arXiv:2301.06688v2 [math.DS] 9 Dec 2024

全纯对应动力系统中的遍历性

MAYURESH LONDHE

Abstract. 本文研究全纯对应动力学中某些测度的遍历性质。这些测度通常不具有遍历理论经典意义下的不变性。我们定义一种遍历性概念，并在此框架下证明一个版本的比尔霍夫遍历定理。我们还证明，当全纯对应定义在紧复流形上时，遍历测度存在。最后，我们给出一类明确的、具有动力学意义且符合我们定义的遍历测度。

1. Introduction and statement of main results

本文研究超越经典映射框架的迭代全纯动力学中自然产生的某些测度的遍历性质。粗略地说，遍历性表达了这样一种思想：动力系统中的典型点最终会以均匀而随机的方式遍历该系统所作用空间的各个部分。这里考虑的测度通常不具有遍历理论经典意义下的不变性。因此，经典遍历定理在此情形下并不能直接成立。本文旨在定义一种遍历性概念，并为这类测度证明一个遍历定理。

在 [5], Brolin 构造了一种概率测度，其支集位于次数至少为 2 的多项式的朱利亚集上。这一测度描述了多项式迭代作用下一个一般点的原像分布。Freire、Lopes 和 Ma˜n´e [14], 以及 Lyubich [15], 彼此独立地将这一结果推广到了黎曼球面上所有次数至少为 2 的有理映射。这些测度在遍历理论的意义下是不变且遍历的——遍历理论的基础知识可参见 [21]。关于上述结果的各种推广，以及这类测度所具有的有趣动力学性质，请参阅[13] 及其中的参考文献。此外，关于非阿基米德情形下的类似测度，可参见 [1, 第 13]章及其中的参考文献。其中一些构造已进一步推广到某些多值映射类。然而，由此得到的测度不再是不变的。因此，经典遍历定理不适用于这种情形。不过，事实证明，这些测度在某种意义下是不变的。现在我们将正式定义这些测度不变的意义，以及它们所出现的动力系统。

设 X 是一个维数为 k 的（不一定是紧的）复流形。我们始终假设流形是连通的。全纯 k-链是如下形式的形式线性

2020年数学主题分类。主要分类：37F80、37A30；次要分类：32H50、37F05。关键词和短语：对应、遍历性、不变测度、等分布。

形如.....的组合

$$\Gamma = \sum_{1\leq i\leq N} m_i\Gamma_i, \tag{1.1}$$

其中， m_i为正整数， Γ_i为 $X \times X$ 中维数为 k的互异不可约复子簇。令 π_1 和 π_2 分别表示到第一坐标和第二坐标的投影，并令 $|\Gamma| := \cup_{i=1}^{N}\Gamma_i$。若 $\pi_1|_{\Gamma_i}$ 和 $\pi_2|_{\Gamma_i}$ 对于每个 $1 \leq i \leq N$都是 proper、满射且有限对一映射，我们称 Γ 为 X 上的全纯对应。若 A 是 X的子集，则定义以下集值映射

$$F_\Gamma(A) := \pi_2(\pi_1^{-1}(A) \cap |\Gamma|) \text{ and } F_\Gamma^\dagger(A) := \pi_1(\pi_2^{-1}(A) \cap |\Gamma|).$$

为方便起见，我们分别用 $F_\Gamma(x)$和$F_\Gamma^\dagger(x)$表示 $F_\Gamma(\{x\})$和$F_\Gamma^\dagger(\{x\})$。若不会引起混淆，为简化记号，我们将 F_Γ 记作F。此外，我们也将 F背后的对应 Γ称为 F。

在第 2 节中，我们详细介绍了通过 F对博雷尔测度 μ 作拉回的定义，记作 $F^*\mu$。这一操作在定义测度的不变性概念时起着关键作用。若博雷尔概率测度 μ满足 $F^*\mu = \mathsf{d}\cdot\mu$，则称其为 F^*-不变测度，其中d为 F的拓扑度——定义见第 2 节。给定一个 F^*-不变测度μ，若存在博雷尔集 $B' \subseteq B$，使得 $F^\dagger(B') \subseteq B$ 且 $\mu(B') = \mu(B)$，则称 X 的博雷尔子集 B 关于 F 和 μ 几乎不变。现在我们为 F^*-不变测度定义遍历性的概念。

定义 1.1. 设 F是复流形 X上的全纯对应。若一个 F^*-不变博雷尔概率测度 μ 满足：对于任意相对于 F和 μ几乎不变的博雷尔集 B，要么 $\mu(B) = 0$，要么 $\mu(B) = 1$，则称其为遍历的。

两个定义在 X上的全纯对应可以彼此复合——定义见第 2 节。牢记上述记号说明，我们用 F^n 表示全纯对应 F 在 X上的 n重复合。因此， F 在 X上定义了一个动力系统。现在我们陈述本文的第一个主要结果，它是经典比尔霍夫遍历定理在上述动力系统背景下的一个类比。

定理 1.2. 设 F 是复流形 X上的一个拓扑度为 d 的全纯对应。假设存在 X 上的博雷尔概率测度 μ，使得μ是 F^*-不变的，即满足 $F^*\mu = \mathsf{d}\cdot\mu$。那么，对于 $\phi \in L^1(\mu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{y\in F^{j\,\dagger}(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j}$$

几乎处处收敛于函数 $\Phi \in L^1(\mu)$，其中$\int_X \Phi\, d\mu = \int_X \phi\, d\mu$。此外，如果 μ 如定义 1.1 中所述是遍历的，那么我们有

$$\Phi(x) = \int_X \phi\, d\mu \quad \textit{for } \mu\textit{-almost every } x \in X.$$

在定理 1.2 中，记号 $\sum'$ 表示对 y 求和，并按重数重复计算。

注 1.3。由于 F_*-不变测度也是 $(F^\dagger)^*$-不变测度，定理 1.2 对 F_*-不变测度同样成立，只需在遍历和中用 F^j 替换 $F^{j\dagger}$。注意，当 F 是一个全纯映射时（即由全纯映射的图所定义的对应），上述意义下 F_* 对 μ 的不变性，与遍历理论中可测映射意义下 μ 的不变性相一致。此外，一般而言， F^*-不变性并不意味着 F_*-不变性，这不同于全纯映射的情形。

关于上述遍历性概念，有几点需要说明。若 B 是 X 的子集，且 $F^\dagger(B) \subseteq B$，则 B 的补集 B^c 未必满足 $F^\dagger(B^c) \subseteq B^c$，这与映射的情形相同。在第 3 节中，我们将看到，若博雷尔子集 B 相对于 F 和 μ几乎不变，那么 B^c 相对于F 和 μ也几乎不变。然而，对于这样的博雷尔集 B，其对称差 $B \triangle F^\dagger(B)$未必满足 $\mu(B \triangle F^\dagger(B)) = 0$，这与映射的情形相同——参见例 4.1。定理 1.2 立即引出一个问题：是否存在对应（而非映射）的 F^*-不变测度？在第 3 节中，我们证明，在紧复流形上定义的全纯对应 F 总存在一个 F^*-不变测度。事实上，我们证明这样的对应总存在一个 F^*-不变遍历测度。Dinh–Sibony 的以下结果给出了一类全纯对应，它们具有在动力学上有意义且 F^*-不变的测度：

