arXiv:2301.06729v1 [math.OC] 17 Jan 2023

巴拿赫空间上拟变分不等式的存在性定理及其在时变纯交换经济中的应用

Asrifa Sultana*†, Shivani Valecha†

摘要

我们研究一类定义在无限维巴拿赫空间上的拟变分不等式问题，并在定义这些不等式的映射满足上半连续性和伪单调性假设的条件下，推导出确保此类问题存在解的充分条件。拟变分不等式的特殊结构使我们能够基于变分不等式的经典存在性定理，证明此类不等式解的存在。这类特殊的拟变分不等式源于纯交换经济问题和序贯交易博弈中的拉德纳均衡问题。此外，我们研究了巴拿赫空间上一类特定拟变分不等式的可解性，其中约束映射可能取无界值。最后，作为一项应用，我们证明了时变纯交换经济中动态竞争均衡的存在。

关键词：变分不等式；动态竞争均衡；伪单调映射；约束映射；拟变分不等式
数学主题分类：37N40，58E35，90C26

1 引言

变分不等式（VI）的概念由 Hartman 和 Stampacchia 于 1966 [22], 提出，旨在研究偏微分方程。变分不等式问题为研究非线性方程组 [21, 22],优化问题 [9], 纳什均衡问题 [8, 12] 等提供了一种工具。拟变分不等式（QVI）问题实际上是变分不等式问题的扩展

*通讯作者。电子邮箱- asrifa@iitbhilai.ac.in
†印度理工学院比莱分校数学系，印度赖布尔 492015。

其约束集允许依赖于变量。假设 X 是具有拓扑对偶空间 X^* 及对偶积$\langle\cdot$的实巴拿赫空间 $\cdot\rangle$。设 $D \subseteq X$ 是一个非空集合。对于给定的映射 $T:\ D \to 2^{X^*}$ 和 $K:\ D \to 2^D$，拟变分不等式（T，K）旨在求出一个点 $\tilde{x} \in K$（$\tilde{x}$），使得

$$\exists\, \tilde{x}^* \in T(\tilde{x}) \text{ meeting } \langle \tilde{x}^*, z - \tilde{x} \rangle \geq 0, \text{ for each } z \in K(\tilde{x}). \tag{1}$$

与变分不等式问题相比，由于约束集依赖于变量，该问题在计算上较难求解。文献中关于保证 QVI(T, K) 存在解的结果非常少，例如 Tan [25] 的结果假设所定义映射 T 具有上半连续性；而 Aussel 和 Cotrina [5] 则在对 T作出较弱连续性和拟单调性假设的条件下证明了一个存在性结果。此外，Kien 等人 [23] 通过假设包含 K 所有不动点的集合是闭集，推导出了关于 QVI(T, K) 的一个结果。

值得注意的是，QVI(T, K) 的每个解始终都是约束映射 K 的一个不动点。基于这一事实，可以立即想到通过首先获得所有满足 $x \in K(x)$ 的点 x，然后求解参数变分不等式 VI($T, K(x)$)，来确定 QVI(T, K) 的一个解。Aussel 和 Sagratella [10] 注意到，除非拟变分不等式问题具有特殊结构，否则这种方法并不适用于所有 QVI(T, K)。

最近，Aussel 等人 [7] 研究了一类特殊的拟变分不等式问题，其中某些解可以通过推导相应变分不等式问题的解来获得。这类特殊的拟变分不等式问题实际上源于由序贯交易博弈构建的 Radner 均衡问题 [7, 20] 。具体而言，巴拿赫空间上的这类特殊拟变分不等式问题可表述如下：给定集值映射 F: $X \to 2^{X^*}$ 和 $K: D \to 2^X$，以及函数 $f: X \to X^*$，$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$，问题 QVI(F, f, K) 要求寻找 $(d, \tilde{x}) \in D \times K(d)$，使得存在$\tilde{x}^* \in F(\tilde{x})$ 满足

$$\langle f(\tilde{x}), d - \tilde{d} \rangle + \langle \tilde{x}^*, z - \tilde{x} \rangle \geq 0, \text{ for each } (d, z) \in D \times K(\tilde{d}). \tag{2}$$

[7] 中的作者在有限维空间上，基于关于 F 的较弱半连续性和拟单调性假设，推导出了此类 QVI (2) 问题的存在性结果。作为应用，他们推导出某些序贯交易博弈 [7] 中 Radner 均衡的存在。Donato 等人 [17, 19, 20] 还开展了一些相关研究。

本文研究了无限维巴拿赫空间上的这一特殊类型的拟变分不等式，并给出了巴拿赫空间上此类 QVI(F, f, K) (2) 问题存在解的充分条件。鉴于所研究的拟变分不等式具有特殊结构，我们首先通过应用一个关于变分不等式解存在性的定理，证明了此类 QVI (2) 存在解。在这种情况下，结果是在假设 F 上半连续且伪单调的条件下证明的。此外，考虑到 QVI(F, f, K) (2) 确实是一个拟变分不等式，我们还为此类问题给出了另一种存在性结果，其中假设映射 F 为凸值

而非假设 F 伪单调。最后，推导出了约束映射无界的 QVI(F, f, K) (2) 问题的一个存在性结果。作为应用，本文最后证明了时变纯交换经济中动态竞争均衡的存在性。

2 预备知识与记号

现在我们回顾一些变分概念的定义、符号和性质，这些内容将在下一节用于证明主要结果。

设 X 为实巴拿赫空间，其拓扑对偶空间为 X^*，对偶配对为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。对于 $D \subset X$，我们用 conv(D) 和 $\overline{\text{conv}}(D)$ 分别表示凸包和闭凸包。对于 $T: D \to 2^{X^*}$，由 Stampacchia 引入的变分不等式问题的所有解 $S(T, D)$ 构成的集合表示为:

$$\{\tilde{x} \in D : \text{there is} \, \tilde{x}^* \in T(\tilde{x}) \text{ satisfying } \langle \tilde{x}^*, y - \tilde{x} \rangle \geq 0, \text{ for any } y \in D\},$$

