arXiv:2301.06684v1 [math.LO] 17 Jan 2023

Marstrand 投影定理的余解析反例

LINUS RICHTER

Abstract. 假设 $V=L$，我们构造了一个平面集 E，其豪斯多夫维数为 1，且它在所有经过原点的直线上的正交投影的豪斯多夫维数均为 0。这是对 J. M. Marstrand 开创性投影定理的一个反例 [30]。尽管数十年前就已有人构造出反例，最初由 R. O. Davies 提出 [8]，，我们结果的新颖之处在于 E 它是余解析的。遵循 Marstrand 最初的证明 [30]（以及 R. Kaufman 基于容量的较新、如今已成为标准的方法[18]），投影定理的反例不可能是解析集，因此我们的反例是最优的。随后我们以一种有力的方式推广了这一结果：我们证明，对每个 $\epsilon \in (0,\ 1)$，都存在一个余解析集 E_ϵ，其维数为 $1+\epsilon$，且该集合在每条经过原点的直线上的正交投影的豪斯多夫维数均为 ϵ。对 E 和 E_ϵ 的构造采用对可数序数的归纳法，并应用了 Z. Vidny´anszky 的一个定理 [42]。

1. Introduction

豪斯多夫测度是经典分形几何中的一个基本概念。勒贝格测度仅适用于平面或直线等结构良好的对象，否则便无法提供有用信息；相比之下，豪斯多夫测度更加精细（尤其是，它扩展了勒贝格测度）。豪斯多夫测度的定义与勒贝格测度类似：考虑一个集合的覆盖。不过，豪斯多夫测度有两点重要区别：(1) 覆盖不必是开集；(2) 覆盖集合的直径要取所选定的幂 $\alpha > 0$。显然，对于每个集合 X，都存在 $s \geq 0$，使得当 $\alpha > s$ 时，X 的 α 维豪斯多夫测度为 0；而当 $\alpha < s$ 时，该测度为无穷大。对于 X 的 α 维豪斯多夫测度在 $\alpha = s$ 条件下取何值，则难以预料。它可能为 0 、无穷大，也可能是其他有限值。因此，s 被称为临界值——它也称为 X 的 豪斯多夫维数。

下面这段引文阐明了临界值背后的直觉[10,p. 168]:

> 这种维数概念是对我们从初等几何中已有认识的抽象。如果 A 是 [.....] 曲线，那么它的长度是衡量其大小的一种有用方式；但它的“面积”和“体积”都是 0。维数 2 和 3 对于衡量 A的大小来说太大了。如果 B 是球面，那么它的面积是正且有限的。我们可以说它的“长度”是无穷大（例如，因为它包含任意长的曲线，这些曲线可以绕着球面螺旋延伸）；它的“体积”为 0，因为它包含在一个实心

2020数学学科分类。 主要：03D32。次要：28A80 2012 *ACM* 分类：计算理论 → 复杂性理论与逻辑关键词和短语： 算法随机性、分形几何、豪斯多夫维数、正交投影

球壳中，而球壳的厚度可以任意小。因此，对于集合 B，维数 1 太小，维数 3 太大，而维数 2 恰到好处。 α维豪斯多夫测度为我们提供了一种衡量集合大小的方法，适用于 α 整数 1、2、3、.....以外的维数。

自分形几何早期发展以来，一些定理逐渐被证明具有奠基性意义。Marstrand 投影定理 [30]可追溯至1954年，是其中之一：如今，它已成为经典分形几何的基石。尽管数十年来一直未受到重视（“分形几何”这一术语直到20世纪70年代才出现），如今人们正对分形几何以及类似 Marstrand 定理的投影定理展开密集研究 [12]。

从本质上说，该定理指出，解析集的正交投影在维数上不可能下降得过多——但也存在例外。最早注意到这一点的是 R. O. Davies[8], ，他在假设连续统假设 CH 的情况下，以非构造性的方式构造了一个反例。随后几十年间，人们对 Marstrand 定理进行了简化 [18] 和推广 [32] 。如今，证明 Marstrand 投影定理的标准论证是 Kaufman 的证明 [18] ，其基础是基于能量势的豪斯多夫维数刻画 。目前，人们仍在寻求该定理的改进形式 [2, 13]。

尽管分形几何传统上依赖测度论证，但过去几十年间，其他方法也取得了进展。此类方法中最早的是 R. Kaufman 前文提到的 Marstrand 定理证明 [18] ；近年来，将分形几何与信息论工具相结合也取得了成功 [22, 33, 15, 24]：其中尤为突出的是 Lutz 和 Lutz [25], 近期提出的点到集合原理 ，它将集合 的豪斯多夫维数与其构成点的维数联系起来。在此语境下，点的维数由算法信息论工具给出：我们考察可计算性理论，尤其是柯尔莫哥洛夫随机性。后续章节将介绍所需的背景知识。

点到集合原理已被证明是正交投影理论中非常有用的工具。这既适用于豪斯多夫维数 $\dim_H$ ，也适用于装填维数 $\dim_P$：Lutz 和 Stull [28] 通过算法论证证明，若 $X \subset \mathbb{R}^2$ 满足 $\dim_H(X) = \dim_P(X)$，则 Marstrand 定理适用，因此可以不再要求其为解析集。他们还给出了装填维数条件下正交投影装填维数的新界，并在同一篇论文中给出了 Marstrand 定理的新证明。值得注意的是，装填维数不满足类似 Marstrand 定理的结论，这一点早已为人所知 [17]。

本文证明，解析性实际上是 Marstrand 投影定理成立的尖锐条件，这一点此前尚不为人所知：我们借助非经典工具构造了一个关于 Marstrand 投影定理的最优反例。具体而言，我们运用 Lutz 和 Lutz 的点到集合原理 [25] ，构造一个豪斯多夫维数为 1、所有投影均为零的集合。借助 Vidny´anszky [42] 的一项结果，我们证明所构造的集合是余解析的。随后，我们将结果推广，强意义下构造出维数为$1+\epsilon$ 的余解析 Marstrand失效集，对每个 $\epsilon \in (0,1)$ 均成立：对每个 ϵ ，我们构造一个余解析集 X，使得 $\dim_H(X) = 1+\epsilon$ ，而它在每条过原点的直线上的投影都具有

维数为 ϵ，这是允许的最小值。

在我们的整个研究中，我们采用集合论假设 $V=L$。这是出于组合方面的考虑，因为这样我们就能在构造过程中依照 Vidny´anszky 定理进行超限归纳。

我们谨此指出，T. Slaman 和 D. Stull 已独立获得本文中的结果。

1.1. **Marstrand 投影定理。** John Marstrand 的投影定理原始表述如下（我们调整了原文中的顺序）。

定理 1.1 (MPT, [30, 定理 I 和 II])。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是解析的。令 $\mathrm{proj}_\theta(E)$ 表示将 E 投影到经过原点、与第一坐标轴成 θ 角的唯一一条直线上。令 μ表示一维勒贝格测度。

(1) 若维数$_H$（E）≤ 1则对于几乎所有的 $\theta \in [0,\pi)$，我们有 维数$_H$(投影$_\theta$（E）$=$维数$_H$（E).

(2) 若维数$_H$（E）>1，则对于几乎所有的 $\theta \in [0,\pi)$，我们有 μ(投影$_\theta$（E）>0。

值得注意的是，第2 项严格强于关于豪斯多夫维数的断言[3]。这是由一个标准事实得出的：在 $\mathbb{R}^m$中，豪斯多夫测度是 m维勒贝格测度的推广（证明是一个直接的测度论论证，见 [10,6。1]）。特别地，若 $A \subset \mathbb{R}$ 具有正的勒贝格测度，则维数$_H$（A）$=1$。因此，第2项的一个简单推论是：

推论 1.2。若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是解析的，且维数$_H$（E）>1，则对于几乎所有的 $\theta \in [0,\pi)$，我们有 维数$_H$(投影$_\theta$（E）$=1$。

1.2. **我们的定理。** 我们为定理1和2中的两条1.1提供了余解析反例。由于解析集满足定理1.1，我们的结果是尖锐的。第一个定理在第5节证明，第二个在第6节证明。回顾一下，我们假设 $V=L$。

定理 5.1。 存在一个余解析集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 使得 维数$_H(E)=1$ 而对于每个 $\theta \in [0,2\pi)$，都有 维数$_H$(投影$_\theta(E))=0$。

该构造通过一个由 Z. Vidny´anszky [42], 提出的定理来完成；该定理允许我们利用余解析条件，通过递归构造余解析集。令 $\mathbb{D}$ 表示单位圆盘的第一象限；我们将在第3节中对其进行更详细的讨论。

给定 $F \subset \mathbb{D}^{\leq\omega} \times [0,\pi/2] \times \mathbb{D}$，集合 $X=\{x_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ 与 F兼容，当且仅当存在以下对象：

- 一个 $\{p_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ 的 B枚举；并且
- 一个 $\{A_\alpha \mid \alpha<\omega_1\} \subset \mathbb{D}^{\leq\omega}$ 枚举，使得若 $\alpha<\omega_1$，则 $A_\alpha = X \restriction \alpha$

使得对每个 $\alpha<\omega_1$，我们都有 $(A_\alpha, p_\alpha, x_\alpha) \in F$。

定理 4.3 ([42])。 设 $F \subset \mathbb{D}^{\leq\omega} \times [0,\pi/2] \times \mathbb{D}$。若 F 是余解析的，且对所有$(A,\ p) \in \mathbb{D}^{\leq\omega} \times [0,\pi/2]$ 该截面

$$F(A,p)=\{x \in \mathbb{D} \mid F(A,p,x)\}$$

在图灵度中共尾，那么存在一个与 F相容的余解析集 $X \subset \mathbb{D}$ 。

我们将在第 ´4节更详细地重新探讨 Vidnyanszky 定理。
我们的第二项贡献是以下更强的结果，我们将在第6节证明。

定理6.1。对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，存在一个余解析集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 使得维数$_H(E) = 1+\epsilon$，而对于每个 $\theta \in [0, 2\pi)$，都有维数$_H$(投影$_\theta(E)) = \epsilon$。

这个更一般定理的证明论证与之前的类似；不过，编码过程更加复杂。

致谢。我要感谢我的博士导师 Daniel Turetsky，他让我关注到有关 Marstrand 定理反例的问题；也感谢他在本文写作过程中持续给予的建议，以及对本稿早期版本提出的极具启发性的反馈。

2. Preliminaries

本节将介绍有关豪斯多夫测度和维数，以及可计算性理论与复杂度理论的一些必要预备知识。为了在我们的构造中运用点到集合原理定理2.13 ，需要这些预备知识。

2.1. 豪斯多夫测度与维数概述。 传统上，几何测度论是分形几何的基础，但如今未必如此。运用点到集合原理时，大多不需要测度论。不过，我们偶尔会在二者之间切换；有些证明用测度的语言表述和证明，比用可计算性理论的语言更简单。因此，我们将在下文简要介绍豪斯多夫测度、维数，尤其是利普希茨映射。

考虑一个子集 $E \subset \mathbb{R}^2$。为了定义豪斯多夫测度，我们首先考虑

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{ \sum_{i<\omega} |U_i|^s \;\middle|\; E \subset \bigcup_{i<\omega} U_i \wedge (\forall i < \omega)(|U_i| < \delta) \right\}$$

其中 d是通常意义下的欧几里得距离， $|U| = \sup\{d(x,\ y)\ |\ x,\ y \in U\}$是 U的直径。

注记 2.1。 注意，随着 δ 增大，我们纳入下确界的覆盖会更多，因此

$$\text{if } 0 < \delta < \delta' \text{ then } \mathcal{H}^s_{\delta'} < \mathcal{H}^s_\delta.$$

因此，随着 δ 减小，项 $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ 会增大。特别地，极限 $\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E)$ 始终存在（可能为无穷大！）。

定义 2.2。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$。我们定义 s 维豪斯多夫测度 E 如下：

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

显然，必定存在一个临界值，对于 s，在此处 s 维豪斯多夫测度从 ∞ 变为 0——这就是豪斯多夫维数。

定义 2.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^2$。则豪斯多夫维数 $\dim_H(E)$ 定义为

$$\dim_H(E) = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

最后，且相当重要的是，豪斯多夫维数在利普希茨映射下具有良好的性质。回顾一下，映射 f: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 若满足 利普希茨条件，常数为 $M > 0$，则称其为利普希茨映射；对所有$x, y \in \mathbb{R}^m$，都有 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$。（这里，$|\cdot|$表示$\mathbb{R}^m$上的欧几里得范数。）固定 $m = 2$ 后，注意到利普希茨映射不会增大维数：

引理 2.4。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$。若 f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$满足利普希茨条件，则维数$_H(f(E)) \leq$维数$_H(E)$。

我们使用下面这个简单的引理。

Le理 2.5。 假设 f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是常数为 $M > 0$的利普希茨映射。 n

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq M^s \mathcal{H}^s(E)$$

对所有 $s \geq 0$。

证明。 假设 f的 Lipschitz 常数为 M，并且 (U_i) 是 E的一个 δ-覆盖。那么 $(f(U_i))$ 是 $f(E)$ 的一个 $M\delta$-覆盖。因此

$$\mathcal{H}^s_{M\delta}(f(E)) \leq \sum_{i<\omega} |f(U_i)|^s \leq \sum_{i<\omega} M^s |U_i|^s$$

因为对于任意 $f(x)$ $f(y) \in f(U_i)$，都有 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$，故取上确界后即可得到 $|f(U_i)| \leq M|U_i|$。最后，对上式取 $\lim_{\delta \to 0^+}$，便得到所需结果。□

引理的证明 2.4。 这直接由上面的引理得出：假设 $\dim_H(E) = s$，并且假设 f 是 Lipschitz 连续的，其常数为 $M > 0$。那么

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq M^s \mathcal{H}^s(E) < \infty.$$

由于 $\dim_H(E) = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$，我们有 $\mathcal{H}^s(f(E)) < \infty$。因此 $\dim_H(f(E)) \leq s$，正如所需。□

作为一个特殊（但极其有用）的情形，我们注意到，如果 f 是等距变换，那么豪斯多夫测度实际上保持不变。因此可得：

推论 2.6. 等距变换保持豪斯多夫维数不变。特别地，旋转和平移也保持豪斯多夫维数不变。

2.2. **柯尔莫哥洛夫复杂度**。 我们的主要论证依赖于信息密度这一概念，我们用前缀无关柯尔莫哥洛夫复杂度来描述它。关于柯尔莫哥洛夫复杂度，标准且内容全面的参考文献包括 Downey 和 Hirschfeldt[9]以及 Li 和 Vit´any [21]。一篇篇幅很短但非常易读的入门介绍见 Fortnow[14]。下面我们简要介绍最相关的概念及其部分历史。

我们选择用图灵机来表述算法信息论的基本概念。具体而言，我们选取通用前缀无关机器作为参照机器U。根据构造，这样的机器确实存在：论证的核心在于标准结果，即每个前缀无关的部分可计算（部分可计算）函数都有一台计算它的前缀无关机器（例如 [9, 3.5]）。我们的通用机器 U 满足以下性质：对于每个前缀无关的部分可计算函数 f: $2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$，都有一个程序代码 p_f，使得 $U(p_f, x) = f(x)$。

机器 U 有两条带：一条输入带和一条条件带（它也有一条工作带，但这对我们的论证没有影响，因此我们将忽略这一点）。定义一个部分可计算函数 h，使得每当 p_f 是某个前缀无关部分可计算函数 f 的前缀无关程序时，

$$h\left(0^{|p_f|}1p_f x\right) = U(p_f, x) = f(x).$$

注意到 h 是前缀无关的。若 $A \in 2^\omega$ 是预言机，则令 U^A 为可访问预言机 A 的通用前缀无关机（这意味着，该机器可以执行“k 是否属于 A？”这类步骤，其中 $k < \omega$ 可以是任意对象，并据此进行分支），并类似地定义 h_A。此外，若 $\tau \in 2^{<\omega}$，则令 U^τ 为一台将 τ 写在条件带上的机器。

