arXiv:2301.06728v2 [math.CA] 9 Apr 2023

格点上的一些 Appell型正交多项式

D. MBOUNA 和 A. SUZUKI

Abstract. 我们研究了定义在 q-二次格点上的一些 Appell 型正交多项式序列，并给出了 Al-Salam-Chihara 多项式（包括 Rogers q-Hermite 多项式）的一些全新刻画。相应的正则形式也得到了充分描述。所提出的方法还可应用于涉及 Askey-Wilson 算子和平均算子的类似问题及更一般的问题，从而获得关于格点上的经典正交多项式和半经典正交多项式的新刻画定理。

1. Introduction

经典正交多项式序列（OPS）无疑是研究最为广泛的一类。该类正交多项式序列具有许多优美的性质和刻画，并且在其他相关领域（数论、概率论、数学物理、逼近论以及许多其他数学分支）中有着广泛应用。例如，它们的导数也构成正交多项式序列。这一族中的一个特殊情形是正交多项式序列与其导数重合的情形：在文献中，这被称为 Appell 正交多项式序列。这一概念由 P. Appell 于1880年在一篇著作中提出 [5]。问题在于寻找多项式序列 $(f_n)_{n\geq 0}$，使其满足下列方程

$$\mathrm{D}f_n(x) = r_n f_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, \ldots)\,, \tag{1.1}$$

其中 $(r_n)_{n\geq 0}$ 是一个非零复数序列，D 是降阶算子（即将任意多项式序列的次数降低一阶的算子）。从那时起，所有具有性质 (1.1) 的多项式序列都称为 Appell序列（见 [3, 18]）。本文将仅关注 Appell 正交多项式序列。

我们回顾一下，若 $\mathrm{D} = d/dx$ 出现在 (1.1) 中，则相应的正交多项式序列就是 Hermite 多项式（见 [2]）。若将 D 替换为 q-Jackson 算子 D_q（分别为 Hahn 算子 $D_{q,\,\omega}$），其定义如下：

$$D_{q,\omega} f(x) = \frac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}, \quad 0 < q < 1,\ \omega \in \mathbb{C}\,,$$

其中 $D_q = D_{q,\,0}$，此时，相应的 Appell 正交多项式序列在变量经过仿射变换后，即为 Al-Salam-Carlitz 多项式（见 [4, 12]）。文献 [6] 研究了式 (1.1) 中

$$\mathrm{D} = 2\frac{d}{dx}\, x\, \frac{d}{dx} + \epsilon \frac{d}{dx}, \quad \epsilon = \pm 1\,,$$

Date: 2023年4月11日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 42C05，33C45。
Key words and phrases. Al-Salam-Chihara 多项式，格，Appell 正交多项式。

从而给出了拉盖尔多项式的一种新刻画。在过去十年及此后，这类正交多项式序列受到了广泛关注。现在考虑 Askey-Wilson 算子， $\mathcal{D}_q$，其定义为

$$\mathcal{D}_q\, p(x(s)) = \frac{p(x(s+1/2)) - p(x(s-1/2))}{x(s+1/2) - x(s-1/2)}, \quad x(s) = \tfrac{1}{2}(q^s + q^{-s})\,,$$

对于每个多项式 p。我们假设 $0 < q < 1$。（取 $q^s = e^{i\theta}$，我们便可得到 $\mathcal{D}_q$，其定义见 [16, (21.6.2)]。）我们将平均算子定义为

$$\mathcal{S}_q\, p(x(s)) = \frac{1}{2}\Big(p(x(s+1/2)) + p(x(s-1/2))\Big), \quad x(s) = \tfrac{1}{2}(q^s + q^{-s})\,.$$

当 $\mathsf{D} = \mathcal{D}_q$ 时，寻找方程 (1.1) 的正交多项式序列解这一问题，是 M. Ismail 在 [16, 猜想 24.7.8] 中提出的问题的一个特例。W. Al-Salam 首先在 [1] 中解决了这一情形，随后 J. Galiffa 和 W. Ong 在 [11] 中采用不同的方法解决了这一问题，并证明 Rogers q-Hermite 多项式是唯一的解。尽管如此，这两项研究所用的方法都无法用于解决完整形式的猜想 [16, 猜想 24.7.8]。这完全是因为 Askey-Wilson 算子及其性质过于复杂。最近，作者在 [9], 中运用一些新技巧，解决了这一完整形式的猜想。此外，方程 (1.1) 还存在算子 $\mathcal{D}_q$ 和 $\mathcal{S}_q$ 同时参与的情形，如下式所示

$$\mathcal{D}_q f_n(x) = r_n \mathcal{S}_q f_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, \ldots)\,,$$

在 [7] 中被用于刻画 Askey-Wilson 多项式的某些特殊情形。本文旨在求解算子 $\mathsf{D} = \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q$ 和 $\mathsf{D} = \mathcal{D}_q\mathcal{S}_q$对应的方程 (1.1)。由此得到对 Al-Salam-Chihara 多项式的一种新刻画。此外，我们还刻画了相应的正则形式。这为处理涉及平均算子和 Askey-Wilson 算子的问题提供了一些关于多项式基选取的思路。该方法提出了一种描述和研究半经典正交多项式序列的途径：推导出其三项递推关系的系数所满足的差分方程或微分方程，因为由此可以获得这些系数的某些渐近行为和/或完整表达式。 [10, 13, 14] 中也介绍了这一方法及相关参考文献，作者使用 Painlev´e 方程研究半经典正交多项式序列的三项递推关系系数所满足的微分方程（或差分方程）。

