态射集合为空。对于整数 n，我们将态射写作 $n_+ \in \mathrm{Hom}(+,\ +)$ 和 $n_- \in \mathrm{Hom}(-,\ -)$。态射上的幺半群结构定义为

$$n_+ \otimes m_- = (n+m)_-, \quad m_- \otimes n_+ = (m-n)_-.$$

这种模式 l 可以显式地实现为 $O_2 \subseteq \mathrm{Aut}\,S^1$ 中的路径，其中 $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ 是单位圆

$$n_+ \iff \gamma_{n_+}(t)z = e^{int}z$$
$$n_- \iff \gamma_{n_-}(t)z = e^{int}\overline{z}$$

现在我们来讨论这个 2-群如何作用于完全可对偶对象的核心。

由于根据我们关于严格保持单位元的假设，$\rho(+) = \mathrm{id}$，我们首先需要给出的数据是一个函子 $\rho(-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{fd}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$。它通过对对象和态射取对偶来定义

$$\rho(-)c = c^\vee \quad \rho(-)(f\colon c_1 \longrightarrow c_2) = (f^\vee)^{-1} \quad \rho(-)(\phi\colon f_1 \longrightarrow f_2) = \phi^\vee$$

请注意，如果我们为 1-态射选定了优先的对偶，就必须为每个 1-态射选取一个逆，才能使函子成为协变函子；由于我们是在核心上工作的，因此这是允许的。这还需要在 $(f^\vee)^{-1}$ 和 $(f^{-1})^\vee$ 之间作出选择，不过它们是典范 2-同构的。因此，在这一抽象框架中，直接选取对偶逆而非 1-态射的对偶会更方便，正如 B.1 节所述。遗憾的是，在实际运用这个 O_1- 作用时，我们不得不面对这样一个事实：1- 态射的对偶通常比对偶逆有更典范的定义。因此，只要可能，我们也常会将第 A.2 节中的图表改写成无需选取逆元的形式。

利用图 B.1 很容易推导出对偶函子保持 1-态射复合的数据。接下来，我们必须给出 $g_i = \pm$的四个自然同构 R_{g_1,g_2}。唯一非平凡的同构是

$$\hat{R} := R_{-,-} : \rho(-\otimes -) = \rho(+) = \mathrm{id} \Longrightarrow \rho(-)\circ\rho(-).$$

它由到双对偶的自然同构 $\hat{}R(c)\colon c^{\vee\vee} \longrightarrow c$ 给出，该同构刻画了对偶的唯一性，$\hat{}$如 B.1 节所述。特别地，若 $f\colon\ c_1 \longrightarrow c_2$ 是一个 1-态射，则 $R(f)$ 是图表的典范填充

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\ f\ } & c_2 \\ {\scriptstyle \hat{R}(c_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{R}(c_2)} \\ c_1^{\vee\vee} & \xrightarrow{\ f^{\vee\vee}\ } & c_2^{\vee\vee} \end{array}$$

从启发式角度看，这个图表类似于 1-范畴事实：$f^{\vee\vee} = f$ 在$c^{\vee\vee} \cong c$的识别下。修正ω_{g_1,g_2,g_3} 均为平凡的，除 $\omega := \omega_{-,-,-}$外。去掉$\rho(-)(\hat{}R(c)) = \hat{}R(c)^{\vee-1}$上的逆后，得到一组 2-同构

$$\omega_c : \hat{R}(c)^\vee \circ \hat{R}(c^\vee) \Rrightarrow \mathrm{id}_{c^\vee}$$

它们规定了 $c^{\vee\vee\vee}$ 与 $c^{\vee}$之间两种识别的一致性。

现在，我们将上述 O_1 作用与 B.2 节中的 SO_2 作用结合起来，从而得到一个 O_2 作用。首先，通过将 Serre 自同构与对偶函子进行 whiskering，得到自然同构族 $\rho(n_-):\rho(-)\Longrightarrow\rho(-)$。对于 $n>0$，该作用为

$$\rho(n_-)c=\underbrace{S_{c^\vee}\circ\cdots\circ S_{c^\vee}}_{n}$$

而对于 $n<0$

$$\rho(n_-)c=\underbrace{S_{c^\vee}^{-1}\circ\cdots\circ S_{c^\vee}^{-1}}_{-n}.$$

由于 Serre 自同构给出了恒等函子的自然自同构，因此这些也都是自然的。根据我们对定义的选择，α 可以在可逆性数据 $S_c\circ S_c^{-1}\longrightarrow \mathrm{id}_c$ 的选择下视为平凡的。

$R_{\gamma',\ \gamma}$ 通过在必要时插入识别 $(S_c)^\vee\cong S_{c^\vee}$ 给出。继续之前，我们简要说明如何得到同构 $(S_c)^\vee\cong S_{c^\vee}$：注意，$(-)^\vee$ 是一个对称幺半函子 $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$，其中 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 是由 $\mathcal{C}$ 构造的对称幺半双范畴，其复合和张量积的方向均被反转。接下来回顾命题 B.12，由此可知存在自然 2-同构 $(S_c)^\vee\cong S_{c^\vee}^{\otimes\mathrm{op}}$，其中右侧的 Serre 自同构是在 $C^{\otimes\mathrm{op}}$ 中计算的。因此，要得到所需的 2-同构，只需证明，对于任意元素 $x\in\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$，都有 $S_x^{\otimes\mathrm{op}}\cong S_x$。不难验证，$x$ 在 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 中的对偶也是 $x^\vee$，其求值映射为 $\mathsf{ev}_x^{\otimes\mathrm{op}}=\sigma\circ\mathsf{ev}_x^R$，余求值为 $\mathsf{coev}_x^{\otimes\mathrm{op}}=\mathsf{coev}_x^R\circ\sigma$。现在只需利用对称幺半双范畴的图形演算，以及 $\mathcal{C}^{\otimes\mathrm{op}}$ 中态射的右伴随是 $\mathcal{C}$ 中对应态射的左伴随这一事实，进行一个简短而直接的计算，即可得到所述结论。

例如　　如果 $\gamma=n_+$ 和 $\gamma'=m_-$，那么将相关图表作用于对象 c 后得到　　s

$$\begin{array}{ccc} c^\vee & = & c^\vee \\ {\scriptstyle S_{c^\vee}^m\circ((S_c^n)^\vee)^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_{c^\vee}^{m-n}} \\ c^\vee & = & c^\vee \end{array}$$

我们确实可以填入该图表。注意，同构 $S_c^\vee\cong S_{c^\vee}$ 意味着 Serre 函子和对偶函子组合成一个 O_2-作用，而不是一个 $SO_2\times O_1$-作用，因为 O_1-作用在 1-态射上由逆对偶给出。

接下来我们将解释这样一个事实：如果 2-群 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{C}$ 上对称幺半作用，那么我们便在完全可对偶对象上诱导出一个 $O_2\times\mathcal{G}$-作用。从数据层面来看，这意味着

1. 指定对称幺半函子 $\rho(g)$ 与对偶函子之间的自然变换；

2. 指定一个修正，使双重对偶自然同构 ϕ_c 与 $\rho(g)$相互交织；

3. 指定将 Serre自然同构与 $\rho(g)$ 交织起来的修正；

4. 指定将对偶函子与对称幺半自然变换 $\rho(\gamma)$ 和 $R_{g,\ g'}$ 交织起来的修正。

这些数据满足一长串条件，而配边假设保证了这些条件成立。我们不会证明这些条件，因为本文将假设配边假设成立。不过，我们会用到上述四点数据，因此接下来对它们加以说明。第 1 点已在 B.1 节末尾给出，第 3 点则在 B.2 节中给出。

现在只需说明如何得到一个修正，以规定对称幺半自然变换如何保持对偶。设 F_1、F_2 是对称幺半函子，且 $\phi\colon F_1\Rightarrow F_2$ 是一个对称

幺半自然变换。假设我们已经选定了 CohDualPair$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 的一个逆。这为所有对象赋予相容对偶数据，从而 $(.)^\vee$ 是核心上的一个协变函子。通过考察 F_1 和 F_2 在 CohDualPair$\mathcal{C}$ 上的扩张，也可选定使它们保持对偶的数据。于是方形有一个典范填充

$$\begin{array}{ccc} F_1 \circ (.)^\vee & \longrightarrow & (.)^\vee \circ F_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \phi * \mathrm{id}_{(.)^\vee}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{(.)^\vee} * \phi} \\ F_2 \circ (.)^\vee & \longrightarrow & (.)^\vee \circ F_2 \end{array}$$

事实上，沿图表任一方向进行都保留对偶数据，因为 ϕ 是对称幺半的；而填充则由 1-同构的本质唯一性得出，这确定了对偶的唯一性。

C 超代数

令 sVect 表示这样一个范畴：其对象是复数域上的超向量空间，即$\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 $V = V_0 \oplus V_1$，其态射是保持分次的线性映射。sVect 是一个对称幺半范畴，其编织带有通常的 Koszul 符号。令 $\mathrm{sVect}^{\mathrm{fd}}$ 表示有限维向量空间及其之间可逆偶线性映射所构成的群胚。在下一小节中，我们将

1. 定义 sVect 上的对称幺半 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用，正文中需要用它来定义具有自旋-统计和反射结构的一维拓扑场论；
2. 说明 t 该作用如何通过配边假设扩展为 $\mathrm{sVect}^{\mathrm{fd}}$ 上的 $O_1 \times \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用 is.

在后 续各节中，我们将对超代数双范畴仿照这一过程 :

1. 在 C.2 节中，我们将介绍超代数的基础知识，并指出定义 $*$-代数时的一些微妙之处。2. 在 C.4 节中，我们将明确推导 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 在超代数双范畴上的作用。主要工具是一条技术引理，它说明超向量空间范畴上的作用如何诱导出超代数上的作用；该引理冗长但直接的证明见 C.7 节。3. 在 C.5 节中，我们将运用 B 节的理论，给出完全可对偶超代数的子 2-群胚及由配边假设导出的 O_2 作用的明确表达式。4. 在 C.6 节中，我们将揭示正文中用于研究具有自旋-统计和反射结构的二维拓扑场论的 $O_2 \times \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 作用的完整图景。

$\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$在超向量空间上的作用

给定 $V \in$sVect 其费米子宇称算子$(-1)_V^F$是由分次定义的阶至多为 2 的偶自同构 由分次 ocuntegn 算子

$$(-1)_V^F(v) = (-1)^{|v|}v$$

作用于齐次向量 $v \in V$ 上。复共轭向量空间V 定义为与 V 作为阿贝尔群相等，我们将其元素示意地写作 $\overline{v} \in \overline{V}$，其中 $v \in V$。我们在 $\overline{V}$ 上定义数乘为

$$\lambda \cdot \overline{v} := \overline{\overline{\lambda} \cdot v} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

我们希望将 $V \longmapsto \overline{V}$扩展为sVect 上的一个 $\mathbb{Z}_2^B$-作用，并将 $V \longmapsto (-1)_V^F$扩展为 sVect 上的一个 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用。回想一下， $B\mathbb{Z}_2^F$是一个只有一个对象和两个态射的 2-群。关于 2-群作用的定义

在 1-范畴上的定义，读者可以参考关于双范畴上作用的定义 A.5，并将其限制到双范畴仅有恒等 2-态射的情形。

为了描述 $V \longmapsto V$ 如何扩展为对称幺半 $\mathbb{Z}_2^B$-作用 τ，我们在其余需要选取的数据方面仍有一定自由度。特别是，有多种可能的"符号"选取方式，值得在某些应用中加以考虑。本文始终采用按照 Koszul 符号规则直接得出的规范符号选取方式，简要概括如下：

$$\begin{aligned} & f : V \longrightarrow W \longmapsto \overline{f} : \overline{V} \longrightarrow \overline{W} \quad \overline{f}(\overline{v}) := \overline{f(v)} \\ & \overline{V}_1 \otimes \overline{V}_2 \cong \overline{V_1 \otimes V_2} \quad \overline{v}_1 \otimes \overline{v}_2 \longmapsto \overline{v_1 \otimes v_2} \\ & V \cong \overline{\overline{V}} \quad v \longmapsto \overline{\overline{v}}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

第一点说明了 $\tau(B)$ 是一个函子，第二点使 $\tau(B)$ 成为幺半结构，最后一点给出了自然变换 $R_{B,\ B} : \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}} \longrightarrow \tau(B) \circ \tau(B)$ 的数据，说明 $\tau(B)$ 的平方等于一。要使其成为一个 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用，我们现在只需检验若干条件：

命题 C .1. 上述数据定义了 sVec 上的一个对称幺半 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用 t.

证明。 容易验证， $\tau(B) : V \longmapsto V$ 是一个函子。对于态射 $f_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ 和 $f_2 : V_2 \longrightarrow W_2$，图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{V_1 \otimes V_2} & \longleftarrow & \overline{V}_1 \otimes \overline{V}_2 \\ {\scriptstyle \overline{f_1 \otimes f_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_1 \otimes \overline{f}_2} \\ \overline{W_1 \otimes W_2} & \longleftarrow & \overline{W}_1 \otimes \overline{W}_2 \end{array}$$

显然可交换。存在一个由复共轭给出的典范同构 $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$。图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{V_1 \otimes V_2} & \xrightarrow{\overline{\sigma_{V_2,V_1}}} & \overline{V_2 \otimes V_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{V_1} \otimes \overline{V_2} & \xrightarrow[\sigma_{\overline{V}_2,\overline{V}_1}]{} & \overline{V_2} \otimes \overline{V_1} \end{array}$$

也显然可交换。因此，复共轭是一个对称幺半函子。

由于 sVect 中的态射都是偶的， $V \longmapsto (-1)_V^F$ 定义了一个自然变换 $\tau((-1)^F) : \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}}$。注意，$(-1)_{\mathbb{C}}^F = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = (-1)_{\mathbb{C}}^F$。根据张量积的分次定义 $(-1)_{V_1 \otimes V_2}^F := (-1)_{V_1}^F \otimes (-1)_{V_2}^F$，该自然变换是幺半的。

容易验证，$R_{B,\ B}$ 是一个幺半自然变换。也容易看出，$R_{B,\ B}(V) = R_{B,\ B}(V)$。

对应于 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 中从 B 到其自身的非恒等态射的自然变换 $V \longrightarrow V$，现在由该作用与 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 中态射张量积的相容性所决定。事实上，将此相容性应用于 $(-1)^F$ 和 B 处的常值路径，可推出 $\tau(B(-1)^F)$ 由水平复合 $\mathrm{id}_{\tau(B)} \bullet_\tau ((-1)^F)$ 给出，因此

$$\tau(B(-1)^F)[V] = \tau(B)[(-1)_V^F] = \overline{(-1)_V^F}.$$

由于方程 $B(-1)^F = (-1)^F B$ 在 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 中成立，我们得到所需条件

$$\overline{(-1)_V^F} = \tau(B(-1)^F)[V] = \tau((-1)^F B)[V] = \tau((-1)^F)[\overline{V}] = (-1)_{\overline{V}}^F$$

