arXiv:2301.06693v1 [math.RA] 17 Jan 2023

通过微分代数与方程诺特代数表示

Alexander A. Mikhalev[1], Manat Mustafa[2], 和 Ualbai Umirbaev[3]

谨以此文纪念 A. V. Mikhalev（1940—2022年）

Abstract. 我们证明，由 Witt 代数 W_n、左对称Witt代数 L_n和辛Poisson代数P_n 生成的代数簇中的自由代数，可以表示为微分多项式代数的子代数，其中乘积按适当方式定义。利用这些表示，我们证明 W_n、 L_n、P_n以及由这些代数生成的代数簇中的自由代数都是方程诺特的。

数学主题分类（2020）：主要分类 12H05、17B63、17B66、17D25；次要分类 16P40、17A50。

关键词：微分代数、李代数、左对称代数、泊松代数、方程诺特代数。

1. Introduction

著名的希尔伯特基定理（例如参见 [6]）表明，任意域 K 上的仿射空间 $\mathbb{A}^n(K)$ 都是诺特的。换言之，任意域 K 都是方程诺特的。群和代数系统上的代数几何基础知识可见 [2, 4, 21]。许多代数几何中的标准概念，例如代数集、扎里斯基拓扑、不可约簇和坐标群，被 O. Kharlampovich 和 A. Myasnikov [11, 12] 以及 Z. Sela [25] 分别自由地用于解决著名的塔斯基问题。1986年，V. Guba [8] 利用自由群通过二阶矩阵表示这一广为人知的方法，证明了自由群是方程诺特的。另已知，诺特整环 [2] 上的线性群（特别是多循环群和有限生成后交换群）、有限生成自由可解群 [9]，以及无挠双曲群 [26] 都是方程诺特的。

方程诺特环和代数的例子为数不多。显然，希尔伯特基定理表明，每个结合且交换的诺特环或代数都是方程诺特的。我们还知道，任意有限生成的后承代数或幂零李代数都是方程诺特的 [4]。有限生成的自由后承

[1]莫斯科国立罗蒙诺索夫大学力学与数学系，列宁山1号，119991，莫斯科，俄罗斯联邦，电子邮件：aamikhalev@mail.ru。[2]纳扎尔巴耶夫大学数学系，SSH.，卡班拜·巴特尔大街53号，阿斯塔纳，010000，哈萨克斯坦，电子邮件：manat.mustafa@nu.edu.kz[3]韦恩州立大学数学系，美国密歇根州底特律，邮编48202；以及数学与数学建模研究所，阿拉木图，050010，哈萨克斯坦，电子邮件：umirbaev@wayne.edu1

特征零的李代数相对于包络代数中的方程是诺特的 [24]。

本文给出了更多方程诺特代数的例子。这些例子源自微分代数。Ritt-Raudenbush 基定理 [10, 13, 23],是希尔伯特基定理的一个类比，它指出，特征零下每个有限生成的微分代数都是根诺特的，即满足根闭微分理想的升链条件。因此，特征零域上的每个有限生成微分整环都是方程诺特的。

我们证明，特征零域上由 Witt 代数 W_n、左对称Witt代数 L_n和辛Poisson代数 P_n 生成的代数簇中的自由代数，可以描述为微分多项式代数的子代数，其中采用了适当定义的乘积。

利用这些表示，我们证明，代数 W_n、 L_n、 P_n以及由这些代数生成的代数簇中的自由代数都是方程诺特的。

回顾一下，由左对称Witt代数 L_1 生成的代数簇就是所有诺维科夫代数构成的代数簇 [18]。因此，特征零域上的每个自由诺维科夫代数都是方程诺特的。近年来，诺维科夫代数的可解性、幂零性及其恒等式得到了广泛研究 [27, 28, 30, 31]。特别地，特征零域上满足非平凡多项式恒等式的每个诺维科夫代数都是结合右幂零的 [5]。

本文结构如下。第2节给出方程诺特代数的精确定义，阐述文献 [4], 中的一些基本结果，并举出若干方程诺特自由代数的例子。第3节回顾文献 [10, 13, 23] 中关于微分代数的一些众所周知的结果，并举出若干方程诺特微分代数的例子。第4节专门讨论由左对称Witt代数 L_n 和 Witt 代数 W_n 生成的代数簇中的自由代数的表示。我们还证明， W_n、 L_n以及由这些代数生成的代数簇中的自由代数都是方程诺特的。关于辛Poisson代数 P_n 的相同结果将在第5节阐述。

2. On equationally Noetherian algebras

设 $\mathfrak{M}$ 是一个任意的（普遍）代数簇，并设 A 是 $\mathfrak{M}$ 中的一个任意代数。设 $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ 是由 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 自由生成的代数簇 $\mathfrak{M}$ 的自由代数。考虑余积（或自由积）

$$B = A \sqcup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$$

A和 $\mathfrak{M}\langle x_1、 x_2、 .....、 x_m\rangle$属于代数簇 $\mathfrak{M}$。回顾一下（例如，参见[17]），存在同态 α_1： $A \to B$ 和 α_2： $\mathfrak{M}\langle x_1、 x_2、 .....、 x_m\rangle \to B$，满足以下泛性质：对于任意代数 $C \in \mathfrak{M}$，以及任意两个同态ϕ_1： $A \to C$ 和 ϕ_2： $\mathfrak{M} \to C$，存在唯一的同态 ϕ： $B \to C$，使得$\phi \circ \alpha_1 = \phi_1$ 且 $\phi \circ \alpha_2 = \phi_2$。注意，同态 α_1 和 α_2 并不总是单射。本文只考虑同态 α_1 和 α_2 始终为单射的代数簇。于是，我们可以将 A 和 $\mathfrak{M}\langle x_1、 x_2、 .....、 x_m\rangle$与它们在 B 中的像等同。因此，对于任意 m-元组 $(a_1, ..., a_m) \in A^m$