我们引入以下记号：若 $\sigma \in 2^{<\omega}$，则令 $\ell(\sigma)$ 表示 σ 的长度。为避免与 $\mathbb{R}$ 上的绝对值混淆（我们将在后文大量使用），我们将符号 $|\cdot|$ 留作空间 $\mathbb{R}$ 的记号。

定义 2.7. 令 $\sigma \in 2^{<\omega}$。σ 的柯尔莫哥洛夫复杂度为

$$K(\sigma) = \min\{\ell(\rho) \,|\, h(\rho) = \sigma\}.$$

若 $\tau \in 2^{<\omega}$，则 σ 在 τ 条件下的条件柯尔莫哥洛夫复杂度为

$$K(\sigma \mid \tau) = \min\{\ell(\rho) \,|\, h_\tau(\rho) = \sigma\}.$$

如果 A 是预言机，则 $K^A(\sigma)$ 的定义类似，只需用 h_A 替换 h_τ。在这种情况下，条件带为空（访问预言机不需要任何带），因此我们可以像上面那样定义 $K^A(\sigma \mid \tau)$。

从现在起，我们需要考虑所有机器的前缀无关性。注意，本文中的所有对数均为 $\log_2$。由前缀无关性可立即得到，K 在相差一个常数的意义下具有次可加性：对于所有字符串 $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$，都有 $K(\sigma\tau) \leq K(\sigma) + K(\tau) + c$。类似地，下面这个基本事实也很有用。

引理 2。 **8.** 设 $\sigma \in 2^{<\omega}$。则 $K(\sigma) \leq \ell(\sigma) + 2\log(\ell(\sigma)) + c$，其中某个常数为 c。

2.3. **随机性。** 我们简要介绍随机性的基本概念。关于深入综述，请参见 Downey 和 Hirschfeldt [9, 6。2]以及 Li 和 Vit´anyi [21, 3。5]。我们在此给出一个重要结果：幸运的是，上述两个定义是等价的。（这并非唯一的等价关系：Martin-L¨of [31], 施诺尔 [38], 列文 [20], 和蔡廷[7] 都给出了等价的随机性概念。这有力地表明，这一概念事实上是“正确的”。）

柯尔莫哥洛夫复杂度的核心讨论对象是 2^ω 中的随机序列：这些序列的每个初始段都无法用短描述来表示（允许相差一个常数）。这一概念定义可追溯至 Kolmogorov [19] 和 Solomonoff [40]，他们同时且独立地发展了算法信息的早期理论。序列随机性的另一种定义使用统计（测度论）检验，即 Martin-L¨of 检验（或 ML 检验），可追溯至 Martin-L¨of [31]。

回顾一下，2^ω 的开子集是基本既开又闭集的可数并，并且每个基本既开又闭集都由某个 $\sigma \in 2^{<\omega}$确定。集合 $U \subset 2^\omega$ 是（无参数）Σ^0_1，或者说，

如果决定 U 的有限字符串构成可计算枚举集，则称其为有效开。集合序列 $\mathcal{U}=\{U_n \mid n<\omega\}$ $U_n \subset 2^\omega$ 称为一致 Σ_1^0，如果每个 U_n 都由某个可计算枚举集 $V_n \subset 2^{<\omega}$作为 Σ_1^0 见证，并且该序列 $\mathcal{V}=\{V_n \mid n<\omega\}$ 本身也是一致可计算枚举的。Martin-L¨随机性使用由既开又闭集生成的自然勒贝格测度：如果 $\sigma \in 2^{<\omega}$，那么 $\lambda(\{\sigma f \mid f \in 2^\omega\}) = 2^{-\ell(\sigma)}$。因此，ML-检验是一个可计算枚举的有效开集序列 U_n，其直径递减。一个*Martin-L¨*随机序列不会被任何 ML-检验捕获。

下述命题将这两个概念联系起来。

命题 2.9. 设 $f \in 2^\omega$。以下概念等价：

(1) $f \in 2^\omega$ 是柯尔莫哥洛夫随机的：存在一个常数 c，使得对于所有 $n<\omega$，都有 $K(f \upharpoonright n) \geq n-c$；*(2)* f 是 *Martin-L¨of* 随机的：对于任意一致的 Σ_1^0 序列 $\mathcal{U}=\{U_n \mid n<\omega\}$ 个集合$U_n \subset 2^\omega$，若 $\lambda(U_n) \leq 2^n$，则有 $f \notin \bigcap \mathcal{U}$（因此 f 通过了测试）。

这些结果也适用于相对情形（见 [9, 6。4]）。

定义 2.10. 设 $A \in 2^\omega$ 是一个预言机。字符串 $f \in 2^\omega$ 若存在一个常数 c，使得对于所有 $n<\omega$，都有 $K^A(f \upharpoonright n) \geq n-c$，则称其为相对于 A 的柯尔莫哥洛夫随机串。

通用 ML-检验 $\mathcal{V}$ 存在，这是一个标准结果。由此可以立即推出，柯尔莫哥洛夫随机序列在 2^ω中的测度为 1：每个 ML 检验都是勒贝格零集，因此 $2^\omega \setminus \mathcal{V}$ 的测度为 1。若 f 通过通用检验 $\mathcal{V}$，它就通过所有 ML 检验，因此 $2^\omega \setminus \mathcal{V}$ 是 ML-随机序列的集合。因此，每个 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 都有一个柯尔莫哥洛夫随机延伸。此外，若 $A \in 2^\omega$ 是预言机，则我们可以构造一个相对于 A的通用 ML- 检验。因此，每个 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 都有一个相对于 A 的柯尔莫哥洛夫随机延伸。

2.4. 在 $2^{<\omega}$ 中的对象编码。虽然形式上我们的论证是在 $2^{<\omega}$中进行的，但我们自然会将某些有限字符串与论域中的对象对应起来；这些对象通常是有理数（ $\mathbb{Q}$的元素）和自然数（ ω的元素）。按照惯例，这种对应是在元理论中进行的；不过，判断某个字符串是否应对应为有理数或自然数是可计算的。我们通常用上划线表示这些对象的字符串表示：如果 x 是论域中的一个对象，那么 $\overline{x}$ 表示我们将对应为 x的字符串。

固定一种特定的编码仅作示例——我们按如下方式对论域中的对象进行编码。下文对有限字符串进行的隐含操作始终是串接。需要指出的是，这些编码未必是最优的。

- 若 $k<\omega$，则令 $\overline{k}$ 为一个字符串，其数字由 k的二进制展开给出。
- 若 $n \in \mathbb{Z}$，则令 w 为 n 的二进制展开，其中每个数字都加倍（$n=101$变为 $w=110011$）。然后，若 $n \geq 0$，令 $n=w01$；否则令 $n=w10$。
- 若 $q \in \mathbb{Q}$，则设 $q=a/b$。然后令 $\overline{q}=\overline{a}\overline{\overline{b}}$。
- 若 $q=(q_1、\ldots\ldots、q_m) \in \mathbb{Q}^m$，则令 $\overline{q}=\overline{q_1}\cdots\overline{q_m}$。
- 若 $x \in \mathbb{R}$，设 $k<\omega$，并将 x 表示为二进制。取 x 的整数部分，并将每个数字加倍；将此字符串记为 w。取 x 在二进制小数点后的前 k 位比特，记为 z。若 $x \geq 0$，令 $x[k]=w01z$；否则定义 $x[k]=w10z$。
- 若 $x=(x_1, \ldots\ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$，设 $k<\omega$。那么令 $\overline{x}[k]=\overline{x_1}[k]\cdots\overline{x_m}[k]$。

•若 $x \in \mathbb{R}$，则令 $x^{-} \in 2^{\omega}$ 为 $x[k]$ 以显然的方式取得的极限。若 $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$，则逐位交织 $x_1, \ldots, x_m$。

注意，使用这种编码，若 $k < \omega$ 则 $\ell(\overline{k}) \leq \log(k) + 1$。

讨论实数（即 $\mathbb{R}$ 中的对象）及其截断近似时，字符串与对象之间的区别尤为重要。在其他情况下，我们会更随意一些；例如，我们通常写作 $K(k)$ 和 $K(q)$，而不写形式上正确的 $K(\overline{k})$ 和 $K(q)$。

2.5. **点的维数与点到集合原理**。几十年来，运用有效工具回答几何和测度论问题一直是研究方向之一。这一发展至少可以追溯到本世纪初 [22, 33, 24]。除其他研究者外，Hitchcock[15, 16] 和 Mayordomo [33], 将实数的有效维数概念（在 2^{ω}中）从博弈下注函数引向柯尔莫哥洛夫复杂度（鞅与豪斯多夫维数之间的联系此前已由 Ryabko [36, 37],Staiger [41], 以及 Cai 和 Hartmanis [5]进行研究；博弈下注函数是鞅的推广，由 Lutz 提出 [23]）。凭借他们的研究成果，如今我们可以仅根据集合中的元素，利用随机性概念确定该集合的豪斯多夫维数。

定义 2.11。设 $f \in 2^{\omega}$。我们定义 f 的维数为

$$\dim(f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{K(f \upharpoonright r)}{r}$$

这一概念可相对化：若 $A \in 2^{\omega}$ 是一个预言机，则定义

$$\dim^A(f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{K^A(f \upharpoonright r)}{r}.$$

这一概念可以自然地扩展到欧几里得空间：首先，考虑一个点的复杂度。

定义 2.12。设 $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$。那么我们定义 x 在精度 $t < \omega$ 下的柯尔莫哥洛夫复杂度为

$$K_t(x) = \min\{K(q) \mid q \in \mathbb{Q}^m \cap B_{2^{-t}}(x)\}$$

其中 $B_s(y)$ 是相对于欧几里得度量的开球，其半径为 s，中心为 y。那么，x 的有效豪斯多夫维数 定义为

$$\dim(x) = \liminf_{t \to \infty} \frac{K_t(x)}{t}.$$

这两个概念都可以相对化。

这些定义背后的思想源于将豪斯多夫维数有效化，这一思想归功于 Lutz [23] 及其博弈下注函数的概念。随后，人们也从博弈下注函数的角度研究了有效装填维数 [1], 。定义2.12 中给出的实数的有效豪斯多夫维数刻画归功于 Mayordomo [33]。我们还指出，在定义2.12 中将下极限替换为上极限，可得到有效装箱维数的刻画 [27], ，记作 $\mathrm{Dim}(x)$。

现在我们可以陈述 Lutz 和 Lutz 的点到集合原理，它是我们后续论证的基石。

定理 2.13（点到集合原理，[25, 定理 1]）。设 $n < \omega$ 和 $E \subset \mathbb{R}^n$。则

$$\dim_H(E) = \min_{A \in 2^\omega} \sup_{x \in E} \dim^A(x).$$

利用这一定理，我们现在可以通过聚焦于单个点来控制集合的维数。Lutz 和 Lutz [25] 以及 Lutz 和 Stull [28] 概述了点到集合原理及其应用。最近，点到集合原理已扩展到任意可分度量空间 [26]。

以下技术引理对本文的论证至关重要，它使我们能够使用有限字符串，而不是对有理数进行逼近。由于我们将在康托空间 2^ω 中处理序列，同时讨论 $\mathbb{R}$中的实数，因此有必要进行一种方便的对应。我们不再在 2^ω 和 $\mathbb{R}$之间来回转换，而是使用 Lutz 和 Stull [28,第 6]页中的一个观察结果。

引理 2.14 ([29, 推论 2.4])。对于每个 $m < \omega$，都存在一个常数 c，使得对所有 $t < \omega$ 和 $x \in \mathbb{R}^m$，我们都有

$$|K_t(x) - K(\overline{x}[t])| \leq K(t) + c.$$

证明利用了以下事实：$x[t]$ 对 x提供了一个合理的近似，其到 x 的距离由一个依赖于 m的函数所界定。在第3节中，我们将为极坐标给出类似的识别论证；参见命题 3.1。我们在此指出一个重要推论。

推论2.15。若 $m \geq 1$ 且 $x \in \mathbb{R}^m$，则维数(x) = 下极限$_{r\to\infty}$ $^{K_{(x[r])}}$

3. Arguing in polar Coordinates

在定理5.1 和6.1的构造过程中，使用极坐标比使用欧几里得坐标更方便。欧几里得空间中的点(x, y) 的极坐标为(r, θ)，当且仅当 $x = r$ 余弦 θ 且 $y = r$ 正弦 θ。我们将把注意范围限定在单位圆盘的第一象限，并将其记为

$$\mathbb{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x, y \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}.$$

因此 $r \in [0, 1]$ 和 $\theta \in [0, \pi/2]$。重要的是，以下证明中提到的所有点均以欧几里得坐标表示。我们写作 (r, θ) 时，并不是指 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$。

以下引理可视为引理 2.14 的一个类似结果；其证明沿用引理2.14 的证明，该引理见 [29,推论 2。4]。

命题 3.1。设 $(x, y) \in \mathbb{D}$ 的极坐标为 (r, θ)。那么

$$\dim(x, y) = \dim(r, \theta).$$

这一论证可以相对化。

我们将在下文分别证明命题3.1 的两个方向。我们需要以下结果，该结果由 Casey 和 J. Lutz 提出 [6]。

引理 3.2。存在一个常数 c，使得对于所有 m、s、$\Delta s < \omega$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^m$，都有

$$K_s(x) \leq K_{s+\Delta s}(x) \leq K_s(x) + K(s) + c_m(\Delta s) + c$$

其中 $c_m(\Delta s) = K(\Delta s) + m\Delta s + 2\log(\lceil \frac{1}{2}\log(m)\rceil + \Delta s + 3) + (\lceil \frac{1}{2}\log(m)\rceil + 3)m + K(m) + 2\log(m)$。

注意，项 $c_m(\Delta s)$不依赖于 s。

在开始证明命题3.1各个方向之前，我们需要以下引理。这是一个标准结果 [4, 第 151]）。

引理 3.3。假设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是紧且凸的。如果函数 $f\colon C \to \mathbb{R}^2$ 将(x, y) 映射到 $f(x, y)$，并且在 C 上连续可微，那么它在 C上满足利普希茨条件。

以下证明的前半部分采用了与 Lutz 和 Stull [29,引理 2.3]相同的论证。我们简要指出，映射 $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 处处连续可微，并且 $[0,1] \times [0, \pi/2]$ 当然是紧且凸的。

引理 3.4（命题 3.1的前半部分。存在一个常数 c，使得只要 $(x, y) \in \mathbb{D}$ 的极坐标为 (r, θ)，那么对所有 $s < \omega$，都有

$$K_s(x, y) \leq K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s]) + K(s) + c.$$

证明。根据引理 3.3，从极坐标到笛卡尔坐标的映射满足利普希茨条件，因为 $[0,1] \times [0, \pi/2]$ 是紧且凸的：存在 $M > 0$，使得若 (r, θ)、$(r', \theta') \in [0,1] \times [0, \pi/2]$，则

$$(*) \qquad |(r\cos\theta, r\sin\theta) - (r'\cos\theta', r'\sin\theta')| \leq M|(r, \theta) - (r', \theta')|.$$

令 $(r, \theta) \in [0,1] \times [0, \pi/2]$，并假设 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$。我们定义如下：