而 $M(T, D)$ 表示由 Minty 引入的变分不等式问题的所有解构成的集合，其定义如下:

$$\{\tilde{x} \in D : \langle y^*, y - \tilde{x} \rangle \geq 0, \text{ for each } y \text{ in } D \text{ and } y^* \text{ in } T(y)\}.$$

容易验证，若集合 D 是闭凸集，则集合 $M(T, D)$ 也为凸集且闭集。

回顾一下，若对于每个 $x, y \in D$，以及满足 $\langle x^*, y - x \rangle \geq 0$ 的某个 $x^* \in T(x)$，都有 $\langle y^*, y - x \rangle \geq 0$ 对所有 $y^* \in T(y)$ 成立，则称 $T: D \to 2^{X^*}$ 是集合 D 上的伪单调映射。

读者可在 [3]，中查阅上半连续（u.s.c.）集值映射的概念。下文给出的关于上半连续性的命题将在后续内容中用到。

命题 2.1. *[2,* 引理 1.*10]* 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $T: X \to 2^{X^*}$（X^* 是 X 的拓扑对偶空间）是一个非空紧值映射。那么， T 在点 $y \in X$ 处上半连续，当且仅当对于任意序列 $y_n \to y$ 和 $y_n^* \in T(y_n)$，都可以从 $(y_n^*)_n$ 中取出一个子序列 $(y_{n_m}^*)_m$，使得对于某个 $y^* \in T(y)$，有 $y_{n_m}^* \to y^*$。

读者可以在 [3] 中复习与下半连续性及集值映射闭性相关的概念。下文给出的引理将在后续内容中发挥重要作用，因为它给出了使限制映射成为下半连续（l.s.c.）映射的适当条件。

引理 2.1. *[14]* 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $D \subset X$ 是非空凸集。令 $K: D \to 2^X$ 为一个取凸值的下半连续映射。定义映射 $K_r: D \to 2^X$ 如下: $K_r(d) = K(d) \cap \bar{B}(0, r)$，其中 $r > 0$。那么，若对任意 $d \in D$， $K(d) \cap B(0, r) \neq \emptyset$，则映射 K_r 是下半连续的。

随后将需要 Tan[25] 关于拟变分不等式的以下定理，以确保 QVI(G, f, K) (2) 存在解。

定理 2.1. *[25]* 设局部凸拓扑向量空间 X中的非空凸紧集为 D 。假设 $K: D \to 2^D$ ，且 $T: D \to 2^{X^*}$（将 X^* 视为 X的拓扑对偶空间）是满足以下条件的映射:

(i) K 是取非空凸紧值、下半连续且具有闭图的映射;

(ii) T 具有上半连续性，且对每个 $x \in D$， $T(x)$均为非空凸紧集。

那么，拟变分不等式 (T, K) (1) 存在一个解。

定义在巴拿赫空间 X 上的实值函数 ψ 称为拟凹函数 [9]，如果对任意一对 x、$y \in X$和 $s \in [0,1]$,

$$\psi(sx + (1-s)y) \geq \min\{\psi(x), \psi(y)\}.$$

值得注意的是，对于非光滑拟凹函数的情形，要通过变分不等式求得优化问题的解，需要用调整正规算子替代经典导数和次微分算子（例如，参见 [4, 9]）。

我们回顾与拟凹函数 ψ 相关的调整正规算子 $N^a_{-\psi}$ 的概念。函数 $\psi: X \to \mathbb{R}$ 是拟凹函数，当且仅当相应的拟凸函数 $-\psi$ 的次水平集（定义为 $S_{-\psi}(x) = \{z \in X : (-\psi)(z) \leq (-\psi)(x)\}$ ）对每个 x 都是凸集，其中 x 属于 X （见 [4]）。假设 $S^a_{-\psi}(x)$ 表示任意 $x \in X$ 所对应的拟凸函数 $-\psi$ 的调整次水平集，该集合根据定义 2.3] [9, 构造。接下来，我们回顾文献 [9], 中的调整正规算子 $N^a_{-\psi}: X \to 2^{X^*}$ 的概念。

$$N^a_{-\psi}(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, z - x\rangle \leq 0,\ \forall\, z \in S^a_{-\psi}(x)\}.$$

正如 [9], 中的研究所述，这些算子同时满足广义单调性和某些特定的连续性性质。

3 拟变分不等式问题的存在性定理

3.1 有界约束映射的情形

我们的目标是给出充分条件，以确保巴拿赫空间上的所考虑的特殊拟变分不等式问题 QVI(F, f, K) (2) 存在解。核心方法是构造一个与该特殊拟变分不等式 QVI(F, f, K) (2) 问题相关联的变分不等式问题。然后我们旨在

通过运用关于变分不等式问题的一个初步存在性定理，推导出此类 QVI(F, f, K) 的解存在；其依据是，任何满足相应变分不等式问题的向量都是 QVI(F, f, K) (2) 问题的一个解。在这种情况下，该结果是在 F 上半连续且伪单调的假设下证明的。

定理 3.1. 设 D 是巴拿赫空间X 的非空凸紧子集，且 $f: X \to X^*$ 是连续仿射函数。假设 $F: X \to 2^{X^*}$ 和$K: D \to 2^X$ 是满足以下条件的映射：

(i) K 是非空凸值下半连续映射，且具有闭图；(ii) F 是非空紧值映射，在集合 conv(K(D)) 上满足上半连续性和伪单调性。

因此，只要集合 K(D) 变为紧集，拟变分不等式 (F, f, K) (2) 就有解。

证明. 我们首先构造映射 $H: D \to 2^{X^*}$，其定义为 $H = f \circ \Gamma$，其中 $\Gamma: D \to 2^X$定义如下：

$$\Gamma(d) = S(F, K(d)) \quad \text{for any} \quad d \in D.$$

我们注意到，只要 Stampacchia变分不等式 $S(H, D)$ 存在解，拟变分不等式(F, f, K) (2) 的解集就非空。事实上，我们假设 $d \in D$ 是 $S(H, D)$的解。因此，存在一个元素 $\tilde{x} \in \Gamma(d)$满足

$$\langle f(\tilde{x}), d - \tilde{d} \rangle \geq 0 \quad \text{for each } d \in D. \tag{3}$$