存在唯一的同态 ϕ: $B \to A$，使得 $\phi_A = \mathrm{id}$ 且对所有 i, $\phi(x_i) = a_i$。对于任意 $f = f(x_1, ..., x_m) \in B$，我们令 $f(a_1, ..., a_m) = \phi(f)$。这使我们能够将 B 中的任意元素 $f = f(x_1, ..., x_m)$ 视为一个函数

$$f : A^m \to A.$$

对于 B 的任意子集 S，我们定义所有零点的集合

$$Z(S) = \{(a_1, \ldots, a_m) | f(a_1, \ldots, a_m) = 0, f \in S\}$$

A^m中 S 的集合。集合 $Z(S)$可以用来在 A^m上定义扎里斯基拓扑。若对于所有自然数 m，代数 A的 A^m 关于扎里斯基拓扑都是诺特的，则称该代数为方程诺特代数。

注意，这一定义不依赖于满足 $A \in \mathfrak{M}$的 $\mathfrak{M}$ 的选择。在许多情况下，假设 $\mathfrak{M}$ 是由 A生成的代数簇 $\mathrm{Var}(A)$ 会更有效。有时，选择具有某些特殊性质的 $\mathfrak{M}$ 会更好，例如，对代数余积有明确描述的代数簇。对于某些带单位元的代数簇中的非零代数 A 和 B，可能会出现 $A \sqcup B = 0$ 的情况。

命题 1. [4] 设 A 是方程诺特代数。那么以下代数（具有相同的签名）都是方程诺特的:

(1) A 的每个子代数；(2) A 的每个直积幂；(3) 由 A 生成的代数拟簇 $\mathrm{Qvar}(A)$ 中的每个代数；(4) 由 A 生成的代数簇 $\mathrm{Var}(A)$ 中的每个自由代数。

让我们回顾一些方程诺特的结合交换代数的例子:

(i) 每个域都是方程诺特的。这是希尔伯特基定理的一个推论，也是经典代数几何的基础之一。

(ii) 每个整环都是方程诺特的，这是命题 1(1) 的推论，因为它可以嵌入某个域。

(iii) 根据希尔伯特基定理，每个含幺诺特环也是方程诺特的。

(iv) 设 R 是任意一个含有有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot 1 \subseteq R$ 且带幺元的方程诺特结合交换代数。那么， R 上的每个多项式代数都是方程诺特的。这由命题 1(4) 得出，因为 R 生成了所有 R 上的结合交换代数构成的代数簇。

下一个定理给出了更多关于结合与非结合方程诺特代数的例子。

定理1. 设 R 是任意的结合交换方程诺特含幺环。设 A 是任意一个 R-代数，且它是 R 上的有限生成自由模。那么 A 是一个方程诺特 R-代数。

*Proof.*为简化记号，我们仅对包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 的环 R 证明此定理。

设 $e_1, \ldots, e_m$ 是域 R 上有限维代数 A 的一组基。那么，每个元素$a \in A$ 都可以表示为 $(r_1, \ldots, r_m) \in R^m$，使得

$$a = r_1 e_1 + \ldots + r_m e_m,$$

即,

$$A \equiv R^m$$

and

$$A^n \equiv R^{mn}. \tag{1}$$

设 $R_0 = R[x_i^j : \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$ 是定义在 R 上的多项式代数。考虑代数 $A_0 = R_0 \otimes_R A$。由于 A_0 是自由模的张量积， R_0 和 A 可嵌入 A_0。设 $\mathfrak{M} = \mathsf{Var}(A)$ 为由 A 生成的、定义在 R 上的代数簇。由于 $\mathbb{Q} \subseteq R$，可得 $A_0 \in \mathfrak{M}$。

Set

$$X_i = x_i^1 \otimes e_1 + x_i^2 \otimes e_2 + \ldots + x_i^m \otimes e_m \in A_0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

设 $R\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ 为由 $X_1, \ldots, X_n$ 生成的 R-子代数。众所周知， $R\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ 是代数簇 $\mathfrak{M} = \mathsf{Var}(A)$ 的自由代数，由 $X_1, \ldots, X_n$ 自由生成。

设 C 为由 A 和 $R\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ 生成的 R-子代数。将 A 与 $R\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的余积记为 $D = A \sqcup R\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。考虑同态

$$\omega : D \longrightarrow C$$

R代数，它在 A、 $R\langle X_1$、.....、 $X_n \rangle$ 上相同。

对于任意满足 $\varphi_{|A} = \mathrm{id}$ 的同态 $\varphi : \ D \to A$ ，存在唯一的同态 $\varepsilon : \ C \to A$ ，使得 $\varepsilon_{|A} = \mathrm{id}$ 且 $\varphi = \varepsilon \circ \omega$。事实上，若 $\varphi(X_i) = a_i \in A$，并且

$$a_i = \sum r_i^j \otimes e_j,$$

那么我们可以定义一个同态 $\delta : \ A_0 \to A$，使其在 A 上相同，并且对所有 i、 j，都有 $\delta(x_i^j) = r_i^j$。令 $\varepsilon = \delta_{|C} : \ C \to A$。那么 $\varepsilon(X_i) = a_i$，且 ε 满足所有要求的条件。 ε 的唯一性显而易见。

这意味着，如果 $f = f(X_1, \ldots..., \ X_n) \in \mathsf{Ker}(\omega)$，那么对所有 a_1，.....， $a_n \in A$，都有 $f(a_1, \ldots..., \ a_n) = 0$。因此，在研究 A 上的方程时， ω 的核并非关键。所以，只需研究满足 $s \in C$ 的 A 上形如 $s = 0$ 的方程。