这确实很容易验证。关于 γ 中两个态射之一的 $\tau(\gamma)$ 与复合和张量积相容的其他条件，可由线性映射 $(-1)_V^F$ 的平方为单位映射推出。

□

接下来，我们限制到完全可对偶对象上的极大子群胚，即 $\mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}}$；这个群胚的对象是有限维向量空间，态射是偶可逆线性映射。根据配边假设，它带有一个 O_1-作用，我们接下来将对此进行描述。定义协变函子 $(-)^* : \mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}} \longrightarrow \mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}}$，令其在对象上取对偶，在态射上取对偶映射的逆。具体而言，我们将对偶数据 $V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ 指定为 $f \otimes v \longmapsto f(v)$，相应的余评价数据为 $1 \longmapsto \sum_i e_i \otimes \epsilon^i$，其中 $\{e_i\}$ 是 V的任意一组基，$\{\epsilon^i\}$ 是相应的对偶基。自然变换 $\mathsf{id}_{\mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}}} \Longrightarrow (-)^{**}$ 的存在，可由以下事实抽象地得出：由于 sVect 是对称的，V^{**} 和 V 都与 V^* 自然对偶。容易验证，这个自然同构在 $V \in \mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}}$ 上的作用是将一个泛函作用于一个向量，并取其值

$$V \longrightarrow V^{**} \quad v \longmapsto \mathrm{ev}_v^V \quad \mathrm{ev}_v^V(f) = (-1)^{|f||v|} f(v) \quad v \in V, f \in V^*.$$

现在我们已经给出了 O_1-作用的全部数据。

最后，我们说明如何将 O_1-作用与 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用结合起来，从而在 $\mathsf{sVect}^{\mathrm{fd}}$ 上得到一个 $O_1 \times \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$。这是配边假设的一个形式推论。事实上，回顾一下，带框架拓扑场论的群胚

$$\mathcal{C}^{\mathrm{fd}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Fun}_{\mathrm{sym}\,-\otimes}(\mathsf{Bord}_{1,0}^{\mathrm{fr}}, \mathcal{C})$$

带有其 O_1-作用，该作用通过反转定义域范畴上的框架（在一维情形中，等价地反转定向）给出。现在，如果 G 以对称幺半方式作用于目标对称幺半范畴 $\mathcal{C}$，那么它便通过后复合而作用于拓扑场论。鉴于 O_1-作用在定义域中，而 G-作用在目标中，两者在 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ 上诱导出一个 $O_1 \times G$-作用。要显式计算该作用，实际上主要依赖于这样一个事实： G-作用是对称幺半的，因此带有保持 O_1-作用的典范数据。请注意，$O_1 \times G$-作用本身也是对称幺半的。这对于理解同伦不动点上的对称幺半结构至关重要，因而也有助于理解具有自旋-统计与反射结构的理论的堆叠。不过，这一主题超出了本文的范围，因此我们将把 $O_1 \times G$-作用视为普通函子构成的作用来具体处理。

我们将情形特化到 $\mathcal{C} = \mathsf{sVect}$，并考虑如上所述的 $G = \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 作用。$O_1 \times \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$作用中唯一新增的部分是 O_1与 $\mathbb{Z}_2^B$之间的交换数据。它由典范同构 $V^* \cong \underline{V}^*$ 给出，因为两边都是 V的对偶。将该同构显式计算为以下复合

$$\overline{V^*} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{V^*}} \otimes \mathrm{coev}_{\overline{V}}} \overline{V^*} \otimes \overline{V} \otimes \overline{V}^* \cong \overline{V^* \otimes V} \otimes \overline{V}^* \xrightarrow{\overline{\mathrm{ev}_V} \otimes \mathrm{id}_{\overline{V}^*}} \overline{V}^*.$$

得到典范映射

$$\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$$

对于好奇的读者，我们指出，将函子 (.) 的幺半性数据（如 (C.1) 中所定义）改为相差一个符号 $(-1)^{|v||w|}$，也会使上面公式中的符号 $(-1)^{|v|}$ 发生改变。[13] 现在，通过直接计算，很容易看出获得 $O_1 \times \mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 作用所需的其余条件。由于对于反射结构，我们需要取对角子群 $\mathbb{Z}_2^R \subseteq O_1 \times \mathbb{Z}_2^B$作用下的不动点，因此我们将单独记录 $R = TB$ 通过 $V \longmapsto V^*$ 作用，以及该作用平方为一这一数据

$$V \cong \overline{\overline{V}^*}^*$$

是由上述两个同构——双重对偶求值同构和双横线同构——与交换横线和星号的同构复合而成的。

[13]这对数学家来说可能显得不自然，但在处理格拉斯曼变量时，物理学文献中有时会采用这种约定。

C.2 基本定义与超代数双范畴

设 $\mathbb{F}$ 是等于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的域。 $A = A_0 \oplus A_1$ 是一个在 $\mathbb{F}$ 上的超代数，即在 $\mathbb{F}$ 上的代数，并带有与乘法相容的 $\mathbb{Z}/2$-分次。普通代数的常见定义可直接推广到超代数，但必须谨慎处理 Koszul 符号规则。换言之，我们将超代数视为 sVect 中带有其特殊编织的幺半群。

设 A 和 B 是复数域上的超代数。一个（超）代数同态 $\phi: A \longrightarrow B$ 是偶代数同态。我们用 $\mathbf{sAlg}_1$ 表示超代数及其间同态所构成的范畴。一个 (A,B)-双模 M 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的 (A,B)-双模，并且 A 和 B 的作用保持分次。给定一个 (A,B)-双模 M 和一个 (B,C)-双模 N，可以在（分次）张量积 $M \otimes_B N$ 上定义 (A,C)-双模结构。双模的同态 $\phi: M \longrightarrow N$ 是偶双模映射。[14]。超代数构成一个 1-范畴 $\mathbf{sAlg}_1^{\mathbb{F}}$，其对象是代数，态射是代数同态；也构成一个双范畴 $\mathbf{sAlg}_{\mathbb{F}}$，其对象是超代数，1-态射 $A \longrightarrow B$ 是 (B,A)-双模，2-态射是偶双模映射。我们记 $\mathbf{sAlg} := \mathbf{sAlg}_{\mathbb{C}}$。1-态射的复合由相对张量积给出。注意，按照我们的约定，一个 (B,A)-双模 ${}_BM_A$ 的源是 A，目标是 B，因此复合采用通常的顺序 ${}_CN_B \circ {}_BM_A := N \otimes_B M$。其幺半群结构 $\otimes := \otimes_{\mathbb{F}}$ 由张量积给出，张量积取于 $\mathbb{F}$；编织则带有适当的 Koszul 符号

$$A \otimes B \longrightarrow B \otimes A \quad a \otimes b \longmapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

$\mathbf{sAlg}$ 成为一个对称幺半双范畴 [Sch14]。当所有齐次元素都可逆时，该超代数称为超除代数。超除代数在非分次意义下未必是除代数。事实上，考虑第一个复Clifford代数

$$A = \mathbb{C}l_1 = \frac{\mathbb{C}[e]}{(e^2 - 1)}$$

它是一个以 $\mathbb{C}$ 为底、具有奇生成元 e 的超代数。显然，它是一个超除代数。然而，作为一个非分次环，它甚至不是整环，因为 $(1-e)(1+e) = 0$。

命题 C.2。 *[Wal64]* 在 $\mathbb{R}$ 上共有十种超除代数：

$$\mathbb{R}, \quad Cl_1, \quad Cl_2, \quad Cl_3, \quad \mathbb{H}, \quad Cl_{-3}, \quad Cl_{-2}, \quad Cl_{-1}, \quad \mathbb{C}, \quad \mathbb{C}l_1$$

在 $\mathbf{sAlg}$ 上存在一个自然的“逆变 $\mathbb{Z}_2$-作用” $-^{\mathrm{op}}$：设 A 和 B 为超代数。其相反超代数 A^{op} 作为向量空间与之相同，但乘法为 $a^{\mathrm{op}} b^{\mathrm{op}} = (-1)^{|a||b|} (ba)^{\mathrm{op}}$。若 M 是一个 (A, B)-超双模，则 M^{op} 是由 $b^{\mathrm{op}} \cdot m^{\mathrm{op}} = (-1)^{|b||m|} (mb)^{\mathrm{op}}$ 定义的 $(B^{\mathrm{op}}, A^{\mathrm{op}})$-超双模，右侧的 A^{op}-作用也类似。若 $\phi: M \longrightarrow N$ 是一个超双模映射，则 $\phi^{\mathrm{op}}: M^{\text{相反}} \longrightarrow N^{\mathrm{op}}$ 定义为与 ϕ 相等的线性映射，即 $\phi^{\mathrm{op}}(m^{\mathrm{op}}) = \phi(m)^{\mathrm{op}}$。下面这个直接的引理表明，此构造扩展为一个函子 $\mathbf{sAlg} \longrightarrow \mathbf{sAlg}^{\mathrm{op}}$

引理 C.3。 设 M 是一个 (A,B)-双模，N 是一个 (B,C)-双模。那么存在一个同构

$$M^{op} \otimes_{B^{op}} N^{op} \cong (N \otimes_B M)^{op}, \quad \phi(m^{op} \otimes n^{op}) = (-1)^{|m||n|} (n \otimes m)^{op}$$

显然，$A^{\mathrm{opop}} = A$ 和 $M^{\mathrm{opop}} = M$。

在 $\mathbf{sAlg}$ 中构造 1-态射的一种有效方法，是通过超代数同态扭曲作用，如下述引理所述。

[14]本文不考虑奇双模映射，C.5 节除外

引理 C.4. 设 $\phi\colon\ A\longrightarrow B$ 是一个超代数同态。将 B_ϕ 定义为一个（B, A）-模，其左 B-模结构为 B，但右 A-作用为

$$b_\phi\cdot a=(b\phi(a))_\phi.$$

这构成了一个对称幺半函子 $\mathsf{sAlg}_1\longrightarrow\mathsf{sAlg}$，它从超代数的 1-范畴（以代数同态为态射，并视为具有平凡 2-态射的 2-范畴）映至超代数的 *Morita*2-范畴。

证明。若 $A\xrightarrow{\phi}B\xrightarrow{\psi}C$ 是超代数的映射，则存在一个典范同构 $C_\psi\otimes_B B_\phi\longrightarrow C_{\psi\phi}$，它是由下式给出的 (C, A)-双模：

$$c_\psi\otimes b_\phi\longmapsto c\psi(b)_{\psi\phi}$$

这显然是良定义的左 C-模映射。它也是右 A-模映射，因为

$$(c_\psi\otimes b_\phi)a=c_\psi\otimes b\phi(a)_\phi$$

被映射为

$$c\psi(b\phi(a))_{\psi\phi}=c\psi(b)\psi\phi(a)_{\psi\phi}=c\psi(b)_{\psi\phi}\cdot a.$$

图表

$$\begin{array}{ccc} D_\chi\otimes_C C_\psi\otimes_B B_\phi & \longrightarrow & D_\chi\otimes_C C_{\psi\phi}\\ \downarrow & & \downarrow\\ D_{\chi\psi}\otimes_B B_\phi & \longrightarrow & D_{\chi\psi\phi}\end{array}$$

显然交换。恒等同态 $A\longrightarrow A$ 诱导出 (A, A)-双模 $A_{\mathrm{id}}=A$，而复合

$$B_\phi\otimes_A A=B_\phi\otimes_A A_{\mathrm{id}}\longrightarrow B_{\phi\circ\mathrm{id}}$$

等于（B，A）-模 B_ϕ 中的右乘法。对于由 $b\in B$ 给出的左乘法，也有类似的结论。

该函子的幺半群结构由典范的（$B_1\otimes B_2$，$A_1\otimes A_2$）-双模同构诱导：$(B_1)_{\phi_1}\otimes(B_2)_{\phi_2}\cong(B_1\otimes B_2)_{\phi_1\otimes\phi_2}$，其中代数同态 $\phi_i\colon\ A_i\longrightarrow B_i$ 对于 $i=1,\ 2$ 给出。对称结构由编织代数同构 $A_1\otimes A_2\cong A_2\otimes A_1$ 诱导的可逆双模给出。

□

注 C.5. 若 $\chi\colon\ B\longrightarrow A$ 是代数同态，我们也可以定义（B，A）-模 ${}_\chi A$，它作为右 A-模为 A，而左 B 作用由与 χ 复合给出。不过，我们更倾向于在另一侧诱导双模，因为采用这种约定时，两个同态复合后，张量积的顺序会发生改变。

注 C.6. 如果 $\phi\colon\ A\longrightarrow B$ 是超代数同构，那么存在一个 (B, A)-双模的同构

$$B_\phi\cong{}_{\phi^{-1}}A\quad b_\phi\longmapsto{}_{\phi^{-1}}\phi^{-1}(b)\tag{C.2}$$

注 C.7. 由于函子保持可逆 1-态射，同构 $\phi\colon\ A\longrightarrow B$ 给出一个可逆双模 B_ϕ。具体而言，其可逆性数据由以下双模同构给出

$$B_\phi\otimes_A A_{\phi^{-1}}\longrightarrow B\quad b_\phi\otimes a_{\phi^{-1}}\longmapsto b\phi(a)$$

另一侧也有一个类似的映射。

注 C.8. 给定代数同态 $\phi_1, \phi_2 : A \longrightarrow B$，诱导双模 B_{ϕ_1} 和 B_{ϕ_2}同构，当且仅当存在一个可逆的 $b \in B_{\mathrm{ev}}$，使得对于所有 $a \in A$，$\phi_1(a)b_0 = b_0\phi_2(a)$。事实上，如果 $T : B_{\phi_1} \longrightarrow B_{\phi_2}$ 是一个偶交织映射，那么对于某个偶的 b_0，有 $T(1_{\phi_1}) = (b_0)_{\phi_2}$。由于 T是一个左 B-模映射，我们可得 $T(b_{\phi_1}) = (bb_0)_{\phi_2}$。由 T 可逆可知，b_0存在一个左逆。利用右模结构，我们也可以得出 b_0 有一个右逆，因此它可逆。由于 T 是一个右 A-模映射，我们可得

$$b_{\phi_1} \cdot a = b\phi_1(a)_{\phi_1} \longmapsto b\phi_1(a)(b_0)_{\phi_1}$$

由于 $(bb_0)_{\phi_2} \cdot a = bb_0\phi_2(a)_{\phi_2}$，我们推得，当且仅当 $\phi_1(a)b_0 = b_0\phi_2(a)$ 时，这一结论成立。

注 C.9. 一个有用的同构是将相反代数同态与诱导双模的相反对应起来。具体而言，对于 $\phi : A \longrightarrow B$ 任意代数映射，存在一个 $(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$-双模同构

$$(B_\phi)^{\mathrm{op}} \cong {}_{\phi^{\mathrm{op}}}B^{\mathrm{op}} \quad (b_\phi)^{\mathrm{op}} \longmapsto {}_{\phi^{\mathrm{op}}}b^{\mathrm{op}}. \tag{C.3}$$