- 令 $r_s = r[s]$，并令 $\theta_s = \theta[s]$ 为 r 和 θ 在二进制小数点后截取 s 位所得的数；
- 我们将考虑 $r\cos\theta$ 的近似 $r_s\cos\theta_s$（类似地，$r\sin\theta$ 的近似为 $r_s\sin\theta_s$）；不过，这种近似一般不会产生有限字符串；因此我们定义

$$x[s] = (r_s\cos\theta_s)[s] \qquad \text{and} \qquad y[s] = (r_s\sin\theta_s)[s]$$

它们是这类近似在二进制小数点后截取 s 位所得的结果。

这些截断使我们能够有效地近似点 (x, y)：

断言 1. $(x[s], y[s]) \in B_{2^{-s}(1+M\sqrt{2})}(x, y)$

断言 *1* 的证明。回想一下，$x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$，并且 $x[s] = (r_s\cos\theta_s)[s]$；因此，根据构造，$|(x[s], y[s]) - (r_s\cos\theta_s, r_s\sin\theta_s)| \leq 2^{-s}$。利用前文引入的术语和利普希茨条件（$*$），我们可以计算当

$(x[s],\ y[s])$ 近似于 $(x,\ y)$ 时的最大误差：

$$\begin{aligned}
|(x[s],y[s])-(x,y)| &= |(x[s],y[s])-(r_s\cos\theta_s,r_s\sin\theta_s)+(r_s\cos\theta_s,r_s\sin\theta_s)-(x,y)| \\
&\le |(x[s],y[s])-(r_s\cos\theta_s,r_s\sin\theta_s)|+|(r_s\cos\theta_s,r_s\sin\theta_s)-(x,y)| \\
&\le 2^{-s}+|(r_s\cos\theta_s,r_s\sin\theta_s)-(r\cos\theta,r\sin\theta)| \\
&\le 2^{-s}+M|(r_s,\theta_s)-(r,\theta)| \\
&\le 2^{-s}+M\sqrt{(r-r_s)^2+(\theta-\theta_s)^2} \\
&< 2^{-s}+M\sqrt{(2)2^{-2s}} \\
&= 2^{-s}+\sqrt{2}M2^{-s} \\
&= 2^{-s}(1+M\sqrt{2})
\end{aligned}$$

如要求的那样。 ⊣

注意，$2^{-t}=2^{-s}(1+M\sqrt{2})$ 当且仅当 $t=s-\log(1+M\sqrt{2})$。因此，如果我们能以精度 $t=s-\log(1+M\sqrt{2})$ 计算 $(x[s],\ y[s])$，那么就能计算 $(x,\ y)$。令 $\Delta t=\log(1+M\sqrt{2})$，于是我们有

$$K_{s-\Delta t}(x,y)\le K(x[s],y[s])\le K(\overline{x}[s]\overline{y}[s])+c'$$

其中 c' 是机器常数，它将字符串表示 $x[s]$ 和 $y[s]$ 转换为实数近似，进而转换为有理数 $x[s]$ 和 $y[s]$。

现在，$t+\Delta t=s$，因此引理 3.2 推出

$$\begin{aligned}
K_s(x,y) &\le K_{s-\Delta t}(x,y)+K(t)+c_2(\Delta t)+c \\
&\le K(\overline{x}[s]\overline{y}[s])+c'+K(t)+c_2(\Delta t)+c
\end{aligned}$$

其中 $c_2(\Delta\ t)$ 与引理 3.2 中相同，因此不依赖于 t，也就不依赖于 s。

最后，我们证明以下断言：

断言 2. $K(x[\overline{s}]y[\overline{s}])\ \le K(r[\overline{s}]\theta[\overline{s}])+c''$ 其中某个常数为 c''。

断言 *2* 的证明。回忆一下，$r_s=r[s]$ 和 $\theta_s=\theta[s]$。于是 $x[s]=(r_s\cos\theta_s)[s]$，它（以及 $y[s]$）很容易通过近似和泰勒定理计算得出（乘法和 cos 显然是可计算的，其对应的机器常数为 c''）。⊣

概括一下，到目前为止我们已经证明了

$$K_s(x,y)\le K(\overline{x}[s]\overline{y}[s])+c'+K(t)+c_2(\Delta t)+c.$$

根据该断言，我们现在有

$$\le K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s])+c'+c''+K(t)+c_2(\Delta t)+c.$$

回忆一下，$\Delta t=\log(1+M\sqrt{2})$ 是常数。此外，$t=s-\Delta t$，因此存在一个常数 c'''（它仅取决于 Δt，因而仅取决于 M，而不取决于 s），使得 $K(t)=K(s-\Delta t)\le K(s)+c'''$。因此我们有

$$K_s(x,y)\le K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s])+K(s)+d$$

其中 $d=c'+c''+c'''+c_2(\Delta t)+c$，如所需。 □

对于第二部分，我们作如下简要观察。下面的论证将着重讨论 $\mathbb{D}$ 中不位于第一坐标轴上的点；这对于涉及利普希茨条件的有界性论证是必要的：对于每个不在第一坐标轴上的点 $(x,\ y)$，我们都可以找到一个良好的邻域，使从欧几里得坐标到极坐标的坐标变换映射在该邻域上表现良好。那么第一坐标轴上的点呢？无需处理，因为若 $x \geq 0$，点 $(x,\ 0)$ 的极坐标与欧几里得坐标相同。因此，命题3.1 在第一坐标轴上显然成立。

引理 3.5 （命题3.1的后半部分）。 存在一个常数 c 使得每当 $(x,\ y) \in \mathbb{D}$ 的极坐标为 $(r,\ \theta)$ 时，存在 $N_{(x,y)} < \omega$ 和 $\Delta < \omega$，使得如果$s > N_{(x,y)}$ 那么

$$K(\overline{r}[s-\Delta]\overline{\theta}[s-\Delta]) \leq K_s(x,y) + K(s) + c.$$

证明。 首先，我们作一个近似性观察。

断言 1。 对于 $a \in \mathbb{Q}^2 \cap B_{2^{-r}}(x,\ y)$，我们有 $(x[r],\ y[r]) \in B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})}(a)$。

断言 *1* 的证明 *m 1*。 根据假设，$|(x,\ y) - a| < 2^{-r}$，因此根据三角不等式，我们有 e

$$\begin{aligned}
|(x[r],y[r]) - a| &\leq |(x[r],y[r]) - (x,y)| + |(x,y) - a| \\
&= \sqrt{(x[r]-x)^2 + (y[r]-y)^2} + |(x,y) - a| \\
&\leq \sqrt{2(2^{-2r})} + 2^{-r} \\
&\leq 2^{-r}\sqrt{2} + 2^{-r} \\
&= 2^{-r}(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

符合要求。 ⊣

此外，按照 Lutz 和 Stull 的记号，[29], 令 $\mathcal{Q}_r^2 = \{2^{-r}z \mid z \in \mathbb{Z}^2\}$ 表示 r-二进制数的集合。注意，r-二进制数至多有 r个非零的小数点后比特。很容易给出任意开球中 r-二进制数个数的上界。特别地，我们有：

断言 2。对于任意 $a \in \mathbb{Q}^2$ 和 $r < \omega$，我们有

$$|\mathcal{Q}_r^2 \cap B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})}(a)| \leq (4(1+\sqrt{2}))^2.$$

断言 *2* 的证明。令 C_2 为边长 $2(1+\sqrt{2})2^{-r}$、中心为 a 的正方形。显然，$B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})} \subset C_2$，因此

$$|\mathcal{Q}_r^2 \cap B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})}| \leq |\mathcal{Q}_r^2 \cap C_2|.$$

注意，C_2 的面积为 $(2(1+\sqrt{2}))^2 2^{-2r}$。现在，如果 $x,\ y \in \mathcal{Q}_r^2$ 且 $x \neq y$，那么 $|x-y| \geq 2^{-r}$（因为 $\mathcal{Q}_r^2$ 中的元素至多有 r 个非零的小数点后比特）。因此，考虑一个小正方形：边长为 2^{-r} 的正方形。这样的小正方形面积为 2^{-2r}，且至多包含 $4\ r$ 个二进制数：每个顶点上一个。因此，将 C_2 的面积除以小正方形的面积，再乘以 4（对应每个顶点），即可得到 r 个二进制数的上界：

$$|\mathcal{Q}_r^2 \cap B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})}| \leq \frac{(2(1+\sqrt{2}))^2 2^{-2r}}{2^{-2r}} 2^2 = (2(1+\sqrt{2}))^2 2^2 = (4(1+\sqrt{2}))^2$$

如要求。 ⊣

令 M（其程序为 P）为执行以下操作的机器：在输入 $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3$ 时，若 $h(\pi_1) = k$ 且 $k < \omega$，并且 $h(\pi_2) = t$ 且 $t < \omega$，以及 $h(\pi_3) = a$ 且 $a = (p, q) \in \mathbb{Q}^2$，则 M 输出 $B_{2^{-t}(1+\sqrt{2})}(a)$ 中的第 k 个二进有理数。假设 $a \in \mathbb{Q}^2$ 证明了 $K_s(x, y)$ 的复杂度；那么这些断言共同意味着，$(x[s], y[s])$ 是 $\mathcal{Q}_r^2 \cap B_{2^{-r}(1+\sqrt{2})}(a)$ 中的第 k 个元素，其中某个 $k < (4(1+\sqrt{2}))^2$ 成立。令程序 π_1、π_2、π_3 分别作为 $K(k)$ $K(s)$ 和 $K(a) = K_s(x, y)$ 的见证。于是

$$h\left(0^{\ell(P)}1P\pi_1\pi_2\pi_3\right) = \overline{x}[s]\overline{y}[s]$$

因此

$$\begin{aligned} K(\overline{x}[s]\overline{y}[s]) &\leq \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2) + \ell(\pi_2) + c \\ &= K(k) + K(s) + K_s(x, y) + c' \\ &\leq K_s(x, y) + K(s) + c \end{aligned}$$

其中 $K(k)$ 可被某个上界限制，因此只贡献一个常数项。

令 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为一个可计算函数，它将欧几里得坐标中的点映射到其极坐标。在 $\mathbb{D}$（不包括第一坐标轴）上，此映射由 $(x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}(y/x)\right)$ 给出，且连续可微。因此，取某个 $\epsilon > 0$，使得以 (x, y) 为中心、半径为 ϵ 的闭球 B 不与第一坐标轴相交。根据引理 3.3，映射 f 在 B 上满足利普希茨条件。现在假设 $s < \omega$ 满足 $2^{-s} < \epsilon$；因此 $B_{2^{-s}}(x, y) \subset B$。假设 $(p, q) \in \mathbb{Q}^2 \cap B_{2^{-s}}(x, y)$。回想起 $f(x, y) = (r, \theta)$，我们有

$$\begin{aligned} |(r, \theta) - f(p, q)| &= |f(x, y) - f(p, q)| \\ &\leq M|(x, y) - (p, q)| \\ &\leq M2^{-s} \\ &= 2^{-(s - \log M)}. \end{aligned}$$

因此，计算 $(x[s],\ y[s])$ 后，再应用计算 f、机器常数为 c'' 的机器（参见引理 3.4 证明中的断言 2），即可得到精度为 r，θ 的极坐标（精度误差不超过 $s - \log M$）。换言之，

$$\begin{aligned} K(\overline{r}[s - \log M]\overline{\theta}[s - \log M]) &\leq K(\overline{x}[s]\overline{y}[s]) + c'' \\ &\leq K_s(x, y) + K(s) + c'' + c \end{aligned}$$

按需进行。 □

命题 *3.1* 的证明。该证明可由前两个引理及以下断言轻易推出；显然，以下断言成立。

断言 1。若 $\Delta < \omega$，则 $|K(r[s]\theta[s]) - K(\overline{r}[s - \Delta]\overline{\theta}[s - \Delta])| \leq c$，其中某个常数为 c。

断言 1 的证明。很容易从 $r[s]\theta[s]$ 计算出 $r[s - \Delta]\theta[s - \Delta]$。反过来，设 $r(\Delta)$ 满足 $r[s] = r[s - \Delta]r(\Delta)$，对 θ 也同样如此。假设 $h(\pi_1) = r[s - \Delta]\theta[s - \Delta]$，且 $h(\pi_2) = r(\Delta)$，并且 $h(\pi_3) = \theta(\Delta)$，且所有这类程序都是最优的。令 p 为一个程序，它在输入 $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3$ 时，以显而易见的方式将通过 π_2 和 π_3 得到的两个字符串与来自 π_1 的字符串合并（回想一下第2.4节中的编码）。于是

$$h\left(0^{\ell(p)}1p\pi_1\pi_2\pi_3\right) = \overline{r}[s]\overline{\theta}[s]$$

从而

$$\begin{aligned} K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s]) &\leq \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2) + \ell(\pi_3) + c \\ &= K(\overline{r}[s-\Delta]\overline{\theta}[s-\Delta]) + K(\overline{r}(\Delta)) + K(\overline{\theta}(\Delta)) + c \end{aligned}$$

根据最优性。注意，$\ell(r(\Delta)) = \Delta$，并回忆 $K(\sigma) \leq \ell(\sigma) + 2\log(\ell(\sigma)) + c$ if $\sigma \in 2^{<\omega}$；因此

$$K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s]) \leq K(\overline{r}[s-\Delta]\overline{\theta}[s-\Delta]) + 2\ell(\overline{\Delta}) + 4\log(\ell(\overline{\Delta})) + c$$

由于 $\Delta < \omega$ 是固定的，这正是所需的结论。 ⊣

由前两个引理可得结论：设 $(x, y) \in \mathbb{D}$ 的极坐标为 (r, θ)。设 Δ 如引理 3.5 中所述。则

$$\begin{aligned} \dim(r,\theta) &= \liminf_{s\to\infty} \frac{K_s(r,\theta)}{s} \\ &= \liminf_{s\to\infty} \frac{K(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s])}{s} \\ &= \liminf_{s\to\infty} \frac{K(\overline{r}[s-\Delta]\overline{\theta}[s-\Delta])}{s} \\ &= \liminf_{s\to\infty} \frac{K_s(x,y)}{s} \\ &= \dim(x,y) \end{aligned}$$

利用这样一个事实：对于某个常数，$K(s) \leq \log(s) + 2\log(\log(s) + 1) + c$。 □

现在我们可以按要求转到极坐标。具体而言，我们将在定理 5.1 中构造的余解析集的点将由其半径确定，而半径将由我们明确构造。

从现在起，如果下文写作 (r, θ)，通常是指具有欧几里得坐标 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的点；在这种情况下，$(r, \theta) \in \mathbb{D}$。不过，我们偶尔还会回到欧几里得坐标，并会明确说明这一点。

3.1. 极坐标下的投影。本文重点研究将点投影到直线上的投影。下面我们作一些简单的几何观察，以简化后文的论证。考虑 $\theta \in [0, \pi]$，设 L_θ 为一条经过原点、与第一坐标轴成 θ 角的直线。显然，$[0, \pi]$穷尽了所有经过原点的直线。令 $(s, \rho) \in \mathbb{D}$，并将 (s, ρ) 在 L_θ上的投影记为$\mathrm{proj}_\theta(s, \rho)$：它是 L_θ 与包含 (s, ρ) 且垂直于L_θ 的唯一直线的交点。回忆一下，如果 $(s, \rho) \in \mathbb{D}$，那么 $0 \leq s \leq 1$。见图1。

有两种情况：要么 $|\theta - \rho| \leq \pi/2$ 或 $|\theta - \rho| > \pi/2$。若 $|\theta - \rho| \leq \pi/2$，则投影的长度为 $|\mathrm{proj}_\theta(s, \rho)| = s\cos(\theta - \rho)$；否则为 $|\mathrm{proj}_\theta(s, \rho)| = s\cos((\theta + \pi) - \rho)$。由于 $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ 且 $0 \leq s \leq 1$，我们得出：