本文的结构如下。第 2 节介绍正交多项式序列的代数理论的一些基本事实以及若干有用结果。第 3 节和第 4 节分别给出我们针对这两种情形的主要结果。

2. Background and preliminary results

我们的方法基于 P. Maroni 提出的正交多项式代数理论（见 [17]）。设 $\mathcal{P}$ 为所有复系数多项式构成的向量空间， $\mathcal{P}^*$ 为其代数对偶。给定一个多项式简单集 $(R_n)_{n\geq 0}$ （即每个 $R_n \in \mathcal{P}$，且对每个 n =0, 1, . . ., deg $R_n = n$ ），相应的对偶基是一列线性泛函 $\mathbf{e}_n\colon \mathcal{P} \to \mathbb{C}$，满足

$$\langle \mathbf{e}_n, R_j \rangle := \delta_{n,j} \quad (n, j = 0, 1, \ldots)\,,$$

其中 $\delta_{n,\ j}$ 表示克罗内克符号。特别地，若（R_n）$_{n\geq 0}$ 是关于 $\mathbf{w}\ \in\ \mathcal{P}'$的首一正交多项式系，则存在一列非零复数（$k_n$）$_{n\geq 0}$，使得正交条件

$$\langle \mathbf{w}, R_j R_n\rangle := k_n \delta_{j,n} \quad (j,n=0,1,\ldots)$$

若成立，则相应的对偶基可明确表示为

$$\mathbf{e}_n = \left\langle \mathbf{u}, R_n^2\right\rangle^{-1} R_n \mathbf{w}. \tag{2.1}$$

泛函 w 与多项式 f 的左乘法定义为

$$\langle f\mathbf{w}, p\rangle = \langle \mathbf{w}, fp\rangle \quad (p\in\mathcal{P}).$$

任意泛函 $\mathbf{w}\ \in \mathcal{P}^*$（当 $\mathcal{P}$ 赋予适当的严格归纳极限拓扑时，参见 [17]）都可以在 $\mathcal{P}^*$ 中按弱拓扑的意义写成

$$\mathbf{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{w}, R_n\rangle\, \mathbf{e}_n.$$

已知首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$由以下三项递推关系（TTRR）刻画:

$$R_{-1}(z)=0, \quad R_{n+1}(z) = (z-B_n)R_n(z) - C_n R_{n-1}(z) \quad (C_n\neq 0), \tag{2.2}$$

因此,

$$B_n = \frac{\left\langle \mathbf{w}, zR_n^2\right\rangle}{\left\langle \mathbf{w}, R_n^2\right\rangle}, \quad C_{n+1} = \frac{\left\langle \mathbf{w}, R_{n+1}^2\right\rangle}{\left\langle \mathbf{w}, R_n^2\right\rangle}. \tag{2.3}$$

Askey-Wilson 算子和平均算子在 $\mathcal{P}^*$ 上诱导出两个元素，分别记为 $\mathbf{D}_q$ 和 $\mathbf{S}_q$，定义如下（见 [15]）：

$$\langle \mathbf{D}_q\mathbf{w}, f\rangle = -\langle \mathbf{w}, \mathcal{D}_q f\rangle, \quad \langle \mathbf{S}_q\mathbf{w}, f\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathcal{S}_q f\rangle.$$

此后，我们将 $z = x(s)$ 记作 $=(q^s+q^{-s})/2$。于是有以下命题。

命题 2.1. [8] 设 f、$g\in\mathcal{P}$ 和 $\mathbf{w}\ \in\mathcal{P}^*$。则以下等式成立。

$$\mathcal{D}_q\big(fg\big) = \big(\mathcal{D}_q f\big)\big(\mathcal{S}_q g\big) + \big(\mathcal{S}_q f\big)\big(\mathcal{D}_q g\big), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{S}_q\big(fg\big) = \big(\mathcal{D}_q f\big)\big(\mathcal{D}_q g\big)U_2 + \big(\mathcal{S}_q f\big)\big(\mathcal{S}_q g\big), \tag{2.5}$$

$$\alpha\mathcal{S}_q^2 f = \mathcal{S}_q\big(U_1\mathcal{D}_q f\big) + U_2\mathcal{D}_q^2 f + \alpha f, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{D}_q^n\mathcal{S}_q f = \alpha_n \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q^n f + \gamma_n U_1\mathcal{D}_q^{n+1} f, \tag{2.7}$$

$$f\mathbf{D}_q\mathbf{w} = \mathbf{D}_q\left(\mathcal{S}_q f\ \mathbf{w}\right) - \mathbf{S}_q\left(\mathcal{D}_q f\ \mathbf{w}\right), \tag{2.8}$$

$$\alpha\mathbf{D}_q^n\mathbf{S}_q\mathbf{w} = \alpha_{n+1}\mathbf{S}_q\mathbf{D}_q^n\mathbf{w} + \gamma_n U_1\mathbf{D}_q^{n+1}\mathbf{w}, \tag{2.9}$$

其中 $n=0$、1、.....，且 $\alpha=(q^{1/2}+q^{-1/2})/2$ and

$$U_1(z) = (\alpha^2-1)z,\ U_2(z) = (\alpha^2-1)(z^2-1)\ .$$

众所周知（参见 [8, 命题 2.1]），

$$\mathcal{D}_q z^n = \gamma_n z^{n-1} + u_n z^{n-3} + \cdots , \quad \mathcal{S}_q z^n = \alpha_n z^n + \widehat{u}_n z^{n-2} + \cdots , \tag{2.10}$$

其中 $n = 0, 1, \ldots$, 其中

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2}(q^{n/2} + q^{-n/2}) , \quad \gamma_n = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} ,$$
$$u_n = \tfrac{1}{4}\big(n\gamma_{n-2} - (n-2)\gamma_n\big) , \quad \widehat{u}_n = \tfrac{n}{4}(\alpha_{n-2} - \alpha_n) .$$