结果1.4（Dinh–Sibony， [12]）。设 (X, ω) 是一个维数为 k 的紧 K ¨ahler 流形。设 F 是 (X, ω) 上拓扑度为 d 的亚纯对应。假设 $k-1$ 阶动力学度（记为 d_{k-1}）满足 $\mathrm{d}_{k-1} < \mathrm{d}$。那么，测度 $\mathrm{d}^{-n}(F^n)^*\omega^k$ (ω ，归一化使得 $\int_X \omega^k = 1$) 收敛到一个博雷尔概率测度 μ_F，当 $n \to \infty$。此外， μ_F 不在多极集上赋予任何质量，且 μ_F 是 F^*-不变的。

当 F 是黎曼球面上的有理映射时，结果1.4中的测度 μ_F 就是 [5, 14, 15] 中构造的测度。我们将结果1.4给出的测度 μ_F 称为 F 的 Dinh–Sibony 测度——更多详情见第 2 节。这里，我们还想提及几类对应，它们存在具有动力学意义的不变测度（F^*-不变或 F_*-不变）。在 [9],，Dinh 构造了一个 F^*-不变测度，其中 F 是洛雅谢维奇指数严格大于 1 的多项式对应。Clozel 和 Otal [7] ，以及 Clozel 和 Ullmo [8] ，为某些类别的模对应构造了不变测度。另一方面，Dinh、Kaufmann 和 Wu [10] 为非弱模的黎曼曲面上的全纯对应构造了不变测度。最近，Matus de la Parra [18] 为 Bullett 和 Lomonaco 在 [6] 中研究的对应族构造了不变测度。最后，Bharali 和 Sridharan [2] 为具有排斥子的对应构造了不变测度。

在介绍了一些不变测度的例子后，我们现在转向遍历性。下一个结果断言，结果1.4给出的测度是遍历的。

定理 1.5。设 (X, ω) 是一个维数为 k 的紧 K¨ahler 流形。设 F 是 X 上拓扑度为 d 的全纯对应。假设 d_{k-1} <d。那么，Dinh–Sibony 测度 μ_F 如定义 1.1 所述是遍历的。

尽管我们对全纯对应表述了定理 1.5，但结果1.4 中的定理 1.5（以及定理 1.2）对亚纯对应同样成立。 μ_F that μ_F 不在多极集上赋予正测度这一性质在此起着重要作用（详情参见注 4.2）。我们还想指出，定理 1.2 的证明纯属测度论，因此对更一般空间上的某些多值映射也成立。如前所述，若 f 是次数至少为 2 的有理映射，则 Dinh–Sibony 测度 μ_f 就是在 [14, 15]中构造的测度。结合定理 1.2 和定理 1.5，立即可得下述在有理映射经典情形中属新的遍历定理：

^推论1.6。设 f 是黎曼球面 $\mathbb{C}$ 上的次数为 d $\geq$ 2的有理映射。令μ_f 为在 [14, 15]中构造的测度。那么，对于 $\phi \in L^1(\mu_f)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{y\in f^{-j}(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j} = \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \phi \, d\mu_f$$

^对于 μ_f-几乎处处的 $x \in \mathbb{C}$。

我们以提及一类具体的对应关系来结束本节，在这类对应关系中，定理 1.2 可以发挥作用。设 $\mathcal{G} = \{f_1, \ldots, f_N\}$是 X的一个有限个满射自映射的集合。对于这个集合 $\mathcal{G}$，我们按如下方式关联一个对应关系：

$$\Gamma_{\mathcal{G}} := \sum_{1\leq i\leq N} \mathrm{graph}(f_i), \tag{1.2}$$

其中 graph(f_i) 是 f_i的图。若 X 是黎曼球面，且 f_i是次数至少为 2 的有理映射，则测度 $\mu_{\mathcal{G}}$ （与对应关系 $\Gamma_{\mathcal{G}}$相关联的 Dinh–Sibony 测度）与 Boyd [4]构造的测度一致。在这种情况下，由 $\mathcal{G}$生成的半群的朱利亚集等于 $\mu_{\mathcal{G}}$ 的支集，因此定理 1.2 有助于理解朱利亚集上的动力学。通过对应关系 $\Gamma_{\mathcal{G}}$ 研究有限生成有理半群的动力学，这一思路由 Bharali–Sridharan 于 [3]提出。另一种特殊情形是 f_i是莫比乌斯变换。在这种情形下研究 $\Gamma_{\mathcal{G}}$ 的动力学，可用于研究有限生成的克莱因群。 [10] 中的结果可用于为非初等有限生成克莱因群构造不变测度。此外，参见 [11] ，了解对应关系在随机矩阵中的应用。

本文概要：第 2 节介绍全纯对应和 Dinh–Sibony 测度的背景知识。第 3 节中，我们证明在紧复流形上定义的全纯对应存在 F^*-不变测度和遍历测度。定理 1.5 的证明见第 4 节。第 5 节旨在证明定理 1.2 的证明所需的预备结果。最后一节，即第 6 节，给出定理 1.2 的证明。

2. Fundamental definitions

本节将汇集一些我们在第 1 节中曾顺带提及的全纯对应定义和概念。关于定义在紧流形上的亚纯对应，我们请读者参阅 [12] ，其中有更详细的讨论。本节的大部分内容都是众所周知的；熟悉这些概念的读者可以放心地继续阅读下一节。

设 X 为一个复流形，设 Γ为 X上的一个全纯对应，并设F 和 Γ 的关系如第1节所述。按照(1.1)中对 Γ的表示，系数 $m_i \in \mathbb{Z}_+$ 称为 Γ_i的重数。我们将 Γ 称为 F的图。我们将对应 F 的支集定义为 $|\Gamma| := \cup_{i=1}^{N}\Gamma_i$。对于上述的 Γ_i ，我们定义$\Gamma_i^\dagger := \{(y,x) : (x, y) \in \Gamma_i\}$。现在我们利用这一点来定义伴随

$$\Gamma^\dagger := \sum_{1\le i\le N} m_i\Gamma_i^\dagger.$$

注意到 $\Gamma^\dagger$ 也是 X上的一个全纯对应。全纯对应 $\Gamma^\dagger$ 称为 Γ的伴随。此外，请注意，在第1节中定义的集值映射$F_\Gamma^\dagger$ ，与由 $\Gamma^\dagger$诱导的集值映射 $F_{\Gamma^\dagger}$ 相同。我们将采用第1节中提到的记号约定，并将对应 $\Gamma^\dagger$ 称为 $F^\dagger$。

F 的拓扑度是一般纤维中按重数计数的点数。众所周知，存在一个非空的扎里斯基开集 $\Omega \subseteq X$，使得记作 $Y^i := \pi_2^{-1}(\Omega)\cap\Gamma_i$ 时，映射 $\pi_2|_{Y^i} : Y^i \to \Omega$ 是一个具有 δ_i 个片的全纯覆盖，其中 $\delta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, N$。因此，对于任意 $x \in \Omega$， $\delta_i = \sharp\{y : (y,x) \in \Gamma_i\}$，其中 $\sharp$ 表示基数。于是， F 的拓扑度 $\mathrm{d}(F)$ 为

$$\mathrm{d}(F) := \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \sharp\{y : (y,x) \in \Gamma_i\}, \quad x \in \Omega. \tag{2.1}$$

在不会引起混淆时，我们将用 d 代替 $\mathrm{d}(F)$。众所周知，对于每个 $x \in X$， $F_\Gamma^\dagger(x)$ 都包含按重数计数的 d 个点。

