arXiv:2301.06740v2 [physics.atom-ph] 8 Mar 2023

负能态对锶原子钟 E2-M1极化率差的贡献

Fang-Fei Wu、Ting-Yun Shi 和 Li-Yan Tang†

State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Innovation Academy for Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, People's Republic of China(日期：2023年3月9日)

随着高精度光学钟性能的提升，需要对原子与光之间的高阶多极相互作用进行定量评估。然而，对于锶原子钟，现有结果中魔术波长处的动态 E2-M1极化率差存在矛盾，尤其是理论结果与所有实验结果之间存在明显不相容的符号问题，这给理论研究带来了新的挑战。我们研究了负能态对 E2 和 M1 极化率的贡献。我们发现，对于 M1极化率，负能态的贡献占主导。我们得到的 E2-M1极化率差为 $-7.74(3.92)\times10^{-5}$ 原子单位，其符号与所有实验值一致。本研究解决了锶原子钟 E2-M1极化率差的符号不一致问题，并且负能态贡献的重要性可直接推广至其他钟的多极光学频移评估。

PACS分类号：31.15.ac, 31.15.ap, 34.20.Cf

I. 引言

高精度光学钟有着广泛而重要的应用，例如重新定义时间单位 [1–3],建立量子计量学 [4, 5], 检验基本常数的变化 [6–8], 探测暗物质和暗能量 [9, 10], 以及寻找新物理 [11–13]。锶原子钟是光晶格钟的典型代表，原子被囚禁在神奇波长光晶格中 [14, 15], 。在魔术波长处，与动态电偶极（E1）极化率相关的斯塔克频移主导项可以消除，但与动态电四极（E2）和磁偶极（M1）极化率相关的多极斯塔克频移则无法抵消。目前，锶原子钟的系统不确定度已达到 10^{-18} 精度水平 [16–21]。为开发并实现不确定度和稳定度超越 10^{-18}的新一代更高精度光学钟，必须对光与原子之间、与 E2 和 M1 极化率相关的多极相互作用进行定量评估 [22–26]。

然而，对于锶原子钟，在 813.4280(5) 纳米的魔术波长处，E2-M1极化率差存在一个符号严重不一致的问题，这限制了锶光钟精度的提升。 [27]理论 [22–24, 28] 与实验 [25, 29, 30],之间的这一问题目前尚未解决。目前，两种不同理论方法得到的结果彼此一致。一种来自 Porsev等人 [24], 的从头算计算，他们利用组态相互作用与线性化耦合簇相结合（CI+all-）方法，得出 $2.80(36)\times10^{-5}$原子单位。

†电子邮件地址：lytang@apm.ac.cn

阶）方法。另一项结果为 $2.68(94)\times10^{-5}$原子单位， [28], 该结果通过结合狄拉克-福克加芯极化（DFCP）方法与相对论组态相互作用（RCI）方法得到，与 Porsev等人的数值相当。但这两项理论结果的符号都与 RIKEN研究组测得的 $-0.962(40)$ 毫赫兹 [25]相反。

最近，报道了两项关于 E2-M1 极化率差的最新实验结果。PTB研究组测得的数值为 -987^{+174}_{-223} μ赫兹 [29], ，而JILA研究组报道的另一数值为 $-1.24(5)$ 毫赫兹 [30]。两项实验结果均与RIKEN研究组的测量结果具有相同的负号。这进一步证实，理论与实验之间符号不一致的问题仍未解决，也给理论研究带来了新的挑战。因此，亟需新的理论解释来解决当前锶原子钟中 E2-M1 极化率的矛盾。

从理论角度来看，使用态求和方法计算多极极化率时，保持中间态的完备性至关重要。负能态是狄拉克理论的产物，也是态完备性的一部分；在原子和离子的 g 因子计算中，这一部分的重要性已得到强调 [31–38]。然而，负能态对光学钟多极极化率的贡献此前从未被讨论过。

本研究采用改进的 DFCP+RCI 方法，考虑负能态对锶原子钟动态多极极化率的贡献。与现有计算不同，我们纳入锶$^+$ 离子的所有负能态，以构建锶原子的组态。此外，计算多极极化率时的求和涵盖锶原子的所有负能态和

正能态。我们发现，对于 M1极化率，负能态的贡献比正能态的贡献大好几个数量级，并且能够彻底改变最终结果的符号。因此，本研究消除了锶原子钟 E2-M1 极化率差理论与实验之间的符号不一致问题。