令 $\gamma_{-1} := -1$ 和 $\alpha_{-1} := \alpha_0$。回顾一下，首一 Al-Salam-Chihara 多项式 $Q_n(x; a, b|q)$依赖于两个实参数 a和 b，其特征由下式刻画：

$$\begin{aligned} xQ_n(x; a, b|q) &= Q_{n+1}(x; a, b|q) + \tfrac{1}{2}(a+b)q^n\, Q_n(x; a, b|q) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(1 - abq^{n-1})(1 - q^n)\, Q_{n-1}(x; a, b; q) \end{aligned}$$

$(n = 0, 1, \ldots)$，前提是我们定义 $Q_{-1}(x;\, a, b|q) = 0$ (参见例如 [16])。此外，经过归一化后，Rogers $q-$Hermite 多项式是 Al-Salam-Chihara 多项式的特例 $a = b = 0$。下面的结果很有用。

定理 2.1。 [8, 定理 4.1] 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于 $\mathbf{w} \in \mathcal{P}^*$的首一正交多项式系。假设 $\mathbf{u}$ 满足分布方程

$$\mathbf{D}_q(\phi\mathbf{w}) = \mathbf{S}_q(\psi\mathbf{w}) , \tag{2.11}$$

其中 $\phi(z) = az^2 + bz + c$ 和 $\psi(z) = dz + e$，且 $d \neq 0$。那么 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足 (2.2)，其中

$$B_n = \frac{\gamma_n e_{n-1}}{d_{2n-2}} - \frac{\gamma_{n+1} e_n}{d_{2n}}, \quad C_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1} d_{n-1}}{d_{2n-1} d_{2n+1}} \phi^{[n]}\left(-\frac{e_n}{d_{2n}}\right), \tag{2.12}$$

其中 $d_n = a\gamma_n + d\alpha_n$、 $e_n = b\gamma_n + e\alpha_n$，以及

$$\phi^{[n]}(z) = \big(d(\alpha^2 - 1)\gamma_{2n} + a\alpha_{2n}\big)\big(z^2 - 1/2\big) + \big(b\alpha_n + e(\alpha^2 - 1)\gamma_n\big)z + c + a/2 .$$

3. Main results: first case

现在我们可以证明其中一种情形下的主要结果。

引理 3.1. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是一个首一正交多项式系，使得

$$\mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) = k_n P_{n-1}(z) \qquad (n = 0, 1, \ldots) . \tag{3.1}$$

则以下关系成立：

(3.2)

$$2\alpha U_2(z)\mathcal{D}_q^2 P_n(z) = a_n P_n(z) + b_n P_{n-1}(z) + c_n P_{n-2}(z) ,$$

(3.3)

$$4\alpha U_2(z)\mathcal{D}_q\mathcal{S}_q P_n(z) = \sum_{l=1}^{5} a_n^{[l]} P_{n+2-l}(z) ,$$

(3.4)

$$2\mathcal{S}_q^2 P_n(z) = 2\alpha_n^2 P_n(z) + k_n(B_n - B_{n-1})P_{n-1}(z) + (k_{n-1}C_n - k_n C_{n-1})P_{n-2}(z) ,$$

对于每个 $n=0$, 1, ..., 其中

$$a_n = k_{n+1} - (2\alpha^2-1)k_n - 1\ ,\ b_n = \big(B_n - (2\alpha^2-1)B_{n-1}\big)k_n\ ,$$
$$c_n = k_{n-1}C_n - (2\alpha^2-1)k_nC_{n-1},\ a_n^{[1]} = a_{n+1} - a_n\ ,\quad a_n^{[2]} = b_{n+1} - b_n\ ,$$
$$a_n^{[3]} = c_{n+1} - c_n + (B_n - B_{n-1})b_n + (a_{n-1} - \alpha^2 a_n)C_n\ ,$$
$$a_n^{[4]} = (B_n - B_{n-2})c_n + b_{n-1}C_n - b_nC_{n-1},\ a_n^{[5]} = c_{n-1}C_n - c_nC_{n-2}\ .$$

证明。首先，由 (2.6) 并利用 (2.5) 可得

$$\mathcal{S}_q^2 f = \alpha \mathtt{U}_2 \mathcal{D}_q^2 f + \mathtt{U}_1 \mathcal{S}_q \mathcal{D}_q f + f\ . \tag{3.5}$$

其次，我们依次将算子 $\mathcal{D}_q$ 和 $\mathcal{S}_q$ 作用于首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$ 的解 (3.1) 所满足的三项递推关系 (2.2)。利用 (2.4) 和 (2.5)，可得下列方程。

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_q^2 P_n(z) + \alpha \mathtt{U}_2(z)\mathcal{D}_q^2 P_n(z) + \alpha^2 z \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z)\\ &\qquad = \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_{n+1}(z) + B_n \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) + C_n \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_{n-1}(z)\ .\end{aligned} \tag{3.6}$$

最后，依次利用 (3.5)、三项递推关系 (2.2) 和 (3.1)，可由 (3.6) 得到 (3.2)。现在，根据 (3.5)，我们也可以将 (3.6) 写成

$$\begin{aligned}&2\mathcal{S}_q^2 P_n(z) + z\ \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) - P_n(z)\\ &\qquad = \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_{n+1}(z) + B_n \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) + C_n \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_{n-1}(z)\ .\end{aligned}$$

利用 (2.2) 和 (3.1)，可由此方程得到方程 (3.4)。

我们从三项递推关系 (2.2) 重新开始。利用 (2.4) 和 (2.5) 对其应用算子 $\mathcal{D}_q^2$，得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_q\mathcal{S}_q P_n(z) + \alpha \mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) + \alpha^2 z \mathcal{D}_q^2 P_n(z)\\ &\qquad = \mathcal{D}_q^2 P_{n+1}(z) + B_n \mathcal{D}_q^2 P_n(z) + C_n \mathcal{D}_q^2 P_{n-1}(z)\ .\end{aligned} \tag{3.7}$$