˜现在，$\tilde{x} \in \Gamma(d)$ 表示满足条件的 $\exists \tilde{x}^* \in F(\tilde{x})$

$$\langle \tilde{x}^*, z - \tilde{x} \rangle \geq 0 \quad \text{for all } z \in K(\tilde{d}). \tag{4}$$

˜因此，$(d, \tilde{x})$ 是 QVI(F, f, K) (2) 的一个解。

因此，只需证明 $S(H, D)$ 存在解。由 [6, 引理 3.2] 和 [6, 引理 3.1] 可知

$$M(F, K(d)) = M(\text{conv}F, K(d)) \subseteq S(\text{conv}F, K(d)) = S(F, K(d)), \text{ for } d \in D,$$

其中，conv$F: X \to 2^{X^*}$ 按 conv$F(x)$ = conv($F(x)$) 的方式构造，其中 $x \in X$。此外，由于 F 在集合 $K(d)$ 上是伪单调的，因此有 $S(F, K(d)) \subseteq M(F, K(d))$。因此，对任意 $d \in D$,

$$\Gamma(d) = S(F, K(d)) = M(F, K(d)). \tag{5}$$

由于 $K(d)$ 是紧的，引理 [8, 引理 2.1] 和 [8, 命题 2.1]共同推出 $M(F, K(d)) \neq \emptyset$，从而 $\Gamma(d) \neq \emptyset$。此外，由 (7) 可得，$\Gamma(d)$ 成为凸闭集，因此 Γ 成为非空闭凸值映射。

现在，我们的目标是证明 Γ 满足上半连续性。由于映射 Γ 包含在紧集 K(D) 中，只需证明

映射 Γ 具有闭图。设 $(d_n)_{n\geq 1}$ 和 $y_n \in \Gamma(d_n)$ 是 D 中的两个序列，使得 $d_n \to d$ 和 $y_n \to y$。我们要证明 $y \in \Gamma(d)$。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $y_n \in \Gamma(d_n)$，因此存在 $(y_n^*)_n$ 属于 X^*，使得 $y_n^* \in F(y_n)$，并且

$$\langle y_n^*, z - y_n \rangle \geq 0, \ \forall z \in K(d_n). \tag{6}$$

由于 F 在 y 处是上半连续的，命题 2.1 表明，存在 $(y_{n_k}^*)_k \subseteq (y_n^*)_n$，使得对于某个 $y^* \in F(y)$，有 $y_{n_k}^* \to y^*$。令 w 为 $K(d)$ 中的一个元素。由于 K 在 D 和 $d_{n_k} \to d$ 上下半连续，我们得到具有 $w_{n_k} \to w$ 的 $w_{n_k} \in K(d_{n_k})$。因此，由 (6) 可知，

$$\langle y_{n_k}^*, w_{n_k} - y_{n_k} \rangle \geq 0.$$

取 $k \to \infty$、$\langle y^*$、$w - y \rangle \geq 0$，即可得到上述结论。由于 w 是 $K(d)$ 中的任意元素，我们可以得出，对于任意 $w \in K(d)$，都有 $\langle y^*$、$w - y \rangle \geq 0$。因此，Γ 是一个闭图映射。由此，Γ 满足上半连续性。

考虑到 Γ 是上半连续的，且函数 f 连续，映射 $H = f \circ \Gamma$ 在 D 上确实是上半连续的。由于对于任意 $d \in D$，$\Gamma(d)$ 都是凸的，且 f 是仿射的，我们可以很容易地验证集合 $H(d)$ 是凸的。此外，由于 f 连续且 $\Gamma(d)$ 紧，对于任意 $d \in D$，$H(d) = f(\Gamma(d))$ 都是紧集。因此，H 是一个具有非空凸紧值的上半连续映射。于是，考虑常值约束映射 $K(x) = D$，根据定理 2.1，变分不等式 $S(H, D)$ 存在一个解。证明至此完成。

□

在前面的结果中，通过一个关于变分不等式问题解的存在性结果，证明了 QVI(F, f, K) (2) 解的存在性。现在，鉴于 QVI(F, f, K) (2) 确实是一个拟变分不等式问题，我们希望通过应用一个关于拟变分不等式问题的初步存在性结果，建立另一个关于巴拿赫空间上 QVI(F, f, K) (2) 的结果。事实上，我们需要假设 F 为凸值，而不是像定理 3.1 中那样假设 F 具有伪单调性。

定理 3.2. 设 D 是巴拿赫空间 X 的一个非空凸紧子集，且 $f : X \to X^*$ 是连续函数。假设 $F : X \to 2^{X^*}$ 和 $K : D \to 2^X$ 是满足以下条件的映射：

(i) K 是一个非空凸值下半连续映射，且具有闭图；

(ii) F 具有非空凸紧值，并且在 conv$(K(D))$ 上满足上半连续性。

因此，只要集合 $K(D)$ 变为紧集，拟变分不等式 (F, f, K) (2) 就存在一个解。

˜证明。我们令 $D = D \overline{\times} \overline{\text{conv}}(K(D))$。由于 $K(D)$ 是紧集，conv$(K(D))$ 也紧，因此 D 是紧凸集。我们通过 $T(d, x) = \{(f(x)\ x^*) : x^* \in F(x)\}$，构造一个从集合 D 到 $X^* \times X^*$ 的集值映射 T。