II. 理论方法

DFCP+RCI组合方法能够有效预测多电子原子和离子的结构性质，并可获得与其他从头算方法一致的结果。例如，对于锶、镁和镉原子钟的 E1 极化率，DFCP+RCI 方法的数值与 CI+all- order 方法的结果 [28, 39, 40] 相差不超过 3%。本研究通过纳入单价电子离子的所有正能态和负能态来构建双价电子原子的组态，进而发展出一种改进的 DFCP+RCI 方法。获取锶原子的能量和波函数的详细实现过程如下：

首先，我们需要求解狄拉克-福克（DF）方程针对冻结的 Sr^{2+} 芯求解，以获得真实的芯轨道波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$，进而构造价电子与原子核之间的 DF 势 $V_{DF}(\boldsymbol{r})$。

其次，我们需要求解 DFCP 方程，以获得锶$^+$ 离子的单价电子波函数 $\phi(\boldsymbol{r})$，

$$h_{\rm DFCP}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\phi(\boldsymbol{r})\,, \tag{1}$$

其中， $h_{\rm DFCP}(\boldsymbol{r})$表示 DFCP 哈密顿量，

$$h_{\rm DFCP}(\boldsymbol{r}) = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + (\beta-1)c^2 + V_N(\boldsymbol{r}) + V_{DF}(\boldsymbol{r}) + V_1(\boldsymbol{r})\,, \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是 4×4 狄拉克矩阵，$\mathbf{p}$ 是价电子的动量算符， $V_N(\boldsymbol{r})$是价电子与原子核之间的库仑势。 $V_1(\boldsymbol{r})$是单体核极化势 [41], , 其取值与参考文献 [28]相同。在这一步中，特别需要指出的是，我们保留了正能态和负能态的所有波函数 $\phi(\boldsymbol{r})$，以便在下一步构建组态波函数 $|\Phi_I(\sigma\pi JM)\rangle$。

第三，我们对二价电子锶原子进行组态相互作用计算，

$$\left[\sum_i^2 h_{\rm DFCP}(\boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{\boldsymbol{r}_{12}} + V_2(\boldsymbol{r}_{12})\right]|\Psi(\pi JM)\rangle = E|\Psi(\pi JM)\rangle\,, \tag{3}$$

其中， $V_2(\boldsymbol{r}_{ij})$是双体核极化相互作用 [28, 42, 43]。系统的波函数 $|\Psi(\pi JM)\rangle$ 可展开为组态态波函数的线性组合，其宇称为 π，角动量为 J，磁量子数为 M ，

$$|\Psi(\pi JM)\rangle = \sum_I C_I|\Phi_I(\sigma\pi JM)\rangle\,, \tag{4}$$

其中， C_I 和 σ 分别是展开系数和额外的量子数，它们共同唯一确定每个组态态。在这一步中，我们可以获得锶原子的所有正能态和负能态。

当原子处于激光频率为 ω 的线偏振激光场中时，初态 $|0\rangle \equiv |n_0, J_0 = 0\rangle$ 的动态 M1 和 E2 极化率的一般表达式（其中 n_0 表示所有其他量子数）可写为 [44]

$$\alpha^{M1}(\omega) = \frac{2}{3}\sum_n \frac{\Delta E_{n0}|\langle 0\|T_1^{(0)}\|nJ_n\rangle|^2}{\Delta E_{n0}^2 - \omega^2}\,, \tag{5}$$

$$\alpha^{E2}(\omega) = \frac{1}{30}(\alpha\omega)^2\sum_n \frac{\Delta E_{n0}|\langle 0\|T_2^{(1)}\|nJ_n\rangle|^2}{\Delta E_{n0}^2 - \omega^2}\,, \tag{6}$$

其中， α 为精细结构常数， $T_\ell^{(\lambda)}$ 为 2^ℓ极跃迁算符，$\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$ 分别代表磁跃迁算符和电跃迁算符。ΔE_{n0} 表示初态 $|0\rangle$与中间态 $|nJ_n\rangle$之间的跃迁能量。约化矩阵元 $\langle 0\|T_{(0)_1}\ \|nJ_n\rangle$ 和 $\langle 0\|T_2^{(1)}\|nJ_n\rangle$ 可用单价电子体系 [45],的约化矩阵元 $\langle i\|t_1^{(0)}\|k\rangle$ 和$\langle i\|t_2^{(1)}\|k\rangle$ 表示。

$$\langle i\|t_1^{(0)}\|j\rangle = \frac{\kappa_i+\kappa_j}{2}\langle -\kappa_i\|C^1\|\kappa_j\rangle \int r[P_i(r)Q_j(r) + Q_i(r)P_j(r)]dr\,, \tag{7}$$

$$\langle i\|t_2^{(1)}\|j\rangle = \langle\kappa_i\|C^2\|\kappa_j\rangle \int r^2[P_i(r)P_j(r)+Q_i(r)Q_j(r)]dr\,, \quad (8)$$