可以将 X 上的两个全纯对应复合，得到 X上的一个新的全纯对应。设 F_1 和 F_2 是由全纯 k-链诱导的 X 上的两个全纯对应

$$\Gamma^1 = \sum_{1\le i\le M}{}' \Gamma_i^1 \text{ and } \Gamma^2 = \sum_{1\le j\le M'}{}' \Gamma_j^2$$

分别地。在上述对 Γ^1 （分别地， Γ^2）的表示中，我们不假设 Γ_i^1（分别地， Γ_j^2）彼此不同；簇会按照重数重复出现。上文带有“装饰”的求和表示后一种表示。于是，根据定义，$F_1 \circ F_2$ 是由以下内容诱导的全纯对应

$$\Gamma^1 \circ \Gamma^2 = \sum_{1\le i\le M}{}' \sum_{1\le j\le M'}{}' \Gamma_i^1 \circ \Gamma_j^2,$$

其中， $\Gamma_i^1 \circ \Gamma_j^2$ 定义如下：考虑由以下内容给出的 $X \times X$ 的子集

$$C := \{(x_1, x_3) \in X \times X : \exists x_2 \in X \text{ such that } (x_1, x_2) \in \Gamma_j^2 \text{ and } (x_2, x_3) \in \Gamma_i^1\}. \quad (2.2)$$

复合 $\Gamma_i^1 \circ \Gamma_j^2$ 是支集为 C 的全纯 k-链。注意，集合 C 未必是不可约子簇。 C 的不可约分支的重数如下。设 C 的任意一个不可约分支为 C_s 。那么，它在 $\Gamma_i^1 \circ \Gamma_j^2$ 中的重数是满足（2.2）中所述条件的不同 x_2 的数量，其中 $(x_1, x_3) \in C_{ij,\ s}$ 是一般点。我们想强调的是， $\Gamma_i^1 \circ \Gamma_j^2$未必不可约。这就是定义全纯对应的数据必须包含重数的原因。根据上述复合的定义，若 A是 X 的子集，则有 $F_1 \circ F_2(A) = F_1(F_2(A))$。

若 F 是 X 上的全纯对应，且 B 是 X的博雷尔子集。我们证明， $F(B)$ 和 $F^\dagger(B)$ 是 X 的博雷尔子集。为此，我们需要一个关于双可测函数的结果。设 X 和 Y 是拓扑空间。回顾一下，函数$f : X \to Y$是博雷尔可测的，是指每个 Y 的博雷尔子集在 f 下的原像都是 X 的博雷尔子集。若博雷尔可测函数 f 满足：每个 X 的博雷尔子集在 f 下的像都是 Y 的博雷尔子集，则称其为双可测函数。

结果 2.1（Purves， [19]）。设 X 和 Y 是完备可分度量空间， E 是 X的一个博雷尔子集。考虑一个博雷尔可测函数 $f : E \to Y$。 f 是双可测的充要条件是集合 $\{\zeta \in Y : f^{-1}\{\zeta\}$不可数$\}$可数。

关于上述结果的另一种证明，另见 [17]。注意，结果 2.1 对连通复流形也成立。根据定义 $F(B) := \pi_2(\pi_1^{-1}(B) \cap |\Gamma|)$。由于$|\Gamma|$ 是一个闭集， $\pi_1^{-1}(B) \cap |\Gamma|$ 是 $X \times X$的一个博雷尔子集。根据全纯对应的定义，对于每个 j， $\pi_2|_{\Gamma_j}$ 都是一个有限映射。因此，由结果 2.1 可知， $F(B)$ 是 X 的一个博雷尔子集。同理可知， $F^\dagger(B)$ 也是 X 的一个博雷尔子集。

设 D 是 X 上一个双次数为 (p, p) 的流， $0 \le p \le k$。我们可以按照以下规定对其进行拉回和推前 D ：

$$F^*(D) := (\pi_1)_*(\pi_2^* D \wedge [\Gamma]) \text{ and } F_*(D) := (\pi_2)_*(\pi_1^* D \wedge [\Gamma]) \quad (2.3)$$

只要交截流 $\pi_2^* D \wedge [\Gamma]$ 和 $\pi_1^* D \wedge [\Gamma]$ 有意义即可。这里， $[\Gamma]$ 表示构成 Γ 的各个簇上的积分流之和（按重数加权）。本文主要关注有限博雷尔测度的拉回——它可以视为双次数为 (k, k) 的流。设 ν 是 X 上的有限博雷尔测度。下面我们将详细推导 $F^*\nu$ 。设 ϕ 是 X 上的紧支撑连续函数。

$$\langle F^*\nu, \phi \rangle = \langle \pi_2^*(\nu) \wedge [\Gamma], \pi_1^*\phi \rangle := \sum_{1 \le i \le N} m_i \langle \nu, (\pi_2|_{\Gamma_i})_*(\phi \circ \pi_1) \rangle.$$

令 $\Omega \subseteq X$为一个扎里斯基开集，并令 $(Y^i, \Omega\ \pi_2|_{Y^i})$ 为对每个 $i = 1, \ldots, N$ 而言在 (2.1) 之前引入的全纯覆盖。那么对于每个 $x \in \Omega$， $(\pi_2|_{\Gamma_i})_*(\phi \circ \pi_1)(x)$

是 $\phi\circ\pi_1$ 在纤维 $\pi_2^{-1}\{x\}\cap\Gamma_i$ 上取值的总和。因此我们得到

$$(\pi_2|_{\Gamma_i})_*(\phi\circ\pi_1)(x)=\sum_{y:(y,x)\in\Gamma_i}\phi(y).$$

经典结论是，$(\pi_2|_{\Gamma_i})_*(\phi\circ\pi_1)(x)$可连续延拓到 $X\setminus\Omega$。因此，对于 $x\in X$，我们得到

$$(\pi_2|_{\Gamma_i})_*(\phi\circ\pi_1)(x)=\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}'\ \phi(y),$$

其中 $\sum'$ 表示对带有 y 的项求和，并按重数重复。因此，我们有

$$\langle F^*\nu,\phi\rangle:=\int_X\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}'\ \phi(y)\,d\nu(x).$$

如果 ν 是博雷尔概率测度，那么 $F^*\nu$ 是一个总质量等于 F的拓扑度的正测度。设 F 是 X上的一个拓扑度为 d 的全纯对应， μ是 X上的一个 F^*-不变测度，即它满足 $F^*\mu=\mathrm{d}\cdot\mu$。利用上述定义，这等价于：对于 X上的任意紧支撑连续函数（更一般地，由稠密性可知，对于任意 μ-可积函数） ϕ ，我们有

$$\frac{1}{\mathrm{d}}\int_X\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}'\ \phi(y)\,d\mu(x)=\int_X\phi\,d\mu.\tag{2.4}$$

设 F_1和 F_2是 X上的两个亚纯对应， ν是 X上的一个概率测度。由上面的讨论可立即推出 $(F_1\circ F_2)^*\nu=F_2^*(F_1^*\nu)$。因此，如果 μ是 F^*-不变的，那么对于每个 $n\in N$， μ都是 $(F^n)^*$-不变的。

我们以讨论与某些全纯对应相关的 Dinh–Sibony 测度来结束本节；我们在第1节中曾提及这种测度。为讨论全纯对应的 Dinh–Sibony 测度的存在性，我们需要定义光滑 (p,p)-形式的拉回。设 F 是一个维数为 k的紧复流形上的全纯对应。考虑一个光滑的 (p,p)-形式 α,$0\le p\le k$。由于 α 也是一个双次数为 (p,p) 的流，定义式 (2.3) 给出$F^*(\alpha)$，因为 $\pi_2^*\alpha\wedge[\Gamma]$ 作为 $|\Gamma|$ 上的 (p,p)-流是有意义的。