引理 3.6. 对每个 $(s, \rho) \in \mathbb{D}$ 以及每个 $\theta \in [0, \pi]$，我们都有

$$|\operatorname{proj}_\theta(s, \rho)| = s|\cos(\theta - \rho)|.$$

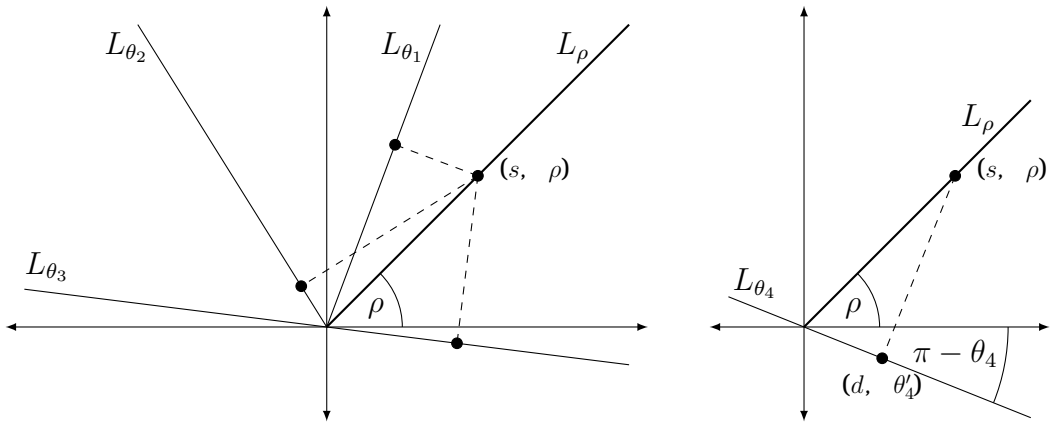


FIGURE 1. 当 $(s,\ \rho) \in L_\rho$ 时，投影到角度为 $\theta_1,\ \theta_2$ 的直线上的投影很容易求得。对于 $\theta_3,\ \theta_4$，这些投影在第四象限相交。在那里，$\theta_4' = \pi - \theta_4$，而根据余弦的定义可得 $d = s\cos(\rho + \pi - \theta_4) = s|\cos(\theta_4 - \rho)|$。

特别地，(s, ρ) 在 L_θ 上的投影的极坐标为

$$\mathrm{proj}_\theta(s,\rho) = \begin{cases} (s|\cos(\theta-\rho)|, \theta) & if\ |\theta-\rho| \le \pi/2 \\ (s|\cos(\theta-\rho)|, \theta+\pi) & otherwise. \end{cases}$$

现在假设 $E \subset \mathbb{D}$，并固定某个 $\theta \in [0, \pi]$。定义

$$E(\theta) = \{s|\cos(\theta-\rho)| \,|\, (s,\rho) \in E\} \subset \mathbb{R}.$$

下面我们将证明，事实上，$\dim_H(E(\theta)) = \dim_H(\mathrm{proj}_\theta(E))$。

我们需要以下概念：如果存在一台机器，对于输入 $k \le \omega$（或者更确切地说是 k），能够一致地输出一个有理数 $q \in \mathbb{Q}$（或者更确切地说是 q），使得 $q \in B_{2^{-k}}(x)$，则称实数 $x \in \mathbb{R}$ 是可计算的；这自然推广到 $\mathbb{R}^m$ for $m \ge 1$。

引理 3.7。设 $m \ge 1$。每个可计算实数 $x \in \mathbb{R}^m$ 的维数都是0。

证明。假设 M with program p is a machine that on input s for $s < \omega$ computes q_s for some $q_s \in \mathbb{Q}^m \cap B_{2^{-s}}(x)$。那么 $h\left(0^{\ell(p)}1ps\right) = q_s \in \mathbb{Q}^m \cap B_{2^{-s}}(x)$，因此 $K_s(x) \le \ell(s) + c$。回忆一下，$\ell(s) \le \log(s) + 1$，从而

$$\dim(x) \le \liminf_{s\to\infty} \frac{\log(s) + 1 + c}{s} = 0$$

按需。 □

引理 3.8。每个可数集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 的豪斯多夫维数都是0。

证明。设 $E = \{x_i \,|\, i < \omega\}$，并令 $X = \bigoplus x_i$ 为无限并。设 M 连同程序 p 是一台能够访问 X 的预言机机器，它在输入 (i, s) 时计算出 $x_i[s]$。那么显然，M 能够计算出所有 x_i，因此根据引理 3.7 和点到集合原理定理2.13，我们有

$$\dim_H(E) \le \sup_{x\in E} \dim^X(x) = 0$$

按需。 □

引理 3.9。 设 $r \in \mathbb{R}$。则对于每个预言机 $A \in 2^\omega$，以下结论成立。

(1) 维数$^A(r) =$ 维数$^A(r,$
0)(2) 维数$^A(r) =$维数$^A(-r)$

证明。 容易看出，除机器常数外，

$$K(\overline{r}[s]) \leq K(\overline{r}[s]\overline{0}[s]) \leq K(\overline{r}[s]) + K(\overline{0}[s]).$$

由于 0 是可计算的，引理 3.7 推出 $\lim_{s\to\infty} {}^{K_{(0[s])}}{}_s = 0$。取下极限可得结论 1。对于结论 2，注意到可以很容易地从 $r[s]$计算出 $-r[s]$，由此立即得到结果。这两种论证都可以相对化。 □

引理 3.10。 设 $\theta \in [0, \pi)$。若 $E \subset \mathbb{D}$ 则

$$\dim_H(\mathrm{proj}_\theta(E)) = \dim_H(E(\theta)).$$

证明。 固定 $\theta \in [0, \pi]$ 并假设 $(s, \rho) \in \mathbb{D}$。为简洁起见，定义 $p(s, \rho)$，使得

$$p(s, \rho) = |\mathrm{proj}_\theta(s, \rho)| = s|\cos(\theta - \rho)|$$

根据引理3.6。现在，引理1中的第3.9项推出

$$\dim^A(p(s, \rho)) = \dim^A(p(s, \rho), 0)$$

对于每个预言机 $A \in 2^\omega$。因此，令

$$P_\theta(E) = \{(p(s, \rho), 0) \mid (s, \rho) \in E\} \subset \mathbb{R}^2.$$

现在容易看出，维数$_H(E(\theta)) =$维数$_H(P_\theta(E))$，由点到集合原理定理 2.13。

现在我们打算运用推论 2.6：豪斯多夫维数在旋转下保持不变。然而，将 $P_\theta(E)$ 逆时针旋转 θ 后，不一定等于 proj$_\theta(E)$：如果存在 $(s, \rho) \in E$ 使得 $|\theta - \rho| > \pi/2$，那么 proj$_\theta(s, \rho) =(p(s, \rho)\ \theta + \pi)$，而不是 $(p(s, \rho)\ \theta)$。这很容易处理：每当 $(s, \rho) \in E$ 且 $|\theta - \rho| > \pi/2$ 时，改用欧几里得坐标，考虑 $(-p(s, \rho), 0)$。为此，令

$$p^*(s, \rho) = \begin{cases} p(s, \rho) & \text{if } |\theta - \rho| \leq \pi/2 \\ -p(s, \rho) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

并据此在欧几里得坐标中定义集合

$$P^*_\theta(E) = \{(p^*(s, \rho), 0) \mid (s, \rho) \in E\};$$

见图 2。根据引理 3.9 的条目 1 和 2，显然，对于所有预言机 $A \in 2^\omega$，dim$^A(p(s, \rho),$ 0) $=$dim$^A(p^*(s, \rho),0)$。因此，点到集合原理意味着 dim$_H(P_\theta(E)) =$dim$_H(P^*_\theta(E))$。此外，将 $P^*_\theta(E)$ 旋转 θ 后得到 proj$_\theta(E)$。因此，应用推论 2.6 可得

$$\dim_H(E(\theta)) = \dim_H(P_\theta(E)) = \dim_H(P^*_\theta(E)) = \dim_H(\mathrm{proj}_\theta(E))$$

如所要求。 □

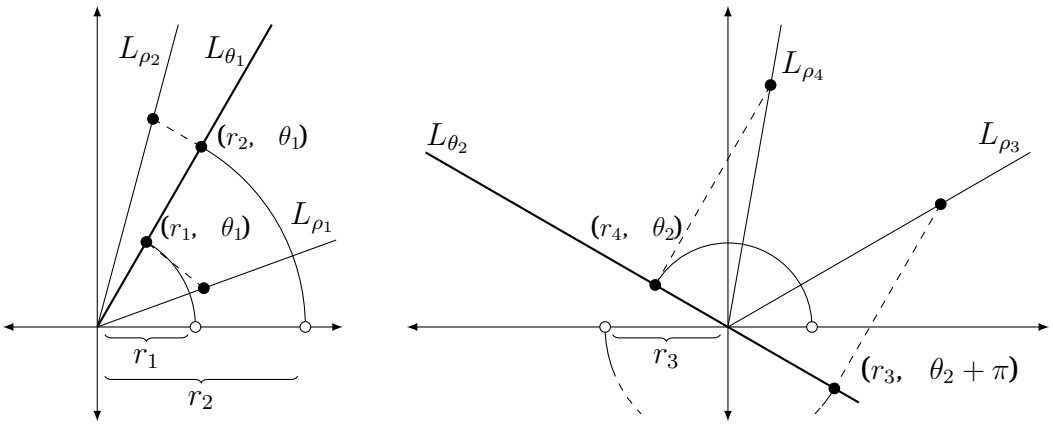


FIGURE 2. 若 $|\rho-\theta|\le\pi/2$，则只需考虑在第一坐标轴上的投影长度，并进行旋转（见 ρ_1，ρ_2 和 θ_1）。否则，我们需要沿第二坐标轴镜像，然后旋转 θ；见 θ_2 和 ρ_3。

4. CONSTRUCTING CO-ANALYTIC SETS BY RECURSION

Z. Vidny´anszky [42] 在假设 $V{=}L$ 的条件下，提出了一种利用余解析条件构造余解析集的一般递归构造方法。虽然他们的结果非常一般（它运用了描述集合论工具，适用于所有波兰空间），但我们只关注其中一个特殊情形，下面将对此进行描述。这个结果是对 A. Miller[35]所用方法的推广。该方法最早由 Erd´os、Kunen 和 Mauldin 提出 [11]。

为简化记号，若 $X=\{x_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$，我们定义 $X\restriction\alpha=\{x_\beta\mid\beta<\alpha\}$。

定义 4.1。给定 $F\subset\mathbb{D}^{\le\omega}\times[0,\pi/2]\times\mathbb{D}$，集合 $X=\{x_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$ 与 F 相容，当且仅当存在以下对象：

- 一个 $[0,\pi/2]$的枚举 $\{p_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$；以及
- 一个枚举 $\{A_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}\subset\mathbb{D}^{\le\omega}$，使得如果 $\alpha<\omega_1$，则 $A_\alpha=X\restriction\alpha$

使得对于每个 $\alpha<\omega_1$，都有 $(A_\alpha,\ p_\alpha,\ x_\alpha)\in F$。

注意，由于 $A_\alpha\in\mathbb{D}^{\le\omega}$ 每个 A_α 的序型都是 $\le\omega$。这是良定义的，因为 ω_1是最小的不可数序数，因此对于每个 $\omega\le\beta<\omega_1$，β 与 ω之间都存在双射，从而给出序型为 ω的有界序。

定义 4.2. 集合 $X\subset 2^\omega$ 若在图灵度的偏序中是共尾的，则称其在图灵度中共尾。如果 $m\ge1$ 和 $\underline{\ }X\subset\mathbb{R}^m$，那么 X 在图灵度中共尾，当且仅当集合 $\{x\mid x\in X\}$ 是共尾的。

定理 4.3 ([42, 定理 1。3], $V{=}L$)。设 $F\subset\mathbb{D}^{\le\omega}\times[0,\pi/2]\times\mathbb{D}$。若 F 是余解析的，并且对于所有 $(A,p)\in\mathbb{D}^{\le\omega}\times[0,\pi/2]$，截面

$$F(A,p)=\{x\in\mathbb{D}\mid F(A,p,x)\}$$

在图灵度中共尾，则存在一个余解析集 $X\subset\mathbb{D}$，与 F 相容。

需要指出的是，定理已被证明适用于所有波兰空间，以及任意波兰空间 [42] 的所有不可数博雷尔子集。

定理 4.3 证明了一种递归原理：如果 $[0,\pi/2]=\{p_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ 被视为条件的集合，那么 $\mathbb{D}$ 就是候选对象的集合。该定理保证存在一个集合 $X=\{x_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ 事后看来，可以认为它是分阶段构造出来的：每个阶段都满足一个特定条件（通过选取一个合适的候选对象），同时不违反已满足的条件。

我们概述一下其中的直观思路：在阶段 α，我们可以访问 A_α（即已枚举到 X中的元素集合）以及当前需要满足的条件 p_α。现在，剖面$F(A_\alpha,\ p_\alpha)$给出了同时满足条件 p_α并遵循 A_α的合适候选对象集合。由于 $A_\alpha=X\upharpoonright\alpha$，我们看到 X 满足所有条件且具有相干性（这与范畴论中逆极限的相干性类似）。

在我们的具体情形中，我们将 $\mathbb{D}$ 视为候选对象集合，将 $[0,\pi/2]$ 视为条件集：这些条件就是我们投影到的角度。我们在定理5.1 和6.1中以不同方式满足条件：设 $\theta\in[0,\pi/2]$ 为当前需要满足的条件。在定理5.1中，我们在与原点成角θ的过原点直线上选取一个合适的候选对象；在定理6.1中，我们使用 θ 作为预言机，找到一个点（位于另一条直线上），使其相对于该预言机足够复杂。

接下来我们证明，包含合适候选对象的截面在图灵度中是共尾的。我们证明，对每个 $X\in 2^\omega$，都存在 $x\in F(A,\ p)$，使得 x 通过某种 $Y\geq_T X$ -归约编码某个 m；我们借助称为折叠映射的映射，在第 5.2节中纳入这些归约。（关于可计算性理论中的概念，例如 m-归约，可参见 Soare [39]。）

Vidny´anszky 和 Medini 给出了定理 4.3 [42, 34] 的一些应用：其中包括构造一个共解析二点集，以及一个共解析 Hamel 基和一个 MAD（极大几乎不交）集合族。所有这些结果此前都已由 A. Miller [35] 得到。

5. The Proof of Theorem 5.1

本节中，我们构造以下反例：一个豪斯多夫维数为 1 的平面集，其所有投影的维数均为 0。利用第 3 节的结果，我们将在极坐标中进行论证。

定理 5.1 ($V=L$)**.** 存在一个余解析集 $E\subset\mathbb{R}^2$，使得 维数$_H(E)=1$，然而对于每个 $\theta\in[0,\pi]$，都有 维数$_H(\mathrm{proj}_\theta(E))=0$。

我们将用到以下经典定理。我们给出一个利用有效维数和点到集合原理定理 2.13 的证明。

引理 5.2. 若 $E\subset\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 与过原点的每条直线都相交于 $\mathbb{D}$，则 维数$_H(E)\geq 1$。

证明。令 $A\in 2^\omega$ 为一个预言机。存在相对于 A随机的 $B\in 2^\omega$。因此，$\theta=0001B\in 2^\omega$ 编码了一个实数 $\theta\in(0,\ 1)$。由于 B 相对于 A是随机的，我们知道 $K^A(B\upharpoonright s)\geq s-c$，其中 c为某个常数。由于可以很容易地从 $\theta[s]$ 计算出 $B\upharpoonright s$，我们有

$$s-c\leq K^A(B\upharpoonright s)\leq K^A(\overline{\theta}[s])+c'$$

对于某个机器常数 c'。因此

$$\dim^A(\theta) = \liminf_{s\to\infty} \frac{K^A(\overline{\theta}[s])}{s} \geq \liminf_{s\to\infty} \frac{K^A(B \upharpoonright s)}{s} \geq \liminf_{s\to\infty} \frac{s-c}{s} = 1.$$