其中， P_i（r）和 Q_i（r）是单价电子体系波函数的大分量和小分量。值得注意的是，电、磁约化矩阵元的径向积分不同。式（7）中的磁性部分涉及波函数大分量和小分量的叉积。此外，式（5）和式（6）中 M1 和 E2 极化率的求和包含所有中间态，包括负能态。

在本研究中，我们检验了随着 B 样条基组数量 N 和分波 ℓ 增加，多极极化率的收敛性。我们发现，随着 N 和 ℓ 增加，结果至少在 4 位有效数字上保持不变。因此，在下文中，我们选择列出使用最大基组得到的结果。计算中使用的 B 样条基组数量最多为 40，分波数最多为 5，组态总数达到 128781。

III. 结果与讨论

采用改进的 DFCP+RCI 方法并纳入负能态后，我们计算了锶原子钟的能量、约化矩阵元和多极极化率。我们发现，纳入负能态后，低能态的能量修正小于 3 ppm。此外，负能态对 E1极化率的影响很小，在目前的理论精度下无法体现。

对于我们所关注的 813.4280(5) 纳米魔术波长处钟态的多极极化率，表 I 和表 II 分别列出了 E2 极化率和 M1 极化率的分项贡献。可以看出，对于 E2 极化率，基态 $5s^2\,{}^1S_0$ 的主要贡献来自 $5s4d\,{}^1D_2$ 和 $5s5d\,{}^1D_2$ 的正能态，二者分别约占 E2 极化率总计的 75% 和 13%。对于激发态 $5s5p\,{}^3P_0^o$，主要贡献来自 $5d5p\,{}^3F_2^o$、$5s6p\,{}^3P_2^o$ 和 $5s4f\,{}^3F_2^o$ 态，这三项合计约占 E2 极化率总计的 60%。特别是，对于 $5s^2\,{}^1S_0$ 和 $5s5p\,{}^3P_0^o$ 两个钟态，负能态的贡献小于 10^{-14}，几乎可以忽略。

然而，与 E2极化率不同，负能态对动态 M1 极化率的影响显而易见且占主导地位，这一点从表 II中可以清楚地看出。对于 $5s^2\,{}^1S_0$ 态，如果不考虑负能态，最大贡献来自 $5p^2\,{}^3P_1$ 态。考虑负能态后，在 813.4280(5) 纳米魔术波长处的最终 M1极化率为

表 I：在 813.4280(5) 纳米魔术波长处，$5s^2\,{}^1S_0$ 和 $5s5p\,{}^3P_0^o$钟态的动态 E2 极化率（以原子单位计）的分项贡献（Contr.）。Tail 表示其他正能态的贡献，α^{E2+} 和 α^{E2-} 分别表示正能态和负能态的总贡献。方括号中的数字表示 10 的幂。

$5s^2\,{}^1S_0$		$5s5p\,{}^3P_0^o$	
子项	分项贡献	子项	分项贡献
$5s4d\,{}^3D_2$	1.258[-7]	$5s5p\,{}^3P_2^o$	−2.805[-6]
$5s4d\,{}^1D_2$	6.965[-5]	$5d5p\,{}^3F_2^o$	3.095[-5]
$5s5d\,{}^1D_2$	1.224[-5]	$5d5p\,{}^1D_2^o$	3.149[-6]
$5s5d\,{}^3D_2$	1.106[-8]	$5s6p\,{}^3P_2^o$	1.741[-5]
$5p^2\,{}^3P_2$	5.966[-8]	$4d5p\,{}^3D_2^o$	3.603[-6]
$5d^2\,{}^1D_2$	3.887[-8]	$5d5p\,{}^3P_2^o$	2.139[-6]
$5s6d\,{}^3D_2$	4.981[-10]	$5s4f\,{}^3F_2^o$	2.644[-5]
$5s6d\,{}^1D_2$	1.226[-7]	$5s7p\,{}^3P_2^o$	2.601[-6]
$5s7d\,{}^1D_2$	2.600[-6]	$5s5f\,{}^3F_2^o$	8.768[-6]
Tail	7.950[-6]	Tail	3.214[-5]
α^{E2+}	9.28[-5]	α^{E2+}	12.44[-5]
α^{E2-}	−8.64[-16]	α^{E2-}	−1.10[-15]
总计	9.28[-5]	总计	12.44[-5]