设 (X,ω) 是一个维数为 k 的紧 K¨ahler 流形，并令 $\int\omega^k=1$。考虑 X 上的全纯对应 F ，其拓扑度为 d。我们定义第 p 阶动力学度 $0\le p\le k$,

$$\mathrm{d}_p(F):=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X(F^n)^*\omega^p\wedge\omega^{k-p}\right)^{1/n}.$$

注意，$\mathrm{d}_k(F)$就是 F的拓扑度。若无歧义，我们将用d_p代替$\mathrm{d}_p(F)$。现在定义一个序列 $\mu_n:=\mathrm{d}^{-n}(F^n)^*\omega^k$。由于 ω^k是 X上的体积形式，因此 μ_n 是一个概率测度序列。在$\mathrm{d}_{k-1}<\mathrm{d}$这一假设下，Dinh–Sibony在第 5] 节证明了 μ_n 在弱*拓扑下收敛到一个 F^*-不变概率测度 μ_F。事实上，他们证明，若 u 是一个准拟次调和函数（即局部可写成一个光滑函数与一个多重次调和函数之和的函数），则 u是 μ_F-可积的，并且 $\langle\mu_n,u\rangle\to\langle\mu_F,u\rangle$ 如

$n \to \infty$。特别地， μ_F 在多极集上的测度为零。Dinh–Sibony还证明，某个一般点的原像按测度 μ_F等分布；也就是说，存在 X 的一个多极子集 E，使得对每个 $a \in X \setminus E$，都有

$$\mathrm{d}^{-n}(F^n)^*\delta_a \to \mu_F$$

如 $n \to \infty$。详细讨论请参见 [12, 第1节和 5] 。我们将在第4节利用上述性质证明 μ_F的遍历性。

最后提及一点：结果1.4及上述等分布性质，对于紧K¨ahler流形上的亚纯对应也成立（该对应满足结果1.4中的次数条件）。更多详情请参见 [12] 。此外，Vu近期的一篇文章 [20] 将这些结果推广到了紧非K¨ahler流形上的亚纯对应。

3. Existence of F^*-invariant and ergodic measures

设 F 是复流形 X上的全纯对应。本节旨在证明，当 X 紧时， X 上存在一个 F^*-不变遍历测度和一个 F^*-不变遍历测度。在证明这些结果之前，我们先证明一个关于几乎不变集补集的引理。回忆一下，若存在一个博雷尔集 $B' \subseteq B$，使得 $F^\dagger(B') \subseteq B$ 且 $\mu(B') = \mu(B)$，则 X 的博雷尔子集 B 称为关于 F和 μ 几乎不变。当 F 和 μ 由上下文可知时，为简便起见，我们只说 B 几乎不变。

引理 3.1. 设 F 是复流形 X 上的一个拓扑度为 d 的全纯对应，且 μ 是 X上的一个 F^*-不变博雷尔概率测度。设 B 是 X 的一个博雷尔子集，满足相对于 F 和 μ，B 几乎不变。则相对于 F 和 μ， B^c几乎不变。此外，对每个 $n \in N$， B 和 B^c 相对于 F^n和 μ几乎不变。

证明。由于 B几乎不变，存在 B的一个博雷尔子集 B'，使得 $F^\dagger(B') \subseteq B$ 且 $\mu(B') = \mu(B)$。考虑 $C := \{x \in B^c : F^\dagger(x) \cap B \neq \emptyset\}$. 。注意到$F^\dagger(B^c \setminus C) \subseteq B^c$。由于 $C = F(B) \cap B^c$， C是一个博雷尔集。因此，只要证明 $\mu(C) = 0$，即可得证。若在 (2.4) 中取 $\phi := \chi_B$，即 B的特征函数，则得到

$$\int_X \chi_B \, d\mu = \int_{B'} 1 \, d\mu + \int_{B\setminus B'} \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}} \, d\mu(x) + \int_C \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}} \, d\mu(x).$$

根据 C 的定义，并且由于 $\mu(B') = \mu(B)$，我们得到

$$\mu(B) \geq \mu(B) + \int_C \frac{1}{\mathrm{d}} \, d\mu.$$

Thus $\mu(C) = 0$。这证明 B^c 相对于 F和 μ几乎不变 .

现在证明 B 相对于 F^n 和 μ几乎不变。我们用关于 n 的归纳法来证明这一点。首先注意，对每个 $n \in \mathbb{N}$，测度 μ 是 $(F^n)^*$-不变的。假设 B 相对于 F^j 和 μ几乎不变。我们断言， B 相对于 F^{j+1} 和 μ几乎不变。存在 B 的一个博雷尔子集 B'_j，使得

$(F^j)^\dagger(B'_j) \subseteq B$和 $\mu(B'_j) = \mu(B)$。考虑 $B'_{j+1} := B'_j \setminus F^j(B \setminus B')$，其中 B'是 B的一个博雷尔子集，使得 $F^\dagger(B') \subseteq B$且 $\mu(B') = \mu(B)$。由此可得 $(F^j)^\dagger(B'_{j+1}) \subseteq B'$。因此 $(F^{j+1})^\dagger(B'_{j+1}) \subseteq B$。还需证明 $\mu(B'_{j+1}) = \mu(B)$。由于测度μ 是 $(F^j)^*$-不变的，因此对 X的任意博雷尔子集 A，有

$$\frac{1}{\mathrm{d}^j}\,\mu(F^j(A)) \le \mu(A).$$

详细证明见 [16, 引理 5.6]。由于 $\mu(B \setminus B') = 0$，我们得到 $\mu(F^j(B \setminus B')) = 0$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， B 相对于 F^n 和 μ 几乎不变。与证明第一段中的做法相同，我们证明对于每个 $n \in \mathbb{N}$， B^c 相对于 F^n 和 μ 几乎不变。□

给定集合 A，使得 $F^\dagger(A) \subseteq A$，我们未必能像映射的情形那样得到 $F^\dagger(A^c) \subseteq A^c$。然而，若存在一个 F^*-不变测度 μ，上述引理特别指出， A^c 相对于 F 和 μ 几乎不变。

我们首先证明，当流形 X 是紧的时，存在一个 F^*-不变测度。若 X 非紧，则我们无法保证存在一个 F^*-不变测度；例如，考虑 $X = \mathbb{C}$ 以及由映射 $f(z) = z + 1$ 的图所诱导的全纯对应。

命题 3.2. 设 F 是紧复流形 X 上拓扑度为 d 的全纯对应。则存在一个 F^*-不变的博雷尔概率测度。

证明. 设 $\{\nu_n\}$ 是一个博雷尔概率测度序列。考虑

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(F^j)^*\nu_n}{\mathrm{d}^j}.$$

由于 X 是紧的，序列 $\{\mu_n\}$ 是紧的。因此存在一个收敛子序列。设 $\{\mu_{n_j}\}$ 是这样一个子序列，其极限为 μ。接下来我们证明 μ 是 F^*-不变的。对于连续的 ψ，有