设 S 是 C 中任意一个元素集合。每个元素 $s \in S$ 都可以唯一地写成以下形式

$$s = s_1 \otimes e_1 + \ldots + s_m \otimes e_m.$$

利用识别式 (1)，方程 $s = 0$ 在 A 上等价于方程组$s_1 = \ldots = s_m = 0$ 在 R上。因此，方程组 $s = 0, s \in S$在 A 上的解集等价于方程组 $s_1 = \ldots = s_m = 0, s \in S$ 在 R 上的解集。后者等价于一个有限的方程子集，因为 R 是方程诺特的。因此，集合

方程组 $s = 0, s \in S$在 A 上的解集也等价于一个有限子集，即 A 是方程诺特的。 □

我们阐述定理1的一些重要推论。

推论1. 在方程诺特的结合交换代数上，每个泛矩阵代数都是方程诺特的。

*Proof.*设 R 是一个方程诺特的结合交换环。根据定理1，矩阵代数 $M_n(R)$在 R 上阶为 n ，是方程诺特的。回忆一下，任意阶为 n 的泛矩阵代数 G 都是代数簇 $\mathbf{Var}(M_n(R))$ 的自由代数。因此，根据命题 1， G是方程诺特的。 □

推论2. 由恒等式定义的结合代数簇的每个自由代数

$$[x_1, y_1] \dots [x_n, y_n] = 0$$

在方程诺特的结合交换代数上都是方程诺特的。

*Proof.*众所周知，这个 R 上的结合代数簇由三角矩阵代数 $\mathbf{Tr}_n(R)$ [20] 生成，因为 $\mathbb{Q} \subseteq R$。 □

推论3. 在无限域上的每个自由 $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$-李代数都是方程诺特的。

*Proof.*众所周知，这个李代数簇也由三角矩阵代数 $\mathbf{Tr}_n(R)$ [1]生成。 □

3. Differential polynomial algebras

微分代数的基本概念可见于 [10, 13, 23]。

令 $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ 为一组基本导子算子。

带单位元的交换环 R 称为微分环，或称 Δ-环，如果 Δ 中的所有元素都在 R 上作为一组可交换的导子作用，即，对于所有 i 和所有 i、 j，都定义了导子 $\delta_i : R \to R$。

令 Θ 为由导子算子集合 $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ 生成的自由交换幺半群。其元素

$$\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m}$$

称为该幺半群 Θ 的微分算子。 θ 的阶定义为 $|\theta| = i_1 + \dots + i_m$。

设 R 为一个微分环。记 R^e 为以 Θ 为基的自由左 R-模。每个元素 $u \in R^e$ 都可以唯一地写成如下形式

$$u = \sum_{\theta \in \Theta} r_\theta \theta$$

其中只有有限个 $r_\theta \in R$ 非零。众所周知， [15] 由以下关系定义的 R^e 上存在唯一的环结构:

$$\delta_i r = r\delta_i + \delta_i(r)$$

对所有 i 和 $r \in R$ 均成立。注意，环 R^e 由 R 和 Δ 生成。R^e 上的每个左模都称为 R [15] 上的微分模。因此，我们称 R^e 为 R 的泛包络环。

显然， R 是一个左 R^e-模，并且每个 $I \subseteq R$ 都是 R 的微分理想，当且仅当 I 是 R的一个 R^e-子模。

设 $x^\Theta = \{x^\theta | \theta \in \Theta\}$ 是由 Θ的元素枚举的一组符号。考虑由集合 x^Θ（作为多项式独立变量）生成的、在 R 上的多项式代数 $R[x^\Theta]$ 。容易验证，导子 δ_i 可以通过 $\delta_i(x^\theta) = x^{\delta_i\theta}$唯一地扩张为 $R[x^\Theta]$ 上的一个导子。将这个微分环记为 $R\{x\}$；它称为 x 在 R上的微分多项式环。

通过添加额外的变量，我们可以得到在 R上的、关于 x_1、 x_2、.....、 x_n 的微分多项式微分环 $R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 。设 M 是由所有元素 x_i^θ生成的自由交换幺半群，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 $\theta \in \Theta$。 M 的元素称为 $R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$的微分单项式。每个元素 $a \in R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 都可以唯一地写成如下形式

$$a = \sum_{m \in M} r_m m$$

具有有限个非零 $r_m \in R$。

微分代数中的希尔伯特基定理类似结果称为 Ritt-Raudenbush 基定理 [10]。对于有限生成的微分环，微分理想的极大性条件并不成立。Ritt-Raudenbush 基定理指出，若 R 是一个包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 的根诺特环，则 $R\{x\}$ 也是根诺特的，即每个根闭微分理想都是有限生成的。

方程诺特微分环的例子如下:

(i) 每个特征零的微分域都是方程诺特的。这是 Ritt-Raudenbush 基定理的直接推论，也是微分代数几何 [13,第四章] 的基础内容之一。

(ii) 根据命题 1(1)，每个特征零的微分整环都是方程诺特的，因为它可以嵌入某个微分域。

在本文的其余部分中，我们始终假设 R 是一个任意的含有幺元的结合交换环，其中包含有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}1 \subseteq R$。将 R 视为一个 Δ-环，并令 $\delta_i(R) = 0$ 对所有 i 成立。于是， $R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 成为一个 R-代数。记 $C_m = R[x_1, \ldots, x_m]$ 为在 R 上、以变量 x_1、.....、 x_m 为元的多项式代数，并将其视为一个微分代数，其中导子为 $\delta_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$，对所有 $1 \leq i \leq m$ 均成立。

命题 2. 设 $C = R\{y_1, y_2, ..., y_n, \ldots\}$ 是在 R 上、以变量 y_1、 y_2、.....、 y_n、..... 为元的微分多项式代数。设 f 是 C 的一个非零元。则存在一个同态 $\varphi : C \longrightarrow C_m$，使得 $\varphi(f) \neq 0$，其中 R 为微分代数。