假设 (d,x) 是 $D\times \mathrm{conv}(K(D))$ 中的一个元素。显然， $T(d,x)$ 是非空紧凸集。令 $V_1\times V_2$ 为 $X^*\times X^*$ 中包含 $T(d,x)=f(x)\times F(x)$ 的一个开集。由于 V_1 是包含 $f(x)$ 的开集，且 f 连续，因此 $f^{-1}(V_1)$ 是 X 中包含 x 的开集。鉴于 F 具有上半连续性，且 V_2 是满足 $F(x)\subseteq V_2$ 的开集，存在 x 的一个邻域 U'，使得 $F(U')\subseteq V_2$。于是， $U=U'\cap f^{-1}(V_1)$ 是包含 x 的开集。令 M 为满足 $d\in M$ 的一个开集。则 $(d,x)\in M\times U$ 是一个满足 $T(M\times U)\subseteq V_1\times V_2$ 的开集。因此， T 在 $D\times\mathrm{conv}(K(D))$ 上是上半连续的。

此外，我们定义映射 $\tilde{K}:\tilde{D}=D\times\mathrm{conv}(K(D))\to 2^{\tilde{D}}$ as $\tilde{K}(d,x)=D\times K(d)$。由于 K 具有闭图，且 D 是闭集，因此很容易验证 $\tilde{K}$ 具有闭图。鉴于 K 是下半连续映射，我们断言 K 满足下半连续性。事实上，映射 K的值非空、凸且紧，因为 D 是凸紧集，且 $K(d)$是非空凸紧集。

因此，根据定理 2.1 存在一个解，因此我们可以找到 $(d,\tilde{x})\in K(d,\tilde{x})=D\times K(d)$ 和 $(f(\tilde{x})\ \tilde{x}^*)\in T(d,\tilde{x})=\{(f(\tilde{x})\ \tilde{x}^*):\tilde{x}^*\in F(\tilde{x})\}$ 满足

$$\langle (f(\tilde{x}),\tilde{x}^*),(d,z)-(\tilde{d},\tilde{x})\rangle\geq 0,\quad \text{for every } (d,z) \text{ lies in } D\times K(\tilde{d}).$$

因此，我们可以得出结论：$\mathrm{QVI}(F,f,K)$（2）有一个解。

□

3.2 无界约束映射的情形

大多数关于变分不等式问题的著名存在性定理都要求约束集 K ([21]) 是紧的。2004 年，Aussel 和 Hadjisavvas [8] 借助下述针对映射 T 的强制性判据（$\bar{C}$），证明了具有无界约束集的变分不等式存在解：$K\to 2^{X^*}$

$$(\bar{C})\qquad \begin{aligned}&\exists\, r>0,\ \text{for all } x\in K\setminus\bar{B}(0,r),\ \exists\, y\in K \text{ satisfying}\\ &||y||<||x|| \text{ and } \langle x^*,x-y\rangle\geq 0,\ \text{for any } x^*\in T(x),\end{aligned}$$

其中 $B(0,r)=\{z\in X:\ ||z||\leq r\}$。Bianchi 等人 [11]考察并比较了具有无界约束集的变分不等式的若干强制性条件。本文将强制性条件（C）推广到拟变分不等式问题。

强制性判据将讨论其与拟变分不等式 $\mathrm{QVI}(F,f,K)$ 的联系。条件（2）构造如下：对于集值映射 $K:D\to 2^X$ 和 $F:X\to 2^{X^*}$，若在 $d\in D$ 处满足强制性判据（C_d），则称该判据成立。

$$(\bar{C}_d)\qquad \begin{aligned}&\exists\, r_d>0,\ \text{for all } x\in K(d)\setminus\bar{B}(0,r_d),\exists\, y\in K(d) \text{ satisfying}\\ &||y||<||x|| \text{ and } \langle x^*,x-y\rangle\geq 0,\ \text{for any } x^*\in F(x).\end{aligned}$$

值得注意的是，如果将约束映射 K 视为常值映射，那么强制性条件（C_d）和（C）彼此一致。此外，如果 K 是有界映射，则条件（C_d）自动成立。

定理 3.3. 设 D 是巴拿赫空间X 的非空凸紧子集，且 $f: X \to X^*$ 是连续仿射函数。假设 $F: X \to 2^{X^*}$ 和$K: D \to 2^X$ 是满足以下条件的映射：

(i) K 是非空凸值下半连续映射，且具有闭图；

(ii) F 是非空凸紧值映射，并且在 conv($K(D)$) 上满足上半连续性和伪单调性。

若对每个 $d \in D$ 均满足强制性判据(C_d)，且存在 $r > \sup\{r_d : d \in D\}$，使得集合 $K(D) \cap B(0,r)$是紧集，并且对所有 $d \in D$，$K(d) \cap B(0,r)$非空，则拟变分不等式(F, f, K) (2)存在一个解。

证明。考虑映射 $K_r : D \to 2^X$ 定义为 $K_r(d) = K(d) \cap \bar{B}(0,r)$，其中 $d \in D$。由于 $K(d) \cap B(0,r)$ 非空，强制性条件 (C_d) 表明我们可以找到一个元素 $z \in K(d) \cap B(0,r)$。因此，根据引理 2.1，K_r 满足下半连续性。由此容易看出，K_r 是闭的、下半连续的，且具有非空凸值。

定义映射 $H_r : D \to 2^{X^*}$ 为 $H_r = f \circ \Gamma_r$，其中 $\Gamma_r : D \to 2^X$ 定义为

$$\Gamma_r(d) = S(F, K_r(d)) \quad \text{for any} \quad d \in D.$$

采用定理 3.1 证明中给出的相同论证，可知对于任意 $d \in D$,

$$\Gamma_r(d) = S(F, K_r(d)) = M(F, K_r(d)). \tag{7}$$

由于 $K_r(d) = K(d) \cap B(0,r)$ 是紧的，引理 [8, 引理 2.1] 和[8, 命题 2.1] 共同推出 $M(F, K_r(d)) \neq \emptyset$，因此 $\Gamma_r(d) \neq \emptyset$。此外，由 (7) 可得，$\Gamma_r(d)$ 成为凸闭集，因此Γ_r 最终是一个非空闭凸值映射。按照定理 3.1 的证明，可以证明映射 Γ_r 具有闭图。因此，它是上半连续的，因为它包含于紧集 $K(D) \cap B(0,r)$ 中。