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_X \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\psi(y)}{\mathrm{d}}\,d\mu_{n_j}(x) - \int_X \psi(x)\,d\mu_{n_j}(x)\Big| \\
&\qquad = \frac{1}{n_j}\Big|\int_X \sum_{i=0}^{n_j-1}\Big(\sum_{y\in(F^{i+1})^\dagger(x)}{}' \frac{\psi(y)}{\mathrm{d}^{i+1}} - \sum_{y\in F^{i\dagger}(x)}{}' \frac{\psi(y)}{\mathrm{d}^i}\Big)\,d\nu_{n_j}(x)\Big| \\
&\qquad = \frac{1}{n_j}\Big|\int_X \Big(\sum_{y\in(F^{n_j})^\dagger(x)}{}' \frac{\psi(y)}{\mathrm{d}^{n_j}}\Big) - \psi(x)\,d\nu_{n_j}(x)\Big| \\
&\qquad \le \frac{2}{n_j}\|\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

由于 $j \to \infty$，最后一个表达式趋于 0。因此，我们得到

$$\int_X \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\psi(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x) = \int_X \psi(x)\, d\mu(x).$$

由于 ψ 是任意的，因此 μ 是 F^*-不变的。 □

下一个命题刻画了 F^*-不变的博雷尔概率测度中的遍历测度。应用这一刻画，我们可以得到：当 X 紧时，存在一个 F^*-不变的遍历测度。

命题 3.3. 设 F 和 X 如命题 3.2 中所述。那么， F^*-不变测度 μ 是遍历的，当且仅当 μ 不能写成两个不同的 F^*-不变概率测度的严格凸组合；也就是说，不存在 F^*-不变的博雷尔概率测度 $\mu_1 \neq \mu_2$ 和 $0 < \lambda < 1$，使得 $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$。

证明. 假设 μ 不是遍历的。因此，存在一个博雷尔集 B，使得 B 几乎不变，且 $0 < \mu(B) < 1$。根据引理 3.1， B^c 几乎不变。给定 X 的一个博雷尔子集 A，令 $\mu|_A$ 表示限制测度，其定义为：对于 X 的任意博雷尔子集 C， $\mu|_A(C) := \mu(A \cap C)$。容易看出

$$\frac{1}{\mu(B)}\,\mu|_B \quad \text{and} \quad \frac{1}{\mu(B^c)}\,\mu|_{B^c}$$

是 F^*-不变的博雷尔概率测度。此外，

$$\mu = \mu(B)\Big(\frac{1}{\mu(B)}\,\mu|_B\Big) + \mu(B^c)\Big(\frac{1}{\mu(B^c)}\,\mu|_{B^c}\Big).$$

因此， μ 可以写成两个不同的 F^*-不变博雷尔概率测度的严格凸组合。

反过来，设 μ 是遍历的，并假设对某个 $0 < \lambda < 1$，有 $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$。由于 $\lambda > 0$， μ_1 相对于 μ 绝对连续。因此存在一个正函数 φ，使得对于所有博雷尔子集 A，

$$\mu_1(A) = \int_A \varphi\, d\mu. \tag{3.1}$$

设 $B := \{x \in X : \varphi(x) < 1\}$。现在我们证明， B 相对于 F 和 μ 几乎不变。考虑集合

$$C_1 := \{x \in B : F^\dagger(x) \cap B^c \neq \emptyset\} \text{ and } C_2 := \{x \in B^c : F^\dagger(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

注意， $C_1 = F(B^c) \cap B$ 且 $C_2 = F(B) \cap B^c$。因此， C_1 和 C_2 是博雷尔集。我们声称 $\mu(C_1) = 0$。由于 μ 是 F^*-不变的，由 (2.4) 得

$$\int_X \chi_B\, d\mu = \int_X \chi_{B\setminus C_1}\, d\mu + \int_{C_1} \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x) + \int_{C_2} \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x)$$

因此，

$$\int_{C_1} 1\, d\mu = \int_{C_1} \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x) + \int_{C_2} \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x). \tag{3.2}$$

同样，由于 μ_1 是 F^*-不变的，我们也有

$$\int_{C_1} 1\, d\mu_1 = \int_{C_1} \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu_1(x) + \int_{C_2} \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu_1(x).$$

利用 (3.1)，得到

$$\int_{C_1} \varphi\, d\mu = \int_{C_1} \Big(\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\Big)\varphi(x)\, d\mu(x) + \int_{C_2} \Big(\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\Big)\varphi(x)\, d\mu(x). \tag{3.3}$$

用 (3.3) 减去 (3.2)，得到

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (\varphi - 1)\, d\mu = &\int_{C_1} \Big(\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\Big)(\varphi(x) - 1)\, d\mu(x) \\ &+ \int_{C_2} \Big(\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}}\Big)(\varphi(x) - 1)\, d\mu(x).\end{aligned} \tag{3.4}$$

注意，对于每个 $x \in C_1$, $\sum'_{y\in F^\dagger(x)} \chi_B(y)/\mathrm{d} < 1$。此外，对于每个 $x \in C_1$，都有 $\varphi(x) - 1 < 0$；对于每个 $x \in C_2$，都有 $\varphi(x) - 1 \geq 0$。因此，若 $\mu(C_1) > 0$，则 (3.4) 不成立。这证明 B 关于 F 和 μ 几乎不变。由于测度 μ 是遍历的，故 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(B) = 1$。若 $\mu(B) = 1$，则由 (3.1) 得到

$$\mu_1(X) = \int_X \varphi\, d\mu < \mu(B) = 1,$$

这与 μ_1 是概率测度这一事实矛盾。因此 $\mu(B) = 0$。类似地，可以证明 $\mu(\{x \in X : \varphi(x) > 1\}) = 0$。因此，$\varphi$ 几乎处处（相对于 μ）等于 1。由 (3.1)，$\mu = \mu_1$，从而 $\mu = \mu_1 = \mu_2$。因此，μ 不能写成两个不同的 F^*-不变博雷尔概率测度的严格凸组合。□

设 F 是紧复流形 X上的全纯对应。现在我们利用命题 3.3 证明存在一个 F^*-不变遍历测度。注意，$\mathcal{M}_F$ 中所有 F^*-不变博雷尔概率测度构成一个非空的紧凸集。因此，根据克莱因–米尔曼定理，$\mathcal{M}_F$ 的极点集非空。由命题 3.3 可知，当 X 紧时，始终存在一个 F^*-不变遍历测度。

4. Examples

设 F 是复流形 X 上的全纯对应。在第 3 节中，我们证明了当流形 X 是紧的时，F^*-不变和 F^*-不变的遍历测度总是存在的。本节致力于给出 F^*-不变遍历测度的具体例子。特别地，我们证明定理 1.5，其中给出了具有有趣动力学性质的遍历测度的全纯对应的例子。我们首先给出第1节中提到的一个例子。如果 F 是全纯映射，那么相对于 F 和 μ 的博雷尔集 B 几乎不变性的定义等价于