Proof. 假设存在一个非零的 $f \in C$，使得对于任意微分 R-代数之间的同态 $\varphi : C \longrightarrow C_m$，都有 $\varphi(f) = 0$ 。那么， $f = 0$ 是微分代数 C_m的一个非平凡单位元。由于 $\mathbb{Q} \subseteq R$，我们可以将单位元 [32]线性化。将f 线性化后，可以得到一个非零多线性元素 $g \in C$，使得 $g = 0$ 是 C_m 的一个单位元。假设 g包含变量 y_1、.....、 y_n，并且关于这些变量是多线性的。

对于任意 $\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m} \in \Theta$，我们令 $\alpha(\theta) = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$，并且

$$X(\theta) = \frac{1}{i_1! \dots i_m!} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} \in C_m.$$

若 $\theta, \theta_1 \in \Theta$，则我们定义集合 $\theta \leq \theta_1$，如果 $\alpha(\theta) \leq \alpha(\theta_1)$，其中采用 $\mathbb{Z}_+^m$ 中的字典序。注意，对于所有 $\theta, \theta_1 \in \Theta$，若 $\theta < \theta_1$，则 $X(\theta)^\theta = 1$ 且 $X(\theta)^{\theta_1} = 0$。

对于任意多线性微分单项式

$$u = y_1^{\theta_1} y_2^{\theta_2} \dots y_n^{\theta_n}$$

次数为 n 的，令 $\beta(u) = (\alpha(\theta_1) \dots, \alpha(\theta_n)) \in \mathbb{Z}_+^{mn}$。若 u 和 v 是两个多线性单项式，则定义 $u \leq v$，如果 $\beta(u) \leq \beta(v)$，其中采用 $\mathbb{Z}_+^{mn}$ 中的字典序。

多　　线性元素 g，其次数为 n，可以唯一地写成如下形式

$$g = \alpha y_1^{\theta_1} y_2^{\theta_2} \dots y_n^{\theta_n} + \sum \alpha_i m_i,$$

其中 $0 \neq \alpha \in R$ 和 m_i 是一个多线性微分单项式，且对于所有 i，都有 $y_1^{\theta_1} \dots y_n^{\theta_n} < m_i$。

注意到

$$X(\theta_1)^{\theta_1} \dots X(\theta_n)^{\theta_n}) = 1 \text{ and } m_i(X(\theta_1), \dots, X(\theta_n)) = 0$$

对所有 i均成立。因此，

$$g(X(\theta_1), \dots, X(\theta_n)) = \alpha \neq 0,$$

也就是说，$g = 0$ 不是 C_m的单位元。 □

推论 4. R 上的所有微分代数（Δ-代数）构成的簇由$C_m = R[x_1, \dots, x_m]$生成。

*Proof.*根据命题 2，代数 C_m 不满足任何非平凡的微分恒等式。 □

定理 2. 设 A 是一个不含幂零元的微分 R-代数，并且其根闭微分理想满足升链条件。那么 A 是方程诺特的。

Proof. 注意，　$A\{y_1, \dots, y_n\} = A \sqcup R\{y_1, \dots, y_n\}$ 是微分 R-代数簇中 A 与 $R\{y_1, \dots, y_n\}$ 的余积。设 S 是 $A\{y_1, \dots, y_n\}$的任意子集，并且

$$Z(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n | s(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ for all } s \in S\}.$$

令 $I(S)$为 $A\{y_1, \dots, y_n\}$ 中所有满足以下条件的元素 f的集合：对于所有$(a_1, \dots, a_n) \in Z(S)$，均有 $f(a_1, \dots, a_n) = 0$。显然，　$S \subseteq I(S)$，且 $I(S)$是 $A\{y_1, \dots, y_n\}$的一个理想。注意，

$$f(a_1, \dots, a_n)^{\delta_i} = f^{\delta_i}(a_1, \dots, a_n)$$

对于所有 $f \in A\{y_1, \dots, y_n\}$ 以及所有 $a_1, \dots, a_n \in A$，均成立。因此，　$I(S)$是 $A\{y_1, \dots, y_n\}$的一个微分理想。

如果　$f^k \in I(S)$，那么对所有 $(a_1, \dots, a_n) \in Z(S)$，　$f^k(a_1, \dots, a_n) = 0$。代数　R不含幂零元。因此　$f(a_1, \dots, a_n) = 0$且　$f \in I(S)$。于是　$I(S)$ 是　$A\{y_1, \dots, y_n\}$ 的根闭微分理想。

根据 Ritt-Raudenbush 基定理 [10, 13, 23], $A\{y_1,\ldots,y_n\}$ 满足根闭微分理想的升链条件。因此, $I(S)$ 与由有限个元素 $f_1,\ldots,f_k \in A\{y_1,\ldots,y_n\}$ 生成的根闭微分理想重合。因此 $Z(S) = Z(f_1,\ldots,f_k)$。 □

推论 5. 如果 R 是结合交换根诺特整环，那么微分代数 $C_m = R[x_1,\ldots,x_m]$ 是方程诺特的。

*Proof.*注意, R 上的微分结构是平凡的，即, R 是根诺特的微分代数。根据 Ritt-Raudenbuch 基定理 [10, 13, 23], 代数 C_m 是根诺特的微分 R-代数。 □

推论 6. 如果 R 是结合交换根诺特整环，那么每个微分多项式 R-代数都是方程诺特的。

*Proof.*根据命题 1，代数簇 Var(C_m)的每个自由代数都是方程诺特的。 □

4. The left-symmetric Witt algebra L_m and the Witt algebra W_m

左对称代数与李代数的构造。考虑基本导子集为 $\Delta = \{\delta_1,\ldots,\delta_m\}$的微分代数。设 R是任意含幺结合交换环, A 是 R上的任意微分代数。考虑由以下形式的元素构成的空间 B

$$f_1\delta_1 + f_2\delta_2 + \ldots + f_n\delta_m, \quad f_i \in A, 1 \le i \le m,$$