这确实是一个左 A^{op}-模映射，因为

$$a^{\mathrm{op}} \cdot b_\phi^{\mathrm{op}} = (-1)^{|a||b|}(b_\phi \cdot a)^{\mathrm{op}} = (-1)^{|a||b|}(b\phi(a)_\phi)^{\mathrm{op}}$$

被映射为

$$a^{\mathrm{op}} \cdot {}_{\phi^{\mathrm{op}}}b^{\mathrm{op}} = {}_{\phi^{\mathrm{op}}}\phi^{\mathrm{op}}(a^{\mathrm{op}}) \cdot b^{\mathrm{op}} = {}_{\phi^{\mathrm{op}}}\phi(a)^{\mathrm{op}} \cdot b^{\mathrm{op}} = {}_{\phi^{\mathrm{op}}}(-1)^{|a||b|}(b\phi(a))^{\mathrm{op}}$$

我们以一个命题结束本小节，该命题与研究对称超 Frobenius 代数之间的 Morita 等价有关。

命题 C.10. 设 A, B 为超代数，且 M 为一个可逆的(A, B)-双模。那么 M 诱导一个映射

$$f_M : \frac{B}{[B,B]} \longrightarrow \frac{A}{[A,A]}$$

证明。令 $\eta : B \longrightarrow N \otimes_A M$ 和 $\epsilon : M \otimes_B N \longrightarrow A$ 实现 M的可逆性。令 $b \in B$，并写作

$$\eta(b) = \sum_i n_i \otimes_A m_i.$$

定义

$$f_M([b]) = \left[\sum_i (-1)^{|n_i||m_i|}\epsilon(m_i \otimes_B n_i)\right].$$

这是良定义的，因为首先

$$\begin{aligned}\sum_i (-1)^{|m_i||n_i a|}\epsilon(m_i \otimes_B n_i a) &= \sum_i (-1)^{|m_i||n_i|+|m_i||a|}\epsilon(m_i \otimes_B n_i)a \\ &\sim \sum_i (-1)^{|m_i||n_i|+|m_i||a|+|a||m_i \otimes n_i|}a\epsilon(m_i \otimes_B n_i) \\ &= \sum_i (-1)^{|am_i||n_i|}\epsilon(am_i \otimes_B n_i)\end{aligned}$$

其次，这在模交换子的意义下是良定义的：若 $b' = b_1 b - (-1)^{|b_1||b|}bb_1$，则 $\eta(b') = b_1\eta(b) - (-1)^{|b_1||b|}\eta(b)b_1$，因此

$$f_M(b') = \sum_i (-1)^{|b_1 n_i||m_i|}m_i \otimes_B b_1 n_i - (-1)^{|b_1||b|+|n_i||m_i b_1|}m_i b_1 \otimes_B n_i = 0.$$

事实上，只要注意到对于所有 i，$|b| = |m_i| + |n_i|$，就很容易看出这些符号是正确的。 □

例 C.11. 设 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} A_g$ 是一个强分次代数。于是我们得到由 (A, A)-双模 A_g 诱导的映射 $f_g : \underset{[A,A]}{A} \longrightarrow \underset{[A,A]}{A}$。取逆为 $N = A_{g^{-1}}$，而 η, ϵ 由乘法映射诱导；根据假设，这些映射均可逆。由 $\mathcal{A}$ 的结合性可知，这些映射构成一个伴随等价。取

$$\sum_i a^i_{g^{-1}} \otimes_A a^i_g \in A_{g^{-1}} \otimes_A A_g \quad \text{such that} \quad \sum_i a^i_{g^{-1}} a^i_g \in A_{g^{-1}} = 1.$$

Then

$$f_g([a]) = \left[\sum_i (-1)^{|a||a^i_g|+|a_{g^{-1}}||a^i_g|} a^i_g a a^i_{g^{-1}}\right]$$

注意，如果涉及的所有元素都是齐次的，那么只有当 a^i_g 和 $a^i_{g^{-1}}$ 为奇、 a 为偶时，符号才不为平凡。

作为一个子例，令 A 为任意超代数，并考虑其关联的 $\mathbb{Z}_2^F = \{1, c\}$-分次"Spin-统计"代数

$$\mathcal{A} = A \oplus Ac$$

其乘法由 $c^2 = 1$ 和 $ac = (-1)^{|a|}ca$ 给出。取 $g = c$，则 $\eta(a) = ac \otimes_A c$，并且 so

$$f_g([a]) = [cac] = [(-1)^{|a|}a].$$

C.3 $*$-代数

与 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数的常见约定不同，我们采用一种使用 Koszul 符号规则的 $*$-代数定义。

定义 C.12。A （超） $*$-代数是一个复超代数 A，配备一个复反线性偶对合 $a \longmapsto a^*$，使得 $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*$。若取 $(ab)^* = b^*a^*$，则称 A 为 a$\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数。

超 $*$-代数的概念等价于 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数的概念。具体而言，给定一个复反线性超 $*$-代数 $(A, *)$，我们可以在 A 上定义一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数结构：若 a 为偶，则取$a^\dagger = a^*$；若 a 为奇，则取 $a^\dagger = -ia^*$。于是，$\dagger$ 便是 A上的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次复反线性 $*$-结构。特别是，由于 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数已有深入研究，我们可以利用上述对应关系建立超 C^*-代数理论。将 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数[Bla98] 的定义直接转移到相应的超 $*$-代数上，会得到如下相当繁复的定义。

定义 C.13. 如果超复数域代数 A 配备了完备范数 $\|.\| : A \longrightarrow \mathbb{C}$，满足 $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$，且对所有 $a = a_0 + a_1 \in A = A_0 \oplus A_1$ 都有B^*-恒等式，则称其为超 C^*-代数

$$\|a_0a_0^* - ia_1a_1^* - ia_0a_1^* + a_1a_0^*\| = \|(a_0 + a_1)(a_0 - ia_1^*)\| = \|a\|^2.$$

特别要注意，如果 A 是超复数域代数，那么 Spec $a^*a \subseteq i\mathbb{R}_{\geq 0}$。

我们还将使用 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数，其中我们将 $* : A \longrightarrow A$ 是复反线性的条件改为仅要求其为实线性的。读者需要注意，类似的 $\mathbb{R}$ 上的超 $*$-代数概念并不等同于 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-代数。例如， Cl_{+1} 不具有任何超 $*$-代数结构。因此，不应使用这一概念来发展 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^* 理论，我们将改为使用 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$-分次 C^*-代数。

例 C.14. 设 $(V, \langle ., . \rangle)$ 是一个超厄米空间，参见定义 3.9。我们将（超厄米）伴随 T^* 定义为

$$\langle T^* v, w \rangle = (-1)^{|T||v|} \langle v, Tw \rangle.$$

如果 $T^\dagger$ 表示相对于如方程 3.2 中的 $\mathbb{Z}_2$分次希尔伯特空间结构$\langle \cdot | \cdot \rangle$ 的通常非分次厄米伴随，那么

$$T^\dagger = \begin{cases} T^* & T \text{ even}, \\ -iT^* & T \text{ odd}, \end{cases}$$

因此，超厄米伴随与非分次厄米伴随的关系，正如超
$*$-代数与 $\mathbb{Z}_2$分次 $*$-代数的关系一样。事实上，如果 T 为奇， v 为奇且 w 为偶，那么

$$-\langle T^* v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = i \langle v | Tw \rangle = i \langle T^\dagger v | w \rangle = i \langle T^\dagger v, w \rangle.$$

类似地，如果 T 为奇， v 为偶且 w 为奇，那么

$$\langle T^* v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = \langle v | Tw \rangle = \langle T^\dagger v | w \rangle = -i \langle T^\dagger v, w \rangle.$$

利用第一变量中的复反线性，我们得到 $T^\dagger = -iT^*$。上述 $*$ 使得复超 $*$-代数 $\operatorname{End} V$在 $\mathbb{C}$ 上成为复反线性超代数。在这个正定情形下， $\operatorname{End} V$成为一个 C^*-代数（负定配对同样可行）。

例 C.15。 我们证明， $M_n(\mathbb{C})$上的每个 $*$-结构，都是由如上一个例子中的厄米配对，或由如下意义下的斜厄米配对诱导的:

$$\langle v, w \rangle = -\overline{\langle w, v \rangle}$$

令 $*$ 表示由 $\mathbb{C}^n$ 上的标准希尔伯特空间结构导出的标准厄米共轭转置 $*$结构，并令 $\star$ 为任意 $*$结构。那么 $a \longmapsto a^{\star *}$ 是一个复线性代数自同构。根据 Skolem-Noether 定理，存在一个可逆的 $a_0 \in M_n(\mathbb{C})$，在 $\mathbb{C}^\times$ 意义下唯一，使得 $a^\star = a_0 a^* a_0^{-1}$。此外，我们需要有

$$a = a^{\star\star} = a_0 a_0^{-1 *} a a_0^* a_0^{-1} \Longrightarrow a_0^* a_0^{-1} \in Z(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$$

因此，对于某个 $z \in \mathbb{C}^\times$，有 $a_0^* = z a_0$。我们利用 a_0 定义中的 $\mathbb{C}^\times$不确定性，要求 z 为实数。这是可行的，因为

$$(w a_0)^* = z \overline{w} a_0 = \frac{z \overline{w}^2}{|w|^2} w a_0.$$

利用 $a^{**} = a$ ，我们得到 $z = \pm 1$。现在回想一下， $\mathbb{C}^n$ 上的每个厄米形式都具有如下形式:

$$B(v, w) = \langle v, aw \rangle$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是标准内积，而 $a \in M_n(\mathbb{C})$ 是自伴且可逆的。类似地，反厄米形式在 a 为反自伴时也具有这种形式。诱导出 $*$结构 $\star$ 的厄米形式为

$$B(v, w) := \langle v, a_0^{-1} w \rangle$$

因为

$$B(Tv, w) = \langle v, T^* a_0^{-1} w \rangle = \langle v, a_0^{-1} T^\star w \rangle = B(v, T^\star w).$$

另请注意，在 a_0 为自伴的情况下， $\star$ 是 C^*-结构，当且仅当 a_0 是正定或负定的。

例 C.16. 在 $\mathbb{C}l_1$ 上有两种复反线性超 $*$-结构，由$e^* = \pm ie$中的符号选择决定。它们分别对应于两种复线性 $\mathbb{Z}_2$-分次 $*$-结构 $e^\dagger = \pm e$。选择负号会得到一个 $*$-代数，它对于任何范数 $\|.\|$ 都不可能满足 B^*-恒等式。事实上，对于$a = 1 + e$，我们有

$$\|1 + e\|^2 = \|(1 + e)(1 - ie^*)\| = \|(1 + e)(1 - e)\| = \|0\| = 0.$$

另请注意， $e^*e = -i$ 的谱为 $\{-i\}$，因此不存在这样的 $*$-超表示作用于 $\mathbb{C}l_1$，使得所得矩阵 e^*e 的谱包含于 $i\mathbb{R}_{\geq 0}$。因此，这个 $*$-代数不是超 C^*。

我们在定义超 $*$-代数 A 时采用的 Koszul 符号约定，也会影响 A的正确定义。为理解这一点，首先回顾第 3.2 节：若 (V, h) 是超厄米向量空间，我们将 V 上的厄米向量空间结构定义为 $(-1)^F_V \circ h$。这样做有两个不同的理由：

1. 若 (V, h) 是超希尔伯特空间，则 $(\overline{V}, h)$ 通常不是超希尔伯特空间，但 $(V, (-1)^F_V \circ h)$ 是；

2. 在第 4.3 节中，我们发现这与超厄米向量空间上的作用有关，其不动点给出带有反射结构的一维拓扑场论。

超 $*$-代数 A 的情况类似。在 $\mathbf{sAlg}_1$ 上有一个 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用 $A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$ 和 $A \longmapsto A$ （我们的符号约定见 C.4 节）。将 A 视为 1-范畴 $\mathbf{sAlg}_1$ 中在作用 $A \longmapsto A^{\mathrm{op}}$ 下的不动点，则诱导出的剩余作用 $A \longmapsto A$ 作用于 $*$-代数，从而赋予其 A 一个 $*$-结构

$$\overline{A} \longrightarrow \overline{A^{\mathrm{op}}} \cong \overline{A}^{\mathrm{op}}$$

它就是 $a^* = a^*$。现在，若 A 是 C^*，则对于每个奇元素 $a \in A$，我们有 a^*a 的谱包含于正虚轴。但此时在 A

$$\mathrm{Spec}\, \overline{a}^* \overline{a} = \mathrm{Spec}\, \overline{a^* a} = \overline{\mathrm{Spec}\, a^* a}$$

包含于负虚轴。因此，和超希尔伯特空间的情形一样，我们改变
将 $*$ 替换为一个 $(-1)^F$，定义

$$\overline{a}^* := (-1)^{|a|} \overline{a^*}$$

对于齐次 $a \in A$。换言之，我们将此作用中平方为 1 的数据改为 R，并采用 $(-1)^F$ 这一$B\mathbb{Z}_2^F$-作用。

上述第二个理由的类似情形适用于按照第 5.2 节定义星代数的复共轭。

C.4 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 对超代数的作用

本节将讨论由 C.1 节中 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 对 sVect 的作用所诱导的 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 对 sAlg 的作用。这将应用于构造由 sVect 上的对称幺半 $\mathcal{G}$ 作用所导出的 $\mathcal{G}$ 对 sAlg 的作用，该构造已在 C.7 节中给出。我们还将说明，由于其与 C.6 节所讨论的 O_2 作用相容，该作用为何是对称幺半的。

我们先阐明这一作用所包含的一些最基本信息，然后逐步深入更具技术性的内容。$\mathbb{Z}_2^B$ 作用将超代数 A 映射为其复共轭 $\overline{A}$:

定义 C.17. 超代数 A 的复共轭 $\overline{A}$ 定义为 A 的复共轭向量空间，并配备乘法 $a \cdot b = ab$。

$B\mathbb{Z}_2^F$作用将 A 映射到由自旋-统计双模给出的 A 的自同构:

定义 C.18. 给定一个超代数 A，将与代数自同构 $(-1)_A^F\colon A \longrightarrow A$ （其在齐次 $a \in A$ 上由 $a \longmapsto (-1)^{|a|}a$ 给出）相对应的 (A,A)-双模 $A_{(-1)^F}$ 称为 A 的自旋-统计双模。我们将此双模明确写作 $A_{(-1)^F} = \{a(-1)^F\colon a \in A\}$，以便将 $(-1)^F$ 视为满足 $a(-1)^F = (-1)^{|a|}(-1)^F a$ 的符号。