$\mu(B \triangle F^{\dagger}(B)) = 0$。一般而言，对于全纯对应，情况并非如此。现在我们给出这样一个全纯对应的例子。

例 4.1. 一个全纯对应的例子，说明几乎不变的博雷尔集 B 不一定满足 $\mu(B \triangle F^{\dagger}(B)) = 0$。

考虑由 $\mathcal{G} = \{z^2, z^2/2\}$ 生成的有限生成有理半群 S。令 J(S) 表示 S 的朱利亚集。那么（见 [4,例 1]），

$$\mathrm{J}(S) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}.$$

令 $\mu_{\mathcal{G}}$ 为在 [4] 中构造的测度。关于测度 $\mu_{\mathcal{G}}$ 的显式公式，见 [4, 例 1])。结果表明，$\mu_{\mathcal{G}}$ 是由 $\mathcal{G}$ 诱导的（1.2）中的全纯对应 $F_{\mathcal{G}}$ 所对应的 Dinh–Sibony 测度。由于 supp($\mu_{\mathcal{G}}$) =J(S)，我们有 supp($\mu_{\mathcal{G}}$) $= \{z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z| \leq 2\}$。现在考虑一个博雷尔集 $B := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$。由于 $\mu_{\mathcal{G}}(B) = 0$，可知 B 关于 $F_{\mathcal{G}}$ 和 $\mu_{\mathcal{G}}$ 几乎不变。注意到 $F_{\mathcal{G}}^{\dagger}(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{2}\}$。由于 supp($\mu_{\mathcal{G}}$) $= \{z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z| \leq 2\}$，可知 $\mu_{\mathcal{G}}(F_{\mathcal{G}}^{\dagger}(B) \triangle B) \neq 0$。◀

现在我们证明，结果1.4给出的 Dinh–Sibony 测度如定义 1.1 所述是遍历的。这给出了 F^*-不变遍历测度的显式例子。特别是，例 4.1 中的测度 $\mu_{\mathcal{G}}$ 是遍历的。注意，例 4.1 中的测度 $\mu_{\mathcal{G}}$ 并非在遍历理论的经典意义下不变。

定理 1.5 的证明。正如第 2 节所述，存在一个多极子集 E of$X$，使得对每个 $a \in X \setminus E$，我们都有

$$\mathrm{d}^{-n}(F^n)^* \delta_a \to \mu_F$$

当 $n \to \infty$ 时。等价地，如果 ϕ 是 X 上的连续函数，那么

$$\frac{1}{\mathrm{d}^n} \sum_{y \in F^{n\,\dagger}(a)}{}' \phi(y) \to \int_X \phi \, d\mu_F \tag{4.1}$$

对每个 $a \in X \setminus E$，当 $n \to \infty$ 时。设 ψ 可 μ_F 积。由于 $\mu_F(E) = 0$，由 (4.1) 和控制收敛定理可得

$$\int_X \left(\frac{1}{\mathrm{d}^n} \sum_{y \in F^{n\,\dagger}(x)}{}' \phi(y) \right) \psi(x) \, d\mu_F(x) \to \int_X \phi \, d\mu_F \int_X \psi \, d\mu_F \tag{4.2}$$

如 $n \to \infty$。如果 ψ 有界，那么根据连续函数的稠密性，当 ϕ 是 μ_F 可积时，(4.2) 成立。

考虑 X 的一个博雷尔子集 B，它关于 F 和 μ 几乎不变。令 $\phi = \chi_B$。由引理 3.1，B 和 B^c 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都关于 F^n 和 μ 几乎不变。因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\mathrm{d}^n} \sum_{y \in F^{n\,\dagger}(x)}{}' \phi(y) = \phi(x)$$

对于 μ_F-几乎处处的 $x \in X$。令 $\psi = 1 - \chi_B$。由 (4.2)，我们得到 $\mu_F(B) \cdot \mu_F(B^c) = 0$。因此，我们有 $\mu_F(B) = 0$ 或 $\mu_F(B^c) = 0$。因此，Dinh–Sibony 测度 μ_F 如定义 1.1 所述是遍历的。□

注 4.2. 给定复流形 X 上的亚纯对应 F 和 X 的博雷尔子集 B， $F^\dagger(B)$ 未必是 X 的博雷尔子集（例子见 [16] ）。这一困难可以借助描述集合论的工具来处理。进一步运用这些工具，如 [16], ，当 F 定义在紧流形上，且存在一个对多极集赋予零质量的遍历不变测度 F^* 时，可以证明定理 1.2。对亚纯情形作适当修改后，上述定理 1.5 的证明同样成立。

注 4.3. 利用 [9] 中的定理 2.10，以及定理 1.5 证明最后一段中的技巧，可以推出 [9] 中构造的测度也是遍历的，正如定义 1.1 所述。

5. Preliminary results

本节旨在证明若干个对于定理 1.2 的证明至关重要的引理。我们首先证明一个基础引理，该引理将在本文中多次使用。

引理 5.1. 设 F 是一个定义在复流形 X 上、拓扑度为 d 的全纯对应，且 μ 是 X 上的一个 F^*-不变博雷尔概率测度。若 $\phi\colon X \to \mathbb{C}$ 在 $L^1(\mu)$ 中为实值，并满足

$$\sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}} = \phi(x)$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，则集合 $\{x \in X\colon \phi(x) > t\}$ 和 $\{x \in X\colon \phi(x) < t\}$ 关于 F 和 μ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都几乎不变。

证明. 我们首先证明 $B := \{x \in X\colon \phi(x) > 0\}$ 关于 F 和 μ 几乎不变。令

$$C_1 := \{x \in B : F^\dagger(x) \cap B^c \neq \emptyset\} \text{ and } C_2 := \{x \in B^c : F^\dagger(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

在（2.4）中取 $\phi := \phi \cdot \chi_B$，得到

$$\begin{aligned}\int_X \phi \cdot \chi_B \, d\mu = \int_{B \setminus C_1} \sum_{y \in F^\dagger(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}} \, d\mu(x) + \int_{C_1} \sum_{y \in F^\dagger(x) \cap B}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}} \, d\mu(x) \\ + \int_{C_2} \sum_{y \in F^\dagger(x) \cap B}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}} \, d\mu(x).\end{aligned}$$

由于 ϕ 对于 μ-几乎处处的 $x \in X$ 满足 $\sum'_{y\in F^\dagger(x)} \phi(y)/\mathrm{d} = \phi(x)$，因此我们有

$$\int_B \phi\, d\mu = \int_{B\setminus C_1} \phi\, d\mu + \int_{C_1} \Big(\phi(x) - \sum_{y\in F^\dagger(x)\cap B^c}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}}\Big)\, d\mu(x) + \int_{C_2} \sum_{y\in F^\dagger(x)\cap B}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x).$$

因此，我们得到

$$\int_{C_1} \sum_{y\in F^\dagger(x)\cap B^c}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x) = \int_{C_2} \sum_{y\in F^\dagger(x)\cap B}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}}\, d\mu(x).$$

如果 $y \in F^\dagger(x) \cap B^c$，那么 $\phi(y) \le 0$；如果 $y \in F^\dagger(x) \cap B$，那么 $\phi(y) > 0$。因此，上述等式成立的条件是 $\mu(C_2) = 0$。这证明 B^c 关于 F 和 μ 几乎不变。由引理 3.1 可知， B 关于 F 和 μ 几乎不变。

固定 $t \in \mathbb{R}$。注意，函数 $\phi - t$ 满足

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{(\phi - t)(y)}{\mathrm{d}} = \Big(\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}}\Big) - t = (\phi - t)(x)$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in X$。因此， $\{x \in X\colon \phi(x) - t > 0\} = \{x \in X\colon \phi(x) > t\}$ 几乎不变。由于 t 任意，故对于每个 $t \in \mathbb{R}$， $\{x \in X\colon \phi(x) > t\}$ 几乎不变。只需证明 $\{x \in X\colon \phi(x) < t\}$ 几乎不变。注意， $\{x \in X\colon \phi(x) < t\} = \{x \in X\colon -\phi(x) > -t\}$，且 $-\phi$ 满足

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{-\phi(y)}{\mathrm{d}} = -\phi(x)$$