泛包络代数 C^e。在 B 上定义的乘积 $\circ$ 为

$$f\delta_i \circ g\delta_j = f\delta_i(g)\delta_j, \quad f,g \in C, 1 \le i,j \le m,$$

使 B 成为一个左对称代数，即 $\langle B$ 满足恒等式 $\circ\rangle$

$$(x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) = (y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z).$$

如 [16, 29] 中所示，这很容易验证。我们将左对称代数 $\langle B,\circ\rangle$ 记为 $L(A)$，并称其为微分代数 A 的左对称 Witt 代数。

$L(A)$ 的构造是著名的 Gelfand 构造在诺维科夫代数 [7], 上的推广；若 $m=1$，则 $L(A)$ 是一个诺维科夫代数。

回顾一下，左对称代数的簇是李容许的，即任意左对称代数的交换子代数都是李代数。因此，关于括号 B， 是一个李代数。

$$[f\delta_i, g\delta_j] = f\delta_i\circ g\delta_j - g\delta_j\circ f\delta_i.$$

将李代数 $\langle B,[\cdot,\cdot]\rangle$ 记为 $W(A)$，并称其为微分代数 A 的 Witt 代数。若 $m=1$，则括号 $[\cdot,\cdot]$ 称为朗斯基行列式 [22]。

左对称Witt代数 L_m 和Witt代数 W_m。令 $C_m = R[x_1,x_2,\ldots,x_m]$ 为带有导子 $\delta_i = \partial_i$的微分代数，其中所有 $1 \le i \le m$均作用于多项式代数 $R[x_1,x_2,\ldots,x_m]$ 上。于是，左对称代数 $L_m = L(C_m)$称为指标为 m 的左对称Witt代数，而李代数 $W_m = W(C_m)$则是众所周知的指标为 m [16, 29]的Witt代数。

代数簇 Var(L_m) 和 Var(W_m) 的自由代数。令 $C = R\{y_{ij}|1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ 为变量 y_{ij} 上的微分多项式代数，其中 $1 \le i \le n$且 $1 \le j \le m$。我们定义

$$Y_i = y_{i1}\delta_1 + \ldots + y_{im}\delta_m, \quad 1 \le i \le n.$$

记 L_n 为左对称代数 $L(C)$ 中由 $Y_1, \ldots, Y_n$ 生成的子代数，记 W_n 为李代数 $W(C)$ 中由 $Y_1, \ldots, Y_n$ 生成的子代数。

下面证明，L_n 是代数簇 Var(L_m) 的自由代数，由 $Y_1, \ldots, Y_n$ 自由生成；W_n 是代数簇 Var(W_m) 的自由代数，由 $Y_1, \ldots, Y_n$ 自由生成。

“余积”。设 $\widetilde{C} = C_m\{y_{ij}|1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ 是以变量 y_{ij} 为元、底层微分代数为 C_m 的微分多项式代数，其中 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le m$。显然，

$$\widetilde{C} = C_m \otimes_R C$$

是微分代数 C_m 和 $C = R\{y_{ij}|1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ 的张量积。此外，这些代数可与它们在 C 中的像等同，因为它们是自由的 R-模。于是，左对称代数 $L(C)$ 包含 L_m 和 L_n，而李代数 $W(C)$ 包含 W_m 和 W_n。

将由 L_m 和 L_n 生成的左对称代数 $L(C)$的子代数记为 L_n，将由 W_m 和 W_n生成的李代数 $W(C)$的子代数记为 W_n。

命题 3. (a) 对任意 $F_1, \ldots, F_n \in L(C)$，存在唯一的左对称代数同态 $\phi: L_n \to L(C)$，使得 $\phi_{|L_m} = \mathrm{id}$ 且对所有$1 \le i \le n$，$\phi(Y_i) = F_i$。

(b) 对任意 $F_1, \ldots, F_n \in W(C)$，存在唯一的李代数同态 $\phi: W_n \to W(C)$，使得 $\phi_{|W_m} = \mathrm{id}$ 且对所有 $1 \le i \le n$，$\phi(Y_i) = F_i$。

Proof. 考虑

$$F_i = f_{i1}\delta_1 + \ldots + f_{im}\delta_m, \quad f_{ij} \in \widetilde{C}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

显然，存在唯一的微分 R-代数C 的自同态 $\psi: C \longrightarrow C$，使得 $\psi_{|C_m} = \mathrm{id}$ 且对所有 i, j，$\psi(y_{ij}) = f_{ij}$。该自同态可唯一地扩张为包络代数 C^e的自同态。我们用同一符号 ψ 表示此扩张，即 $\psi: C^e \to C^e$ 是结合代数C^e的自同态，满足对所有 $c \in C_m$，$\psi(c) = c$；对所有 y_{ij}，$\psi(y_{ij}) = f_{ij}$；以及对所有 i，$\psi(\delta_j) = \delta_j$。显然，$\psi(L(C)) \subseteq L(C)$ 且

$$\psi_{|\widetilde{L}_n}: \widetilde{L}_n \to L(\widetilde{C})$$

是左对称代数的一个同态。我们设

$$\phi = \psi_{|\widetilde{L}_n}: \widetilde{L}_n \to L(\widetilde{C}).$$

则对所有 i和 $\phi_{|L_m} = \mathrm{id}$，都有 $\phi(Y_i) = F_i$。由于 L_n 由 L_m 以及 Y_1、.....、Y_n生成，因此这样的同态是唯一的。