表 II：在 813.4280(5) 纳米魔术波长处，$5s^2\,{}^1S_0$ 和$5s5p\,{}^3P_0^o$ 钟态的动态 M1 极化率（原子单位）分项贡献（Contr.）。尾项表示其他正能态的贡献，α^{M1+} 和 α^{M1-} 分别表示正能态和负能态的总贡献。方括号中的数字表示 10 的幂。

$5s^2\,{}^1S_0$		$5s5p\,{}^3P_0^o$	
子项	贡献	子项	贡献
$5s4d\,{}^3D_1$	1.483[-15]	$5s5p\,{}^3P_1^o$	−4.811[-6]
$5s6s\,{}^3S_1$	4.098[-13]	$5s5p\,{}^1P_1^o$	−2.702[-7]
$5s5d\,{}^3D_1$	1.273[-12]	$5s6p\,{}^3P_1^o$	7.336[-10]
$5p^2\,{}^3P_1$	1.539[-9]	$5s6p\,{}^1P_1^o$	1.766[-8]
Tail	5.81[-10]	Tail	1.35[-8]
α^{M1+}	2.17[-9]	α^{M1+}	−5.05[-6]
α^{M1-}	−3.84[-4]	α^{M1-}	−4.88[-4]
总计	−3.84[-4]	总计	−4.93[-4]

从 2.17×10^{-9} 原子单位变为 -3.84×10^{-4} 原子单位，其符号完全改变。这是因为负能态的贡献比正能态的贡献大五个数量级，且两者的贡献符号相反。类似地，对于 $5s5p\,{}^3P_0^o$态，负能态的贡献比正能态的贡献大两个数量级，占最终 M1极化率的 99%。

为了进一步探究负能态贡献显著且占主导地位的原因，我们分析了负能态的分项贡献。我们发现，与正能态贡献不同，负能态贡献

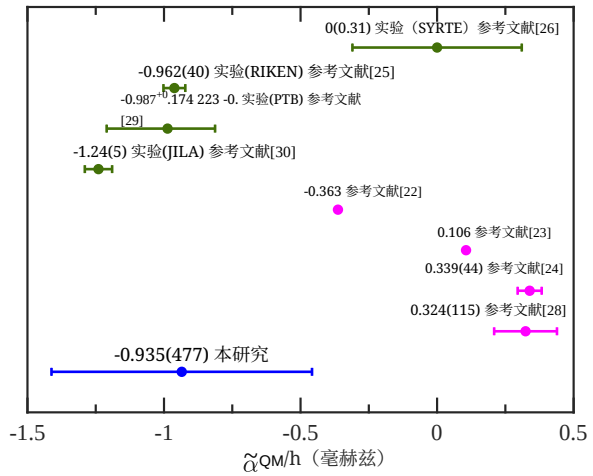

图1：（彩色在线版） $\tilde{\alpha}^{QM}/h$ （单位：毫赫兹）的比较。绿色线表示实验结果。蓝色线表示我们的当前值，洋红色线表示其他理论结果。

并非来自少数几个中间态的主要贡献，而是能量处于 $-37558(1)$ ($2mc^2 \approx 37558$) 原子单位范围内的数千个负能态累积作用的结果。尽管所有这些能量为 $-37558(1)$ 原子单位的负能态都远离初态，但这些态的径向波函数 $Q_j(r)$与初态波函数的 $P_i(r)$ 部分有较大的重叠，从而使式（7）中的 $P_i(r)Q_j(r)$ 乘积较大。换言之，负能态与初态之间一系列较大的 M1 跃迁矩阵元，导致负能态对M1极化率的贡献占主导地位。

表 III：总结了在 813.4280(5) 纳米魔术波长处， $5s^2\,{}^1S_0$和 $5s5p\,{}^3P_0^o$钟态的动态 E2 和 M1 极化率（单位：原子单位）结果。 $\Delta\alpha^{E2}(\omega)$ 和 $\Delta\alpha^{M1}(\omega)$ 分别表示钟态的动态 E2 和 M1 极化率之差。此外，$\Delta\alpha^{QM}(\omega) = \Delta\alpha^{M1}(\omega) + \Delta\alpha^{E2}(\omega)$。括号中的数字表示计算不确定度。方括号中的数字表示 10 的幂。