由于 E 与直线相交，夹角为 θ，因此存在 $r > 0$ 使得 $(r, \theta) \in E$。因此

$$\dim^A(r,\theta) = \liminf_{s\to\infty} \frac{K^A(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s])}{s}.$$

我们可以根据 $r[s]\theta[s]$轻易计算出 $\theta[s]$，因此对于某个机器常数 c''，有 $K^A(\theta[s]) \leq K^A(r[s]\theta[s])+c''$。于是

$$\dim^A(r,\theta) = \liminf_{s\to\infty} \frac{K^A(\overline{r}[s]\overline{\theta}[s])}{s} \geq \liminf_{s\to\infty} \frac{K^A(\overline{\theta}[s])}{s} = \dim^A(\theta) = 1.$$

由于 A 是任意的，结论得证。 □

5.1. **证明路线图**。我们假设 $V=L$，因此令 $B = \{\theta_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$为 $[0, \pi/2]$的一个枚举。我们要对 ω_1 进行归纳，并据此构造$E \subset \mathbb{D}$，使其在各个阶段满足定理 5.1；我们将 B 中的角度视为需要满足的条件（或要求）。在构造过程中，考虑条件 φ时，我们也同时处理 $\varphi + \pi/2$。根据定理 4.3，在阶段 α，我们可以获得已经枚举进 E的所有点 (r_i, θ_i)。我们的目标是满足条件θ_α。作为简写，记 $\theta = \theta_\alpha$。论证如下：

(1) 令 $A_\alpha = \{(r_i, \theta_i) \mid i < \omega\}$，即已经枚举到 E 中的点集。对于每个$i < \omega$，角坐标 θ_i 告诉我们已经满足了哪个条件。(2) 构造 $r \in (0, 1)$，使得 $\dim(r|\cos(\theta - \theta_i)|) = 0$，并且对所有 $i < \omega$，$\dim(r|\cos(\theta + \pi/2 - \theta_i)|) = 0$。由引理 3.10，这就足够了。(3) 将数对 (r, θ) 枚举到 E 中。

注意，第 (2) 项中的实数集必须在图灵度中共终，定理 4.3 才能适用。下面的命题至关重要。

命题 5.3。假设对所有 $i < \omega$，$a_i \in (0,1)$。存在 $r \in (0,1)$，使得维数$(a_i r) = 0$，对所有 $i < \omega$ 均成立。所有这样的 r 构成图灵度中的共终集。

命题 5.3 的证明将推迟到第 5.2 节。不过，有了这个证明，我们现在就可以证明定理 5.1。在此之前还需要一个引理。

引理 5.4. 对每个 $A \in 2^\omega$ 和 $a \in \mathbb{R}$，集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{维数}^A(x) = a\}$ 都是博雷尔集。

证明。我们需要证明，维数作为 x 的函数是博雷尔可测的。回顾其定义

$$\dim(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{K_n(x)}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\min\{K(q) \mid q \in \mathbb{Q} \cap B_{2^{-n}}(x)\}}{n}.$$

由于一列博雷尔可测函数的下极限本身也是博雷尔可测的，只需证明 $K_n(x) = \min\{K(q) \mid q \in \mathbb{Q} \cap B_{2^{-n}}(x)\}$ 是博雷尔可测的。这一点

很容易看出：注意到

$$\begin{aligned} K_n(x) < c &\iff \exists q \in \mathbb{Q} \cap B_{2^{-n}}(x)(K(q) < c) \\ &\iff x \in \bigcup_{q \in \mathcal{K}(c)} B_{2^{-n}}(q) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{K}(c) = \{p \in \mathbb{Q} \mid K(p) < c\}$。因此， K_n是博雷尔可测的，维数也是如此。此论证可以相对化。□

定理的证明　明 5.1。我们使用定理 4.3 并定义 $F \subset \mathbb{D}^{\leq\omega} \times [0, \pi/2] \times \mathbb{D}$ 使得 at

$$\begin{gathered} (A, \varphi, (r, \theta)) \in F \text{ if and only if} \\ \varphi = \theta \text{ and for all } (r', \theta') \in \operatorname{ran}(A) \text{ we have} \\ \dim(r|\cos(\varphi - \theta')|) = \dim(r|\cos(\varphi + \pi/2 - \theta')|) = 0. \end{gathered}$$

特别要注意，任何能够证明条件 φ 成立的点都位于直线 L_φ上。

为了应用定理 4.3，我们必须证明 F 是余解析的；但这可由引理 5.4立即得出。因此，令 $\varphi \in [0, \pi/2]$。现在我们关注 F的截面：根据定义，给定 $\alpha < \omega_1$ 我们有

$$F(A, \varphi) = \{(r, \theta) \mid (A, \varphi, (r, \theta)) \in F\}.$$

假设 $A = \{(r_i, \theta_i) \mid i < \omega\} \in \mathbb{D}^{\leq\omega}$，因此是可数的。令

$$a_i = |\cos(\varphi - \theta_i)| \text{ and } b_i = |\cos(\varphi + \pi/2 - \theta_i)|.$$

注意到，根据构造，我们有 $(r, \theta) \in F(A, \varphi)$ 当且仅当 $\theta = \varphi$ 且 $\dim(ra_i) = \dim(rb_i) = 0$ 对所有 $i < \omega$均成立。现在，命题 5.3 推出该截面在图灵度中共尾。因此，利用引理5.4，可知定理4.3 适用：存在一个余解析集

$$E = \{(r_\alpha, \theta_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

它与 F 相容。特别地，存在 $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} = [0, \pi/2]$ 和 $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 的枚举，它们枚举 $A_\alpha = \{(r_i, \theta_i) \mid i < \omega\} = E \restriction \alpha$，使得对每个 $\alpha < \omega_1$，

$$(r_\alpha, \theta_\alpha) \in F(A_\alpha, \varphi_\alpha).$$

特别地， $\theta_\alpha = \varphi_\alpha$。

为进行验证，令 $\varphi \in [0, \pi]$。我们证明 $\dim_H(\operatorname{proj}_\varphi(E)) = 0$。根据引理 3.10，只需证明 $\dim_H(E(\varphi)) = 0$，其中 $E(\varphi) = \{r|\cos(\varphi - \theta)| \mid (r, \theta) \in E\}$。这正是我们接下来要证明的。

首先，注意到要么 $\varphi = \varphi_\delta \in [0, \pi/2]$ 对于某个 $\delta < \omega_1$成立；要么 $\varphi = \varphi_\delta + \pi/2 \in (\pi/2, \pi]$对于某个 $\varphi_\delta \in [0, \pi/2]$成立。令 δ为这样的对象，并回顾 $E = \{(r_\alpha, \theta_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$。我们分别考虑在条件 φ_δ 之前枚举的点和在φ_δ 之后枚举的点。

$\leq \delta$：在条件 φ_δ下，定义（类似于引理 3.8）预言机

$$X = \bigoplus \left\{ \overline{r_\beta|\cos(\varphi_\delta - \theta_\beta)|}, \overline{r_\beta|\cos(\varphi_\delta + \pi/2 - \theta_\beta)|} \,\middle|\, \beta \leq \delta \right\}.$$

那么 X 计算 $r_\beta|\cos(\varphi_\delta-\theta_\beta)|$ 以及 $r_\beta|\cos(\varphi_\delta+\pi/2-\theta_\beta)|$ 对所有 $\beta\le\delta$成立。由于 $\varphi=\varphi_\delta$ 或 $\varphi=\varphi_\delta+\pi/2$，引理 3.7 特别推出

$$\dim^X(r_\beta|\cos(\varphi-\theta_\beta)|)=0$$

对所有 $\beta\le\delta$。

$>\delta$：我们证明，对每个 $\beta>\delta$，都有 $\dim(r_\beta|\cos(\varphi-\theta_\beta)|)=0$。令 $\delta<\beta<\omega_1$。那么 $(r_\beta,\ \theta_\beta)\in F(A_\beta,\ \varphi_\beta)=F(E\restriction\beta,\ \varphi_\beta)$。但是，我们在阶段 β 已经处理过的条件，恰好就是枚举到 $E\restriction\beta$ 中各点的角坐标；特别地，$E\restriction\beta=\{(r_\alpha,\ \varphi_\alpha)\mid\alpha<\beta\}$。因此，对所有 $\gamma<\beta$，再次根据 F 的定义，我们有

$$\dim(r_\beta|\cos(\varphi_\gamma-\theta_\beta)|)=\dim(r_\beta|\cos(\varphi_\gamma+\pi/2-\theta_\beta)|)=0.$$

由于 $\delta<\beta$，且 $\varphi=\varphi_\delta$ 或 $\varphi=\varphi_\delta+\pi/2$，特别地我们有

$$\dim(r_\beta|\cos(\varphi-\theta_\beta)|)=0.$$

我们任意选取了 $\delta<\beta<\omega_1$，因此对所有此类 β，结论都成立，正如所要求的 求。

因此，根据点到集合原理定理 2.13 和引理 3.10，我们有

$$\begin{aligned}\dim_H(\mathrm{proj}_\varphi(E))&=\dim(E(\varphi))\\&=\min_{A\in2^\omega}\sup_{\alpha<\omega_1}\dim^A(r_\alpha|\cos(\varphi-\theta_\alpha)|)\\&\le\sup_{\alpha<\omega_1}\dim^X(r_\alpha|\cos(\varphi-\theta_\alpha)|)\\&=0.\end{aligned}$$

现在，根据引理 $_H(E)\ge1$ 5.2。 □

Fin事实上，维数$_H(E)=1$ 这一事实是以下推论的结果 .

推论 5.5. 设 $E\subset\mathbb{D}$。则 维数$_H$(proj$_\theta(E))\ge$维数$_H(E)-1$。

证明。设 $(r,\theta)\in$ proj$_\theta(E)$。根据引理 3.6，我们知道，对于某个 $(s,\rho)\in E$，$r=s|\cos(\theta-\rho)|$。但这意味着只缺少一条信息：由 (r,θ)，我们可以从 ρ计算出 s，反之亦然。因此，设维数$(r,\theta)=\epsilon$。由于维数(s)、维数$(\rho)\le1$，我们看到维数$(s,\rho)\le$维数$(r,\theta)+1$，这正是所需的。□

5.2. 证明命题 5.3。若区间形如 $(j/2^k,(j+1)/2^k)$，则称其为（开）二进制区间。形如 $[j/2^k,(j+1)/2^k]$ 的区间称为闭二进制区间。注意，如果 $x\in(j/2^k,(j+1)/2^k)$，那么 $|x-j/2^k|\le2^{-k}$，因此 x 和 $j/2^k$ 的二进制展开的前 k 位相同：二者都以 j 的二进制展开开头。

在下面的结果中，我们处理 $(0,\ 1)$ 中的开区间。所有实数均用二进制表示。我们不直接处理区间，而是用二进有理数来论证，并用其有限二进制展开表示这些二进有理数。为此，我们引入以下记号。若 $\sigma\in2^{\le\omega}$，令 $\tilde\sigma=0.\sigma\in\mathbb{R}$。若 $\sigma\in2^{<\omega}$，令 $\tilde\sigma_+=0.\sigma1^\infty\in\mathbb{R}$；令 $[\tilde\sigma]$ 表示开区间 $(\tilde\sigma,\ \tilde\sigma_+)$。若 $a\in\mathbb{R}$，则 $a[\tilde\sigma]=(a\tilde\sigma,\ a\tilde\sigma_+)$。

根据我们的定义，可以直接得到一些基本事实：

- 如果 $\sigma\in2^{<\omega}$，那么 $[\tilde\sigma]$ 是一个二进区间；因此，如果 $x\in[\tilde\sigma]$，那么 x 和 $\tilde\sigma$ 在长度为 ℓ（σ）的初始段上相同。我们可以将 x 延拓 $\tilde\sigma$。

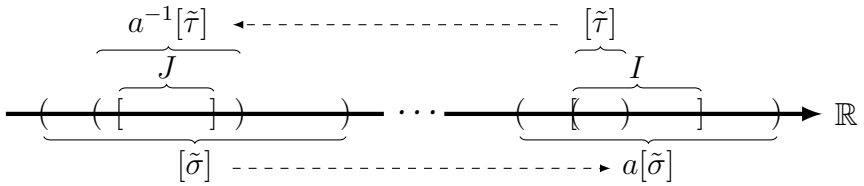


FIGURE 3. 我们从左侧开始，沿逆时针方向论证：考虑 $a[\tilde{\sigma}]$，得到一个开区间；其中最大的闭二进区间是 I。选取合适的 $\tilde{\tau} \in I$，得到 $a^{-1}[\tilde{\tau}]$。包含于其中的最大二进区间是J，其左端点为 $d = \tilde{\rho}$。因此 $[\tilde{\rho}] \subset J$，事实上， J 的内部等于 $[\tilde{\rho}]$。

- 反之，如果 I 是二进制的，且 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 满足 $\tilde{\sigma}$ 是 I的左端点，那么 $I = [\tilde{\sigma}]$。

- 如果 I 是二进制的，且 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 满足 $\tilde{\sigma} \in I$，那么 $[\tilde{\sigma}] \subset I$。
- 特别地，如果 σ， $\rho \in 2^{<\omega}$ 那么 $\sigma \prec \rho$ 当且仅当 $\tilde{\rho} \in [\tilde{\sigma}]$。

引理 5.6. 设 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 和 $a \in (0,1)$。假设 $0 < \epsilon < 1$。存在 ρ、 $\tau \in 2^{<\omega}$，使得：

(1) $\sigma \prec \rho$*(2)* $a[\tilde{\rho}] \subset [\tilde{\tau}]$*(3)* $K(\tau) / \ell(\tau) < \epsilon$

证明。 设 σ, a 和 ϵ 给定。考虑 $a[\tilde{\sigma}]$。由于 $[\tilde{\sigma}]$ 是开集， $a[\tilde{\sigma}]$也是开集，因此它包含一个闭二进区间。取其中直径最大的闭二进区间 I，并取$\tau' \in 2^{<\omega}$使得 $\tilde{\tau}'$是 I的左端点。由闭性可知， $\tilde{\tau}' \in a[\tilde{\sigma}]$。根据柯尔莫哥洛夫复杂度的标准结果，存在最小的 $s < \omega$ 使得 $\tau = \tau' 0^s$满足

$$\frac{K(\tau)}{\ell(\tau)} < \epsilon.$$

特别地， $\tilde{\tau}' = \tilde{\tau} \in I$。现在考虑 $[\tilde{\tau}]$，它是开集，因此 $a^{-1}[\tilde{\tau}]$也是开集。令 J表示包含于 $a^{-1}[\tilde{\tau}]$中的最大闭二进区间，并将其左端点记为 d。同样由闭性可知， $d \in a^{-1}[\tilde{\tau}]$。令 $\rho \in 2^{<\omega}$ 满足 $\tilde{\rho} = d$。