对 μ 几乎处处成立。因此， $\{x \in X\colon \phi(x) < t\}$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 而言，相对于 F 和 μ 也几乎不变。□

现在，我们利用上述引理，通过满足某种不变性条件的函数来刻画遍历测度。

引理 5.2. 设 F 是复流形 X 上拓扑度为 d 的全纯对应，且 μ 是 X 上一个 F^*-不变的博雷尔概率测度。当且仅当对 $L^1(\mu)$ 中的 $X \to \mathbb{C}$：

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}} = \phi(x)$$

对 μ 几乎处处成立，意味着 ϕ 几乎处处等于一个常数 μ。

证明。考虑一个关于 F 和 μ 几乎不变的博雷尔集 B。令 $\phi := \chi_B$ 为 B 的特征函数。由于 B 几乎不变，我们有

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}} = 1 = \chi_B(x)$$

对 μ-几乎处处的 $x \in B$。根据引理 3.1， B^c 关于 F 和 μ 也几乎不变。因此

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\chi_B(y)}{\mathrm{d}} = 0 = \chi_B(x)$$

对于几乎处处的 $x \in B^c$（相对于 μ）。由假设可知， χ_B 几乎处处等于常数 μ。因此，要么 $\mu(B) = 0$，要么 $\mu(B) = 1$。

现在，我们证明充分性部分。我们分别考察实部和虚部。注意， ϕ 的实部 $\Re(\phi)$ 满足

$$\sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\Re(\phi)(y)}{\mathrm{d}} = \Re(\phi)(x)$$

对于几乎处处的 $x \in X$（相对于 μ）。根据引理 5.1，对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $A_t := \{x \in X : \Re(\phi)(x) > t\}$ 关于 F 和 μ 几乎不变。由于 μ 是遍历的，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，要么 $\mu(A_t) = 0$，要么 $\mu(A_t) = 1$。令 t' 为满足 $\mu(A_{t'}) = 0$ 的 t 的最小值。容易推出， $\Re(\phi)$ 几乎处处等于常数 t' μ。类似地，可以证明 ϕ 的虚部几乎处处等于常数 μ。这证明函数 ϕ 几乎处处等于常数 μ。□

接下来我们陈述一个结果，它将有助于在我们的情形下证明一个版本的极大不等式。证明见 [21, 定理 1.16]。

结果 5.3。设 $U : L^1(\nu) \to L^1(\nu)$ 是一个满足 $\|U\| \le 1$ 的正线性算子。对于$\psi \in L^1(\nu)$ 实值函数，定义 $\psi_0 = 0$, $\psi_n = \psi + U\psi + U^2\psi + \cdots + U^{n-1}\psi$对于$n \ge 1$。设 $N > 0$ 为整数，且 $\Psi_N = \max_{0\le n\le N} \psi_n$。则

$$\int_{\{x:\, \Psi_N(x)>0\}} \psi \, d\nu \ge 0.$$

我们利用上述结果，在我们的情形下证明一个版本的极大不等式。设 F 为一个全纯对应，且 μ 为一个 F^*-不变测度。我们将结果 5.3 应用于算子 $U_F : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$，该算子定义为

$$U_F(\varphi)(x) := \sum_{y\in F^\dagger(x)}{}' \frac{\varphi(y)}{\mathrm{d}}.$$

注意， U_F 是一个正线性算子，且 $\|U_F\| = 1$。

推论 5.4. 设 F 是复流形 X 上的一个拓扑度为 d 的全纯对应，且 μ 是 X上的一个 F^*-不变博雷尔概率测度。若 $\phi \in L^1(\mu)$ 为实值，并且

$$E_\alpha := \Big\{x \in X : \sup_{n\ge1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{y\in F^{j\,\dagger}(x)}{}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j} > \alpha\Big\},$$

then

$$\int_{E_\alpha\cap A} \phi \, d\mu \ge \alpha\, \mu(E_\alpha \cap A),$$

若 A 是关于 F 和 μ的一个几乎不变集。

证明。令 $\psi = \phi - \alpha$。采用结果 5.3 中的记号，

$$E_\alpha = \bigcup_{N=0}^{\infty} \{x : \Psi_N(x) > 0\}.$$

根据结果 5.3，可得 $\int_{E_\alpha} \psi \, d\mu \geq 0$，因此 $\int_{E_\alpha} \phi \, d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha)$。现在，若 A 是关于 F 和 μ 的几乎不变集，那么我们对 $\psi = \phi - \alpha$ 以及 F^*- 不变概率测度 $\frac{1}{\mu(A)} \mu|_A$ 应用相同的论证，得到

$$\int_{E_\alpha \cap A} \phi \, d\mu \geq \alpha \, \mu(E_\alpha \cap A).$$

证明完毕。 □

6. The proof of Theorem 1.2

在开始证明定理 1.2 之前，我们回顾一个记号。回忆一下，$\sum'$ 表示带有 y 的和，并按重数重复。细心的读者会注意到，第 5 节中的证明（以及定理 1.2 的证明）完全是测度论的，复结构在证明中不起任何作用。因此，这些结果可以推广到更一般的多值映射。现在我们可以开始

定理 1.2 的证明。注意到，分别考虑实部和虚部后，只需考虑实值的 ϕ。对于 $x \in X$，定义

$$\phi'(x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} {\sum_{y \in F^j{}^\dagger(x)}}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j},$$

$$\phi''(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} {\sum_{y \in F^j{}^\dagger(x)}}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j}.$$

现在证明，对于μ-几乎处处的 $x \in X$，$\sum'_{y\in F^\dagger(x)} \phi'(y)/\mathrm{d} = \phi'(x)$ 和 $\sum'_{y\in F^\dagger(x)} \phi''(y)/\mathrm{d} = \phi''(x)$ 成立。注意

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} {\sum_{y \in F^j{}^\dagger(x)}}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j}\right) = {\sum_{y \in F^\dagger(x)}}' \frac{1}{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} {\sum_{z \in F^j{}^\dagger(y)}}' \frac{\phi(z)}{\mathrm{d}^j}\right) + \frac{1}{n}\phi(x). \tag{6.1}$$

沿着使 (6.1) 左端收敛到下极限的子序列取极限，可得 $\phi'(x) \geq \sum'_{y\in F^\dagger(x)} \phi'(y)/\mathrm{d}$ 对 μ-几乎处处的 $x \in X$ 成立。沿着使 (6.1) 右端收敛到下极限的子序列取极限，可得 $\phi'(x) \leq \sum'_{y\in F^\dagger(x)} \phi'(y)/\mathrm{d}$ 对 μ-几乎处处的 $x \in X$ 成立。对 ϕ'' 作类似论证，即可得到所需的等式。

接下来证明这一结论几乎处处成立。对于有理数 $\alpha > \beta$，定义

$$E_{\alpha,\beta} := \{x \in X : \phi'(x) < \beta \text{ and } \phi''(x) > \alpha\}.$$

由于 $\sum'_{y\in F^{\dagger}(x)} \phi'(y)/\mathrm{d} = \phi'(x)$ 和 $\sum'_{y\in F^{\dagger}(x)} \phi''(y)/\mathrm{d} = \phi''(x)$ 对 μ-几乎处处的$x \in X$ 成立，由引理 5.1 可知，$\{x \in X : \phi'(x) < \beta\}$ 和 $\{x \in X : \phi''(x) > \alpha\}$几乎不变。现在很容易看出 $E_{\alpha,\beta}$ 几乎不变。接下来，我们将推论 5.4 应用于此处的情形。注意到 $E_{\alpha,\beta} \subseteq E_\alpha$，其中 E_α 是推论 5.4 中定义的集合。由于 $E_{\alpha,\beta}$ 几乎不变，因此有