映射 $H_r = f \circ \Gamma_r$ 在 D 上确实是上半连续的，因为 Γ_r 是上半连续的，且函数 f 是连续的。由于对任意 $d \in D$，$\Gamma_r(d)$ 都是凸的，且 f 是仿射的，因此我们可以很容易地验证集合 $H_r(d)$ 是凸的。此外，由于 f 是连续的，且 $\Gamma_r(d)$ 是紧的，因此对任意 $d \in D$，$H_r(d) = f(\Gamma_r(d))$ 都是紧的。因此，H_r 是一个非空的凸紧值映射，并满足上半连续性。于是，考虑常值约束映射 $K(x) = D$，根据定理 2.1，变分不等式 $S(H_r, D)$ 有一个解。这意味着存在 $\tilde{d} \in D$，使得 $d \in D$ 和 $\tilde{x} \in \Gamma_r(d)$ 满足：

$$\langle f(\tilde{x}), d - \tilde{d} \rangle \geq 0, \ \forall d \in D. \tag{8}$$

现在，由 $\tilde{x} \in \Gamma_r(d)$ 可得 $\tilde{x} \in K(d) \cap B(0,r)$，因此我们得到 $\tilde{x}^*$ 属于 $F(\tilde{x})$，并满足：

$$\langle \tilde{x}^*, x - \tilde{x} \rangle \geq 0, \text{ for each } x \in K(\tilde{d}) \cap \bar{B}(0,r). \tag{9}$$

现在，如果我们能够证明上述不等式（9）对任意 $z \in K(d)$ 都成立，那么这一对 $(d, \tilde{x})$ 就是拟变分不等式（2）的解。利用强制性条件（$C_{\tilde{d}}$），可以验证，存在某个 $\tilde{y} \in K(d) \cap B(0,r)$ 满足 $\langle x^*, \tilde{x} - \tilde{y} \rangle \geq 0$，对每个 $x^* \in F(\tilde{x})$ 都成立。结合（9）可得，

$$\langle \tilde{x}^*, \tilde{x} - \tilde{y} \rangle = 0. \tag{10}$$

由于 $z \in K(d)$ 和 $\tilde{y} \in K(d) \cap B(0,r)$，点 $t\tilde{y} + (1-t)z \in K(d) \cap B(0,r)$，其中某个 $t \in (0,1)$。因此，由（9）和（10）可得 $\langle \tilde{x}^*, z - \tilde{x} \rangle \geq 0$。由于 $z \in K(d)$ 是任意的，不等式（9）对任意 $z \in K(d)$ 都成立。证明完毕。

□

4 动态竞争均衡问题的应用

我们将运用第 3 节证明的存在性定理，展示在时间区间 $[0,T], T > 0$ 上定义的时变纯交换经济中动态竞争均衡的存在（更多信息可参见 [1, 15, 17, 18]）。为此，我们首先将动态竞争均衡问题刻画为一个拟变分不等式（QVI），它是一般问题 QVI(F, f, K) (2) 的一个特例。然后，我们运用定理 3.1 和定理 3.2 证明动态竞争均衡的存在。为了处理涉及一定数量的主体在时间段 $[0,T]$ 内竞争不同商品的动态竞争均衡问题，我们需要使用勒贝格空间 $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$，以及定义如下的内积 $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle_m$：

$$\langle\!\langle h, g \rangle\!\rangle_m = \int_0^T \langle h(t), g(t) \rangle_m \, dt,$$

其中 $\langle ., . \rangle_m$ 表示欧几里得内积。此外，内积 $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle_m$ 在 $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ 上诱导出一个范数，我们将其记为 $||.||_{L^2}$。

假设 $\mathcal{J} = \{1, 2, \cdots, m\}$ 是商品集合，$\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是代理人集合。假设 $L = L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$，且 L 中的有序锥表示为：

$$C_L = \{\alpha \in L : \alpha^j(t) \text{ is non-negative for almost all } t \text{ in } [0,T], \forall\, j \in \mathcal{J}\}.$$

分别用 e_i 和 x_i 表示任意主体 i 在 C_L 中的禀赋和消费计划。设 $p_j(t)$ 为任意时刻 t 的 j^{th} 商品价格，我们假设价格向量 $p = (p_1, p_2, \cdots p_m) \in L$ 属于

定义如下的集合 P：

$$P = \left\{ p \in C_L : \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{m} p^j(t) dt = 1 \right\}. \tag{11}$$

为了获得更理想的商品，参与该博弈的主体在一定时间段内通过储存、购买和出售商品相互竞争。假设主体 i 在任意时刻 $t \in [0,T]$ 相对于消费向量x_i的偏好通过函数 u_i 表示为：$[0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$。于是，每个主体不仅希望在特定时刻 t最大化其效用函数 u_i，还希望在整个时间段 $[0,T]$内实现最大化。特别地，每个主体 i 希望最大化平均值效用函数 $\mathcal{U}_i$： $L^2([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$，其定义为：

$$\mathcal{U}_i(x_i) = \int_0^T u_i(t, x_i(t)) dt. \tag{12}$$

此外，对于任意价格向量 $p \in P$，由于禀赋所带来的财富，任何主体 i 的支出不得超过其财富。因此，适用以下预算约束：

$$M_i(p) = \left\{ x_i \in C_L : \langle\!\langle p, x_i - e_i \rangle\!\rangle_m \leq 0 \right\}. \tag{13}$$

时变纯交换经济的动态竞争均衡正式定义如下 [1, 17, 18]。

定义 4.1。 *[1, 17]* 价格向量 $\bar{p} \in P$ 与消费向量$\bar{x} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} M_i(\bar{p})$构成动态竞争均衡（$\bar{p}, \bar{x}$），当且仅当：

$$\mathcal{U}_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in M_i(\bar{p})} \mathcal{U}_i(x_i) \ \forall\, i \in \mathcal{I}, \ \textit{and} \tag{14}$$

$$\int_0^T \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} (\bar{x}_i^j(t) - e_i^j(t)) \right] dt \leq 0 \ \forall\, j \in \mathcal{J}. \tag{15}$$