现在 $\sigma \prec \rho$: 根据构造， $\tilde{\rho} = d \in J \subset a^{-1}[\tilde{\tau}]$。字符串 τ是 τ' 的真扩展，因此 $[\tilde{\tau}] \subset [\tilde{\tau}']$。由于 $\tilde{\tau}'$ 是 I 的左端点， I 的内部等于 $[\tilde{\tau}']$。因此$[\tilde{\tau}] \subset [\tilde{\tau}'] \subset I \subset a[\tilde{\sigma}]$，故 $\tilde{\rho} \in a^{-1}[\tilde{\tau}] \subset a^{-1}(a[\tilde{\sigma}]) = [\tilde{\sigma}]$，如所需。此外， $a[\tilde{\rho}] \subset [\tilde{\tau}]$，因为 $[\tilde{\rho}] \subset J \subset a^{-1}[\tilde{\tau}]$且所有包含关系均为真包含。论证至此完成。□

为了在构造一个合适的 $r \in (0,1)$ 时在图灵度中达到共尾性，我们需要在将给定的预言机 $A \in 2^\omega$ 编码进 r 的同时满足每个条件（参见第 5.1 节中的第 (2) 项）。令

$$\nu(k) = 2^{2^k}$$

确定在 r 的哪些位上编码 A。我们将利用 ν 的值域之间的空隙来满足这些条件。我们称 ν 为折叠映射。

5.2.1. 的构造。设 (a_i) 为条件集，其中对所有 $i<\omega$， $a_i \in \in(0,1)$。我们分阶段构造 $r \in \in(0,1)$，方法是确定其二进制展开，该展开由连续的延伸 $x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots$ 给出，并满足 $x_i \in 2^{<\omega}$。我们对 ω 使用归纳法进行论证。

(1) 设 $A \in 2^{\omega}$ 已给定。(2) 设 $x_0 = \emptyset$ 为该空字符串。(3) 设 x_k 已给定。在阶段 $k+1$，通过康托配对函数解码 $k+1 = \langle i, n\rangle$

，

例如，并处理要求 i。因此，我们会无限次地处理每一项要求。(4) 应用引理 5.6，结合 $a = a_i$ 和 $\epsilon = \frac{1}{k}$，得到一个合适的延伸 $\rho_k \succ x_k$。(5) 令 $t = \nu(k+1) - \ell(\rho_k) - 1$ 以及 $d = A(k)$，并定义

$$x_{k+1} = \begin{cases} \rho_k 0^t d & \text{if } \ell(\rho_k) < \nu(k+1) \\ (\rho_k \restriction (\nu(k+1)-1))d & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，若 $k>0$，则由归纳法可得 $\ell(x_k) = \nu(k)$。
(6) 定义 $x = \bigcup_{k<\omega} x_k$，因此令 $r = \tilde{x}$。
(7) 注意到， A 可计算地折入 x：对于所有 $k<\omega$，都有 $x(\nu(k+1)-1) = A(k)$。

为了完成命题 5.3 的证明，我们需要确保式子（(5)）中的第二种情况对于每个要求 a_i只发生有限次。下面的引理保证了这一点。

在继续证明之前，先给出关于区间的另外几个有用事实。设 $(x,y) \subset (0,1)$。

(i) 用 $\operatorname{diam}((x,y)) = y - x$ 表示 (x,y) 的直径。若 $\sigma \in 2^{<\omega}$，则 $\operatorname{diam}([\tilde{\sigma}]) = 2^{-\ell(\sigma)}$。特别地， $-\log(\operatorname{diam}([\tilde{\sigma}])) = \ell(\sigma)$。(ii) 若 $k<\omega$ 满足 $k \geq -\log(\operatorname{diam}((x,y))) + 2$，则存在 $j<\omega$，使得闭二进区间 $[j/2^k, (j+1)/2^k] \subset (x,y)$。

引理 5.7。对于每个 $a_i \in (0,1)$，都存在 $M_i < \omega$，使得若 $k+1 > M_i$ 且 $k+1 = \langle i, n\rangle$ 满足要求 a_i，则 $\ell(\rho_k) < \nu(k+1)$。

证明。固定某个 $a_i = a$，并假设我们处于阶段 $k+1 = \langle i, n\rangle$。令 $\rho = \rho_k$。回忆一下，$\tilde{\rho} \in J \subset a^{-1}[\tilde{\tau}]$。注意，$\operatorname{diam}(a^{-1}[\tilde{\tau}]) = a^{-1}2^{-\ell(\tau)}$。现在，由于 J被定义为 $a^{-1}[\tilde{\tau}]$内直径最大的闭二进区间，且 $\tilde{\rho}$ 是 J的左端点，条目 (i) 和 (ii) 推出

$$\begin{aligned} \ell(\rho) &\leq -\log(\operatorname{diam}(a^{-1}[\tilde{\tau}])) + 2 \\ &= \log(a) - \log\left(2^{-\ell(\tau)}\right) + 2 = \log(a) + \ell(\tau) + 2. \end{aligned}$$

回忆一下， $\tau = \tau' 0^s$，因此

$$\ell(\rho) \leq \log(a) + \ell(\tau') + s + 2.$$

回想一下， ρ 是 x_k 的延伸（因此 $x_k = \sigma$ 在引理5.6中）。根据构造， $\tilde{\tau}' \in I \subset a[\tilde{x}_k]$，其中 I 在 $a[\tilde{x}_k]$中是二进制极大的。因此

$$\ell(\tau') \leq -\log(\operatorname{diam}(a[\tilde{x}_k])) + 2 = -\log(a) + \ell(x_k) + 2$$

由此，通过第（5）项可得

$$\ell(\rho) \leq \ell(x_k) + s + 4 = \nu(k) + s + 4$$

考虑某个阶段 $k+1$。我们正在构造 $x_{k+1} \succ x_k$，其中 $\ell(x_{k+1}) = \nu(k+1)$。如果我们不需要截断 ρ (正如条目(5)中的后一种情况)，则我们的构造是成功的。在这种情况下，$\ell(\rho) < \ell(x_{k+1}) = \nu(k+1)$。因此，只需证明最终有$s < \nu(k+1) - \nu(k) - 4$。

回想一下，s 的选取满足 $\frac{K(\tau)}{\ell(\tau)} \leq \frac{K(\tau' 0^s)}{\ell(\tau') + s} < \frac{1}{k}$。将其简化如下：

$$\begin{aligned}
\frac{K(\tau' 0^s)}{\ell(\tau') + s} &\leq \frac{K(\tau') + K(0^s) + c'}{s} \\
&\leq \frac{K(\tau')}{s} + \frac{K(s)}{s} + \frac{c''}{s} \\
&\leq \frac{\ell(\tau') + 2\log(\ell(\tau'))}{s} + \frac{\log(s) + 2\log(\log(s)+1)}{s} + \frac{c}{s}
\end{aligned}$$

对于机器常数之和 c。

这些项很容易得到界。显然，当 $s > 3kc$时，$\frac{c}{s} < \frac{1}{3k}$。对于中间项，注意到如果 $s \geq 2$，那么 $\log(s) + 2\log(\log(s)+1) < 3\log(s)$。因此，

$$\frac{\log(s) + 2\log(\log(s)+1)}{s} < \frac{3\log(s)}{s}.$$

由于 $\log(s)/s$ 单调递减，若 $s > 2^k$，则

$$\frac{3\log(s)}{s} < \frac{3\log\left(2^k\right)}{2^k} = \frac{3k}{2^k}.$$

于是，若 $9k^2 < 2^k$，则 $\frac{3k}{2^k} < \frac{1}{3k}$，这对 $k \geq 10$成立。因此，当 k足够大时，界$s > 2^k$ 就足够了。

对于第一项，回忆 $\ell(\tau') \leq -\log(a) + \nu(k) + 2$。由于 $a \in (0,1)$，我们知道$-\log(a) > 0$。因此，当 k足够大时，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\ell(\tau') + 2\log(\ell(\tau'))}{s} &\leq \frac{-\log(a) + \nu(k) + 2 + 2\log(-\log(a) + \nu(k) + 2)}{s} \\
&\leq \frac{-\log(a) + 3\nu(k)}{s}
\end{aligned}$$

由于 a 是固定的，对于足够大的 k，我们有

$$\frac{\ell(\tau') + 2\log(\ell(\tau'))}{s} \leq \frac{-\log(a) + 3\nu(k)}{s} \leq \frac{4\nu(k)}{s}.$$

现在注意到，当 $s > 12k\nu(k)$时，$\frac{4\nu(k)}{s} \leq \frac{1}{3k}$。因此，取足够大的 k，我们得到$s > \max\left\{3kc, 2^k, 12k\nu(k)\right\}$ 就足够了；同样，当 k 足够大时，这可归结为 $s > 12k\nu(k)$。

最后，注意到 $12k\nu(k) + 1 < \nu(k+1) - \nu(k) - 4$ 当 $k \geq 3$时成立。因此，当 k 足够大，满足上述所有条件后，$s = 12k\nu(k) + 1$满足 $\frac{K(\tau' 0^s)}{s} < \frac{1}{k}$，而$s < \nu(k+1) - \nu(k) - 4$。因此，最终 $\ell(\rho)$ 足够小，符合要求。□

命题 5.3 的证明。给定 $A \in 2^\omega$，并设 (a_i) 是可数要求序列。按第5.2.1节中的方法构造 $x = \bigcup_{k<\omega} x_k$。令 $r = \tilde{x}$。由第2.4节和定义 4.2 可容易看出，A 可以由 r的二进制展开通过计算得到。因此，我们只需证明 $a_i r$ 的维数是最小的。固定$i < \omega$ 并考察 a_i。由引理 5.7，存在 M，使得若 $k > M$ 且 $k = \langle i, n\rangle$，则 $\rho_k \prec x_\circ$ 对每个这样的 k，令 τ_k 为由引理 5.6 与 ρ_k 一同得到的对象。现在

$$\dim(a_i r) = \liminf_{s\to\infty} \frac{K(\overline{a_i r}[s])}{s}$$

由推论 2.15。根据构造，$a_i[\tilde{\rho}_k] \subset [\tilde{\tau}_k]$ 且 $a_i\tilde{\rho}_k \in [\tilde{\tau}_k]$。因此 $a_i r = a_i\tilde{x} \in [\tilde{\tau}_k]$。此外，$K(\tau_k)/\ell(\tau_k) < 1/k$。令 $D = \{k > M \mid k = \langle i, n\rangle \text{ 对某个 } n\}$。那么

$$\begin{aligned}
\dim(a_i r) &\le \liminf_{k\to\infty,\, k\in D} \frac{K(\overline{a_i r}[\ell(\tau_k)])}{\ell(\tau_k)} \\
&\le \liminf_{k\to\infty,\, k\in D} \frac{K(\tau_k) + c}{\ell(\tau_k)} \\
&\le \liminf_{k\to\infty,\, k\in D} \frac{1}{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

其中 c 是从 $a_i r[\ell(\tau_k)]$ 得到 τ_k (依照第 2.4 节的规定)。证明至此完成。□

6. The Proof of Theorem 6.1

本节给出以下结果的证明；根据推论5.5，该结果是最优的。

定理 6.1。对于每个 $0 < \epsilon < 1$，都存在一个余解析集 $E \subset \mathbb{R}^2$，使得维数$_H(E) = 1 + \epsilon$，而对于每个 $\theta \in [0, 2\pi)$，我们有 维数$_H(\mathrm{proj}_\theta(E)) = \epsilon$。

请注意，这实际上是定理 5.1的一种推广：情形 $\epsilon = 0$ 已在该定理中涵盖。其次，情形 $\epsilon = 1$ 是平凡的：如果 $E \subset \mathbb{R}^2$ 满足维数$_H(E) = 2$，那么推论 5.5 表明，对于每个 $1 \le$ 维数$_H(\mathrm{proj}_\theta(E)) \le 1$ 都成立 θ。因此，我们的定理涵盖了所有情形。

6.1. 证明路线图。令 $0 < \epsilon < 1$。假设 $V{=}L$，我们按如下方式进行论证。

(1) 固定 $[0, \pi/2]$ 的一个枚举 $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$。(2) 在阶段 α，令 $A_\alpha = \{(r_i, \theta_i) \mid i < \omega\}$，表示已枚举进我们集合的所有点。(3) 令 $X \in 2^\omega$ 为一个序列，其各位由 φ_α 的二进制展开构成。特别地，X 是 φ_α 去掉前四位后的结果（参见第 2.4 节）。(4) 我们不会通过将一个点枚举到 L_{φ_α} 上并纳入我们的集合，来满足条件 φ_α。相反，我们先用合适的折叠映射将已满足的条件编码进 r，从而恢复这些条件：如果 (r_i, θ_i) 在阶段 β 被枚举进我们的集合，那么 φ_β 就折叠进 r_i，因此可以通过计算恢复。令 $\{\varphi_i \mid i < \omega\}$ 为已经满足的条件的集合。

(5) 选取 $\theta \in [0, \pi/2]$，使得 θ 相对于 X是随机的。

(6) 令 (a_i) 为所有 $|\cos(\theta-\varphi_i)|$ 和 $|\cos(\theta+\pi/2-\varphi_i)|$ 的枚举。令 Y 为 X 与所有 a_i 的并。我们还假设 Y 可以计算 ϵ。
(7) 构造 $r\in(0,1)$，使得：(a) φ_α 的二进制展开可计算地折叠进 r 的二进制展开中；(b) 对所有 $i<\omega$，$\dim(ra_i)=\epsilon$；(c) $\dim^{Y,\theta}(r)=\epsilon$。

注 6.2. 乍看之下，似乎很难控制条目 7b 和 7c。实际上，构造 r，使得 $\dim(ra_i)\leq\epsilon$ 且 $\dim^{Y,\theta}(r)\geq\epsilon$。根据推论 5.5，等式便立即成立。

下面我们将对验证过程作一些说明。设 (a_i) 是所有 $|\cos(\theta-\varphi_i)|$ 和 $|\cos(\theta+\pi/2-\varphi_i)|$ 的一个枚举。

在构造合适的 r 时，我们改编了证明定理 5.1 所用的方法。然而，我们没有在 ra_i 的二进制展开中插入长串的零，而是选取合适的预言机 $T\in 2^\omega$，并将其折叠进 ra_i。

预言机 T 若相对于 $Y\oplus\theta$ 随机（因而相对于所有 a_i 随机），则称其为合适的。现在假设 r 是按上述方式构造的。那么，Y（它能计算所有 a_i）可以根据 r 的一个初始段计算出 T 的一个初始段：只需针对正确的 i 计算 ra_i 的一个初始段。由于 T 相对于 $Y\oplus\theta$ 随机，我们可以通过不过于稀疏地编码 T，确保 $\dim^{Y,\theta}(r)$ 不会降得太低。

详细内容见第 6.5 节，由此定理可由推论 5.5 得证。此外，我们使用以下简单结果，它由信息对称性推出。

引理 6.3。设 $A\in 2^\omega$ 为一个预言机。对于任意 x、$y\in\mathbb{R}$，有 维数$^A(x,y)\geq$维数$^A(x)+$维数$^{A,x}(y)$。

关于相对维数与条件维数在 $\mathbb{R}^n$ 中各元素上的相互作用的深入论述，见 Lutz 和 Lutz [25, 4.3, 4.4]，，后者在同一文献中引入了这一概念。前一个引理也可由他们的论证推出，证明也可在那里找到；它源于以下事实：$K(x\mid y)\geq K^y(x)$。

回想一下，Y 计算出 X，因此对于所有 r，都有 $\dim^X(r)\geq\dim^Y(r)$。特别地，现在我们可以看到

$$\dim^X(r,\theta)\geq\dim^X(\theta)+\dim^{X,\theta}(r)\geq\dim^X(\theta)+\dim^{Y,\theta}(r)\geq 1+\epsilon$$