极化率	当前	参考文献 [28]	参考文献 [24]
$\alpha^{E2}_{^1S_0}(\omega)$	9.28(57)[-5]	9.26(56)[-5]	8.87(26)[-5]
$\alpha^{E2}_{^3P_0^o}(\omega)$	12.44(76)[-5]	12.44(76)[-5]	12.2(25)[-5]
$\Delta\alpha^{E2}(\omega)$	3.16(95)[-5]	3.18(94)[-5]	3.31(36)[-5]
$\alpha^{M1}_{^1S_0}(\omega)$	−3.84(24)[-4]	2.12(13)[-9]	2.37[-9]
$\alpha^{M1}_{^3P_0^o}(\omega)$	−4.93(30)[-4]	−5.05(31)[-6]	−5.08[-6]
$\Delta\alpha^{M1}(\omega)$	−1.09(38)[-4]	−5.05(31)[-6]	−5.08[-6]
$\Delta\alpha^{QM}(\omega)$	−7.74(3.92)[-5]	2.68(94)[-5]	2.80(36)[-5]

此外，由于 DFCP+RCI 方法的结果与从头算计算的结果相差不超过 3% [28, 39]，，我们可以在所有约化矩阵元中引入 % 的波动，以保守地评估当前 E2 和 M1 极化率的不确定度。最终数值汇总于表 III 中，该表还给出了详细比较。可以清楚地看到，对于 E2 极化率，当前包含负能态贡献的数值与仅包含正能态的文献 [24, 28]，中的结果非常一致。这再次证实，负能态对电极化率的贡献可以忽略。

此外，当前工作与表 III 中其他计算结果之间最明显的差异在于 M1极化率。对于 $5s^2\,{}^1S_0$ 态，当前值$-3.84(24)\times10^{-4}$ 原子单位与文献 [24, 28] 中的数值符号相反。而 $-3.84(24)\times10^{-4}$原子单位的绝对值比文献 [24, 28] 中的数值大五个数量级。对于 $5s5p\,{}^3P_0^o$态，当前值$-4.93(30)\times10^{-4}$ 原子单位比文献 [24, 28] 中的其他数值大两个数量级。

将 $\Delta\alpha^{E2}(\omega)$ 与 $\Delta\alpha^{M1}(\omega)$ 相加，可得到最终的E2-M1极化率差 $\Delta\alpha^{QM}(\omega) = -7.74(3.92)\times10^{-5}$ 原子单位，其中包含负能级态对 $-1.04(38)\times10^{-4}$ 原子单位的贡献。与我们先前的 $2.68(94)\times10^{-5}$ 原子单位相比，[28],当前工作的较大不确定度源于占主导地位的微分 M1 极化率 $\Delta\alpha^{M1}(\omega)$。由于 $-1.09(38)\times10^{-4}$ 原单位的绝对值比微分 E2 极化率 $\Delta\alpha^{E2}(\omega) = 3.16(95)\times10^{-5}$ 原子单位大一个数量级，两个项相加会导致有效数字发生明显抵消。这与文献 [24, 28]，中的其他计算结果完全不同，在后者中， $\Delta\alpha^{M1}(\omega)$ 比 $\Delta\alpha^{E2}(\omega)$ 小一个数量级。由于我们当前值 $-7.74(3.92)\times10^{-5}$ 原子单位的不确定度较大，目前采用 DFCP+RCI 方法提高精度的空间有限。因此，为了在未来进一步降低理论不确定度，有必要发展用于多电子原子结构计算的高精度理论方法，例如 CI+全阶方法。

为了便于直接与实验结果进行比较，我们将 E2-M1极化率差的所有理论值从原子单位（a. u.）转换为赫兹单位。如图1所示，其中 $\tilde{\alpha}^{QM} = \Delta\alpha^{QM}(\omega)E_R/\alpha^{E1}(\omega)$，$\alpha^{E1}(\omega) = 287(17)$ 原子单位表示钟态在813 纳米魔术波长处的动态 E1 极化率，而E_R 表示光晶格光子反冲能 [25]。可以清楚地看到，我们目前的数值为 $-0.935(477)$ 毫赫兹，其中包含了负能态贡献，与三个测量结果 $-0.962(40)$ [25]、$-0.987^{+0.174}_{-0.223}$ [29] $-1.24\ 5$ [30] 和（ ）毫赫兹符合得很好。这表明，负能态对于多极极化率的计算至关重要。