利用 C.1 节和上述结果，我们现在将详细说明这些数据如何组装成 sAlg 上的一个 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$作用。$\mathbb{Z}_2^B$ 作用（我们仍用横线表示）首先由函子 $\rho(B)\colon \mathrm{sAlg} \longrightarrow \mathrm{sAlg}$ 的数据给出，该函子由 $A \longmapsto A$定义。作用在态射上的定义具体如下：给定一个 $(A,\ B)$-双模 M，M是由 $a \cdot m = am$ 给出的 $(A,\ B)$-双模，右侧的 B作用也类似。若 M'是另一个 $(A,\ B)$-双模，且 $\phi\colon M \longrightarrow M'$是一个双模映射，则双模映射 $\phi\colon M \longrightarrow M'$ 由 $\phi(m) = \phi(m)$定义。给定一个 (A,B)-双模 M以及一个 $(B,\ C)$-双模 N，保持 1-态射复合的 $\rho(B)$数据涉及如下同构

$$\overline{N \otimes_B M} \cong \overline{N} \otimes_{\overline{B}} \overline{M} \quad \overline{n \otimes_B m} \longmapsto \overline{n} \otimes_B \overline{m}.$$

我们现在已定义了函子 $\rho(B)$。它在代数 A_1 和 A_2 上的幺半性数据由 he 代数同构 hism

$$\overline{A_1 \otimes A_2} \cong \overline{A}_1 \otimes \overline{A}_2 \quad \overline{a_1 \otimes a_2} \longmapsto \overline{a}_1 \otimes \overline{a}_2$$

给出一个可逆的 $(A_1 \otimes \overline{A_2, A_1} \otimes A_2)$-双模 N_{A_1,A_2}。关于一个 (B_1, A_1)-双模 M_1 和一个 (B_2, A_2)-双模 M_2，此同构的自然性数据由显然的双模同构给出

$$\overline{M_1 \otimes M_2} \otimes_{\overline{A_1 \otimes A_2}} N_{A_1,A_2} \cong N_{A_1,A_2} \otimes_{\overline{A}_1 \otimes \overline{A}_2} (\overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2).$$

从现在起，我们将直接识别 $A_1 \otimes \overline{A_2 \cong} A_1 \otimes A_2$。于是，使 $\rho(R)$ 成为对称幺半函子所需的所有其他数据都变为恒等。

接下来讨论对象 g_1, g_2 在 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$中的数据 R_{g_1,g_2}。唯一有趣的情形是 $g_1 = g_2 = B$，此时可逆双模由代数的等式 $A = A$诱导。因此，定义一个作用所需的其他数据 $\omega_{g,g',g''}$也都是恒等。

现在我们给出 $\rho(\gamma)$，用于 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 中的态射 γ。$\rho((-1)^F)[A] = A_{(-1)^F}$ 借助（$B,\ A$）-双模同构成为一个自然变换

$$M \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow B_{(-1)^F} \otimes_B M \quad m \otimes a(-1)^F \longmapsto (-1)^{|m|+|a|}(-1)^F \otimes ma.$$

$\rho((-1)^F)$ 是一个幺半自然变换这一数据，对应于（$A \otimes B,\ A \otimes B$）-双模的典范同构

$$A_{(-1)^F} \otimes B_{(-1)^F} \cong (A \otimes B)_{(-1)^F} \quad a(-1)_A^F \otimes b(-1)_B^F \longmapsto (a \otimes b)(-1)_{A\otimes B}^F.$$

请注意，与 $(-1)^F$ 关于双模 M 的自然性不同，这里没有符号。对于 $\rho((-1)^F R) := \rho((-1)^F) \circ \rho(R)$，情况也类似。

下面转向 $\alpha_{\gamma,\ \gamma'}$。$\alpha_{(-1)^F,\ (-1)^F}$ 的数据由同构 $A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \cong A$ 确定，这些同构对应于代数同态 $(-1)^F$ 的平方为一这一事实。具体而言，这些数据如下

$$A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A \quad a_1(-1)^F \otimes_A a_2(-1)^F \longmapsto (-1)^{|a_2|}a_1a_2.$$

自然同构 $\alpha_{R(-1)^F,\ R\ (-1)^F}$ 的定义方式类似。

接下来，我们讨论指定 $\rho((-1)^F R) = \rho(R(-1)^F) \cong \rho(R) \bullet \rho((-1)^F)$ 的自然变换，即 $R_{\mathrm{id}_R,\ (-1)^F}$和 $R_{(-1)^F,\ \mathrm{id}_R}$。首先注意到，由于线性映射 $(-1)_V^F = (-1)_V^F$ 相等，因此存在一个 $(A,\ A)$-双模的等式 $A_{(-1)_A^F} = A_{(-1)_A^F}$。现在，$(B,\ A)$-双模同构

$$\overline{M} \otimes_{\overline{A}} \overline{A}_{(-1)_{\overline{A}}^F} \cong \overline{B}_{(-1)_{\overline{A}}^F} \otimes_{\overline{B}} \overline{M}$$

同样由下式给出

$$\overline{m} \otimes \overline{a}(-1)^F \longmapsto (-1)^{|m|+|a|}(-1)^F \otimes \overline{ma}.$$

其余的 R_{γ_1,γ_2} 也以类似方式定义。

C.5 sAlg 中的对偶可对偶性

我们将附录 B 中的对偶可对偶性理论应用于双范畴 sAlg。

为了定义伴随，令 M 为一个 (A,B)-双模。令 $\mathrm{HOM}_A(M,A)$ 表示由左 A-模的映射构成的超向量空间，这些映射不一定是偶的。更准确地说，齐次元素$f \in \mathrm{HOM}_A(M,A)$ 满足分次 A-线性条件

$$f(am) = (-1)^{|a||f|} af(m)$$

于是 HOM_A (M,A) 以显然的方式成为一个 (B,A)-双模，其中使用适当的 Koszul 符号 s:

$$(fa)(m) := f(am) \quad (bf)(m) := (-1)^{|b|(|f|+|m|)} f(mb).$$

类似地，我们可以使用右 B-模映射将 $\mathrm{HOM}_B(M,\ B)$ 定义为一个 $(B,\ A)$-双模。求值双模映射为

$$\begin{aligned} &\mathrm{ev} : M \otimes_B \mathrm{HOM}_A(M,A) \longrightarrow A \quad \mathrm{ev}(m \otimes f) = (-1)^{|m||f|} f(m) \\ &\mathrm{ev} : \mathrm{HOM}_B(M,B) \otimes_A M \longrightarrow B \quad \mathrm{ev}(g \otimes m) = g(m) \end{aligned}$$

若要使这些配对非退化，我们需要一个有限性条件：

命题 C.19 （ [DP83] 的命题 1.6）。 定义$(B,\ A)$-双模

$$M^L := \mathrm{HOM}_B(M,B) \quad M^R := \mathrm{HOM}_A(M,A)$$

利用上述配对，M^L 是 M 的左伴随，当且仅当 M 作为 A 是有限生成投射的；M^R 是 M 的右伴随，当且仅当 M 作为 B是有限生成投射的。

双范畴 sAlg 中的伴随等价也称为*Morita* 背景。

设 ϕ：$M_1 \Longrightarrow M_2$ 是 $(A,\ B)$-双模之间的一个同态，且这些双模作为 B-模是有限生成的。容易验证，诱导映射 ϕ^R：$M_2^R \Longrightarrow M_1^R$ 由下式给出

$$\phi^R(f)(m_1) = f(\phi(m_1)).$$

sAlg 中的每个对象都是 1-可对偶的。[15] 我们给出使反代数成为代数 $A \in \mathrm{sAlg}$ 的对偶所需的数据。求值映射 ev_A：$A \otimes A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是由 A 本身作为一个 $(\mathbb{C}, A \otimes A^{\mathrm{op}})$-双模给出的。余求值映射 coev_A：$\mathbb{C} \longrightarrow A^{\mathrm{op}} \otimes A$ 是将 A 视为一个 $(A^{\mathrm{op}} \otimes A, \mathbb{C})$-双模。设 M是一个 (B,A)-双模。则如下所示，M^{op} 成为 M 的对偶。我们需要补全图表

$$\begin{array}{ccc} B^{\mathrm{op}} \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes M} & B^{\mathrm{op}} \otimes B \\ {\scriptstyle M^{\mathrm{op}} \otimes \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_B} \\ A^{\mathrm{op}} \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{ev}_A} & \mathbb{C} \end{array}$$

我们需要证明同构的两个双模满足

$$\begin{aligned} b_1 \otimes b_2^{\mathrm{op}} \otimes m &= (-1)^{|b_1||b_2|} 1 \otimes 1 \otimes b_2 b_1 m \in B \otimes_{B^{\mathrm{op}} \otimes B} (B^{\mathrm{op}} \otimes M) \\ a_1 \otimes m^{\mathrm{op}} \otimes a_2 &= (-1)^{|a_1||m|} 1 \otimes (m a_1 a_2)^{\mathrm{op}} \otimes 1 \in A \otimes_{A^{\mathrm{op}} \otimes A} (M^{\mathrm{op}} \otimes A) \end{aligned}$$

[15]这是一般事实的一个特例：每个 E_n-代数都是 n-可对偶的 [GS18]。

利用这一点，很容易验证 $1 \otimes 1 \otimes m \longmapsto 1 \otimes m^{\mathrm{op}} \otimes 1$ 诱导出左 $B^{\mathrm{op}} \otimes A$-模的一个同构，因此我们补上了上面的方块。相关的高阶条件显然成立。我们强调， M 的对偶始终存在，且与M的左伴随和右伴随无关。

一般的超代数 A 并非完全可对偶。事实上，若要求求值映射 ev_A 具有右伴随和左伴随，我们需要 A 是有限维且半单的。我们得到完全可对偶对象上的极大子 2-群胚 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 的显式描述:

- **对象** 是有限维半单超代数;
- 1-**态射** 是可逆双模;
- 2-**态射** 是可逆偶双模同态。

接下来给出 $\mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$上的 O_2-作用，这里我们继续使用 O_2 的骨架模型以及 B.3 节中的记号。我们按照 [Gun16，第 2 节1]，给出所选的对偶和可对偶性数据。

设 $A \in \mathsf{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 是有限维且半单的。 O_2 中的对象 $-$ 通过将一个超代数映为代数 A^{op} （如上所述，它是其对偶），将可逆双模 M 映为 $M^{\mathrm{op}-1}$，并将可逆双模映射映为它所诱导的、两个相反对象之逆元之间的典范映射，从而给出作用。根据引理 C.3，这是一个函子，也很容易看出它是对称幺半的。请注意，为了唯一确定这个函子，我们必须为每个可逆双模选取一个逆元，这种选择是可缩的。我们指定使其成为 $\mathbb{Z}_2$-作用的相干同构：令可逆的（$A = A^{\mathrm{opop}}$， A）-双模 $\hat{}R_A$ 为恒等。于是 $\omega : \hat{} R_A^{\mathrm{op}} \otimes_{A^{\mathrm{opopop}}} \hat{} R_{A^{\mathrm{op}}} \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ 是乘法映射。

现在我们转向作用的 SO_2 部分。由命题 C.19 可知，求值映射 ev_A 的一个右伴随是 $(A^{\mathrm{op}} \otimes A, \mathbb{C})$-双模 $\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) = A^*$。因此，我们有 $S_A = A^*$，其 (A, A)-双模结构由相应的 Koszul 符号给出

$$(fa_1)(a_2) = f(a_1a_2), \quad (a_1f)(a_2) = (-1)^{|a_1|(|f|+|a_2|)} f(a_2a_1).$$

类似地，求值映射 ev_A 的右伴随是 $(A^{\mathrm{op}} \otimes A, \mathbb{C})$-双模 $\mathsf{Hom}_{A^{\mathrm{op}} \otimes A}(A, \mathbb{C})$。因此，如 [Gun16，定义 2.4], 所述，我们发现 Serre 自同构由 (A, A)-双模 A^* 给出，而 Serre 自同构的逆由 $\mathsf{Hom}_{A^{\mathrm{op}} \otimes A}(A, A^{\mathrm{op}} \otimes A)$给出。

超代数背景下 Serre 自同构的自然性数据可以显式地推导如下，参见 [HV19，命题 2.8] 以及 [CS21，命题 3.2]。令 $A, B \in \mathsf{Alg}^{\mathrm{fd}}$，并令 M 为一个可逆的 (A, B)-双模。由于 M 可逆，我们可以通过选取其逆 (B, A)-双模 N，使其与 M 构成伴随，从而将 M 构造成一个 Morita 背景，使得可逆性数据

$$\eta : N \otimes_A M \longrightarrow B \quad \epsilon : M \otimes_B N \longrightarrow A$$

满足蛇形关系。我们将使用以下便捷记号。给定 $n \in N$， $m \in M$ 和$f \in A^*$，将 B^* 的 nfm 定义为

$$(mfn)(b) := (-1)^{|m|(|f|+|n|+|b|)} f(\eta(n \otimes_B bm)).$$

注意，这一记号与 A^* 上 (A, A)-双模结构的记号相容。我们以类似于将 M_{op}实现为 M 的对偶的方式，将 N^{op}实现为 M的对偶逆。具体而言，图表的填充

$$\begin{array}{ccc} & & A^{\mathrm{op}} \otimes A \\ & \overset{N^{\mathrm{op}} \otimes M}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_A} \\ B^{\mathrm{op}} \otimes B & \xrightarrow[\mathrm{ev}_B]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

相当于 $(\mathbb{C}, B^{\mathrm{op}} \otimes B)$-双模之间的同构

$$\psi : A \otimes_{A^{\mathrm{op}} \otimes A} (N^{\mathrm{op}} \otimes M) \cong B$$

由.....给出

$$a \otimes (n^{\mathrm{op}} \otimes m) \longmapsto (-1)^{|a||n|} \eta(na \otimes m).$$

这满足所需条件，因为在将 M^{op} 实现为 M 的对偶时，该条件成立。接下来，我们需要对上面的图表取右伴随，以得到 $(B^{\mathrm{op}} \otimes B,\ \mathbb{C})$-双模的映射

$$\psi^R : B^* \longrightarrow (\mathrm{HOM}_{A^{\mathrm{op}}}(N^{\mathrm{op}}, A^{\mathrm{op}}) \otimes \mathrm{HOM}_A(M, A)) \otimes_{A^{\mathrm{op}} \otimes A} A^*$$

比较 [HV19，引理 2.7]。它将 $f \in B^*$ 映射到 A^* 中的元素，该元素将 a 映射到

$$a \otimes n^{\mathrm{op}} \otimes b \longmapsto (-1)^{|a||n|} f(\eta(na \otimes m))$$

现在我们可以给出 Serre 自然性数据，按定义，它是以下图表的一个填充

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\mathrm{ev}_A^R \otimes A} & A^{\mathrm{op}} \otimes A \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A^{\mathrm{op}} \otimes A & \xrightarrow{A \otimes \mathrm{ev}_A} & A \\
\uparrow{\scriptstyle M} & & {\scriptstyle M^{\mathrm{op}-1} \otimes M \otimes M}\uparrow & & {\scriptstyle M \otimes M^{\mathrm{op}-1} \otimes M}\uparrow & & {\scriptstyle M}\uparrow \\
B & \xrightarrow[\mathrm{ev}_B^R \otimes B]{} & B^{\mathrm{op}} \otimes B \otimes B & \longrightarrow & B \otimes B^{\mathrm{op}} \otimes B & \xrightarrow[B \otimes \mathrm{ev}_B]{} & B
\end{array}$$