由于 θ 相对于 X 是随机的，并且根据我们对 r 的构造，以下是这一高层次验证的最后步骤：假设我们大体按照定理 E 的证明来构造 5.1。通过与上述证明相同的论证，并运用定理 2.13，我们看到

$$\dim_H(\mathrm{proj}_\theta(E))=\dim_H(E(\theta))\leq\epsilon$$

因为引入预言机只会降低点的维数。另一方面，每个预言机 X 都通过某个 $\varphi_\alpha\in[0,\pi/2]$ 出现。因此存在一点 $(r_\alpha,\ \theta_\alpha)$，使得 θ 相对于 X 是随机的。由于对每个预言机都存在这样一点，定理 2.13 推出

$$\dim_H(E)\geq\dim^X(r_\alpha,\theta_\alpha)\geq\dim^X(\theta)+\dim^{X,\theta}(r)\geq 1+\epsilon$$

由引理 6.3 可知。接着，结论由推论 5.5 得出。

我们将在后续各节中详细阐述。

6.2. **将一个合适的预言机折叠到 r 中。**取定 $\epsilon \in (0,1)$，并令

$$Z = Y \oplus \overline{\theta}$$

回想一下，Y 已经包含了所有 a_i。我们不再先构造一个相对于 Z 随机的 $T \in 2^\omega$，再对其进行稀疏编码以获得维数 ϵ，而是采用 Athreya、Hitchcock、Lutz 和 Mayordomo 首次证明的一个结果 [1, 定理 6.5]：对于每个 $0 \leq \alpha \leq 1$，都存在$x \in \mathbb{R}$，使得 $\dim(x) = \mathrm{Dim}(x) = \alpha$。他们得到这一结果的方式，正是对一个随机序列进行稀疏编码，并在其中交错插入零字符串。他们只需选择一个相对于所需预言机随机的序列，该结果便可相对化。更进一步，他们的构造表明，$\dim^Z(x) = \dim(x) = \epsilon$，因此对某个合适的 $x \in \mathbb{R}$ 令 $T = x$ 即可满足要求。

在定理5.1 的构造中，我们着重于满足各项要求：我们要求像中出现特定数量的连续零，以便将复杂度充分降低；在验证中，我们证明最终各条件之间的间隔会足够大，从而能够容纳足够多的零（也就是说，足够大的 s）。在当前的论证中，我们必须更加谨慎，因为我们始终需要能够对 T 可计算的比特数给出良好的上界。因此，我们固定要追加的比特数，以避免“溢出”。下面的引理给出了这样的上界。

引理 6.4. 在引理 5.6的论证中，若 $s = \nu(k+1) - \nu(k) - 5$，则 $\ell(\rho_k) < \nu(k+1)$。

证明。这可由引理 5.7的证明推出：取 a、ρ、τ' 如上述论证中所述，便有

$$\ell(\rho_k) \leq \log(a) + \ell(\tau') + s + 2 \leq \nu(k) + s + 4.$$

令该项等于 $\nu(k+1)$，并要求严格不等式，即可得到结果。 □

特别地，以下推论表明，如果我们有足够的空间来编码 s 比特，就能将 $s-5$ 比特编码到像中。

推论 6.5. 在引理 5.6的论证中，取 $a \in (0,1)$：若 $\ell(\rho) = m$ 且 $n > m$，那么若 $s = n - m - 5$，则有 $\ell(\rho') < n$，其中 $\ell(\rho')$ 是 ρ 的延伸，可将s 比特编码到 $r\tilde{\rho}'$中。

我们选择折叠映射

$$\nu(k) = 2^{2^k} + k.$$

我们引入移位加项 k 以确保 $\nu(k)$ 与 $\nu(k+1)$ 之间的间隙长度为 $2^{2^{k+1}} + k + 1 - 2^{2^k} - k = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k} + 1$；最后一位预留用于将 φ_α 的一位编码到 ra_i 中（依据第 7a 项）。现在，我们可用于扩展的间隙长度恰好为

$$\nu(k+1) - \nu(k) - 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k} = 2^{2^k}\left(2^{2^k} - 1\right) \tag{6.1}$$

它能被 $2^{(2^k - k)}$整除。这一事实将在下一小节中派上用场。

6.3. 编码与保存块。 直观地说，我们的论证应当如下进行：在每个阶段，我们构造一个半径 r，使其与适当的角 θ一起满足当前的要求。为了保留 r（相对于 Z）的高维数以及点 ra_i的高维数，我们将 T 的线段编码到每个 ra_i中。具体而言：如果在 a_i之后立即处理 a_j，并且编码进 ra_i 的 T 的最后一位是某个 $k < \omega$的 $T(k)$，那么在该阶段编码进 ra_j 的 T的第一位就是 $T(k+1)$。因此，只要 r的初始段足够长，预言机 Z 便只需选取正确的 a_i（由 Z 计算），计算出 ra_i，再挑出 T中编码的位，就能计算出 T 的一个较长初始段。

为便于说明，假设 $T \in 2^\omega$ 并考虑

$$T^{(m,n)} = \langle T(m), T(m+1), \dots, T(n-1) \rangle.$$

特别要注意，$\ell(T^{(m,n)}) = n - m$，且 $T(n)$ 不会出现在 $T_{(m,\ n)}$ 中。现在，ra_i 的维数不超过 T的维数：取 ra_i的一个足够长的初始段 $ra_i[t]$，便很容易找到其中编码的一段长字符串，形式为 $T^{(m,n)}$。只要 $\ell(T^{(m,n)}) = n - m$ 相较于 t足够大，这就会迫使维数降低——只需选取足够稀疏的折叠映射，便可轻易确保这一条件。

然而，现在很难证明 ra_i 的维数不会降到低于 T的维数。问题在于，通常很难判断实数乘法中有多少位由单个位决定：例如，若 $a = 1/\pi$ 且 $\tilde{\sigma} = 0.\sigma$，其中 $\sigma \in 2^{<\omega}$，并且 $\tau \succ \sigma$，那么乘积 $a\tilde{\tau}$ 中有多少位是正确的就没有上界；这里所谓正确，是指每一种延伸都会得到相同的初始段。[1]

我们通过以下方式绕过这个问题：随着我们扩展 r，我们在整个阶段中 保存 编码到 ra_i 中的比特块。为此，我们像引理 5.6中那样对区间取原像。因此，我们定义 块映射 μ：$\omega \to \omega$ 如下

$$\mu(k) = 2^{(2^k - k)}.$$

回顾一下，我们的折叠映射由 $\nu(k) = 2^{2^k} + k$ 给出。因此，在阶段 k，当我们掌握了 r_k 时，有 $\nu(k+1) - \nu(k)$ 个比特可用于扩展 r_k。特别地，阶段 $k+1$ 的间隙中可容纳的块数为

$$\xi(k) = \frac{\nu(k+1) - \nu(k) - 1}{\mu(k)} = \frac{2^{2^k}\left(2^{2^k} - 1\right)}{2^{(2^k - k)}} = 2^k\left(2^{2^k} - 1\right). \tag{6.2}$$

注意，根据我们的选择，我们因此有 $\xi(k)\mu(k) = \nu(k+1) - \nu(k) - 1$。

现在需要几个引理。首先，我们需要对每个阶段 ra_i 以及每个块中可以编码到 k的比特数给出一个良好的上界。其次，保存块是否会耗费过多比特并不明显。根据推论 6.5，第一个问题并不存在。我们将在详细介绍构造之后，通过 代价引理 6.6解决第二个问题。

由于我们以 T 为单位进行编码，因此谨慎起见，应预先描述 T 的适当划分。我们在此进行如下处理：通过递归将 T重构为线段 T_k^j，其中 k 表示最后一个

[1]对于一个极端情况，考虑 a 和 σ，使得 $a\tilde{\sigma} = 1/2 - \epsilon$ 对于某个非常小的 ϵ成立，并且 $\operatorname{diam}(a[\tilde{\sigma}]) > 1/4$。随后，在 σ 中增加每一精度位，都会使区间稍微向右移动，并将其长度减半。因此，直到确定第一位（即直到 $1/2$ 不出现在区间中）所需的比特数取决于 ϵ。

完成的阶段（因此，如果我们看到 T_k^j，那么我们就处于阶段 $k+1$），而 j 表示活动块。总之，在阶段 $k+1$:

- 我们编码 $\xi(k) = 2^k\left(2^{2^k}-1\right)$个块，这由等式（6.2）可知；
- 而且编码进图像的每个 T 块的长度为 $\mu(k) - 5$，根据推论6.5，我们每次会损失 5 比特。

因此我们得到

$$T = \bigcup_{3\le k<\omega}\left(\bigcup_{1\le j\le\xi(k)} T_k^j\right)$$

其中并运算符表示串接。因此

$$T = T_3^1 \cup T_3^2 \cup \ldots \cup T_3^{2040} \cup T_3^1 \cup \ldots T_k^{\xi(k)} \cup T_{k+1}^1 \ldots$$

因为 $\xi(3) = 2040$. 如前所述，每当我们为 T 的一个块编码时，就会损失 5 位，因此

$$\ell(T_k^j) = \mu(k) - 5 = 2^{(2^k-k)} - 5.$$

这说明了为什么外层并集从 $k = 3$ 开始：在此之前，我们有 $2^{(2^2-2)} - 5 < 0$，因此没有空间编码任何比特。特别地，首次编码比特的阶段是阶段 $k+1 = 4$，此时 $\ell(T_k^j) = \ell(T_3^j) = 27$ 且 $\xi(k) = \xi(3) = 2040$。

6.4. 构造。 回想一下，我们的折叠和块映射分别是 $\nu(k) = 2^{2^k} + k$ 和$\mu(k) = 2^{(2^k-k)}$。现在，半径 r 按如下方式构造：假设 φ_α 是活动要求。

(1) 设 $A \in 2^\omega$。(2) 设 $x_0 = \emptyset$，即空字符串。(3) 给定 x_k。在阶段 $k+1$，解码 $k+1 = \langle i, n\rangle$；现在我们处理要求$i$。(4) 我们遍历所有 $\xi(k)$ 个块。设 $0 \le j < \xi(k) = 2^k(2^{2^k} - 1)$。(

a) L ^{0}

且 $x_k = x_k$。（b）在块 $j+1$处，假设我们有 x_k^j。我们应用引理5.6，但不再编码零，而是将T_k^{j+1}编码到$a_i\tilde{x}_k^j$中。令ρ_k^{j+1}为所得的延伸。通过填入 s个零（由引理6.4提供），我们便得到一个长度为 $x_k^{j+1} = \rho_k^{j+1}0^s$的

$$\ell(x_k^j) + \mu(k) = \ell(x_k) + 2^{(2^k-k)}(j+1).$$

（5）最后一个块之后，还剩一位要编码 A 或 φ_α（这可由等式（6.1）推出）。根据构造，$\ell\left(x_k^{\xi(k)}\right) = \nu\left(k+1\right) - 1$；因此定义

$$x_{k+1} = x_k^{\xi(k)} d$$

其中

$$d = \begin{cases} A(k/2) & \text{if } k \text{ is even} \\ \overline{\varphi}_\alpha((k-1)/2) & \text{if } k \text{ is odd;} \end{cases}$$

因此 $\ell(x_{k+1}) = \nu(k+1)$，正如预期。此外，我们将活动行编码到正在构造的实数中，以便稍后能够恢复它。

当然，我们按照定理 A 中的方式进行编码，以便能够应用定理 5.1。4.3 构造至此完成。

6.5. **验证。** 在当前情形下，我们有两个结果需要证明：$\dim(ra_i) \leq \epsilon$ 以及 $\dim^Z(r) \geq \epsilon$，其中 $Z = Y \oplus \theta$。于是由推论 5.5 可得该定理。我们分别证明这两个结果。

6.5.1. 的维数。 这两个验证论证都是“比特计数”论证：我们展示一个复杂字符串中编码在 ra_i 内的一段，并证明该片段在精确意义上足够长：其长度远远超过所有未编码比特的总长度。令$a = a_i$。

考虑 $ar[m]$，其中存在某个 m 使得

$$\overline{ar}[m] = \sigma \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq \xi(k)} \sigma_j T_k^j \right)$$

其中存在某个 k；因此阶段 $k+1$ 刚刚完成。[2] 我们还知道 $\ell(\sigma) \leq -\log(a) + \ell(x_k) + 2 = -\log(a) + \nu(k) + 2$，由引理 5.7可知。此外，保存一个块的开销可由每个 σ_j 的长度上界给出，如下所示：

引理 *6.6*（代价引理）。设 $a \in (0,1)$ 和 $r_m \in 2^{<\omega}$。如同引理 *5.6*，找出 $\tilde{\tau}_m$和 I_m 二进制，使得 $[\tilde{\tau}_m] \subset I_m \subset a[\tilde{r}_m]$；令 τ'_m 为 I_m的左端点。此外，令 $J \subset a^{-1}[\tilde{\tau}_m]$ 为二进制，其中 $\tilde{\rho}_k$ 是 J的左端点。令 $r_{m+1} = \rho_m 0^t$，使得$\ell(r_{m+1}) = \ell(r_m) + \mu(k)$，其中 k 表示当前阶段。最后，假设 τ'_{m+1} 是 $I_{m+1} \subset a[\tilde{r}_{m+1}]$ 的左端点。

于是 $|\ell(\tau'_{m+1}) - \ell(\tau_m)| \leq 7$。

在继续证明之前，有几点需要说明。首先，结合上方引理的陈述和证明参阅图 3 很有帮助，因为该图为引理提供了直观动机。从概念上说，可以把这个引理的假设看作在我们的构造中，从一个阶段内的一个块转到下一个块之间的中间步骤：r_m 是某个阶段内块 m 中的可用字符串，而 $\rho \succ \sigma$ 是对它计算得到的延伸。重要的是，$a[\tilde{r}_{m+1}]$ 包含 τ_m 作为子字符串。我们要问的是：在 $a[\tilde{r}_{m+1}]$中保存 τ_m 之后，开始编码下一个块之前会损失多少位？特别是，如果我们通过这样的近似构造一个实数 r，并且已经证明 r_m

$$ar \succ \tau_m \lambda \tau_{m+1}$$

对于某个 $\lambda \in 2^{<\omega}$，通过连续分块节省，那么 λ 最长可以有多长？

证明。根据假设，我们有 $[\tilde{\tau}_m] \subset I_m \subset [\tilde{r}_m]$，因此 $\operatorname{diam}([\tilde{\tau}_m]) \leq \operatorname{diam}(I_m) \leq \operatorname{diam}([\tilde{r}_m])$。应用 $-\log$，并根据条目 (i)，可得 $-\log(\operatorname{diam}(I_m)) \in [-\log(a) + \ell(r_k) \ell(\tau_k)]$。由于 $\tilde{\tau}'_k$ 是 I_k的左端点，因此特别有 $\ell(\tau'_m) \in [-\log(a) + \ell(r_m) \ell(\tau_m)]$。我们可以给出一个更好的界：根据条目 (ii)，可见 $\ell(\tau'_m) \leq -\log(\operatorname{diam}(a[\tilde{r}_m])) + 2 = -\log(a) + \ell(r_m) + 2$，因此

$$\ell(\tau'_m) \in [-\log(a) + \ell(r_m), -\log(a) + \ell(r_m) + 2].$$

[2]考虑阶段结束时的字符串是明智的，因为我们很容易就能取得 T 的一个较长连续片段（尽管中间有所中断）。

通过构造，在阶段 $k+1$ 我们将 $\mu(k)-5$ 比特编码到每个块的图像中（按照推论 6.5，每个块会损失 5 比特）。因此 $\ell(\tau_m)=\ell(\tau'_m)+(\mu(k)-5)$。因此，根据构造可观察到 $\ell(\tau'_{m+1})\geq\ell(\tau_m)$，我们看到

$$\begin{aligned}\ell(\tau'_{m+1})-\ell(\tau_m)&=\ell(\tau'_{m+1})-\ell(\tau'_m)-(\mu(k)-5)\\&\leq-\log(a)+\ell(r_{m+1})+2+\log(a)-\ell(r_m)-(\mu(k)-5)\\&=(\ell(r_{m+1})-\ell(r_m))-(\mu(k)-5)+2\\&=\mu(k)-(\mu(k)-5)+2\\&=7\end{aligned}$$