在现有文献中，动态竞争均衡的存在性是通过拟变分不等式确立的，其假设是平均值效用函数满足凹性 [1, 17] 或半严格拟凹条件 [18]。我们假设，对于每个 $i \in \mathcal{I}$，以下假设组 (A1) 或 (A2) 之一成立，

(A1) (a) $u_i(t,w)$ 关于 t 可测，对所有 $w \in \mathbb{R}^m$均成立；(b) 对几乎所有 $t \in [0,T]$， $u_i(t,w)$ 关于 w 是凹的；(c) 对几乎所有 $t \in [0,T]$， $u_i(t,.) \in C^1(\mathbb{R}^m_+)$；(d) 对任意 $j \in \mathcal{J}$，函数 $\frac{\partial u_i}{\partial x_i^j}$ 关于 t 可测，且 ∇u_i 满足下述增长条件（见 [1, 24]），

$$||\nabla u_i(t,w)||_{\mathbb{R}^m} \leq C_i ||w||_{\mathbb{R}^m} + g(t) \ \forall\, w \in \mathbb{R}^m_+, \text{ 对几乎所有的 } t \in [0,T],$$

considering that $C_i > 0$ and $g \in L^2([0,T], \mathbb{R}_+)$.

(A2) $\mathcal{U}_i$: 按照 (12) 定义的 $L^2([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ 是拟凹且连续的。

~现在，我们考虑一个紧集 $D \subset P$ （见 [13, 17]），

$$\tilde{D} = \Bigg\{ p \in L : p^j(t) \geq 0 \text{ for all } j \in \mathcal{J}, \sum_{j=1}^{m} p^j(t) = 1 \text{ for almost all } t \text{ in } [0,T],$$
$$p(t) = 0 \text{ if } t \notin [0,T], \ \lim_{u \to 0} ||p(t+u) - p(t)||_{L^2} = 0 \text{ uniformly in } p \Bigg\}.$$

上述集合的紧性使我们能够应用定理 3.1 和定理 3.2，推导动态竞争均衡的存在性。

可以观察到，式 (13) 中定义的约束映射 M_i 取值无界。为便于数学处理，我们考虑一个有界映射$\tilde{K}_i$： $\tilde{D} \to 2^L$ ，定义如下：

$$\tilde{K}_i(p) = M_i(p) \cap H \tag{16}$$

其中， $H = \prod_{j \in \mathcal{J}} H_j$ 且每个有界凸集 H_j 定义如下：

$$H_j = \Bigg\{ \alpha \in L^2([0,T],\mathbb{R}) : \alpha(t) \geq 0 \text{ for almost all } t \in [0,T], \int_0^T \alpha(t)dt \leq r_j \Bigg\}$$

通过考虑 $r_j > \int_0^T \Big(\sum_{i \in \mathcal{I}} e_i^j(t) \Big) dt$。

现在，我们将上述随时间变化的纯交换经济刻画为以下拟变分不等式 QVI (17)：

~ ~确定 $(\bar{p}, \bar{x}) \in D \times K(\bar{p})$，使得 $\exists (\bar{x}_i^*)_{i \in \mathcal{I}} \in F(\bar{x})$ 成立，

$$\Big\langle\!\Big\langle \sum_{i \in \mathcal{I}} (e_i - \bar{x}_i), p - \bar{p} \Big\rangle\!\Big\rangle_m + \sum_{i \in \mathcal{I}} \big\langle\!\big\langle \bar{x}_i^*, y_i - \bar{x}_i \big\rangle\!\big\rangle_m \geq 0, \text{ for all } (p,y) \in \tilde{D} \times \tilde{K}(\bar{p}), \tag{17}$$

~ ~其中， $K(p) = \prod_{i \in \mathcal{I}} K_i(p)$ 是式 (16) 中所考虑的有界集，且映射F: $L^2([0,T],\mathbb{R}^{nm}) \to 2^{L^2([0,T],\mathbb{R}^{nm})}$ 定义如下：

$$F(x) = \prod_{i \in \mathcal{I}} F_i(x_i) = \begin{cases} \big\{(-\nabla u_1(x_1), \cdots, -\nabla u_n(x_n))\big\}, & \text{if (A1) holds} \\ (N^a_{-\mathcal{U}_1}(x_1) \setminus \{0\}, \cdots, N^a_{-\mathcal{U}_n}(x_n) \setminus \{0\}), & \text{if (A2) holds.} \end{cases} \tag{18}$$

在方程 (18) 中，符号 $\nabla u_i(x_i)$ 表示函数 $\nabla u_i(.,x_i(.))$，符号 $N^a_{-\mathcal{U}_i}$ 表示与拟凸函数 $-\mathcal{U}_i$ 相对应的调整正规算子（见第 2 节）。

引理 4.1. 假设 (A1) 或 (A2) 中给出的条件成立。若数对 $(\bar{p}, \bar{x})$ 是拟变分不等式 (17) 的解，则它是动态竞争均衡。

证明。向量 $(\bar{p}, \bar{x})$ 是拟变分不等式 (17) 的解，当且仅当条件 (19) 和 (20) ~均成立；也就是说，对于每个$i \in \mathcal{I}$， $\bar{x}_i \in K_i(\bar{p})$ 都是下列变分不等式问题的解：

$$\exists \bar{x}_i^* \in F_i(\bar{x}_i) \text{ satisfying } \big\langle\!\big\langle \bar{x}_i^*, y_i - \bar{x}_i \big\rangle\!\big\rangle_m \geq 0, \text{ for any } y_i \in \tilde{K}_i(\bar{p}), \tag{19}$$

˜和 $\bar{p} \in D$ 是下列变分不等式问题的解:

$$\langle\!\langle \sum_{i\in\mathcal{I}} (e_i - \bar{x}_i), p - \bar{p} \rangle\!\rangle_m \geq 0 \text{ for any } p \in \tilde{D}. \tag{20}$$