我们可以借助编织的自然性，以及上文表示求值映射 ev 及其伴随自然性的两个图表来完成这项工作。由此得到以下命题，这是 Chris Schommer-Pries [hs] 告知我们的。

命题 C.20。自然变换 $A \longmapsto A^*$ 的自然性由双模映射 S_M：$A^* \otimes_A M \longrightarrow M \otimes_B B^*$ 表示，具体为

$$S_M(f \otimes_A m) = \sum_j m_j \otimes_B n_j f m$$

其中

$$\sum_j \eta(m_j \otimes n_j) = 1.$$

例 C.21。取 $A = B$，令 G 为一个有限群，令 $\mathcal{A}$ 为一个强 G-分次代数，且$A_1 = A$。取 $M = A_g$。于是我们可以取 $N = A_{g^{-1}}$ 和 η：$A_g \otimes_A A_{g^{-1}} \longrightarrow A$ 可以取为乘法映射 $\phi_{g,\ g^{-1}}$。对于 $a \in A^*$ 和 $a_g \in A_g$，Serre 自然性映射可以写成

$$S_{A_g}(f \otimes a_g) = \sum_j m_j \otimes n_j f a_g.$$

其中 $m_j \in A_g$ 和 $n_j \in A_{g^{-1}}$ 的选取满足

$$\sum_j m_j n_j = 1.$$

具体而言，给定 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$，我们有

$$(a_{g^{-1}} f a_g)(a) := (-1)^{|a_{g^{-1}}|(|f|+|a_g|+|a|)} f(a_g a a_{g^{-1}}).$$

在 $g = 1$ 的情况下，这与 A 在 A^* 上的双模作用一致。

例 C.22. 取 $B = A^{\mathrm{op}}$，并设 A 具有超 $*$-代数结构 $A^{\mathrm{op}} \longrightarrow A$。取 $M = A_*$ 为相应的星形模。由于 $*$ 是对合，${}_*A^{\mathrm{op}}$ 是 A_* 的典范逆，因此 Serre 自然性映射 $S_{A_*} : \overline{A}^* \otimes_A A_* \longrightarrow A_* \otimes_{A^{\mathrm{op}}} A^{\mathrm{op}*}$ 可简化为

$$S_{A_*}(f \otimes_A a_*) = 1_* \otimes_{A^{\mathrm{op}}} (\overline{b}^{\mathrm{op}} \longmapsto f(ab^*)).$$

我们可以将其更简洁地写为 $S_{A_*}(f \otimes_A 1_*) = 1_* \otimes_{A^{\mathrm{op}}} f^*$，其中 $f^* : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ 定义为 $f^*(b^{\mathrm{op}}) = f(b^*)$。

例 C.23. 设 (B, ϵ) 是一个对称 Frobenius 代数，且 M 是一个可逆的 (B, A)-双模。A 上的诱导的 Frobenius 结构为以下复合：

$$A \cong M^{-1} \otimes_B B \otimes_B M \xrightarrow{\mathrm{id}_{M^{-1}} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id}_M} M^{-1} \otimes_B B^* \otimes_B M \xrightarrow{S_M} A^*$$

最后一步用到了 Serre 自然性。

作为一个子例，取 $A = B$ 和 $M = \Pi B$。于是我们可以取 $M = M^{-1} = \Pi A$，其中 $M^{-1} \otimes_A M \longrightarrow A$ 是乘法。Serre 自然性映射 $1 \otimes f \otimes 1 \in M^{-1} \otimes B^* \otimes M$ 到

$$A \ni a \sim a \otimes 1 \in M^{-1} \otimes M \longmapsto f(-a)$$

我们看到，A 上的新 Frobenius 结构是 $-\epsilon$。

例 C.24. 我们计算 (A, A)-双模 $A_{(-1)^F}$ 的 Serre 自然性，并证明所得方形填充

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A^*} & A \\ {\scriptstyle A_{(-1)^F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A_{(-1)^F}} \\ A & \xrightarrow[A^*]{} & A \end{array}$$

作为双模映射，等于由超代数上的 $B\mathbb{Z}_2^F$-作用的自然性所给出的方形填充。[16] 为此，我们将利用 $A_{(-1)^F}$ 在映射

$$A_{(-1)^F} \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A \qquad a_1(-1)^F \otimes a_2(-1)^F \longmapsto (-1)^{|a_2|} a_1 a_2.$$

Serre 自然性映射现在可以等价地描述为一个映射

$$A_{(-1)^F} \otimes_A A^* \otimes_A A_{(-1)^F} \longrightarrow A^*$$

只需在其上计 算形如 $(-1)^F \otimes f \otimes (-1)^F$ 的元素即可。将结果作用于 $b \in A$，得 es

$$f(((-1)^F b(-1)^F) \cdot ((-1)^F \cdot (-1)^F)) = (-1)^{|b|} f(b)$$

我们得到 $(-1)^F \otimes f \otimes (-1)^F \longmapsto (-1)^{|f|} f$，这正是 $(-1)^F$ 的自然性数据。

我们提醒读者注意以下引理中第 3 点的非 Koszul 符号，它正是 Frobenius 结构的非分次对称性的来源。

引理 C.25。回顾一下，对于 $f \in A^*$、$a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$，我们有由下式定义的 A^* 的元素

$$(a_{g^{-1}} f \overline{a_g})(\overline{a}) := (-1)^{|a_{g^{-1}}|(|f|+|a_g|+|a|)} f(a_g \overline{a a_{g^{-1}}}).$$

对于 A 上的非分次对称 *Frobenius* 结构，以下各项是等价的。

[16] 这已经由配边假设推出：$A_{(-1)^F}$ 是对称幺半自然变换，因此保持 SO_2-作用。

1. $\overline{\lambda\ (a_g a_{g^{-1}})} = \lambda\ (a_{g^{-1}} a_g)$ 对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$

2. $a_g \lambda a_{g^{-1}} = (-1)^{|a_g|(a_g a_{g^{-1}})} \lambda$ 对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$均成立。

3.
$$S_{A_g}(\lambda \otimes_A a_g) = (-1)^{|a_g|} a_g \otimes_{\overline{A}} \overline{\lambda}$$
对所有 $a_g \in A_g$均成立

这里我们隐式地使用了由 $f(a) = f(a)$定义的同构 $A^{*} \cong A^{*}$。

证明。根据定义

$$(a_{g^{-1}} \lambda a_g)(a) = (-1)^{|a_{g^{-1}}|(|a_g|+|a|)} \lambda(a_g a a_{g^{-1}})$$
$$((a_{g^{-1}} a_g)\overline{\lambda})(a) = (-1)^{|a|(|a_{g^{-1}}|+|a_g|)} \overline{\lambda(a a_{g^{-1}} a_g)}.$$

由于 λ 是偶数，我们不妨设 $|a_{g^{-1}}| + |a_g| + |a| = 0$。计算各项符号后可得，$a_g \lambda a_{g^{-1}} = (-1)^{|a_g|(a_g a_{g^{-1}})} \lambda$ 等价于

$$\overline{\lambda(a_g a a_{g^{-1}})} = \lambda(a a_{g^{-1}} a_g)$$

对所有 $a \in A$均成立。由于 $a a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$，且我们可以取特例 $a = 1$，因此这等价于

$$\overline{\lambda(a_g a_{g^{-1}})} = \lambda(a_{g^{-1}} a_g)$$

对所有 $a_g \in A_g$ 和 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$都成立。因此，我们已经证明，条件 1 等价于条件 2。

现在我们详细说明 Serre 自然性，并将例 C.21 推广到反幺正情形。设 $m_j \in A_g$和 $n_j \in A_{g^{-1}}$ 是有限个元素的集合，使得

$$\sum_j m_j n_j = 1 \in A.$$

那么，对于 $f \in A^{*}$，我们有

$$S_{A_g}(f \otimes_A a_g) = \sum_j m_j \otimes_{\overline{A}} n_j f a_g$$

因此，只需证明引理中的条件 2 等价于

$$\sum_j m_j \otimes_A n_j \lambda a_g = (-1)^{|a_g|} a_g \otimes_{\overline{A}} \overline{\lambda} \quad \forall a_g \in A_g.$$

假设条件 2 成立，则通过以下计算可得该方程

$$\sum_j m_j \otimes_A n_j \lambda a_g = (-1)^{|a_g|} \sum_j m_j \otimes_A (n_j a_g)\overline{\lambda} = (-1)^{|a_g|} \sum_j m_j (n_j a_g) \otimes_A \overline{\lambda} = (-1)^{|a_g|} a_g \otimes_A \overline{\lambda}$$

反过来，假设方程 C.5 对所有 a_g 都成立，并令 $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$。由于 $A_{g^{-1}}$ 是可逆双模，且乘法映射 $A_{g^{-1}} \otimes_A A_g \longrightarrow A$ 是同构，我们可以在等式左侧张量上 $a_{g^{-1}}$，从而得到

$$(-1)^{|a_g|} a_{g^{-1}} a_g \overline{\lambda} = \sum_j (a_{g^{-1}} m_j)(n_j \lambda a_g) = a_{g^{-1}} \lambda a_g$$

□

超代数双范畴中的 Serre 与对偶组合如下，将同构 $S_c^* \cong S_{c^*}$ 特化到当前情形。

引理 C.26. 设 A 是一个有限维超代数。那么映射

$$\phi : (A^*)^{op} \longrightarrow (A^{op})^*, \quad \phi(f^{\mathrm{op}})(a^{op}) = f(a)$$

是一个(A^{op}, A^{op})-双模同构。注意，在$(A^*)^{op}$ 中，我们取双模的相反对象；而在$(A^{op})^*$ 中，我们取代数的相反代数。

证明。 若 $b^{\mathrm{op}} \in B^{\mathrm{op}}$，则 $b^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} = (-1)^{|b||f|}(fb)^{\mathrm{op}}$经 ϕ映射为

$$\phi(b^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}})(a^{\mathrm{op}}) = (-1)^{|b||f|}(fb)(a) = (-1)^{|b||f|} f(ba).$$

另一方面，我们可以计算

$$(b^{\mathrm{op}}\phi(f))(a^{\mathrm{op}}) = (-1)^{|b||\phi(f)|+|b||a|}\phi(f)(a^{\mathrm{op}}b^{\mathrm{op}}) = (-1)^{|b||\phi(f)|}\phi(f)((ba)^{\mathrm{op}}) = (-1)^{|b||f|} f(ba)$$

因此 ϕ 是一个左 A^{op}-模映射。验证它是右模映射的方法类似。 □

C.6 ZB2 × BZF2 × $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F \times \mathrm{O}_2$ 在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的作用

接下来我们讨论 O_2 在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上的作用与 C.4 节中 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 在 sAlg 上的对称幺半作用之间的相容性。注意，$\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$ 作用限制在 $\mathrm{sAlg}^{\mathrm{fd}}$ 上，因为它是对称幺半的，因此保留对偶和逆元。同样，由于对称幺半性，这些作用结合起来构成一个 $(\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F) \times O_2$ 作用。现在我们将明确给出这两个作用交换的数据。

首先，注意函子 (.) 和 $(.)^{\mathrm{op}}$ 严格交换。特别是，等式 $A^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}}$ 保留了两边的典范对偶数据。这是我们对 sVect 上复共轭函子的幺半群数据所作选择的结果，因此在 sAlg 上也成立。因此，为所有可逆双模选择逆元，并记住诱导的典范同构 ${M_{\mathrm{op}}}^{-1} \cong M^{\mathrm{op}-1}$ 后，这就给出了函子 $\rho(_)$ 和 $\rho(R)$ 交换的数据。由此我们指定了 $R_{-,R}$ 和 $R_{R,-}$。由于 $A = A$ 和 $A^{\mathrm{opop}} = A$ 也严格交换，剩余的高阶相容性 ω_{g_1, g_2, g_3} 也都是恒等式。

现在我们来讨论 O_1 与 $B\mathbb{Z}_2^F$之间的相容性数据。作为方程 (C.2) 和 (C.3)的一个特例，我们有

$$A_{(-1)^F} \cong {}_{(-1)^F}A \quad a(-1)^F \longmapsto (-1)^F(-1)^{|a|}a$$

以及 $(A_{(-1)^F})^{\mathrm{op}} \cong {}_{(-1)^F}(A^{\mathrm{op}})$。另请回想，利用代数同态 $(-1)^F$ 的平方为恒等映射这一事实， $A_{(-1)^F}$ 有一个典范的自逆。结合这些同构，便得到如下修正，它规定了如 B.3 节所述的 $(-1)^F$ 如何保持对偶。换言之，我们已经指定了作用的R_{γ_1, γ_2}-型数据，它来自 2-群 $O_1 \times \mathbb{Z}_2^F$中由 1-态射构成的方程 $(-)(-1)^F = (-1)^F(-)$。

$\mathbb{Z}_2^R \times B\mathbb{Z}_2^F$作用与 Serre 之间唯一的相容性数据是同构 $\overline{A^*} \cong \overline{A}^*$，它由命题 B.12推出。它由 $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$ 给出。

C.7 超代数双范畴上的诱导作用

在本节中，我们将证明，2-群在 sVect 上的对称幺半作用会规范地诱导出其在 sAlg 上的对称作用。我们的主要动机是得到一个由 C.1 节中的作用所诱导的、作用于 sAlg 的对称幺半 $\mathbb{Z}_2^B \times B\mathbb{Z}_2^F$-作用。本节的证明虽然冗长，但十分直接；我们将其列出仅为完整起见。我们不假设任何对偶可对偶性，也不将讨论限制在核心上。

从更具概念性的角度来看，我们将首先至少部分地构造一个幺半 2-范畴的函子 $\mathrm{Aut}_{sym-mon}\mathsf{sVect} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{sym-mon}\mathsf{sAlg}$。然后，我们通过复合得到 $\mathcal{G}$ 在 sAlg 上的作用

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{sym-mon}\,\mathsf{sVect} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{sym-mon}\,\mathsf{sAlg}.$$

因此，我们先给出若干引理，说明如何在 $\mathrm{Aut}_{sym-mon}\mathsf{sVect}$ 的对象和态射上定义这个函子，也就是说，如何将对称幺半函子和幺半自然变换从 sVect 提升到 sAlg。我们将经常用到对称幺半函子 $\mathsf{sAlg}_1 \longrightarrow \mathsf{sAlg}$。

注 C.27. 设 $\mathcal{G}$ 是一个 2-群，它对一个对称幺半 1-范畴 $\mathcal{C}$ 有对称幺半作用。假设 $\mathcal{C}$ 满足在 $\mathcal{C}$ 中构造 E_1-代数的良定义 Morita 2-范畴所需的性质。那么本节的结果应当可以推广，从而在其上得到一个 $\mathcal{G}$-作用。