这里我们利用块大小为 $\mu(k)$，因此 $\ell(r_{m+1})-\ell(r_m)=\mu(k)$。 □

因此 $\ell(\sigma_j)\leq 7$。为简单起见，我们令

$$T_k=T_k^1\cup\ldots\cup T_k^{\xi(k)};$$

因此 $\ell(T_k)=\xi(k)(\mu(k)-5)$。下一个引理给出了本部分验证所需的最后一个技术细节。为简化记号，令

$$S_k=\bigcup_{1\leq j\leq\xi(k)}\sigma_j T_k^j.$$

引理 6.7。对于 $k<\omega$ 和 σ，(σ_j) 如上所述，我们有

$$|K(T_k)-K(\sigma S_k)|\leq O(2^{2^k}).$$

证明。这是一个简单的“比特计数”论证：T_k 和 σS_k 不同的比特数为 $\ell(\sigma)+\sum_j\ell(\sigma_j)$。如果我们还知道各个 σ_j 的位置，那么就可以由其中一个字符串构造出另一个。因此，

$$|K(T_k)-K(\sigma S_k)|\leq K(\sigma)+\sum_{1\leq j\leq\xi(k)}K(\sigma_j,m_j)$$

省略常数后，其中 m_j 表示 σ_j 在 S_k 中开始的位置索引。我们知道 $\ell(\sigma_j)\leq 7$ 且 $\ell(\sigma)\leq -\log(a)+\ell(x_k)+2=-\log(a)+2^{2^k}+k+2$。此外，

$$\begin{aligned}\ell(\sigma S_k)&=\ell(\sigma)+\sum_{1\leq j\leq\xi(k)}\ell(\sigma_j)+\ell(T_k)\\&\leq-\log(a)+\ell(x_k)+2+7\xi(k)+\xi(k)(\mu(k)-5)\\&=-\log(a)+\ell(x_k)+2+\xi(k)(\mu(k)+2)\end{aligned}$$

因为 $\xi(k)$ 个块中的每一个都编码了 $\mu(k)-5$ 个比特。注意，

$$\xi(k)\mu(k)=2^{2^k}(2^{2^k}-1)$$

因此其阶为 $2^{2^{k+1}}$。由于 $m_j\leq\ell(S_k)$，我们可见 m_j 因而至多为 $2^{2^{k+1}}$ 阶。但现在 $K(m_j)$ 至多为 2^{k+1} 阶。现在很容易看出，$\sum_j K(\sigma_j,\ m_j)$ 的阶至多为 $\xi(k)2^{k+1}$，也就是 $O(2^{2^k})$，正如所需。□

现在我们可以完成论证：利用前面的引理，我们看到

$$K(\overline{ar}[m]) = K(\sigma S_k) = K(T_k) + O(2^{2^k}).$$

此外，注意到 $\ell(T_k)$ 的阶为 $2^{2^{k+1}}$，因为 $\ell(T_k) = \xi(k)(\mu(k) - 5)$。和之前一样，$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{2^k}}{2^{2^{k+1}}} = 0$，因此我们可以忽略阶至多为 2^{2^k} 的项。这使我们可以简化：令 $\mathcal{D}$ 为刚刚满足要求 $a = a_i$ 的 $\underline{m} < \omega$ 集合。（换言之，对于某个 k，有 $ar[m] = \sigma S_k$。）那么

$$\dim(ar) \leq \liminf_{m\in\mathcal{D}} \frac{K(\overline{ar}[m])}{m} \leq \liminf_{m\in\mathcal{D}} \frac{K(T_k)}{m} = \epsilon$$

根据 T 的定义。

6.5.2. 相对于 Z 的 r 的维数。回想一下

$$Z = Y \oplus \overline{\theta}$$

并且 Y 包含所有 a_i。由于我们需要证明 $\dim^Z(r) \geq \epsilon$，仅仅举出一个有利元素集合并不足够，例如前一引理中的集合 $\mathcal{D}$。相反，我们证明可以从 r 的任意 初始段中解码出 T 的足够多元素。

假设

$$\overline{r}[m] = \sigma_1 \cdots \sigma_{k+1} b_1 \cdots b_n \tau$$

其中

- σ_i 表示满足阶段 i 的 r 的初始段；
- b_j 表示满足阶段 $k+2$ 的块 j 的 r 的子字符串；并且
- τ 是满足块 $n+1$ 的子字符串的初始段。

因此，注意我们当前处于阶段 $k+2$，并且已有 n 个块得到满足。

在阶段 $k+1$ 内，子字符串 T_k 已被编码进 ar。因此，利用能够计算所有 a_i 的预言机 Z，我们可以从 ar 中恢复 T_k。回想一下，

$$\ell(T_k) = \xi(k)(\mu(k) - 5).$$

注意，由于 $\lim_{k\to\infty} \frac{2^{2^k}}{2^{2^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2^k}} = 0$，$\underline{T_k}$ 的长度已经远远超过 $T_1 + \ldots + T_{k-1}$ 的长度；因此，只需计算在阶段 $k+1$ 保存的块。

其次，上述需要考虑的最坏情况是 $n = 0$：在这种情况下，初始段 σ_{k+1} 需要携带足够的信息，以抵御 τ，其中 τ 的长度至多为 $\mu(k+1) - 1$。这并不是问题，因为 $\ell(T_k) = \xi(k)(\mu(k) - 5)$，并且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(k+1) - 1}{\xi(k)(\mu(k) - 5)} = 0.$$

因此，T_k 所提供的信息远远超过未完成的块 τ。现在只需证明 T_k 以及完全编码的子字符串 $T^1_{k+1}, \ldots, T^n_{k+1}$ 都可以从 $ar[m]$中轻易恢复。这可由一个类似于引理6.7的论证得出：

- 取一台将r 截短至长度 $\nu(k+1) - 1$的机器，并将得到的字符串记为 ρ（此时阶段 $k+1$ 刚刚完成）；
- 计算阶段 $k+1$ 的正确投影因子 $a_i = a$，使用 Z（并利用康托尔配对函数）；

- 计算 $a[\bar{\rho}]$ 中最大的二进区间，并令 d 表示其左端点。现在

$$\overline{d} = \sigma S_k \sigma'$$

其中 $\ell(\sigma') \leq 7$，根据代价引理 6.6。

•根据前一个引理 6.7，我们知道，隔离 T_k 与$\sigma S_k \sigma'$ 的复杂度并不重要，正如所需。同样的论证可以得出这些 n 块。

由引理 6.7 可知

$$K^Z(T_k \cup T_{k+1}^1 \cup \ldots \cup T_{k+1}^n) \leq K^Z(\overline{r}[m]) + O(2^{2^k}) + O(n2^{k+2})$$

其中 $n < \xi(k+1)$。因此，特别地

$$\frac{K^Z(T_k \cup T_{k+1}^1 \cup \ldots \cup T_{k+1}^n)}{m} \leq \frac{K^Z(\overline{r}[m])}{m} + \frac{O(2^{2^k}) + O(n2^{k+2})}{m} \tag{6.3}$$

其中 $m = \nu(k+1) + n\mu(k+1) + \ell(\tau)$ 以及 $n < \xi(k+1$。接下来，我们验证等式（6.3）左侧计算得到的 T 的长度足够长：事实上，

$$|m - \ell(T_k \cup T_{k+1}^1 \cup \ldots \cup T_{k+1}^n)| = \ell(\tau) + \nu(k) + 1 + 5\xi(k) + 5n.$$

现在，$m = \nu(k+1) + n\mu(k+1) + \ell(\tau)$ 和 $n < \xi(k+1)$ 蕴含

$$\frac{\ell(\tau) + \nu(k) + 5\xi(k) + 5n}{m} \leq \frac{\ell(\tau) + \nu(k) + 5(\xi(k) + \xi(k+1))}{\ell(\tau) + \nu(k+1) + \xi(k+1)\mu(k+1)};$$

令 k 趋于无穷并取极限，可知该项趋于零。回过头来，对等式（6.3）两边取下极限 ϵ，即可证明其左端等于该值。

最后，由于 m的阶为 $\nu(k+1)+n\mu(k+1)$，即其阶至少为 $2^{2^{k+1}}$，等式（6.3）右端可简化为第一项。综上所述，取下极限可得

$$\epsilon = \liminf_{k\to\infty} \frac{K^Z(T_k \cup T_{k+1}^1 \cup \ldots \cup T_{k+1}^n)}{m} \leq \frac{K^Z(\overline{r}[m]}{m} = \dim^Z(r)$$

正如所需。定理6.1可立即由与定理5.1的证明相同的论证，以及本节开头给出的概述推出。

References

[1] K. B. Athreya、J. M. Hitchcock、J. H. Lutz 和 E. Mayordomo。算法信息与计算复杂性中的有效强维数。*SIAM* 计算杂志，37(3):671–705，2007年。[2] V. Beresnevich、K. Falconer、S. Velani 和 A. Zafeiropoulos。重新审视 Marstrand 定理：投影零维集合。《数学分析与应用杂志》，472(2):1820–1845，2019年。[3] V. Beresnevich、K. Falconer、S. Velani 和 A. Zafeiropoulos。重新审视 Marstrand 定理：投影零维集合。《数学分析与应用杂志》，472(2):1820–1845，2019年。附录由 David Simmons、Han Yu 和 Zafeiropoulos 撰写。[4]G. Birkhoff 和 G.-C. Rota。常微分方程。John Wiley & Sons，纽约—奇切斯特—布里斯班，第三版，1978年。[5] J.-Y. Cai 和 J. Hartmanis。实数轴的柯尔莫哥洛夫复杂度的豪斯多夫维数与拓扑维数。《计算机与系统科学杂志》，49(3):605–619，1994年。[6] A. Case 和 J. H. Lutz。互维数。*ACM*计算理论汇刊，7(3):第12篇，26页，2015年。

[7] G. J. Chaitin。与信息论形式上完全相同的程序大小理论。计算机协会期刊，22:329–340，1975年。[8] R. O. Davies。关于投影的豪斯多夫维数的两个反例。数学座谈，42:53–58，1979年。[9] R. G. Downey 和 D. R. Hirschfeldt。算法随机性与复杂度。可计算性理论与应用。施普林格，纽约，2010年。[10] G. Edgar。测度、拓扑学与分形几何。数学本科生教材。施普林格，纽约，第二版，2008年。[11] P. Erd˝os、K. Kunen 和 R. D. Mauldin。实数集的一些加法性质。《数学基础》，113(3):187–199，1981年。[12] K. Falconer、J. Fraser 和 X. Jin。分形投影六十年。载于《分形几何与随机性 V》，概率论进展第70卷，第3–25页。Birkh¨auser/施普林格，Cham，2015年。[13] K. Falconer 和 P. Mattila。强马斯特兰定理与由超平面子集构成的集合的维数。分形几何杂志，3(4):319–329，2016年。[14] L. Fortnow。柯尔莫哥洛夫复杂度。载于《复杂性专题》（凯库拉，2000），德古意特逻辑与应用丛书第4卷，第73–86页。德古意特，柏林，2001年。[15] J. M. Hitchcock。有效分形维数：基础与应用。博士论文，爱荷华州立大学，美国，2003年。[16]J. M. Hitchcock。有效维数的对应原理。理论计算机系统，38(5):559–571，2005年。[17] M. J¨arvenp¨a¨a。关于上闵可夫斯基维数、装填维数与正交投影。芬兰科学院数学系列论文集，(99):34，1994年。[18] R. Kaufman。关于投影的豪斯多夫维数。Mathematika，15:153–155，1968年。[19] A. N. Kolmogorov。定义“信息量”概念的三种方法。《信息传输问题》，1(第1期):3–11，1965年。[20] L. A. Levin。随机序列的概念。《苏联科学院院报》，212:548–550，1973年。[21] M. Li 和 P. Vit´anyi。《柯尔莫哥洛夫复杂度及其应用导论》。计算机科学教材。施普林格，Cham，2019年。《 [MR 1238938]》第四版。[22] J. H. Lutz。博弈下注函数与个体序列的构造维数。载于《自动机、语言与编程》（日内瓦，2000），计算机科学讲义第1853卷，第902–913页。施普林格，柏林，2000年。[23] J. H. Lutz。复杂性类中的维数。SIAM计算杂志，32(5):1236–1259，2003年。[24] J. H. Lutz。个体字符串与序列的维数。《信息与计算》，187(1):49–79，2003年。[25] J. H. Lutz 和 N. Lutz。算法信息、平面凯克亚集与条件维数。ACM计算理论汇刊，10(2):第7篇，22页，2018年。[26] J. H. Lutz、N. Lutz 和 E. Mayordomo。拓展点到集合原理的适用范围。载于第39届国际计算机科学理论方面研讨会，LIPIcs第219卷。莱布尼茨国际信息学会议录，第48篇，14页。达格施图尔城堡。莱布尼茨信息学中心，瓦德恩，2022年。[27] J. H. Lutz 和 E. Mayordomo。自相似分形中点的维数。SIAM计算杂志，38(3):1080–1112，2008年。[28] N. Lutz 和 D. M. Stull。利用有效维数的投影定理。载于第43届国际计算机科学数学基础研讨会，LIPIcs第117卷。莱布尼茨国际信息学会议录，第71篇，15页。达格施图尔城堡。莱布尼茨信息学中心，瓦德恩，2018年。[29]N. Lutz 和 D. M. Stull。直线上点的维数界。《信息与计算》，275:104601，15页，2020年。[30] J. M. Marstrand。分数维数平面集的一些基本几何性质。伦敦数学会会刊（第3辑），4:257–302，1954年。[31] P. Martin-L¨of。随机序列的定义。信息与控制，9:602–619，1966年。[32] P. Mattila。豪斯多夫维数、正交投影与和各平面的交集。芬兰科学院数学系列，1(2):227–244，1975年。[33] E. Mayordomo。构造豪斯多夫维数的柯尔莫哥洛夫复杂度刻画。《信息处理快报》，84(1):1–3，2002年。

[34] A. Medini 和 Z. Vidny´anszky。零维 σ-齐性空间，2021年。[35] A. W. Miller。无限组合学与可定义性。《纯粹与应用逻辑年刊》，41(2):179–203，1989年。[36] B. Y. Ryabko。组合信息源编码与豪斯多夫维数。《苏联科学院院报》，277(5):1066–1070，1984年。[37] B. Y. Ryabko。组合信息源的无噪声编码、豪斯多夫维数与柯尔莫哥洛夫复杂度。《信息传输问题》，22(3):16–26，1986年。[38] C.-P. Schnorr。随机序列定义的统一方法。《数学系统理论》，5:246–258，1971年。[39] R. I.Soare。图灵可计算性。《可计算性理论与应用》。施普林格出版社，柏林，2016年。理论与应用。[40] R. J. Solomonoff。归纳推理一般理论的初步报告。Zator公司，马萨诸塞州剑桥，1960年。[41] L. Staiger。柯尔莫哥洛夫复杂度与豪斯多夫维数。《信息与计算》，103(2):159–194，1993年。[42] Z. Vidny´anszky。产生余解析集的超限归纳。《数学基础》，224(2):155–174，2014年。

School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, Welling-ton, New Zealand电子邮箱地址：linus.richter@sms.vuw.ac.nz网址：https://homepages.ecs.vuw.ac.nz/~richtelinu/