我们断言，满足拟变分不等式 (17) 的向量 $\bar{x}$ 也满足 (15)。利用 ˜(20) 以及 $\bar{x} \in M(\bar{p})$ 这一事实，对于任意 $p \in D$，可得以下不等式,

$$\langle\!\langle \sum_{i\in\mathcal{I}} (e_i - \bar{x}_i), p \rangle\!\rangle_m = \langle\!\langle \sum_{i\in\mathcal{I}} (e_i - \bar{x}_i), p - \bar{p} \rangle\!\rangle_m + \langle\!\langle \sum_{i\in\mathcal{I}} (e_i - \bar{x}_i), \bar{p} \rangle\!\rangle_m \geq 0.$$

在上述不等式中，若将 $p = (p^k)_{k\in\mathcal{J}} \in P$ 视为某个 j 和 $p^k = 0$ 的 $p^j = 1$，其中 $k \neq j$，那么显然 $p \in \tilde{D}$，因此我们断定 (15) 成立。

现在，我们证明 (19) 的任意一个解也是 (14) 的解。为此，我们首先证明，对于每个 $i \in \mathcal{I}$，向量 $\bar{x}_i$ 是下述问题的解,

$$\langle\!\langle \bar{x}_i^*, y_i - \bar{x}_i \rangle\!\rangle_m \geq 0, \text{ for each } y_i \in M_i(\bar{p}). \tag{21}$$

假设对于某个 $i \in \mathcal{I}$， $\bar{x}_i$ 不是 (21) 的解。那么,

$$\exists\, y_i' \in M_i(\bar{p}) \setminus H \text{ s.t. } \langle\!\langle x_i^*, y_i' - \bar{x}_i \rangle\!\rangle_m < 0, \text{ for all } x_i^* \in F_i(\bar{x}_i). \tag{22}$$

由于根据 (15) 有以下关系，因此我们得到满足 $B(\bar{x}_i, \epsilon) \cap C_L \subseteq H$ 的 $\epsilon > 0$，

$$\int_0^T \bar{x}_i^j(t)\ dt \leq \int_0^T \sum_{i\in\mathcal{I}} \bar{x}_i^j(t)\ dt \leq \int_0^T \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i^j(t)\ dt < r_j.$$

˜假设 $0 < \lambda < \frac{\epsilon}{||y_i' - \bar{x}_i||_{L^2}}$，则 $y_i^\circ = \lambda y_i' + (1-\lambda)\bar{x}_i \in K_i(\bar{p})$。因此，由（19）可得 $\langle\!\langle \bar{x}_i^*, y_i' - \bar{x}_i \rangle\!\rangle_m \geq 0$，这与我们在（22）中的假设矛盾。

˜显然，对于任意 $p \in D$， M_i 都有非空凸闭值。假设假设（A1）成立，则 $F_i(x_i) = \{-\nabla u_i(x_i)\}$，并且可以验证，（21）的任意解都是（14）中给出的最大化问题的解（见 [16, 17]）。此外，若（A2）成立，则 $F_i(x_i) = (N^a_{-\mathcal{U}_i}(x_i) \setminus \{0\})$，并且可以根据 [4, 命题 516]，由（21）推导出（14）。

□

我们通过运用引理 4.1 以及第 3 节中建立的存在性结果，来证明动态竞争均衡的存在。

定理 4.1. 假设以下条件之一成立:

(a) 对每个 $i \in \mathcal{I}$， u_i 都满足假设（A1）；

(b) $\mathcal{U}_i$ 对于每个满足以下条件的 $i \in \mathcal{I}$，均满足假设（A2）：映射 F 被视为 $F(x) = \prod_{i\in\mathcal{I}} (N^a_{-\mathcal{U}_i}(x) \setminus \{0\})$，具有非空凸紧值˜ ˜，并且在 conv$(K(D))$ 上满足上半连续性。

那么，只要 K_i 是定义在 D 上的下半连续映射，且对任意 $i \in \mathcal{I}$，集合 $K_i(D)$ 都是紧的，纯交换经济就存在动态竞争均衡~ ~ ~。

证明。根据引理 4.1，只需证明拟变分不等式 (17) 存在一个解，即可确保动态竞争均衡的存在。可以看出，拟变分不等式 (17) 是拟变分不等式 (F, f, K) (2) 的一个特例。事实上，我们考虑 $X = X^* = L^2([0,T], \mathbb{R}^{nm})$，且 $D = \tilde{D} \times \{0\} \cdots \{0\}$ 是所考虑的巴拿赫空间 X 的子集。令 $f\colon X \to X^*$ 为 $f($ x $=$ $\left(\sum_{i\in\mathcal{I}} e_i - x_i \quad 0 \cdots 0\right)$ $K \quad D \to 2^X$ $K\ d\ = \prod_{i\in\mathcal{I}} \tilde{K}_i\ p$) ( ) , , , 映射 : 定义为 ( ) ( )（由 (16) 得出），对任意 $d = (p, 0 \cdots 0) \in D$，并将 $F\colon X \to 2^{X^*}$ 视为，

$$F(x) = \begin{cases} \{(-\nabla u_1(x_1), \cdots, -\nabla u_n(x_n))\}, & \text{if hypothesis (a) holds} \\ (N^a_{-\mathcal{U}_1}(x_1) \setminus \{0\}, \cdots, N^a_{-\mathcal{U}_n}(x_n) \setminus \{0\}), & \text{if hypothesis (b) holds.} \end{cases}$$

注意到，$D \subset L$ 是一个非空凸紧集，而 f 是一个连续仿射函数。显然，M_i 是一个闭映射（见 [1, 引理 3.4 (ii)]），且其值为非空凸集。此外，由于我们对映射 K_i的假设，可以验证 K 是一个下半连续~映射。因此，K 成为一个闭的下半连续映射，且其值为非空凸集。