引理 C.28. 设 $F : \mathsf{sVect} \longrightarrow \mathsf{sVect}$ 是一个幺半等价。那么它诱导一个函子 $\hat{F} : \mathsf{sAlg} \longrightarrow \mathsf{sAlg}$，它在对象上将幺半群

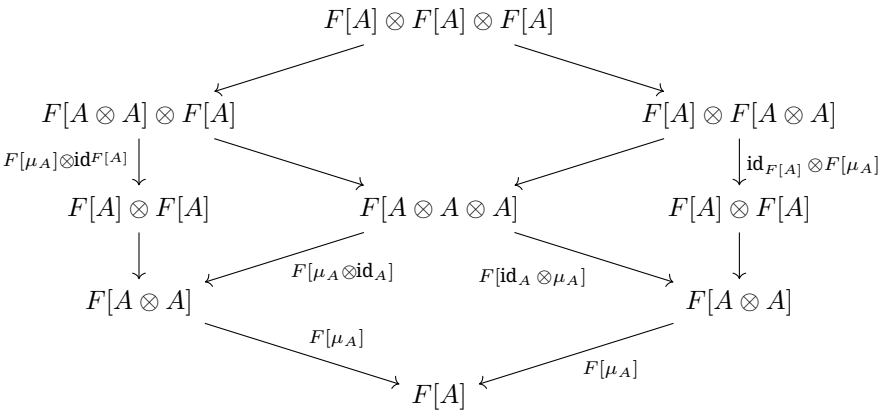
$$(A, \eta_A : \mathbb{C} \longrightarrow A, \mu_A : A \otimes A \longrightarrow A)$$

在sVect 中映射为

$$\hat{F}(A) := (F[A], F[\eta_A] : \mathbb{C} \longrightarrow F[\mathbb{C}] \longrightarrow F[A], F[A] \otimes F[A] \cong F[A \otimes A] \xrightarrow{F[\mu_A]} F[A])$$

其中我们用到了 F 的幺半性数据和单位性。当 F_1、F_2 是两个幺半函子时，则有 $\widehat{F_2 \circ F_1} = \hat{F}_1 \circ \hat{F}_2$。此外，若 F 是对称幺半的，那么它会在 F 上诱导一个对称幺半结构。

证明。 不失一般性，我们可以假设 F 严格幺且满足结合性。为验证代数 $F(A)$ 的结合性，考虑如下图表



上方的方块根据 F 为幺半的条件交换。左侧和右侧方块根据同构 $F[V \otimes W] \cong F[V] \otimes F[W]$ 的自然性交换。例如，对于左侧方块，我们取 $V = A \otimes A$，$W = A$，并令态射为 $\mu_A \otimes \mathrm{id}_A$。下方的方块根据 A 的结合性交换。容易看出 $F[A]$ 是幺的。

接下来我们定义一个函子 $\hat{F}$：$Bim(A, B) \longrightarrow Bim(\hat{F}[A], \hat{F}[B])$。与代数的情形类似，如果 $(M, l_M : \hat{B} \otimes M \longrightarrow M,\ r_M : M \otimes A \longrightarrow M)$ 是一个 (B, A)-双模，我们通过对所有向量空间和映射应用 F，并在必要处应用幺半性数据，来定义 $F[M]$。对于 $F[M]$，三个结合律条件（即对应于复合三个元素的几种方式相等）可由与上图类似的图表得到验证。

如果 $\phi\colon M \longrightarrow M'$ 是 $(B,\ A)$-双模的一个态射，我们通过 $F[\phi]$ 定义 $\hat{}\ F[\phi]$。这是一个左 $\hat{}F(B)$-模映射，因为图表

$$\begin{array}{ccccc} F(B)\otimes F(M) & \longrightarrow & F(B\otimes M) & \xrightarrow{l_M} & F(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{F(A)}\otimes F(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle F(\mathrm{id}_A\otimes\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle F(\phi)} \\ F(B)\otimes F(M') & \longrightarrow & F(B\otimes M') & \xrightarrow{l_{M'}} & F(M') \end{array}$$

在向量空间中可交换。事实上，右边的方块可交换，因为 ϕ 是左 B-模映射；左边的方块可交换，因为 $F[V\otimes W]\cong F[V]\otimes F[W]$ 是自然的。同样， $F(\phi)$是右 $F(A)$-模映射。映射$\hat{}F\colon Bim(A,\ B) \longrightarrow Bim(\hat{}F[A],\ \hat{}F[B])$ 将 id_M 映到 $\mathrm{id}_{\hat{}F[M]}$，并且是一个函子，因为 F 是。

$\hat{}$ 接下来，我们需要给出数据，以说明 F 保持1-态射的复合。具体而言，我们需要定义一个自然变换

$$\hat{F}[N\otimes_B M]\cong \hat{F}[N]\otimes_{\hat{F}[B]}\hat{F}[M]$$

函子之间的

$$Bim(B,C)\times Bim(A,B)\longrightarrow Bim(\hat{F}[A],\hat{F}[B]).$$

我们断言， F 的幺半性数据唯一地分解为所需的同构

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}[N\otimes_B M] & \dashleftarrow & \hat{F}[N]\otimes_{\hat{F}[B]}\hat{F}[M] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{F}[N\otimes_{\mathbb{C}} M] & \longleftarrow & \hat{F}[N]\otimes_{\mathbb{C}}\hat{F}[M] \end{array}$$

为证明虚线箭头存在，只需证明从右下角经左侧到左上角的复合是 B-平衡的。为此，我们需要证明图表

$$\begin{array}{ccccc} F[N]\otimes F[B]\otimes F[M] & \longrightarrow & F[N]\otimes F[B\otimes M] & \xrightarrow{\mathrm{id}_{F[N]}\otimes F[l_M]} & F[N]\otimes F[M] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F[N\otimes B]\otimes F[M] & \longrightarrow & F[N\otimes B\otimes M] & \xrightarrow{F[\mathrm{id}_N\otimes l_M]} & F[N\otimes M] \\ \downarrow{\scriptstyle F[r_N]\otimes\mathrm{id}_{F[M]}} & & \downarrow{\scriptstyle F[r_N\otimes\mathrm{id}_M]} & & \downarrow \\ F[N]\otimes F[M] & \longrightarrow & F[N\otimes M] & \longrightarrow & F[N\otimes_B M] \end{array}$$

可交换。左上方的方形可交换，因为 F 是幺半的；右上方和左下方的方形可交换，因为 $F[V\otimes W]\cong F[V\otimes W]$ 是自然的；右下方的方形则根据关于 B的张量积的定义可交换。现在我们来证明该映射

$$\hat{F}[N\otimes_B M]\longrightarrow \hat{F}[N]\otimes_{\hat{F}[B]}\hat{F}[M]$$

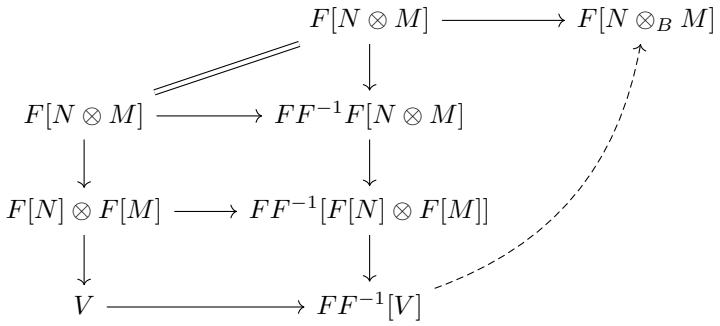
是一个同构。由于上方方形中的左侧映射和下方映射都是满射，因此它是满射。为证明单射性，我们利用 F 是一个等价。令 F^{-1} 为 F 的一个幺半逆，并具有相应的幺半自然同构 $F^{-1}F\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{sVect}_\circ}$ 要证明$\hat{}\ F[N\otimes_B M]$是$\hat{}\ F[N]\hat{}\ \hat{}$与 $F[B]$ 上的 $F[M]$ 的张量积，只需验证泛性质。鉴于我们希望成为同构的映射的定义方式，我们必须证明：对于任意 $F[B]$-平衡映射 $f\colon\ F[M]\otimes F[N]\longrightarrow V$到$\tilde{}\ \hat{}$，以及任意超向量空间 V，都存在唯一的提升 $f\colon\ F[M\otimes_B N]\longrightarrow V$，使得关于复合

$$\hat{F}[M]\otimes\hat{F}[N]\cong\hat{F}[M\otimes N]\longrightarrow\hat{F}[M\otimes_B N].$$

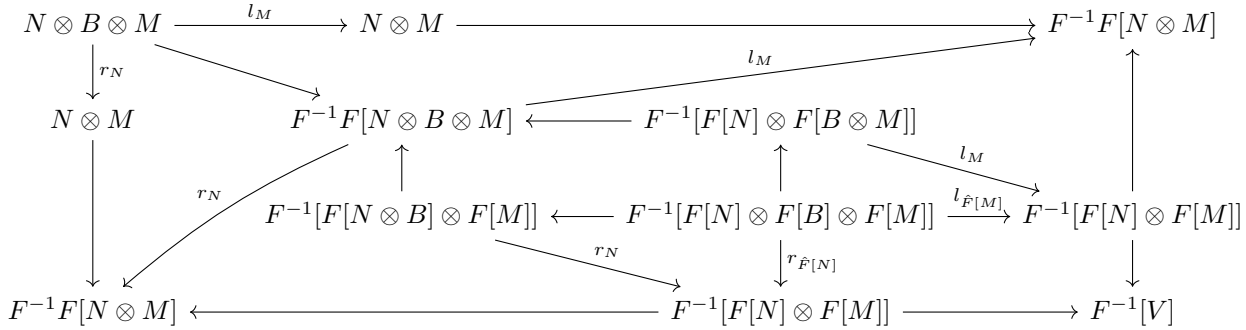
通过复合定义 f'： $N \otimes M \longrightarrow F^{-1}[V]$

$$N \otimes M \cong F^{-1}F[N \otimes M] \cong F^{-1}[F[N] \otimes F[M]] \xrightarrow{F^{-1}(f)} F^{-1}[V].$$

如果我们能证明 f'是 B-平衡的，那么就存在唯一的提升 $\tilde{f}'$: $N \otimes_B M \longrightarrow F^{-1}[V]$。利用 F 是全忠实的，我们便可以对 f' 应用 F，从而得到图表中存在唯一的提升



左侧的纵向复合是 f，且左边两个方块交换，因为 $\mathrm{id}_{\mathsf{sVect}} \Rightarrow FF^{-1}$是一个幺半˜自然变换。因此在这种情况下存在所需的提升 f，所以只需证明 f'是 B-平衡的。这意味着我们必须证明以下图表交换



这里我们用到了自然同构 $\mathrm{id} \Rightarrow F^{-1}F$。右下方块交换，因为 f是 ˆ $F[B]$-平衡的。该方块北侧和西侧的三角形根据 $F[M]$上的双模结构 ˆ的定义而交换。中间方块根据 F的幺半结合性而交换。其余四边形则根据 $\mathrm{id} \Rightarrow F^{-1}F$的自然性以及同构 $F[V] \otimes F[W] \cong F[V \otimes W]$而交换。

现在令 ψ: $N \longrightarrow N'$为 (C, B)-双模之间的映射，并令 ϕ: $M \longrightarrow M'$为 (B, A)-双模之间的映射。那么自然性方块

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}[N \otimes_B M] & \longleftarrow & \hat{F}[N] \otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M] \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{F}[\psi \otimes_B \phi]} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{F}[\psi] \otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[\phi]} \\ \hat{F}[N' \otimes_B M'] & \longleftarrow & \hat{F}[N'] \otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M'] \end{array}$$

它是由向量空间中的交换方块诱导的，因此可交换

$$\begin{array}{ccc} F[N \otimes M] & \longleftarrow & F[N] \otimes F[M] \\ \downarrow{\scriptstyle F[\psi \otimes \phi]} & & \downarrow{\scriptstyle F[\psi] \otimes F[\phi]} \\ F[N' \otimes M'] & \longleftarrow & F[N'] \otimes F[M'] \end{array}$$

根据 $F[V \otimes W] \cong F[V] \otimes F[W]$ 的自然性，该图可交换。

注意，将代数 $\hat{} F[A]$ 视为一个（$\hat{}F[A]$, $\hat{}F[A]$）-双模时，它等于将（A, A）-双模 A 应用于函子 $\hat{}F$: $Bim(A, A) \longrightarrow \hat{}\hat{}\hat{}Bim(F[A], F[A])$。这表明 F 保持恒等 1-态射。由于张量积在 $\mathbb{C}$ 上满足结合公理，而这些复合正是由其诱导的，因此 $\hat{}F$ 满足三个 1-态射复合的结合公理。同样，对于一个（A, B）-双模，图表

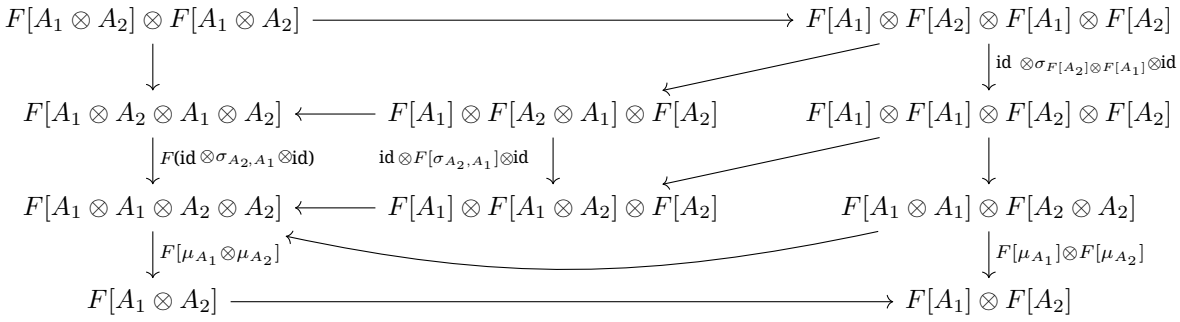
$$\begin{array}{ccc} \hat{F}[A] \otimes_{\hat{F}[A]} \hat{F}[M] & \longrightarrow & \hat{F}[A \otimes_A M] \\ \downarrow & \swarrow & \\ \hat{F}[M] & & \end{array}$$

$\hat{}$ 具有交换性，因为在 $\mathbb{C}$ 上进行张量积时也是如此，另一侧同理。我们已经证明， F 是 2-范畴之间的函子。考察这些构造可知，等式 $F_2 \circ F_1 = F_1 \circ F_2$ 严格成立。