重复 运用相同的论证，我们可以证明定理的结论（b）。 □

定理 3.（a）左对称代数 $\mathbf{L}_n$ 是代数簇 Var(L_m) 的自由代数，其自由生成元为 $Y_1, \ldots, Y_n$。

(b) 李代数 $\mathbf{W}_n$ 是由 $Y_1, \ldots, Y_n$自由生成的代数簇 Var(W_m) 中的自由代数。

*Proof.*令 M 为由$z_1, \ldots, z_n$自由生成的代数簇 Var(L_m) 中的自由代数。众所周知，M同构于 $L_m[3, 19]$的某个直积幂的子代数。

令 I 为任意指标集， L_m^I 为 L_m的直 I幂，并假设M同构于 L_m^I的一个子代数。令 $F_1, \ldots, F_n$为 L_m^I中的任意一组元素。假设 $F_i = (f_{ij})_{j \in I}$。根据命题 3，对于每个 $j \in I$，存在一个同态$\sim\psi_j : L_n \to L_m$，使得对所有 i， $\phi_j(Y_i) = f_{ij}$。对于 $\phi_j = \phi_{j|\mathbf{L}_n}$，我们有

$$\phi : \mathbf{L}_n \to L_m^I,$$

由 $\phi(a) = (\phi_j(a))_{j \in I}$ 对所有 $a \in \mathbf{L}_n$ 定义的映射，是左对称代数的一个同态，且对所有 i， $\phi(Y_i) = F_i$。

由此可知，存在一个同态

$$\tau : \mathbf{L}_n \to M,$$

使得对所有 $1 \leq i \leq n$， $\tau(Y_i) = z_i$。

如果 τ 不是同构，则存在一个非零元素 $F = F(Y_1, \ldots, Y_n)$，使得对所有同态 $\phi : \mathbf{L}_n \to L_m$，$\phi(F) = 0$。考虑

$$F = f_1\delta_1 + \ldots + f_m\delta_m, f_i \in C.$$

假设 $f_i \neq 0$。根据命题 2，存在一个同态 $\psi : C \to C_m$，使得 $\psi(f_i) \neq 0$。如上所述，我们可以将此同态扩展为 $\psi : C^e \to C_m^e$。如果$\phi = \psi_{|L} : L \to L_m$，那么

$$\phi(F) = \psi(f_1)\delta_1 + \ldots + \psi(f_i)\delta_i + \ldots + \psi(f_m)\delta_m \neq 0$$

因为 $\psi(f_i) \neq 0$。这一矛盾证明 τ 的核为 0，即 τ 是一个同构。

这就证明了定理的命题（a）。命题（b）可以类似地证明。□

定理 4. 设 R 是包含有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}1 \subseteq R$ 的任意根诺特整环。那么

（a）域 R 上的左对称Witt代数 L_m 是方程诺特的；（b）域 R 上的Witt代数 W_m 是方程诺特的。

*Proof.*根据命题 3，对于任意自然数 $n \geq 0$ 以及任意元素系 $\sim F_1, \ldots, F_n \in L(C)$，存在一个左对称代数的同态 $\phi : \mathbf{L}_n \to L(C)$，使得对所有 $1 \leq i \leq n$， $\phi(Y_i) = F_i$。因此， $L(C)$属于代数簇 Var(L_m)。

设 $L_m \sqcup \mathbf{L}_n$ 是代数簇 Var(L_m) 中 L_m 与 $\mathbf{L}_n$ 的余积。由于 $\widetilde{L}_n$ 是由 L_m 和 $\mathbf{L}_n$生成的 $L(C)$的子代数，存在唯一的同态

$$\phi : L_m \sqcup \mathbf{L}_n \to \widetilde{L}_n$$

使得 $\phi_{|L_m} = \mathrm{id}$ 和 $\phi_{|\mathbf{L}_n} = \mathrm{id}$。

令 S 为 $L_m \sqcup \mathbf{L}_n$ 的任意子集，并且

$$Z(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in L_m^n | s(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ for all } s \in S\}.$$

回顾一下，$s(a_1, \ldots, a_n)$ 是 s 在同态 $L_m \sqcup \mathbf{L}_n \to L_m$ 下的像；该同态在 L_m 上为恒等映射，并对所有 i，将每个 Y_i 映为 a_i。由命题 3，$s(a_1, \ldots, a_n) = 0$ 当且仅当 $\phi(s)(a_1, \ldots, a_n) = 0$。因此

$$Z(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in L_m^n | \phi(s)(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ for all } s \in S\}.$$

假设

$$\phi(s) = s_1\delta_1 + \ldots + s_m\delta_m,\ s_1, \ldots, s_m \in \widetilde{C},$$

and

$$a_i = a_{i1}\delta_1 + \ldots + a_{im}\delta_m,\ a_{i1}, \ldots, a_{im} \in C_m,\ 1 \leq i \leq n.$$

Then

$$\phi(s)(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{m} s_k(a_{ij})\delta_k.$$

令 $I(S)$ 为 C 中所有满足以下条件的元素 f 构成的集合：对于所有 $(a_1, \ldots, a_n) \in Z(S)$，均有 $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$。显然，对于所有 $s \in S$ 和 $1 \leq i \leq m$，都有 $s_i \in I(S)$。此外，$I(S)$ 是 C 的一个理想。我们有

$$f(a_{ij})^{\delta_k} = f^{\delta_k}(a_{ij})$$

对于所有 $f \in C$ 以及所有 $a_{ij} \in C_m$ 均成立。因此，$I(S)$ 是 C 的一个微分理想。

若 $f^k \in I(S)$，则对于所有 $(a_1, \ldots, a_n) \in Z(S)$，都有 $f^k(a_{ij}) = 0$。由于 R 是整环，代数 $C_m = R[x_1, \ldots, x_m]$ 和 $C = C_m\{y_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 不含幂零元。因此 $f(a_{ij}) = 0$ 且 $f \in I(S)$。于是 $I(S)$ 是 C 的根闭微分理想。