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \phi \, d\mu \geq \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}).$$

将 ϕ 替换为 $-\phi$，同样的论证可得

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \phi \, d\mu \leq \beta\mu(E_{\alpha,\beta}).$$

上述两个不等式表明，对于 $\alpha > \beta$，$\mu(E_{\alpha,\ \beta}) = 0$。由于 $\{x \in X : \phi'(x) < \phi''(x)\} = \cup\{E_{\alpha,\beta} : \alpha > \beta$，且 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$，因此几乎处处有 $\phi' = \phi''$ μ。令 $\Phi := \phi'$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{y\in F^{j\,\dagger}(x)}' \frac{\phi(y)}{\mathrm{d}^j} = \Phi(x) \quad \text{for } \mu\text{-almost every } x \in X.$$

接下来，作为法图引理的一个简单应用，我们证明 $\Phi \in L^1(\mu)$。容易看出

$$|\Phi(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{y\in F^{j\,\dagger}(x)}' \frac{|\phi(y)|}{\mathrm{d}^j}.$$

由法图引理，且由于 μ 是 F^*-不变的，我们得到

$$\int_X |\Phi| \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{y\in F^{j\,\dagger}(x)}' \frac{|\phi(y)|}{\mathrm{d}^j} \, d\mu = \int_X |\phi| \, d\mu.$$

由于 $\phi \in L^1(\mu)$，可得 $\Phi \in L^1(\mu)$。

只需证明 $\int_X \Phi \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu$。对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $n \geq 1$，定义

$$D_k^n := \{x \in X : \frac{k}{n} \leq \phi''(x) < \frac{k+1}{n}\}.$$

注意，当 $\epsilon > 0$ 充分小时，有 $D_k^n \subseteq E_{(k/n)-\epsilon}$，其中 $E_{(k/n)-\epsilon}$ 是推论 5.4 中定义的集合。另外，注意到 $D_k^n = \{x \in X : \phi''(x) \geq k/n\} \cap \{x \in X : \phi''(x) < (k+1)/n\}$。由引理 3.1 和引理 5.1 可知，$D_k^n$ 几乎不变。利用推论 5.4，我们得到

$$\int_{D_k^n} \phi \, d\mu \geq \Big(\frac{k}{n} - \epsilon\Big)\mu(D_k^n).$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，我们得到

$$\int_{D_k^n} \phi \, d\mu \geq \frac{k}{n} \mu(D_k^n).$$

现在，根据 D_k^n 的定义以及最后一个不等式，

$$\int_{D_k^n} \phi''\, d\mu \le \frac{k+1}{n}\,\mu(D_k^n) \le \frac{1}{n}\,\mu(D_k^n) + \int_{D_k^n} \phi\, d\mu.$$

对 k 求和可得

$$\int_X \phi''\, d\mu \le \frac{\mu(D_k^n)}{n} + \int_X \phi\, d\mu.$$

由于这对所有 $n \ge 1$ 都成立，我们有 $\int_X \phi''\, d\mu \le \int_X \phi\, d\mu.$。将此应用于 $-\phi$ 而非 ϕ，可得 $\int_X \phi'\, d\mu \ge \int_X \phi\, d\mu.$。由于几乎处处满足 $\phi' = \phi''$ μ，我们有

$$\int_X \Phi\, d\mu = \int_X \phi'\, d\mu = \int_X \phi\, d\mu.$$

最后，若 μ 如定义 1.1 所述是遍历的，则根据引理 5.2，Φ 几乎处处为常数 μ，且该常数恰为 $\int_X \phi\, d\mu$。□

Acknowledgments

作者谨向 Norm Levenberg 和 Gautam Bharali 致谢，感谢他们对本文早期稿件提出的宝贵意见。作者也感谢审稿人提出的有益建议。

References

[1] Robert L. Benedetto，《单个非阿基米德变量的动力学》，《研究生数学丛书》，198，American Mathematical Society，罗德岛州普罗维登斯，2019，xviii+463 页。[2] Gautam Bharali 和 Shrihari Sridharan，《 $\mathbb{P}^1$上的全纯对应的动力学：不变测度与正规性集》，《复变函数与椭圆方程》61（2016），第12期，1587–1613。[3] Gautam Bharali 和 Shrihari Sridharan，《与有限生成有理半群相关的全纯对应》，《国际数学杂志》28（2017），第14期，25页。[4] David Boyd，《有限生成有理半群的不变测度》，《复变函数理论与应用》39（1999），第3期，229–254。[5] Hans Brolin，《有理函数迭代下的不变集》，《Ark. Mat.》6（1965），103–144。[6] Shaun Bullett 和 Luna Lomonaco，《将二次映射与模群嫁接 II》，《数学发明》220（2020），第1期，185–210。[7] Laurent Clozel 和 Jean-Pierre Otal，《模对应的唯一遍历性》，《几何学及相关主题论文集》第1、2卷，205–216，《数学教学专著》38，数学教学，日内瓦，2001。[8] Laurent Clozel 和 Emmanuel Ullmo，《模对应与不变测度》，《纯粹与应用数学杂志》558（2003），47–83。[9] Tien-Cuong Dinh，《多项式对应的原像与周期点的分布》，《法国数学会通报》133（2005），第3期，363–394。[10] Tien-Cuong Dinh、Lucas Kaufmann 和 Hao Wu，《黎曼曲面上全纯对应的动力学》，《国际数学杂志》31（2020），第5期，21页。[11] Tien-Cuong Dinh、Lucas Kaufmann 和 Hao Wu，《随机矩阵乘积：动力学视角》，《纯粹与应用数学季刊》17（2021），第3期，933–969。

[12] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony, 《亚纯变换值的分布及其应用》, 《Comment. Math. Helv.》81（2006）, 第1期, 221–258。[13] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony, 《多复变动力系统：射影空间自同态与多项式型映射》, 《全纯动力系统》, 165–294, 《数学讲义》1998, 施普林格, 柏林, 2010。[14] Alexandre Freire、Artur Lopes 和 Ricardo Mañe, 《有理映射的不变测度》, 《Bol. Soc. Brasil. Mat.》14（1983）, 第1期, 45–62。[15] M. Ju. Ljubich, 《黎曼球面有理自同态的熵性质》, 《遍历理论与动力系统》3（1983）, 第3期, 351–385。[16] MAYURESH LONDHE, 《亚纯对应与全纯半群动力学中的复现》, 《Indiana Univ. Math. J.》71（2022）, 第3期, 1131–1154。[17] R. Daniel Mauldin, 《双可测函数》, 《美国数学会会刊》83（1981）, 第2期, 369–370。[18] V. Matus de la Parra, 《二次映射与模群嫁接的等分布》, 《遍历理论与动力系统》44（2024）, 第3期, 859–887。[19] R. Purves, 《双可测函数》, 《Fund. Math.》58（1966）, 149–157。[20] Duc-Viet Vu, 《非凯勒流形上亚纯自映射的平衡测度》, 《美国数学会汇刊》373（2020）, 第3期, 2229–2250。[21] Peter Walters, 《遍历理论导论》, 《数学研究生丛书》79, 施普林格出版社, 纽约—柏林, 1982。

Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, Indiana 47405, USA电子邮件地址: mmlondhe@iu.edu