$\hat{}\hat{}$ 现在假设 F 是对称的。我们首先定义函子 sAlg $\times$ sAlg $\longrightarrow$ sAlg 之间的自然同构 $\phi_{A_1,\ A_2}$: $F[A_1 \otimes A_2] \cong \hat{}\hat{}F[A_1] \otimes F[A_2]$。对于对象 $(A,\ \mu_A,\ \eta_A)$，幺半群数据$\phi_{A_1,\ A_2}$: $F[A_1 \otimes A_2] \cong F[A_1] \otimes F[A_2]$ 是超向量空间的同构。我们需要验证它是代数映射，以便将自然同构取为对象 A 上诱导的可逆双模。回想一下，两个代数的张量积的乘法定义为

$$A_1 \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes A_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \sigma_{A_2,A_1} \otimes \mathrm{id}} A_1 \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_2 \xrightarrow{\mu_{A_1} \otimes \mu_{A_2}} A_1 \otimes A_2.$$

其中 σ 表示编织。因此我们考虑图表



从左上角经过左侧到右下角，对应于在 $\hat{} F[A_1 \otimes A_2]$ $\hat{}\hat{}$ 中进行乘法，随后再取到 $F[A_1] \otimes F[A_2]$ 的同构；而经过右侧，则是先取 $\hat{}\hat{}$ 同构，再在 $F[A_1] \otimes F[A_2]$ 中进行乘法。左上角的方块根据幺半函子所满足的结合条件的各种应用而交换。左侧方块根据 ϕ 的自然性而交换。右上方形之所以交换，是因为 F 是对称的。剩余的下半部分根据 ϕ 的自然性和结合条件而交换。

现在我们定义

$$\hat{\phi}_{A_1,A_2} := \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}}$$

它是一个从 $\hat{} F[A_1] \otimes \hat{}F[A_2]$ 到 $\hat{} F[A_1 \otimes A_2]$ 的可逆 1-态射。令 M_1 为一个 $(B_1,\ A_1)$-双模 $\hat{}$, M_2 为一个 $(B_2,\ A_2)$-双模。对于 ϕ 的自然性数据，我们需要指定一个自然同构

$$\hat{F}[M_1 \otimes M_2] \otimes_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]} \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} \cong \hat{F}[B_1 \otimes B_2]_{\phi_{B_1,B_2}} \otimes_{\hat{F}[B_1] \otimes \hat{F}[B_2]} (\hat{F}[M_1] \otimes \hat{F}[M_2])$$

利用双模作用，右侧作为向量空间自然同构于 $F[M_1] \otimes F[M_2]$，而左侧自然同构于 $F[M_1 \otimes M_2]$。由此得到一个双模

同构：在 $F[M_1 \otimes M_2]$ 上赋予左侧 $\hat{}\, F[B_1 \otimes B_2]$ 作用，其定义如前文对模 $\hat{}\,\hat{}$ 所述；再赋予右侧 $F[A_1] \otimes F[A_2]$ 作用，先应用 ϕ_{A_1,A_2}，然后使用右侧 $\hat{}F[A_1 \otimes A_2]$ 作用。同样，在 $F[M_1] \otimes F[M_2]$ 上赋予其典范的右侧 $\hat{}\, F[A_1] \otimes \hat{}F[A_2]$ 作用，但将左侧 $\hat{}\, F[B_1] \otimes \hat{}F[B_2]$ 作用与 $\phi^{-1}_{B_1,B_2}$ 复合，使其成为一个 $\hat{}\, F[B_1 \otimes B_2]$ 作用。在这些识别下，我们定义 $\hat{}\phi_{M_1,M_2} \coloneqq \phi^{-1}_{M_1,M_2}$ [17]

现在我们证明这是一个双模映射。回顾模的张量积定义，保持左乘法所需交换的图表为

$$\begin{array}{ccc}
F[A_1 \otimes A_2] \otimes F[M_1 \otimes M_2] & \longleftarrow & F[A_1 \otimes A_2] \otimes F[M_1] \otimes F[M_2] \\
\downarrow & & \uparrow \\
F[A_1 \otimes A_2 \otimes M_1 \otimes M_2] & & F[A_1] \otimes F[A_2] \otimes F[M_1] \otimes F[M_2] \\
\downarrow{\scriptstyle F[\mathrm{id} \otimes \sigma_{A_2,M_1} \otimes \mathrm{id}]} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \sigma_{F[A_2],F[M_1]} \otimes \mathrm{id}} \\
 & & F[A_1] \otimes F[M_1] \otimes F[A_2] \otimes F[M_2] \\
 & & \downarrow \\
F[A_1 \otimes M_1 \otimes A_2 \otimes M_2] & \longleftarrow & F[A_1 \otimes M_1] \otimes F[A_2 \otimes M_2] \\
\downarrow{\scriptstyle F[l_{M_1} \otimes l_{M_2}]} & & \downarrow{\scriptstyle F[l_{M_1}] \otimes F[l_{M_2}]} \\
F[M_1 \otimes M_2] & \longleftarrow & F[M_1] \otimes F[M_2]
\end{array}$$

这相当于在上方矩形中应用 F 的对称性和关于 $\otimes$ 的结合性，并在下方矩形中应用 ϕ 的自然性。对于右 $F[B_1] \otimes F[B_2]$-作用的相容性同理。

接下来我们必须证明，上述自然性数据定义了函子之间的自然同构

$$\mathsf{Bim}(A_1, B_1) \times \mathsf{Bim}(A_2, B_2) \longrightarrow \mathsf{Bim}(\hat{F}[A_1] \otimes \hat{F}[A_2], \hat{F}[B_1 \otimes B_2])$$

为证明这是一个自然同构，设 $\phi_1 \colon M_1 \longrightarrow M_1'$ 是一个（B_1，A_1）-双模映射，且 $\phi_2 \colon M_2 \longrightarrow M_2'$ 是一个（B_2，A_2）-双模映射。我们必须证明图表

$$\begin{array}{ccc}
\hat{F}[M_1 \otimes M_2] \otimes_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]} \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} & \xrightarrow{\hat{\phi}_{M_1,M_2}} & \hat{F}[B_1 \otimes B_2]_{\phi_{B_1,B_2}} \otimes_{\hat{F}[B_1] \otimes \hat{F}[B_2]} (\hat{F}[M_1] \otimes \hat{F}[M_2]) \\
\downarrow{\scriptstyle \hat{F}[\phi_1 \otimes \phi_2] \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \hat{F}[\phi_1] \otimes \hat{F}[\phi_2]} \\
\hat{F}[M_1' \otimes M_2'] \otimes_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]} \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} & \xrightarrow{\hat{\phi}_{M_1',M_2'}} & \hat{F}[B_1 \otimes B_2]_{\phi_{B_1,B_2}} \otimes_{\hat{F}[B_1] \otimes \hat{F}[B_2]} (\hat{F}[M_1'] \otimes \hat{F}[M_2'])
\end{array}$$

交换。这是因为超向量空间中的底层图表

$$\begin{array}{ccc}
F[M_1 \otimes M_2] & \xleftarrow[\phi_{M_1,M_2}]{} & F[M_1] \otimes F[M_2] \\
\downarrow{\scriptstyle F[\phi_1 \otimes \phi_2]} & & \downarrow{\scriptstyle F[\phi_1] \otimes F[\phi_2]} \\
F[M_1' \otimes M_2'] & \xleftarrow[\phi_{M_1',M_2'}]{} & F[M_1'] \otimes F[M_2']
\end{array}$$

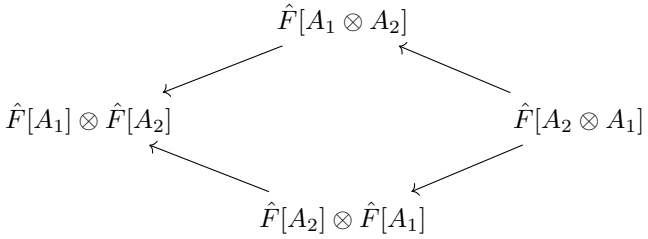
可交换。最后，我们需要证明

$$\begin{array}{ccc}
\hat{F}[A_1 \otimes A_2] \otimes_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]} \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} & \xleftarrow[\hat{\phi}_{M_1,M_2}]{} & \hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} \otimes_{\hat{F}[A_1] \otimes \hat{F}[A_2]} (\hat{F}[A_1] \otimes \hat{F}[A_2]) \\
\downarrow{\scriptstyle l_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}}}} & \swarrow{\scriptstyle r_{\hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}}}} & \\
\hat{F}[A_1 \otimes A_2]_{\phi_{A_1,A_2}} & &
\end{array}$$

[17]这个公式中不太自然地出现逆的原因在于约定问题。请注意，在 2-范畴中填充自然变换的自然性方块的 2-态射，其通常约定的方向为 $G \Rightarrow F$。我们也采用这一约定，参见定义 A.8 的第二个要点。

可交换，其中 M_1 是（A_1， A_1）-双模 A_1，而 M_2 是（A_2， A_2）-双模 A_2（我们没有在 A_1 中代入 ˆ，因为这会与 $\phi_{A_1,\ A_2}$ 对 A_1， A_2 代数的记号冲突）。根据定义展开后，这一点显而易见，因为 $\phi_{A_1,\ A_2}$只改变右乘法。至此，我们已证明 ϕ 定义了一个自然同构 $F[A_1 \otimes A_2] \cong F[A_1] \otimes F[A_2]$。由于可以假设 F 具有严格单位性，且相应的幺半群数据 $F[A \otimes \mathbb{C}] \cong F[A] \otimes F[\mathbb{C}] = F[A]$也是如此，因此 F也具有严格的 ˆ ˆ 单位性。利用 F 本身就是结合的， F 的结合子为恒等映射。至此，我们已证明 F 是幺半的。

为证明 ˆF 是对称的，取由代数同构 σ_{A_1,A_2} 诱导的双模 ˆ $F[A_1 \otimes A_2] \cong$ ˆ$F[A_2 \otimes A_1]$ 。对称性数据要求填充由 1-态射构成的图表



该图表由代数同态的交换图诱导，因此可以用形如 $C_g \otimes_B B_f \cong C_{gf}$ 的同构填充。出于同样的原因，$\sigma_{A_2,A_1}\sigma_{A_1,A_2} = \mathrm{id}_{A_1 \otimes A_2}$ 给出一个从复合到恒等双模的 2-同构

$$\hat{F}[A_1 \otimes A_2] \longrightarrow \hat{F}[A_2 \otimes A_1] \longrightarrow \hat{F}[A_1 \otimes A_2]$$

。如 [SP09, 图2。3] 所示，以不同顺序编织三个元素也有典范填充，这是因为 sVect 的编织满足相应条件。最后，关于成为对称幺半函子的其余条件 [McC00, BHA1, BHA2] 均成立，因为涉及的所有 2-态射都由 1-范畴 sAlg_1 中的严格等式诱导。 □

ˆ注C.29. 注意，我们需要 F 是幺半的，才能诱导出函子 F。此外，如果 F 不是对称的， F 就不是幺半的。但如果 F 是对称幺半的，那么 F 甚至是对称幺半的。

引理 *C.30.* 设 $\alpha : F \Rightarrow G$ 是 *sVect* 上幺半函子之间的幺半自然同构。则 α 在 *sAlg* 上诱导出一个自然变换；在对象上，它将 A 映射为由代数同态 *ˆF(A) ⟶ ˆG(A)* 诱导的 *(ˆG(A), ˆF(A))*-双模，其中该同态作为向量空间之间的映射，由 *α(A) :F(A) ⟶ G(A)* 给出。如果 F 和 G 是对称的，那么 α 是典范的对称幺半函子。

证明. 对于代数 A， $\alpha[A]$: $F[A] \longrightarrow G[A]$ 是线性同构。由于 α 是幺半且自然的，这定义了一个代数同态 ˆ $F[A] \longrightarrow$ ˆ$G[A]$。定义

$$\hat{\alpha}[A] := \hat{G}[A]_{\alpha[A]}$$

成为由该代数同态诱导的（ˆ$G[A]$, ˆ$F[A]$）-双模。由于 $\alpha[A]$ 是一个可逆线性映射，这个双模是可逆的。作为 2-范畴之间函子的自然同构，对于给定的（B， A）-双模 M，我们仍需为ˆα 提供额外的自然性数据。为此，我们必须提供一个同构

$$\hat{G}[M] \otimes_{\hat{G}[A]} \hat{G}[A]_{\alpha[A]} \cong \hat{G}[B]_{\alpha[B]} \otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M]$$

（ˆ$G[B]$, ˆ$F[A]$）-双模。情况与上一个引理中幺半性数据 ˆof F 自然性的证明类似。右边与 $F[M]$ 有典范同构，且带有其典范的右作用

ˆ$F[A]$-作用，但我们将左侧 ˆ $F[B]$-作用与 $\alpha[A]^{-1}$ 复合，使其成为 ˆ $G[B]$-作用。左侧 ˆ实际上是 $G[M]$，它具有一个有趣的右 $F[A]$-作用：先应用 $\alpha[A]$，再使用右 ˆ $G[A]$-作用。然后我们定义 ˆ$\alpha[M] := \alpha[M]^{-1}$。

现在我们必须证明，这是上述双模结构下的一个双模映射。为证明它是右 $F[A]$-模映射，考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
F[M]\otimes F[A] & \longrightarrow & F[M\otimes A] & \xrightarrow{F[r_M]} & F[M] \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha[M]\otimes \mathrm{id}} & & & & \\
G[M]\otimes F[A] & & \downarrow{\scriptstyle \alpha[M\otimes A]} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha[M]} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\alpha[A]} & & & & \\
G[M]\otimes G[A] & \longrightarrow & G[M\otimes A] & \xrightarrow{G[r_M]} & G[M]
\end{array}$$

左矩形因 α 的幺半性而交换，右矩形因 α 的自然性而交换。从左上角出发，沿图表中的左侧复合前进，相当于先应用函数 $\alpha[M]$，再从右侧乘以 $F[A]$ 的一个元素；另一条路径则相当于先从右侧乘以 $F[A]$。类似的图表可以证明，$\alpha[M]$ 是左 $G[B]$-模映射。

接下来，我们必须证明这个函子之间的同构具有自然性，这些函子属于 1-范畴 s

$$Bim(A,B) \longrightarrow Bim(\hat{F}[A], \hat{G}[B])$$

因此，设 $\phi: M \longrightarrow M'$ 是一个 (B,A)-双模映射。我们需要证明交换的图表是 s

$$\begin{array}{ccc}
\hat{G}[M]\otimes_{\hat{G}[A]} \hat{G}[A]_{\alpha[A]} & \xrightarrow{\hat{\alpha}[M]} & \hat{G}[B]_{\alpha[B]}\otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M] \\
\downarrow{\scriptstyle \hat{G}[\phi]\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\hat{F}[\phi]} \\
\hat{G}[M']\otimes_{\hat{G}[A]} \hat{G}[A]_{\alpha[A]} & \xrightarrow{\hat{\alpha}[M']} & \hat{G}[B]_{\alpha[B]}\otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M']
\end{array}$$

由 α 的自然性可知，该图表在向量空间中显然交换；等价地，我们也可以将它表示为以下图表

$$\begin{array}{ccc}
G[M] & \xrightarrow{\alpha[M]} & F[M] \\
\downarrow{\scriptstyle G[\phi]} & & \downarrow{\scriptstyle F[\phi]} \\
G[M'] & \xrightarrow{\alpha[M']} & F[M']
\end{array}$$