根据 Ritt-Raudenbush 基定理，因此存在 C_m 的有限子集 T，使得由所有 t_i、$1 \leq i \leq m$、$t \in T$ 生成的 C 的根闭微分理想与 $I(S)$ 一致。这意味着 $Z(S) = Z(T)$。

这证明了 定理的陈述（a）。陈述（b）也可以类似地证明 . □

推论 7. 设 R 是一个包含有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}1 \subseteq R$ 的任意根诺特整环。那么

（a）$\mathsf{Var}(L_m)$ 的簇中，R 上的每个自由代数都是方程诺特的；（b）$\mathsf{Var}(W_m)$ 的簇中，R 上的每个自由代数都是方程诺特的。

Proof. 这是命题 1 和定理 4 的直接推论。 □

5. Symplectic Poisson algebra P_m

泊松代数的构造。考虑导子基本集合为 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_{2m}\}$ 且包含 $2m$ 个元素的微分代数。令 R 为任意含幺结合交换环，并令 A 为 R 上的任意微分代数。对于任意 f， $g \in A$，我们定义

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{m} (\delta_{2i-1}(f)\delta_{2i}(g) - \delta_{2i}(f)\delta_{2i-1}(g)).$$

容易证明， R-模 A 关于乘积 $\cdot$ 和括号 $\{\cdot, \cdot\}$ 构成一个泊松代数 [14], ，也就是说，

(a) $\langle A, \cdot\rangle$ 是一个结合交换代数；(b) $\langle A, \{\cdot, \cdot\}\rangle$ 是一个李代数；并且 (c) $\langle A, \cdot, \{\cdot, \cdot\}\rangle$ 满足（Leibniz）恒等式：

$$\{xy, z\} = x\{y, z\} + \{x, y\}y.$$

将泊松代数 $\langle A, \cdot, \{\cdot, \cdot\}\rangle$ 记作 $P(A)$。

辛泊松代数 P_m。设 $C_{2m} = R[x_1, \ldots, x_{2m}]$ 为微分代数，其导子为 $\delta_i = \partial_i$，其中所有 $1 \le i \le 2m$ 均定义在多项式代数 $R[x_1, \ldots, x_{2m}]$ 上。记作 $P_m = P(C_{2m})$。泊松代数 P_m 称为 R 上的指标为 m 的辛泊松代数。若 $f, g \in P_m$，则

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i-1}}\frac{\partial g}{\partial x_{2i}} - \frac{\partial f}{\partial x_{2i}}\frac{\partial g}{\partial x_{2i-1}}\right).$$

簇 $\mathrm{Var}(P_m)$ 的自由代数。令 $C = R\{y_1, \ldots, y_n\}$ 为以变量 $y_1, \ldots, y_n$ 为元、定义在 R 上的微分多项式代数。记 P_n 为泊松代数 $P(C)$ 中由 $y_1, \ldots, y_n$ 生成的子代数。

下面我们证明，P_n 是代数簇 $\mathrm{Var}(P_m)$ 的自由代数，它由 $y_1, \ldots, y_n$ 自由生成。

“余积”。令 $\widetilde{C} = C_{2m}\{y_1, \ldots, y_n\}$ 为以变量 $y_1, \ldots, y_n$ 为元、定义在微分代数 C_{2m} 上的微分多项式代数。显然，

$$\widetilde{C} = C_{2m} \otimes_R C$$

是微分代数 C_{2m} 和 $C = R\{y_1, \ldots, y_n\}$ 的张量积。此外，由于这些代数是自由 R-模，因此可以将它们与其在 C 中的像等同起来。于是，泊松代数 $P(C)$ 包含 P_m 和 P_n。

记 $\widetilde{P}_n$ 由 P_m 和 P_n 生成的泊松代数 $P(C)$ 的子代数。

命题 4. 对任意 $F_1, \ldots, F_n \in P(C)$，存在唯一的泊松代数同态 $\phi : \widetilde{P}_n \to P(C)$，使得 $\phi_{|P_m} = \mathrm{id}$，且对所有 $1 \le i \le n$，$\phi(y_i) = F_i$。

本命题的证明重复了命题 3 的证明。以下两个定理的证明分别类似于定理 3 和定理 4 的证明。

定理 5。泊松代数 P_n 是代数簇 $\mathrm{Var}(P_m)$ 的自由代数，由 $y_1, \ldots, y_n$ 自由生成。

定理 6。设 R 是一个包含有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}1 \subseteq R$ 的任意根诺特整环。那么， R 上的泊松代数 P_m 是方程诺特的。

推论 8. 设 R 是一个包含有理数域 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}1 \subseteq R$ 的任意根诺特整环。那么，Var(P_m) 这一代数簇上的每个 R 自由代数都是方程诺特的。

利用命题 3、定理 3 以及关于由代数 [3, 19], 生成的$\widetilde{\ }$代数簇结构的一般结果，可以证明，在代数簇 Var(L_m) 中， L_n 是 L_m 与 L$_n$ 的余积$\widetilde{\ }$，而 W_n 是 W_m 与 W$_n$$\widetilde{\ }$ 的余积，二者均属于代数簇 Var(W_m)。类似地，可以证明，在代数簇 Var(P_m) 中， P_n 是 P_m 与 P$_n$ 的余积。

致谢

第一作者得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号 22-11-00052。
第二作者获 pp得资助y 纳扎尔巴y耶夫大学 y FDCRG (资助编号 021220FD3851).
第三位作者获得哈萨克斯坦共和国教育与科学部（项目 AP14872073）的资助。