然后，依次利用 (3.1)、(3.2) 以及三项递推关系 (2.2)，将 (3.7) 乘以 $2\alpha \mathtt{U}_2(z)$，即可得到 (3.3)。因此结论成立。□

引理 3.2. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是满足 (3.1) 的首一正交多项式系。则以下差分方程组成立

$$k_{n+2} - 1/2\ - 2(2\alpha^2-1)(k_{n+1} - 1/2) + k_n - 1/2 = 0\ , \tag{3.8}$$
$$t_{n+2} - 2(2\alpha^2-1)t_{n+1} + t_n = 0,\quad t_n := k_n/C_n\ , \tag{3.9}$$
$$k_{n+1}B_{n+1} + \big(k_{n+1} - k_{n+2} - 2(2\alpha^2-1)k_n\big)B_n + k_nB_{n-1} = 0\ , \tag{3.10}$$
$$t_{n+3}B_{n+2} - (t_{n+2} + t_{n+1})B_{n+1} + t_nB_n = 0\ , \tag{3.11}$$
$$\begin{aligned}&(t_{n+1} + t_{n+2})(C_{n+1} - 1/4) - 4\alpha^2 t_n(C_n - 1/4) + (t_{n-1} + t_{n-2})(C_{n-1} - 1/4)\\ &\qquad = t_n\left[B_n^2 - 2(2\alpha^2-1)B_nB_{n-1} + B_{n-1}^2\right]\ ,\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中， B_n 和 C_n 是由 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足的三项递推关系 (2.2) 的系数。

证明。考虑满足 (3.1) 的首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$。然后，在 (3.7) 中对 $n=1$ 和 $f = P_n$ 使用 (2.7)，可得

$$2\alpha\mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) + (2\alpha^2-1)z\mathcal{D}_q^2 P_n(z) = \mathcal{D}_q^2 P_{n+1}(z) + B_n\mathcal{D}_q^2 P_n(z) + C_n\mathcal{D}_q^2 P_{n-1}(z)\ . \tag{3.13}$$

现在，我们依次利用 (3.1)、(3.2) 和三项递推关系 (2.2)，将 (3.13) 乘以 $2\alpha\mathtt{U}_2$，从而得到 P_{n+1}、 P_n、 P_{n-1}、 P_{n-2} 和 P_{n-3} 的一个恒为零的线性组合，其中

对每个 $n = 0$，1，.....，均成立。由于 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一个多项式基，因此上述线性组合的所有系数都必须为零。由此得到以下方程

$$a_{n+1} - (2\alpha^2 - 1)a_n = 4\alpha^2(\alpha^2 - 1)k_n \,, \tag{3.14}$$

$$c_{n-1}C_n - (2\alpha^2 - 1)c_nC_{n-2} = 4\alpha^2(\alpha^2 - 1)k_nC_{n-1}C_{n-2} \,, \tag{3.15}$$

$$b_{n+1} - (2\alpha^2 - 1)b_n - 2(\alpha^2 - 1)a_nB_n = 4\alpha^2(\alpha^2 - 1)(B_n + B_{n-1})k_n \,, \tag{3.16}$$

$$c_{n+1} - (2\alpha^2 - 1)c_n + \big(a_{n-1} - (2\alpha^2 - 1)a_n\big)C_n + \big(B_n - (2\alpha^2 - 1)B_{n-1}\big)b_n = 4\alpha^2(\alpha^2 - 1)k_n(C_n + B_{n-1}^2 + C_{n-1} - 1) \,, = 4\alpha^2(\alpha^2 - 1)k_nC_{n-1}(B_{n-1} + B_{n-2}) \,. \tag{3.17}$$

$$b_{n-1}C_n + \big(B_n - (2\alpha^2 - 1)B_{n-2}\big)c_n - (2\alpha^2 - 1)b_nC_{n-1} \tag{3.18}$$

方程 (3.8) 和 (3.9) 分别由 (3.14) 和 (3.15) 推出，其中使用了前一个引理中得到的 a_n、b_n 和 c_n 的记号与表达式。类似地，(3.10)–(3.12) 使用 (3.8) 和 (3.9) 由 (3.16)–(3.18) 得到。□

定理 3.1. 唯一的首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$，满足

$$\mathcal{S}_q\mathcal{D}_qP_n(z) = k_nP_{n-1}(z) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \,, \tag{3.19}$$

是参数为 a 和 b 的 Al-Salam-Chihara 多项式，其中 $(a, b) \in\{(1, -1), (-1, 1)\}$。

证明. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是方程 (3.19) 的一个首一正交多项式系解。在求解方程组 (3.8)–(3.12) 之前，先求出一些初始条件。我们断言，$(P_n)_{n\geq 0}$ 所满足的三项递推关系 (2.2) 的系数 B_n 和 C_n 为

$$B_{n-1} = 0, \quad k_{n-1} = \gamma_{n-1}\alpha_{n-2} \,, \tag{3.20}$$

$$C_{n+1} - 1/4 = \frac{k_n - k_{n+2} + \gamma_{n+2}\alpha_{n-1}}{4k_n} + \frac{k_{n+2} - k_n}{k_n}\sum_{l=1}^{n}(C_l - 1/4) \,, \tag{3.21}$$

对于每个 $n = 1$，2，.....。事实上，已知 $P_n(z) = z^n + f_nz^{n-1} + g_nz^{n-2} + \cdots$，其中 $f_0 = g_1 = 0$、$B_n = f_n - f_{n+1}$ 和 $C_n = g_n - g_{n+1} - f_nB_n$。由此，我们利用 (2.10) 确定 (3.19) 中次数较高项的前三个系数，从而得到 $k_n = \gamma_n\alpha_{n-1}$，以及

$$k_{n-1}f_n = k_nf_{n-1}, \quad k_ng_{n-1} = k_{n-2}g_n + \gamma_n\widehat{u}_{n-1} + \alpha_{n-3}u_n \,. \tag{3.22}$$