假设条件 (a) 成立，则可以验证，将映射F 视为 $F(x) = \{\prod_{i\in\mathcal{I}}(-\nabla u_i(x_i))\}$，它是连续的（见 [24, 定理 10.58]）且单调。因此，若假设条件 (a) 成立，且拟变分不等式 (17) 有一个解，该解即为动态竞争均衡，则定理 3.1 中的假设均得到满足。

同样，若假设条件 (b) 成立，则可以验证定理 3.2 中的所有假设均得到满足。因此，我们可以确保动态竞争均衡的存在。

□

~注4.1. (a) 假设对于任意 $i \in \mathcal{I}$，K_i 满足下半连续性，这一条件并不苛刻。事实上，可以验证，如果对每个$j \in \mathcal{J}$ 都满足下述生存性条件（参见 *[1,* 引理 3.*4]*），那么 M_i~ 在 D 上是下半连续的，

$$e_i^j(t) > 0, \ \textit{for almost all } t \in [0,T].$$

~最终，根据 *[14,* 引理 2.*3]*，K_i 成为下半连续的。

(b) 如果函数 $\mathcal{U}_i$ 连续且半严格拟凹，并且在 L 中没有最大值，即对于任意 $x_i \in L$，存在 $y_i \in L$，使得 $\mathcal{U}_i(y_i) > \mathcal{U}_i(x_i)\ \forall\, i \in \mathcal{I}$，那么瓦尔拉斯定律成立。事实上，对于任意 $p \in P$，若 $(\bar{x}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 是一个使 $\bar{x}_i \in M_i(p)$ 最大化的向量，那么显然条件 $\sum_{i\in\mathcal{I}} \langle\!\langle p, \bar{x}_i - e_i \rangle\!\rangle_m = 0$ 成立（参见 *[1, 15, 16]*）。

致谢

第一作者感谢印度 SERB 通过 (MTR/2021/000164) 提供的资金支持。第二作者谨向

印度大学拨款委员会致谢，感谢其通过 (1313/(CSIRNETJUNE2019)) 为本研究工作提供的资助。

参考文献

[1] Anello, G., Rania, F.：《动态瓦尔拉斯竞争交换经济的拟变分分析》。Int. J. Math. Anal. 7, 2517–2534 (2013)[2] Ansari, Q.H., K¨obis, E., Yao, J. C.：《向量变分不等式与向量优化：理论与应用》。施普林格，沙姆（2018）[3] Aubin, J.P., Ekeland, I.：《应用非线性分析》。Wiley，纽约（1984）[4] Aussel, D.：拟凸优化的新进展。载于：Al-Mezel, S.A.R., Al-Solamy, F.R.M., Ansari, Q.H.（编）：《不动点理论、变分分析与优化》。CRC Press, 佛罗里达（2014）[5] Aussel, D., Cotrina, J.：拟单调拟变分不等式：存在性结果及应用。《优化理论与应用杂志》158, 637-652 (2013)[6] Aussel, D., Cotrina, J.：符号连续性下拟单调变分不等式的稳定性。《优化理论与应用杂志》158, 653-667 (2013)[7] Aussel, D., Donato, M.B., Milasi, M., Sultana, A.：拟变分不等式的存在性结果及其在Radner均衡问题中的应用。Set-Valued Var. Anal. 29, 931–948 (2021)[8] Aussel, D., Hadjisavvas, N.：关于拟单调变分不等式。《优化理论与应用杂志》121, 445–450 (2004)[9] Aussel, D., Hadjisavvas, N.：调整后的次水平集、正规算子与拟凸规划。SIAM J. Opt. 16, 358–367 (2005)[10] Aussel, D., Sagratella, S.：通过变分不等式求解拟变分不等式任意解的充分条件。Math. Meth. Oper Res. 85, 3–18 (2017)[11] Bianchi, M., Hadjisavvas, N., Schaible, S.：拟单调变分不等式中的最小强制性条件与例外元素族。《优化理论与应用杂志》122, 1–17 (2004)[12] Blum, E., Oettli, W.：从优化与变分不等式到均衡问题。Math. Stud. 63, 123–145 (1994)[13] Brezis, H.：《泛函分析、Sobolev空间与偏微分方程》。施普林格，纽约（2011）[14] Cotrina, J., Hantoute, A., Svensson, A.：无界约束集上的拟均衡存在性。《优化》71, 337–354 (2020)

[15]Cotrina, J., Z ´u˜niga, J.：时变广义纳什均衡问题。《优化理论与应用杂志》179, 1054–1064 (2018)[16] Donato, M.B., Milasi, M., Vitanza, C.：《动态竞争经济均衡问题的拟变分不等式》。《不等式及其应用杂志》1–17 (2009)[17] Donato, M.B., Milasi, M., Vitanza, C.：《对动态竞争均衡问题的新贡献》。《应用数学快报》23, 148–151 (2010)[18] Donato, M.B., Milasi, M., Vitanza, C.：生产经济的演化拟变分不等式。《非线性分析：现实世界应用》40, 328–336 (2018)[19] Donato, M.B., Milasi, M., Vitanza, C.：变分问题、广义凸性及其在竞争均衡问题中的应用。《数值泛函分析与优化》35, 962–983 (2014)[20] Donato, M.B., Milasi, M., Villanacci, A.：含名义资产的不完全金融市场模型：变分方法。《数学分析及其应用杂志》457, 1353–1369 (2018)[21] Facchinei, F., Pang, J.C.：《有限维变分不等式与互补问题——第一卷》。施普林格，纽约（2003）[22] Hartman, P., Stampacchia, G.：关于一些非线性椭圆型微分泛函方程。《数学学报》115, 271–310 (1966)[23] Kien, B.T., Wong, N.C., Yao, J.C.：具有不连续多值函数的广义拟变分不等式的解存在性。《优化理论与应用杂志》135, 515–530 (2007)[24] Renardy, M., Rogers, R.C.：《偏微分方程导论》。施普林格科学与商业媒体，纽约（2006）[25] Tan, N.X.：拓扑线性局部凸豪斯多夫空间中的拟变分不等式。《数学新闻》122, 231-245 (1985)