References

[1] Yu. Bahturin，《李代数中的恒等关系》，第二版。De Gruyter 数学论丛，68。De Gruyter，柏林，2021，xxv+514页。[2] G. Baumslag、A. Myasnikov、V. Remeslennikov，《群上的代数几何 I：代数集与理想理论》，《代数杂志》 219 （ 1999 ），16–79。[3] P.M. Cohn，《泛代数》，第二版。数学及其应用，6。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特—马萨诸塞州波士顿，1981。xv+412 页。[4] E.Yu. Daniyarova、A.G. Myasnikov、V.N. Remeslennikov，《代数系统上的代数几何 II：基础》。（俄文）《基础与应用数学》17（2011/12），第1期，65–106；译文见《数学科学杂志》（纽约）185（2012），第3期，389–416。[5] V. Dotsenko、N. Ismailov、U. Umirbaev，《诺维科夫代数中的多项式恒等式》，《数学札记》，（已投稿）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.13662[6] D. Eisenbud，《交换代数：着眼于代数几何》，数学研究生教材，150。施普林格出版社，纽约，1995。xvi+785 页。[7] I.M. Gel'fand、I.Ya. Dorfman，《哈密顿算子及与之相关的代数结构》。（俄文）《泛函分析及其应用》13（1979），第4期，-30；译文见《泛函分析》13（1979），248–262。[8] V.S. Guba，《自由群和半群中的无限方程组等价于有限子系统》。（俄文）《数学札记》40（1986），第3期，321–324；译文见《数学札记》40（1986），第3期，688–690。[9] Ch.K. Gupta、N.S. Romanovskii，《某些可解群的方程诺特性》。（俄文）《代数与逻辑》46（2007），第1期，46–59；译文见《代数与逻辑》46（2007），第1期，28–36。[10] I. Kaplansky，《微分代数导论》，第二版。科学与工业丛书，No. 1251。南卡冈大学数学研究所出版物，No. V。Hermann，巴黎，1976。64页。[11] O. Kharlampovich、A. Myasnikov，《自由群上的代数几何：将解提升到一般点》，《群、语言与算法》，213–318，《当代数学》，378，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005。

[12] O. Kharlampovich、A. Myasnikov，《自由非阿贝尔群的初等理论》，《代数杂志》302（2006），第2期，451–552。[13] E.R. Kolchin，《微分代数与代数群》，纯粹与应用数学，第54卷。学术出版社，纽约—伦敦，1973。[14] P.S. Kolesnikov、L.G. Makar-Limanov、I.P. Shestakov，《泛泊松代数的自由定理》。（英文摘要）SIGMA《对称性、可积性、几何方法及其应用》10（2014），论文115，15页。[15] M.V. Kondratieva、A.B. Levin、A.V. Mikhalev、E.V. Pankratiev，《微分与差分维数多项式》，数学及其应用，461。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1999。[16] D. Kozybaev、U. Umirbaev，《左对称 Witt 代数的恒等式》，《国际代数与计算杂志》26（2016），第2期，435–450。[17] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第二版。数学研究生教材，5。施普林格出版社，纽约，1998。xii+314 页。[18] L. Makar-Limanov、U. Umirbaev，《诺维科夫代数的自由定理》，TWMS《纯粹与应用数学杂志》2（2011），第2期，228–235。[19] A.I. Mal'cev，《代数系统》，身后出版版，D. Smirnov 与 M. Taiclin 编。B. D. Seckler 与 A. P. Doohovskoy 从俄文译出。数学科学基础丛书，第192卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1973。xii+317 页。[20] Yu. Maltsev，《上三角矩阵代数恒等式的一组基》。（俄文）《代数与逻辑》10（1971），第4期，393–400；译文见《代数与逻辑》10（1971），第4期，242–247。[21] B. Plotkin，《代数簇与代数几何》，《以色列数学杂志》96（1996），B部分，511–522。[22] L. Poinsot，《（微分）李代数嵌入其朗斯基包络的嵌入问题的解》，《代数通讯》46（2018），第4期，1641–1667。[23]J.F. Ritt，《微分代数》，美国数学会讨论会出版物，第XXXIII卷，美国数学会，纽约，1950。[24] N.S. Romanovskii、I.P. Shestakov，《阿贝尔李代数花环积的泛包络代数的方程诺特性》。（俄文）《代数与逻辑》47（2008），第4期，475–490，525；译文见《代数与逻辑》47（2008），第4期，269–278。[25] Z. Sela，《群上的丢番图几何 VI：自由群的初等理论》，《几何与泛函分析》16（2006），第3期，707–730。[26] Z. Sela，《群上的丢番图几何 VII：双曲群的初等理论》，《伦敦数学会会刊》（3）99（2009），第1期，217–273。[27] I. Shestakov 与 Z. Zhang，《诺维科夫代数的可解性与幂零性》，《代数通讯》48（2020），第12期，5412–5420。[28] K. Tulenbaev、U. Umirbaev、V. Zhelyabin，《论诺维科夫代数的李可解性》，《代数与应用杂志》（已接受），https://doi.org/10.1142/S0219498823501177[29] U.U. Umirbaev，《导子的结合代数、李代数与左对称代数》，《变换群》21（2016），第3期，851–869。[30] U. Umirbaev、V. Zhelyabin，《论分次诺维科夫代数的可解性》，《国际代数与计算杂志》31（2021），第7期，1405–1418。[31] V. Zhelyabin、U. Umirbaev，《论 $\mathbb{Z}_3$分次诺维科夫代数的可解性》，《对称性》312(2)（2021），13。[32] K.A. Zhevlakov、A.M. Slinko、I.P. Shestakov、A.I. Shirshov，《近似结合的环》。学术出版社公司。 [Harcourt Brace Jovanovich 出版社], 纽约—伦敦，1982。