为证明 ˆα 是一个自然变换，我们仍需证明，如果 N 是一个 $(C,\ B)$-双模，那么

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{G}[N\otimes_B M]\otimes_{\hat{G}[A]} \hat{G}[A]_{\alpha[A]} & \longleftarrow & \hat{G}[N]\otimes_{\hat{G}[B]} \hat{G}[M]\otimes_{\hat{G}[A]} \hat{G}[A]_{\alpha[A]} & & \\
\downarrow{\scriptstyle \hat{\alpha}[N\otimes_B M]} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\hat{\alpha}[M]} & & \\
 & & \hat{G}[N]\otimes_{\hat{G}[B]} \hat{G}[B]_{\alpha[B]}\otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M] & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\alpha}[M]\otimes\mathrm{id}} & & \\
\hat{G}[C]_{\alpha[C]}\otimes_{\hat{F}[C]} \hat{G}[N\otimes_B M] & \longleftarrow & \hat{G}[C]_{\alpha[C]}\otimes_{\hat{F}[C]} \hat{F}[N]\otimes_{\hat{F}[B]} \hat{F}[M] & &
\end{array}$$

交换。回顾上述识别，这一点成立是因为它由以下图表诱导：

$$\begin{array}{ccc} G[N\otimes M] & \longleftarrow & G[N]\otimes G[M] \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\alpha[M]} \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha[M\otimes N]} & & G[N]\otimes F[M] \\ & & \uparrow{\scriptstyle \alpha[N]\otimes\mathrm{id}} \\ F[N\otimes M] & \longleftarrow & F[N]\otimes F[M] \end{array}$$

在向量空间中，由于 α 的幺半性而交换。要验证 $\hat{}\alpha$ 是自然变换，我们还需要检查以下单位条件：

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}[A]\otimes_{\hat{G}[A]}\hat{G}[A]_{\alpha[A]} & \xrightarrow{l_{\hat{G}[A]_{\alpha[A]}}} & \hat{G}[A]_{\alpha[A]} \\ & \searrow^{\hat{\alpha}[\hat{G}[A]]} & \uparrow{\scriptstyle r_{\hat{G}[A]_{\alpha[A]}}} \\ & & \hat{G}[A]_{\alpha[A]}\otimes_{\hat{F}[A]}\hat{F}[A] \end{array}$$

这里，斜向右下的箭头是将自然变换 $\hat{}\alpha$ 作用于 $(\hat{}G[A],\hat{}G[A])$-$\hat{}\hat{}$ 双模 $G[A]$。回想一下，只有 $G[A]_{\alpha[A]}$ 的右作用被 $\alpha[A]$ 扭曲，因此该图表可交换。所以 $\hat{}\alpha$ 是自然变换。

$\hat{}\hat{}$ 现在假设 F 和 G 是对称幺半的。 □

注 C.31. 注意，我们需要 α 是幺半的，才能导出自然变换 $\hat{}\alpha$。但在这种情况下，如果 F,G 是对称幺半的，那么它自动也是对称幺半的。

定理 C.32. 设一个2-群 $\mathcal{G}$ 对sVect有对称幺半作用。则存在由 $\mathcal{G}$ 在sAlg上的规范诱导作用。此外，定义中涉及的所有函子和自然变换都是对称幺半的。

证明。 回顾一下，1-范畴 $\mathcal{C}$ 上的对称作用由以下数据组成：

- 对称幺半函子 $\tau(g):\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$，不失一般性地假设其严格保单位；
- （带基点的）幺半自然变换 $T_{g_2,g_1}:\tau(g_2g_1)\Longrightarrow\tau(g_2)\circ\tau(g_1)$；
- 幺半自然变换 $\tau(\gamma):\tau(g)\Longrightarrow\tau(g')$，对每条路径 $\gamma:g\longrightarrow g'$ in $\mathcal{G}$ 均成立。

满足以下条件：

- $\tau(\gamma'\circ\gamma)=\tau(\gamma')\circ\tau(\gamma)$；
- $T_{\bullet,\bullet}$ 在其两个参数上是“结合的”；
- 图表

$$\begin{array}{ccc} \tau(g_2)\circ\tau(g_1) & \xLeftarrow{T_{g_2,g_1}} & \tau(g_2g_1) \\ \Downarrow{\scriptstyle \tau(\gamma_2)\bullet\tau(\gamma_1)} & & \Downarrow{\scriptstyle \tau(\gamma_2\otimes\gamma_1)} \\ \tau(g_2')\circ\tau(g_1') & \xLeftarrow[T_{g_2',g_1'}]{} & \tau(g_2'g_1') \end{array}$$

可交换。

我们要定义 $\mathcal{G}$ 在 sAlg 上的作用 $(\rho, R, \alpha, \omega)$。设 $\gamma\colon\ g \longrightarrow g'$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一条路径。由于 $\tau(g)$ 是对称幺半函子，而 $\tau(\gamma)\colon\ \tau(g) \Rightarrow \tau(g')$ 是幺半自然变换，最后两个引理便给出了规范诱导的对称幺半函子 $\rho(g) := \tau(g) : \mathrm{sAlg} \longrightarrow \mathrm{sAlg}$，以及对称幺半自然变换 $\rho(\gamma) := \tau(\gamma)\colon\ \rho(g) \Rightarrow \rho(g')$。此外，幺半自然变换 $T_{g_2,g_1}\colon\ \tau(g_2g_1) \Rightarrow \tau(g_2)\tau(g_1)$ 诱导出对称幺半自然变换

$$R_{g_2,g_1} : \rho(g_2g_1) = \widehat{\tau(g_2g_1)} \Rightarrow \tau(\widehat{g_2)\tau(g_1)} = \widehat{\tau(g_2)}\widehat{\tau(g_1)}.$$

根据图表 C.7，存在一个由代数同态构成的图表

$$\begin{array}{ccc} \rho(g'g)[A] & \xrightarrow{T_{g_1',g_1}[A]} & \rho(g_1')\rho(g_1)[A] \\ {\scriptstyle \tau(\gamma'\otimes\gamma)[A]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(\gamma')\bullet\tau(\gamma)[A]} \\ \rho(g_2'g_2)[A] & \xrightarrow{T_{g_2',g_2}[A]} & \tau(g_2')\tau(g_2)[A] \end{array}$$

这意味着由诱导双模构成的图表

$$\begin{array}{ccc} \rho(g'g)[A] & \xrightarrow{R_{g_1',g_1}[A]} & \rho(g_1')\rho(g_1)[A] \\ {\scriptstyle \rho(\gamma'\otimes\gamma)[A]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho(\gamma')\bullet\rho(\gamma)[A]} \\ \rho(g_2'g_2)[A] & \xrightarrow{R_{g_2',g_2}[A]} & \rho(g_2')\rho(g_2)[A] \end{array}$$

可以用恒等 2-态射填充。此外，对于 2-态射，两侧给出的自然变换也相等，因为它们由同一个代数同态诱导。因此，我们可以令 $R_{\gamma',\ \gamma} =$id 为恒等修正，并且满足修正的条件。类似地，由于 T 在其两个自变量上的结合性，定义 ω 的图表有一个严格填充。最后，由于严格等式 $\tau(\gamma')\tau(\gamma) = \tau(\gamma'\gamma)$，我们可以令 $\alpha_{\gamma',\ \gamma} =$ id。由于大量数据都是平凡的，其他所有条件（ ω 的五边形条件、 α 的结合性，以及 $\rho(- \otimes -) \Rightarrow \rho(-) \circ \rho(-)$ 的自然性条件）现在也都是平凡的。根据前面的引理，涉及的所有函子和自然变换确实都是对称幺半的。很容易验证，所有相关类型的单位元都被保留。

□

参考文献

[AF17] David Ayala 和 John Francis. 配边假设. 2017年.[ALW19] David Aasen、Ethan Lake 和 Kevin Walker. 费米子凝聚与超枢轴范畴. *J. Math. Phys.* 60 12 121901, 2019 , ( ): .[Ati88]

Michael F Atiyah. 拓扑量子场论. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68:175– 186, 1988.[BD95] John C. Baez 和 James Dolan. 高维代数与拓扑量子场论. *Journal of mathematical physics*, 36(11):6073–6105, 1995.[BEP15] Daniel Berwick-Evans 和 Dmitri Pavlov. 光滑一维拓扑场论是带联络的向量丛. *arXiv: Algebraic Topology*, 2015.[Bla98] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras*, 第5卷. 剑桥大学出版社, 1998.[CS19] Damien Calaque 和 Claudia Scheimbauer. 关于协边的 (∞ *Algebraic* , n)-范畴的一则注记. *& Geometric Topology* 19 2 533 655, 2019 , ( ): –.[CS21] Nils Carqueville 和 L´or´ant Szegedy. 完全扩张的 r-自旋拓扑量子场论. *arXiv preprint arXiv:2107.02046*, 2021.[Dav11] Orit Davidovich. *State sums in two dimensional fully extended topological field theories*. 博士论文, 2011.

[DP83] Albrecht Dold 和 Dieter Puppe. 对偶性、迹与转移. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova* 154 81 97, 1983 , : – .[DSPS 20] Christopher Douglas、Christopher Schommer-Pries 和 Noah Snyder. *Dualizable tensor categories*, 第 268卷. 美国数学学会, 2020.[FH21] Daniel S Freed 和 Michael J Hopkins. 反射正性与可逆拓扑相. *Geometry & Topology* 25 3 1165 1330, 2021 , ( ): – .[GJF 19] Davide Gaiotto 和 Theo Johnson-Freyd. 对称性保护拓扑相与广义上同调. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5):1–36, 2019.[GP21] Daniel Grady 和 Dmitri Pavlov. 几何协边假设. 2021.[GPS95] Robert Gordon、Anthony John Power 和 Ross Street. *Coherence for tricategories*, 第558卷. 美国数学学会, 1995.[GS18] Owen Gwilliam 和 Claudia Scheimbauer. 高阶 Morita 范畴中的对偶与伴随. *arXiv preprint arXiv:1804.10924* 2018 , .[Gun16] Sam Gunningham. 自旋 Hurwitz 数与拓扑量子场论. *Geometry & Topology*, 20 4 1859 1907, 2016 ( ): – .[GW09] Zheng-Cheng Gu 和 Xiao-Gang Wen. 张量纠缠过滤重整化方法与对称性保护拓扑序. *Physical Review B*, 80(15):155131, 2009.[Har12] Yonatan Harpaz. 1维配边假设. 2012.[Hes17] Jan Hesse. *Group Actions on Bicategories and Topological Quantum Field Theories*. 博士论文, 汉堡大学暨州立图书馆 Carl von Ossietzky, 2017年.[hs] Luuk Stehouwer (https://mathoverflow.net/users/122457/luuk stehouwer). 代数双范畴中 Serre 自同构自然性的显式表达式. MathOverflow. 网址：https://mathoverflow.net/q/373685（版本：2020-10-09）。[HSV16] Jan Hesse、Christoph Schweigert 和 Alessandro Valentino. Frobenius 代数与双范畴上群作用的同伦不动点. *Theory and Applications of Categories Vol. 32 2017 No. , , , , 18* 2016 *pp 652-681*, .[HV19] Jan Hesse 和 Alessandro Valentino. 通过同伦作用理解 Serre 自同构，以及定向流形的配边假设. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 第 LX 卷：194–236, 2019.[Jaf18] Arthur Jaffe. 昔日与今日的反射正性. *arXiv preprint arXiv:1802.07880*, 2018.[JF17] Theo Johnson-Freyd. 自旋、统计、定向、幺正性. *Algebraic & Geometric Topology*, 17 2 917 956, 2017年 ( ): – .[JY21] Niles Johnson 和 Donald Yau. *2-Dimensional Categories*. 牛津大学出版社, 01 2021.[Kap14] Anton Kapustin. 对称性保护拓扑相、反常与协边：超越群上同调. 2014.[Kit09] Alexei Kitaev. 拓扑绝缘体与超导体周期表. 载于 *AIP conference proceedings* 1134, 22 30 2009 ，卷页 – . 美国物理学会, .[KT17] Anton Kapustin 和 Alex Turzillo. 等变拓扑量子场论与对称性保护拓扑相. *JHEP*, 03:006, 2017年.[KTTW15] Anton Kapustin、Ryan Thorngren、Alex Turzillo 和 Zitao Wang. 费米子对称性保护拓扑相与协边. *JHEP*, 12:052, 2015.[LS20] Matthias Ludewig 和 Augusto Stoffel. 几何场论及其1维分类框架. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2020.[Lur09] Jacob Lurie. 关于拓扑场论的分类. 载于 *Current developments in mathematics 2008* 129 280 2009 , , 页码 – . 波士顿国际出版社, .[McC00] Paddy McCrudden. 平衡余拟群. *Theory and Applications of categories*, 7(6):71–147, 2000.[MW22] Lukas M¨uller 和 Lukas Woike. 循环框架小圆盘代数、Grothendieck–Verdier 对偶与把手体群表示. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2022.

[Pst22] Piotr Pstragowski. 关于幺半双范畴中可对偶对象的研究。 *Theory and Applications of Categories* 38 9 257 310, 2022 , ( ): – .[Sch14]

Claudia Scheimbauer. *Factorization homology as a fully extended topological field theory*. 博士论文，苏黎世联邦理工学院，2014 年。[Soz19] Kursat Sozer. 二维扩展同伦场论。2019 年。[SP09] Christopher Schommer-Pries. *The classification of two-dimensional extended topological field theories*. 博士论文，伯克利，2009 年。[SP14] Christopher Schommer-Pries. 低维高阶范畴论中的对偶可对偶性。 *Topology and Field Theories* 613 111, 2014 , : .[ST11]

Stephan Stolz 和 Peter Teichner. 超对称场论与广义上同调。 *Algebraic Topology* 279 340, 2011 *arXiv:* , pages – .[SV22]

Kursat Sozer 和 Alexis Virelizier. 由交叉模分次的幺半范畴与三维同伦量子场论。2022 年。[TMAK20] Hiro Lee Tanaka、Lukas M ¨ uller、 Araminta Amabel 和 Artem Kalmykov。,,。施普林格数学物理简明丛书。施普林格国际出版，2020 年。[Tur16] Vladimir Turaev. 结和 3 -流形的量子不变量。 *Lectures on Factorization Homology ∞-Categories and Topological Field Theories* *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds* 2016 载于 . de Gruyter， .[TV12] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier. 关于 3 维同伦量子场论， *International Journal of Mathematics* 23 09 1250094, 2012 *Interna-* I。, ( ): .[Wal64] Charles Terence Clegg Wall. 分次布劳尔群。1964 年。[Yon19] Kazuya Yonekura. 对称性保护拓扑相的配边分类。 *mun. Math. Phys.* 368 3 1121 1173, 2019 *Comm* , ( ): – .