此外，从图1中还可以看出，JILA近期的测量 [30] 与RIKEN此前的测量 [25]之间存在差异。若将本研究的负能态贡献$-1.04(38)\times10^{-4}$ 原子单位加到CI+全阶值

2.80(36) $\times$ 10^{-5} 原子单位 [24], 上，并考虑到CI+全阶方法的不确定度约为我们DFCP+RCI方法的三分之一，则可得到估算值 $-7.60(1.50) \times 10^{-5}$ 原子单位（相当于 $-0.918(189)$ 毫赫兹）。考虑负能态贡献后，该值有望用于判断目前的实验结果。因此，亟需发展纳入负能态的高精度理论方法，以解决不同测量结果之间现有的差异。

IV. 结论

针对锶原子钟中现有理论与实验所得E2-M1极化率差符号明显相反这一问题，我们开发了包含负能态的组合DFCP+RCI方法，并将其应用于锶原子钟动态M1和E2极化率的计算。我们得到的E2-M1极化率差为 $-7.74(3.92)\times10^{-5}$原子单位，其符号与所有测得的数值一致。我们的工作解决了锶原子钟中E2-M1极化率差的符号不一致问题。未来，发展包含负能态的高精度理论方法，有望解决不同实验之间的差异。此外，我们的工作揭示了负能态的重要性，而以往所有光学钟计算中都未考虑这些态；这一研究还可拓展至精密测量物理学领域中原子与光之间多极相互作用的研究。

致谢

我们感谢 Yong-Hui Zhang 就负能态问题进行的有益讨论，并感谢 J. Chen、K.-L. Gao 和 Z.-C. Yan 阅读本文。本研究得到中国国家自然科学基金项目（编号：12174402 和 12004124）以及湖北省自然科学基金项目（编号：2019CFA058 和 2022CFA013）的资助。