由 (3.22) 中的第一个方程可得

$$B_n = (k_{n+1} - k_n)B_0 \,,$$

它也满足 (3.10)。此外，不失一般性，假设$0 < q < 1$。于是

$$\lim_{n\to\infty} q^nB_n = B_0/2 \,.$$

不难看出，q 和 q^{-1} 是与 (3.9) 相关的特征方程的解。因此，该方程的解为

$$t_n = r_1q^n + r_2q^{-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \,,$$

其中 r_1和 r_2是两个复数，且满足 $|r_1| + |r_2| \neq 0$。例如，假设 $r_2 \neq 0$。于是我们写作 $t_n = r_2q^{-n}(1 - rq^{2n})$，其中 $r = -r_1/r_2$。我们将 (3.11) 乘以 q^n，并令 n 趋于 ∞，取其极限，得到 $B_0 = 0$，因此

$B_n = 0$，对所有 $n = 0$，1，.....。因此 (3.20) 成立，而 (3.21) 中的第二个方程可直接由 (3.22) 中的第二个方程得到。

由 (3.9) 中 t_n 的定义，我们得到 $C_n = k_n/t_n$，因此可推得 $\lim_{n\to\infty} C_n = 1/(2r_2(q^{-1}-1))$. 但是，在 (3.12) 中令 n 趋于 ∞，并结合 (3.20) 取极限，可得 $\lim_{n\to\infty} C_n = 1/4$。这意味着我们可以写成

$$C_n = \frac{(1-q^n)(1+q^{n-1})}{4(1-rq^{2n})} \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

不难看出，当且仅当 $r = 0$ 时，它满足 (3.21) 和 (3.12)，因此 $C_n = (1-q^n)(1+q^{n-1})/4$。对于情形 $1 < q < +\infty$，我们同样可以得到 $C_n = (1-q^{-n})(1+q^{-n+1})/4$。因此，(3.19) 的解为 $B_n = 0$，其中

$$C_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1-q^{n+1})(1+q^n) \quad or \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1-q^{-n-1})(1+q^{-n}) ,$$

对所有 $n = 0$，1，.....。因此

$$P_n = Q_n(z; s, -s|q) \quad or \quad P_n = Q_n(z; s, -s|1/q), \quad s = \pm 1 .$$

□

现在，我们刻画其对应的正交多项式序列是 (3.19) 的解的泛函。

定理 3.2. 设 $\mathbf{u} \in \mathcal{P}^*$ 是正则泛函，$(P_n)_{n\geq 0}$ 是相应的首一正交多项式系。则 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是 (3.19) 的解，当且仅当 $\mathbf{u}$ 是以下方程的解泛函方程

$$(q^s - 1)\mathbf{D}_q\mathbf{S}_q\mathbf{u} = 2z\mathbf{u} , \tag{3.23}$$

$$2q^{3s/2}\mathbf{D}_q^2\big(U_2\mathbf{u}\big) = -(2z^2 + q^s - 1)\mathbf{u} , \tag{3.24}$$

$$2q^s\mathbf{S}_q^2\mathbf{u} = \big(-2z^2 + 1 + q^s\big)\mathbf{u} , \tag{3.25}$$

$$8q^{5s/2}\mathbf{S}_q\mathbf{D}_q\big(U_2\mathbf{u}\big) = (1-q^s)z(-4z^2 + q^{2s} + 3)\mathbf{u} , \tag{3.26}$$

其中 $s = \pm 1$。

注3.1。我们强调以下几点。目前我们知道，方程 (3.19) 的首一正交多项式系解是 Al-Salam-Chihara 多项式的特例，因此它们是经典正交多项式系。于是，存在（见 [15]）两个多项式 ϕ 和 ψ，其次数分别至多为二次和一次，使得

$$\mathbf{D}_q(\phi\mathbf{u}) = \mathbf{S}_q(\psi\mathbf{u}) .$$

然而，无法从上述函数方程推导出 (3.23)– (3.26)。尽管如此，利用引理 3.1，可以如下证明该结果。

证明。首先假设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是方程 (3.19) 的首一正交多项式系解。设 $(\mathbf{a}_n)_{n\geq 0}$是与简单集 $(P_n)_{n\geq 0}$对应的对偶基。由 (3.19)，有

$$\langle \mathbf{D}_q\mathbf{S}_q\mathbf{a}_n, P_l\rangle = -\langle \mathbf{a}_n, \mathcal{D}_q\mathcal{S}_q P_l\rangle = -k_l\langle \mathbf{a}_n, P_{l-1}\rangle = -k_{n+1}\delta_{n+1,l} .$$

因此

$$\mathbf{D}_q\mathbf{S}_q\mathbf{a}_n = -k_{n+1}\mathbf{a}_{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots) , \tag{3.27}$$

通过写出.....得到

$$\mathbf{D}_q\mathbf{S}_q\mathbf{a}_n = \sum_{l=0}^{+\infty} \langle \mathbf{D}_q\mathbf{S}_\mathbf{q}\mathbf{a}_n, P_l\rangle\, \mathbf{a}_l ,$$

考虑到前文内容。在 (3.27) 中代入 $n=0$，并利用 (2.1)、(2.3) 以及 $B_0=0$ 和 $C_1=(1-q^s)/2$ 满足 $s=\pm 1$（由定理 3.1 得到），即可推出方程 (3.23)。类似地，利用 (3.2) 可以证明

$$2\alpha \mathbf{D}_q^2(\mathtt{U}_2\mathbf{a}_n)=a_n\mathbf{a}_n+b_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}+c_{n+2}\mathbf{a}_{n+2}\qquad (n=0,1,\ldots)\,.$$