[1] F. Bregolin、G. Milani、M. Pizzocaro、B. Rauf、P. Thoumany、F. Levi 和 D. Calonico, 《迈向秒重新定义的光晶格钟》, J. Phys. Conf. Ser. 841, 012015 (2017)。[2] K. Yamanaka、N. Ohmae、I. Ushijima、M. Takamoto 和 H. Katori, 《超越国际单位制极限的 ^{199}Hg 与 ^{87}Sr 光晶格钟频率比》, Phys. Rev. Lett. 114, 230801 2015( )。[3] A. D. Ludlow、M. M. Boyd、Jun Ye、E. Peik 和 P. O. Schmidt, 《光学原子钟》, Rev. Mod. Phys. 87, 637 (2015)。[4] I. S. Madjarov、A. Cooper、A. L. Shaw、J. P. Covey、V. Schkolnik、T. H. Yoon、J. R. Williams 和 M. Endres, 《具备单原子读出的原子阵列光学钟》, Phys. Rev. X 9, 041052 (2019)。[5] M.-J. Yin、X.-T. Lu、T. Li、J.-J. Xia、T. Wang、X.-F. Zhang 和 H. Chang, 《在浅光晶格钟中通过 Floquet工程实现赫兹级拉比谱》, Phys. Rev. Lett. 128, 073603 (2022)。[6] R. M. Godun、P. B. R. Nisbet-Jones、J. M. Jones、S. A. King、L. A. M. Johnson、H. S. Margolis、K. Szymaniec、S. N. Lea、K. Bongs 和 P. Gill, 《 ^{171}Yb$^+$ 中两个光学钟跃迁的频率比及对基本常数的时间变化的限制》, Phys. Rev. Lett. 113, 210801 (2014)。[7] N. Huntemann、B. Lipphardt、C. Tamm、V. Gerginov、S. Weyers 和 E. Peik, 《通过比较 Yb$^+$ 与 Cs 原子钟改进对 m_p/m_e 时间变化的限制》, Phys. Rev. Lett. 113, 210802 (2014)。[8] M. S. Safronova、S. G. Porsev、C. Sanner 和 J. Ye, 《中性镱的两种钟跃迁：对精细结构常数变化具有最高灵敏度》, Phys. Rev. Lett. 120, 173001 (2018)。[9] A. Arvanitaki、J. Huang 和 K. Van Tilburg, 《利用原子钟搜寻膨胀子暗物质》, Phys. Rev. D 91, 015015 (2015)。[10] B. M. Roberts、G. Blewitt、C. Dailey、M. Murphy、M. Pospelov、A. Rollings、J. Sherman、W. Williams 和 A. Derevianko，利用全球定位系统卫星搭载的原子钟搜索畴壁暗物质，《自然·通讯》8，1195（2017）。[11] H. Pihan-Le Bars、C. Guerlin、R. D. Lasseri、J. P. Ebran、Q. G. Bailey、S. Bize、E. Khan 和 P. Wolf，利用自旋极化 ^{133}Cs冷原子钟检验普朗克尺度抑制下的洛伦兹不变性，《物理评论D》95，075026（2017）。[12] R. Shaniv、R. Ozeri、M. S. Safronova、S. G. Porsev、V. A. Dzuba、V. V. Flambaum 和 H. H¨affner，利用原子系统检验洛伦兹不变性的新方法，《物理评论快报》120，103202（2018）。[13] S. Kolkowitz、I. Pikovski、N. Langellier、M. D. Lukin、R. L. Walsworth 和 J. Ye，利用光晶格原子钟探测引力波，《物理评论D》94，124043（2016）。[14] M. Takamoto、F.-L. Hong、R. Higashi 和 H. Katori，一种光晶格钟，《自然》435，321（2005）。[15] A. D. Ludlow、M. M. Boyd、T. Zelevinsky、S. M. Foreman、S. Blatt、M. Notcutt、T. Ido 和 J. Ye，光晶格中 ^{87}锶钟跃迁的系统研究，《物理评论快报》96，033003（2006）。[16] B. J. Bloom、T. L. Nicholson、J. R. Williams、S. L. Camp 10^{-18} bell、M. Bishof、X. Zhang、W. Zhang、S. L. Bromley 和 J. Ye，具有该 10^{-18} 水平准确度和稳定性的光晶格钟，《自然》506，71（2014）。[17] T. Nicholson、S. Campbell、R. Hutson、G. Marti、B. Bloom、R. McNally、W. Zhang、M. Barrett、M. Safronova、G. Strouse 等，具有 2×10^{-18} 总不确定度的原子钟系统评估，《自然·通讯》6，6896（2015）。[18] I. Ushijima、M. Takamoto、M. Das、T. Ohkubo 和

H. Katori，低温光晶格钟，《自然·光子学》9，185（2015）。[19] T. Bothwell、D. Kedar、E. Oelker、J. M. Robinson、S. L. Bromley、W. L. Tew、J. Ye 和 C. J. Kennedy，具有 2×10^{-18}不确定度的JJILA 锶一光晶格钟，《计量学》56，065004（2019）。[20] E. Oelker、R. B. Hutson、C. J. Kennedy、L. Sonderhouse、T. Bothwell、A. Goban、D. Kedar、C. Sanner、J. M. Robinson、G. E. Marti 等，两台独立光学钟在1秒时实现4.8×10^{-17} 稳定度，《自然·光子学》13，714（2019）。[21] B.-K. Lu、Z. Sun、T. Yang、Y.-G. Lin、Q. Wang、Y. Li、F. Meng、B.-K. Lin、T.-C. Li 和 Z.-J. Fang，利用7.2×10^{-18} 总不确定度改进对NIM-Sr2的黑体辐射和碰撞频移评估，《中国物理快报》39，080601（2022）。[22] V. D. Ovsiannikov、V. G. Pal'c hikov、A. V. Taichenachev、V. I. Yudin 和 H. Katori，光学晶格中锶原子钟的多极、非线性和非谐不确定度，《物理评论A》88，013405（2013）。[23] H. Katori、V. D. Ovsiannikov、S. I. Marmo 和 V. G. Palchikov，降低原子钟光移的策略，《物理评论A》91，052503（2015）。[24] S. G. Porsev、M. S. Safronova、U. I. Safronova 和 M. G. Kozlov，锶光晶格钟中的多极极化率和超极化率，《物理评论快报》120，063204（2018）。[25] I. Ushijima、M. Takamoto 和 H. Katori，锶光晶格钟的运行魔术强度，《物理评论快报》121，263202（2018）。[26] P. G. Westergaard、J. Lodewyck、L. Lorini、A. Lecallier、E. A. Burt、M. Zawada、J. Millo 和 P. Lemonde， 10^{-17} 水平下锶光晶格钟的晶格诱导频移，《物理评论快报》106，210801（2011）。[27] J. Ye、H. J. Kimble 和 H. Katori，利用态不敏感光阱进行量子态工程和精密计量，《科学》320，1734（2008）。[28] F.-F. Wu、Y.-B. Tang、T.-Y. Shi 和 L.-Y. Tang，锶晶格钟的动态多极极化率和超极化率，《物理评论A》100，042514（2019）。[29] S. D¨orscher、J. Klose、S. Maratha Palli 和 C. Lisdat，锶钟跃迁 $E2-M1$ 极化率的实验测定，《物理评论研究》5，L012013（2023）。[30] K. Kim、A. Aeppli、T. Bothwell 和 J. Ye，对浅晶格锶光学钟中处于中等 10^{-19} 不确定度的晶格光频移进行评估，arXiv:2210.16374。[31] V. M. Shabaev、D. A. Glazov、M. B. Shabaeva、V. A. Yerokhin、G. Plunien 和 G. Soff，高 Z 类锂离子的 g 因子，《物理评论A》65，062104（2002）。