因此，考虑到 (2.2)–(2.3)、(2.1) 和定理 3.1，在上述方程中取 $n=0$，即可得到 (3.24)。方程 (3.25)（分别为 (3.26)）可用相同思路，利用 (3.4)（分别为 (3.3)）推出。

其次，假设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于泛函 $\mathtt{u}$ 的首一正交多项式系，且是方程 (3.23)–(3.26) 的解。我们只会用到 (3.23) 和 (3.25)。首先，在 (3.23) 两边作用算子 $\mathtt{S}_q$，依次使用 (2.9)（将其中的 $n=1$ 和 $\mathtt{u}$ 替换为 $\mathtt{S}_q\mathtt{u}$）、(3.25) 和 (3.23)，得到

$$\mathbf{S}_q(z\mathbf{u})=\frac{1}{2}(q^s-1)\mathbf{S}_q\mathbf{D}_q\big(\mathbf{S}_q\mathbf{u}\big)=\frac{1}{2}(q^s-1)\Big(\frac{\alpha}{2\alpha^2-1}\mathbf{D}_q\mathbf{S}_q^2\mathbf{u}-\frac{1}{2\alpha^2-1}\mathtt{U}_1\mathbf{D}_q^2\mathbf{S}_q\mathbf{u}\Big) \tag{3.28}$$

$$=\frac{\alpha(q^s-1)}{2(2\alpha^2-1)}\mathbf{D}_q\Big(\big(-q^{-s}z^2+\tfrac{1}{2}(1+q^{-s})\big)\mathbf{u}\Big)-\frac{\mathtt{U}_1}{2\alpha^2-1}\mathbf{D}_q\big(z\mathbf{u}\big)\,.$$

同时，利用 (2.8) 可写为

$$\mathtt{U}_1\mathbf{D}_q\big(z\mathbf{u}\big)=\alpha\mathbf{D}_q\big(z\mathtt{U}_1\mathbf{u}\big)-(\alpha^2-1)\mathbf{S}_q^2\big(z\mathbf{u}\big)\,.$$

将其代入 (3.28)，得到

$$\big(q^{1/2}-q^{-1/2}\big)\mathbf{D}_q\big((z^2-1)\mathbf{u}\big)=-2s\mathbf{S}_q\big(z\mathbf{u}\big)\,.$$

这意味着 $\mathtt{u}$ 满足带有 $\phi(z)=\frac{s}{2}(q^{1/2}-q^{-1/2})(z^2-1)$ 和 $\psi(z)=z$ 的 (2.11)。因此，应用 (2.12)，我们得到

$$B_n=0,\quad C_{n+1}=\frac{(1-q^{s(n+1)})(1+q^{sn})}{4}\quad (n=0,1,\ldots)\,,$$

因此，对于 $n=0$、1、.....，有 $P_n=Q_n(x;\,s,-s|q^s)$。然后我们使用定理 3.1，得出 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足 (3.19)。利用 (3.24) 和 (3.26) 也可以类似地得到这一结论。□

4. Main results: second case

在本节中，我们关注满足以下方程的首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$:

$$\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z)=r_nP_{n-1}(z)\qquad (n=0,1,\ldots)\,. \tag{4.1}$$

所采用的方法和技术与上一节中的类似。因此，我们在此列出部分结果，但不作证明。

引理 4.1. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是满足 (4.1) 的首一正交多项式系。则以下关系成立:

$$2(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)\mathcal{D}_q^2P_n(z)=a_nP_n(z)+b_nP_{n-1}(z)+c_nP_{n-2}(z)\,, \tag{4.2}$$

$$2\alpha\mathcal{S}_q^2P_n(z)=c_n^{[1]}P_n(z)+c_n^{[2]}P_{n-1}(z)+c_n^{[3]}P_{n-2}(z)\,, \tag{4.3}$$

$$4\alpha(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)\mathcal{S}_q\mathcal{D}_qP_n(z)$$

$$=b_n^{[1]}P_{n+1}(z)+b_n^{[2]}P_n(z)+b_n^{[3]}P_{n-1}(z)+b_n^{[4]}P_{n-2}(z)+b_n^{[5]}P_{n-3}(z)\,, \tag{4.4}$$

对每个 $n=0$, 1, ..., 其中

$$a_n = r_{n+1} - (4\alpha^2-3)r_n - \alpha\ ,\ b_n = \big(B_n - (4\alpha^2-3)B_{n-1}\big)r_n\ ,$$
$$c_n = r_{n-1}C_n - (4\alpha^2-3)r_nC_{n-1},\ b_n^{[1]} = a_{n+1} - (2\alpha^2-1)a_n\ ,$$
$$b_n^{[2]} = b_{n+1} - (2\alpha^2-1)b_n - 2(\alpha^2-1)a_nB_n\ ,$$
$$b_n^{[3]} = c_{n+1} - (2\alpha^2-1)c_n + (B_n - (2\alpha^2-1)B_{n-1})b_n + (a_{n-1} - (2\alpha^2-1)a_n)C_n\ ,$$
$$b_n^{[4]} = (B_n - (2\alpha^2-1)B_{n-2})c_n + b_{n-1}C_n - (2\alpha^2-1)b_nC_{n-1},$$
$$b_n^{[5]} = c_{n-1}C_n - (2\alpha^2-1)c_nC_{n-2},\quad c_n^{[1]} = r_{n+1} - (2\alpha^2-1)r_n + \alpha\ ,$$
$$c_n^{[2]} = \big(B_n - (2\alpha^2-1)B_{n-1}\big)r_n,\quad c_n^{[3]} = r_{n-1}C_n - (2\alpha^2-1)r_nC_{n-1}\ .$$

证明。由 (2.6) 并利用 (2.5)，可得

$$\alpha\mathcal{S}_q^2 f = \big(\alpha^2\mathtt{U}_2 - \mathtt{U}_1^2\big)\mathcal{D}_q^2 f + \mathtt{U}_1\mathcal{D}_q\mathcal{S}_q f + \alpha f\ . \tag{4.5}$$