[32] E. Lindroth 和 A. Ynnerman，Li、Be^+ 和 Ba^+ 的 g_j 因子的从头计算，Phys. Rev. A 47, 961 (1993). [33] D. A. Glazov、V. M. Shabaev、I. I. Tupitsyn、A. V. Volotka、V. A. Yerokhin、G. Plunien 和 G. Soff，类锂离子 g 因子的相对论和量子电动力学修正，Phys. Rev. A 70, 062104 (2004). [34] A. Wagner、S. Sturm、F. K¨ohler、D. A. Glazov、A. V. Volotka、G. Plunien、W. Quint、G. Werth、V. M. Shabaev 和 K. Blaum，类锂硅 $^{28}Si^{11+}$ 的 g 因子，Phys. Rev. Lett. 110, 033003 (2013). [35] V. A. Agababaev、D. A. Glazov、A. V. Volotka、D. V. Zinenko、V. M. Shabaev 和 G. Plunien，中Z类硼离子的基态 g 因子，J. Phys. Conf. Ser. 1138, 012003 (2018). [36] I. Arapoglou、A. Egl、M. H¨ ocker、T. Sailer、B. Tu、A. Weigel、R. Wolf、H. Cakir、V. A. Yerokhin、N. S. Ore- shkina 等，类硼氩 $^{40}Ar^{13+}$ 的 g 因子，Phys. Rev. Lett. 122, 253001 (2019). [37] H. Cakir 、V. A. Yerokhin、N. S. Oreshkina、B. Sikora、I. I. Tupitsyn、C. H. Keitel 和 Z. Harman，类锂和类硼离子 g **101**，因 062513 2020 子的量子电动力学修正，Phys. Rev. A ( ). [38] L. Wu、J. Jiang、Z.-W. Wu、Y.-J. Cheng、G. Gaigalas 和 C.-Z. Dong，Ar^{13+} 离子的能级、吸收振子强度、跃迁概率、极化率和 g 因子，Phys. Rev. A 106, 012810 (2022). [39] F.-F. Wu、Y.-B. Tang、T.-Y. Shi 和 L.-Y. Tang，采用魔术强度俘获镁晶格钟，将光移抑制至低于 10^{-19}，Phys. Rev. A 101, 053414 (2020). [40] M. Zhou 和 L.-Y. Tang，镉钟跃迁能级动态多极极化率的计算，Chin. Phys. B 30, 083102 (2021). [41] J. Mitroy 和 D. W. Norcross，电子碰撞激发 Be^+ 中的共振跃迁，Phys. Rev. A 37, 3755 1988( ). [42] J. Mitroy、M. S. Safronova 和 C. W. Clark，原子和离子极化率的理论与应用，J. Phys. B 43, 202001 (2010). [43] J. Mitroy 和 M. W. J. Bromley，碱金属原子和碱土金属原子的范德瓦耳斯系数半经验计算，Phys. Rev. A 68, 052714 (2003). [44] S. G. Porsev、A. Derevianko 和 E. N. Fortson，利用光学晶格中囚禁的镱原子实现 ^{171,173}Yb 原子中 $6\,^1S_0$ 到 $^3P_0^o$ 跃迁的光学钟的可能性，Phys. Rev. A 69, 021403 (2004). [45] W. R. Johnson，《原子结构理论：原子物理学讲义》（Springer，柏林，2007）。