我们依次将算子 $\mathcal{S}_q$ 和 $\mathcal{D}_q$ 作用于首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$ （它是 (4.1) 的解）所满足的三项递推关系 (2.2)。利用 (2.4)、(2.5) 和 (4.5)，得到下列方程。

$$\begin{aligned}&\big(\alpha^2 z + 3\mathtt{U}_1(z)\big)\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z) + 2\big(\alpha^2\mathtt{U}_2(z) - \mathtt{U}_1^2(z)\big)\mathcal{D}_q^2P_n(z) + \alpha P_n(z)\\ &\qquad = \mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n+1}(z) + B_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z) + C_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n-1}(z)\ ,\end{aligned} \tag{4.6}$$

因为 $\mathcal{D}_q\mathtt{U}_2 = 2\alpha\mathtt{U}_1$ 且 $\mathcal{S}_q\mathtt{U}_2 = \alpha^2\mathtt{U}_2 + \mathtt{U}_1^2$。最后，利用 (4.1) 和三项递推关系 (2.2)，依次从 (4.6) 得到 (4.2)。现在，根据 (4.5)，我们还可以将 (4.6) 写成

$$\begin{aligned}&2\alpha\mathcal{S}_q^2P_n(z) - \alpha P_n(z) + (2\alpha^2-1)z\ \mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z)\\ &\qquad = \mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n+1}(z) + B_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z) + C_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n-1}(z)\ .\end{aligned}$$

利用 (2.2) 和 (4.1)，可由此方程得到方程 (4.3)。将 (3.7) 乘以 $2(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)$，再依次利用 (4.1)、(4.2) 和三项递推关系 (2.2)，可得方程 (4.4)。□

引理4.2. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是满足（4.1）的首一正交多项式系。则以下差分方程组成立

$$r_{n+2} - 2(2\alpha^2-1)r_{n+1} + r_n = 0\ , \tag{4.7}$$
$$t_{n+2} - 2(2\alpha^2-1)t_{n+1} + t_n = 0,\quad t_n := r_n/C_n\ , \tag{4.8}$$
$$r_{n+1}B_{n+1} - (4\alpha^2-3)(r_n + r_{n+1})B_n + r_nB_{n-1} = 0\ , \tag{4.9}$$
$$t_{n+3}B_{n+2} - (t_{n+2} + t_{n+1})B_{n+1} + t_nB_n = 0\ , \tag{4.10}$$
$$\begin{aligned}&t_{n+2}(C_{n+1} - 1/4) - 2t_n(C_n - 1/4) + t_{n-2}(C_{n-1} - 1/4)\\ &\qquad = t_n\left[B_n^2 - 2(2\alpha^2-1)B_nB_{n-1} + B_{n-1}^2\right]\ ,\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中， B_n 和 C_n 是由 $(P_n)_{n\geq 0}$满足的三项递推关系（2.2）的系数。

证明。如引理 3.2 的证明所示，我们利用 $n=1$ 的 (2.7)，将 (3.13) 乘以 $2(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)$，得到

$$\begin{aligned}&4(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z) + 2(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)z\mathcal{D}_q^2P_n(z)\\ &\qquad = 2(\alpha^2-1)(z^2-\alpha^2)\mathcal{D}_q^2\big(P_{n+1}(z) + B_nP_n(z) + C_nP_{n-1}(z)\big)\ .\end{aligned} \tag{4.12}$$

此外，根据三项递推关系，可得到以下关系

$$(z^2-\alpha^2)P_n(z) = P_{n+1}(z) + (B_n + B_{n-1})P_n(z) + C_{n-1}C_{n-2}P_{n-3}(z) \\ + (C_n + B_{n-1}^2 + C_{n-1} - \alpha^2)P_{n-1}(z) + (B_{n-1} + B_{n-2})C_{n-1}P_{n-2}(z)\,.$$

将此方程与 (4.1)、(4.2) 以及三项递推关系 (2.2) 一并考虑，(4.12) 对每个 n 都成为多项式 P_{n+1}、P_n、P_{n-1}、P_{n-2} 和 P_{n-3} 的零线性组合。由于这些多项式构成空间 $\mathcal{P}$ 的一组基，所述线性组合的所有系数均为零，因此得到以下方程组。

$$\begin{aligned}
&4(\alpha^2-1)r_n + a_n = a_{n+1}\,,\\
&4(\alpha^2-1)r_n(B_n + B_{n-1}) + b_n = b_{n+1}\,,\\
&4(\alpha^2-1)r_n(C_n + B_{n-1}^2 - \alpha^2) + (a_n - a_{n-1})C_n + b_n(B_{n-1} - B_n) = c_{n+1} - c_n\,,\\
&4(\alpha^2-1)r_n(B_{n-1} + B_{n-2})C_{n-1} + b_nC_{n-1} - b_{n-1}C_n = c_n(B_n - B_{n-2})\,,\\
&4(\alpha^2-1)r_nC_{n-1}C_{n-2} + c_nC_{n-2} = c_{n-1}C_n\,.
\end{aligned}$$

结论由此得出。 □

定理 4.1. 满足以下条件的唯一首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$,

$$\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z) = k_nP_{n-1}(z) \qquad (n=0,1,\ldots)\,, \tag{4.13}$$

是 Rogers q^2-Hermite 或 Rogers q^{-2}-Hermite 多项式。

证明. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是 (4.13) 的一个首一正交多项式系解。按照定理 3.1 的证明，我们得到

$$k_n = \gamma_{2n}/2\,, \quad B_n = B_0\alpha_{2n+1}/\alpha\,,$$

通过比较 (4.13) 中高次项的前两个系数。然后我们证明，B_n 的这一表达式满足 (4.9) 当且仅当 $B_0 = 0$，因此，对于每个 n，都有 $B_n = 0$。最后，由 (4.8) 和 (4.10) 可推得

$$B_n = 0, \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1-q^{2s(n+1)}) \quad (n=0,1,\ldots)\,,$$

于是得到

$$P_n = Q_n\big(x; sq^{s/2}, -sq^{s/2}|q^s\big) \quad s=\pm 1, \quad (n=0,1,\ldots)\,.$$

因此结论得证。 □

定理 4.2. 设 $\mathfrak{u} \in \mathcal{P}^*$ 是一个正则泛函，且 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是相应的首一正交多项式系。则 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是 (4.13) 的解，当且仅当 $\mathfrak{u}$ 是下列泛函方程的解

$$q^{s/2}(q^s-1)\mathbf{S}_q\mathbf{D}_q\mathfrak{u} = 2z\mathfrak{u}\,, \tag{4.14}$$

$$4(\alpha^2-1)q^{5s/2}\mathbf{D}_q^2\big((z^2-\alpha^2)\mathfrak{u}\big) = (-4z^2+1-q^{2s})\mathfrak{u}\,, \tag{4.15}$$

$$4q^{2s}\mathbf{S}_q^2\mathfrak{u} = \big(-4z^2+1+3q^{2s}\big)\mathfrak{u}\,, \tag{4.16}$$

$$2q^{3s}(1-q^s)\mathbf{D}_q\mathbf{S}_q\big((z^2-\alpha^2)\mathfrak{u}\big) = z(-4z^2+q^{4s}+q^{2s}+2)\mathfrak{u}\,, \tag{4.17}$$

其中 $s=\pm 1$。

证明。该结果可完全按照定理 3.2 中的方法推导得出。 □

注 4.1。尽管这里得到的结果是针对 q-二次格点证明的，但通过取适当的极限，可以很容易地将其推广到二次格点 $x(s) = \mathfrak{c}_4 s^2 + \mathfrak{c}_5 s + \mathfrak{c}_6$，正如 [8] 中所讨论的那样。

Acknowledgements

我们谨此感谢 Kenier Castillo 提请我们关注这一问题。作者 D. Mbouna 获得了部分资助，资助方为 CMUP（LASI 成员），其经费来自 FCT——科学与技术基金会（Fundac˜ao para a Ci^enciae a Tecnologia, I.P.）通过项目 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020 提供的国家资金。A. Suzuki 获得 FCT 资助项目 2021.05089.BD 的支持，并获得科英布拉大学数学中心 UIDB/00324/2020 的部分资助，该资助由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 提供。

References

[1] W. Al-Salam，《Rogers q-Hermite多项式的一种刻画》，Internat. J. Math. and Math. Sci. 18 (1995)，第4期，641–648。[2] W. Al-Salam 和 T. S. Chihara，《经典正交多项式的另一种刻画》，SIAM J. Math. Anal. 3 (1972)，65–70。[3] W. Al-Salam，《 q-Appell多项式》，Ann. Mat. Pura Appl. 第77卷第4期（1967），第31–45页。[4] R. ´Alvarez-Nodarse、K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，《关于离散相干测度对》，J. Difference Equ. Appl.，第28卷第7期（2022），853–868；[5] P. Appell，《关于一类多项式》，Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup.（2）9（1880）119–144。[6] F. Ana Loureiro 和 P. Maroni，《Appell序列的二次分解》，Expo. Math. 26（2008）177–186。[7] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，《关于Askey-Wilson多项式和第二类Meixner多项式的评述》，Ramanujan J.，58（2022）1159–1170。[8] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，《格上经典正交多项式的函数方程》，J. Math. Anal. Appl. 515 （ 2022 ） 126390。[9] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，《连续q-Jacobi多项式、第一类Chebyshev多项式及Al-Salam Chihara多项式的一种刻画》，J. Math. Anal. Appl. 514（2022）126358。[10] Y. Chen、G. Filipuk 和 L. Zhan，《正交多项式、渐近性质与Heun方程》，J. Math. Phys. 60，113501（2019）。[11] J. Daniel Galiffa 和 W. Boon Ong，《Askey-Wilson差分方程的一种刻画》，J. Difference Equ. Appl.，第20卷第9期（2014），1372–1381；[12] S. Datta 和 J. Griffin，《某些q-正交多项式的一种刻画》，Ramanujan J. 12（2006），第425–437页。[13] A. Dzhamay、G. Filipuk 和 A. Stokes，《与广义Meixner多项式和变形Laguerre正交多项式相关的微分系统》，Integral Transforms Spec. Funct.，32:5-8（2021），483–492。[14] G. Filipuk 和 M.N. Rebocho，《一类半经典正交多项式族的微分方程》，Appl. Numer. Math.，124（2018），76–88。[15] M. Foupouagnigni、M. Kenfack-Nangho 和 S. Mboutngam，《非均匀格点上经典正交多项式的刻画定理：泛函方法》，Integral Transforms Spec. Funct. 22（2011）739–758。[16] M. E. H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》。含W. Van Assche撰写的两章，R. Askey作序。数学及其应用百科全书第98卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005。[17] P. Maroni，《正交多项式的代数理论及其在半经典正交多项式中的应用》，载于C. Brezinski等编，《正交多项式及其应用》，1990年埃里切会议论文集，IMACS，Ann. Comp. App. Math. 9（1991）95–130。[18] A. Sharma、A. Chak，《一类多项式的基本类似物》，Revisita di Matematica della Università di Parma，第5卷（1954），第15–38页。

D. Mbouna, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Porto, Campo Alegre st. 687 4169-007 Porto Portugal „
,*Email address*: dieudonne.mbouna@fc.up.ptA. Suzuki, University of Coimbra, CMUC, Dep. Mathematics, 3001-501 Coimbra, Por-tugal*Email address*: asuzuki@uc.pt