具有无界势的薛定谔算子的双边热核估计

XIN CHEN JIANWANG

arXiv:2301.06744v1 [math.PR] 17 Jan 2023

摘要。考虑薛定谔算子 $\mathcal{L}^V = -\Delta + V$on $\mathbb{R}^d$，其中 V: $\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的非负局部有界势，使得对于所有满足 $|x| \geq 1$的 $x \in \mathbb{R}^d$， $c_1 g(|x|) \leq V(x) \leq c_2 g(|x|)$，其中 c_1、$c_2 > 0$ 为常数，且 g: $[0,\infty) \to [1,+\infty)$ 是一个非递减且严格为正的函数，满足对于所有 $r > 0$， $g(2r) \leq c_0 g(r)$，并且 $\lim_{r\to\infty} g(r) = \infty$.。我们通过概率方法，为相应薛定谔半群的热核建立全局时间范围内且定性尖锐的界。特别是，即使薛定谔半群并非内在超收缩的，我们也能给出热核在空间和时间上的全局双边估计。此外，还得到了相应格林函数的双边估计。

关键词： 薛定谔算子；热核；Feynman-Kac 公式；内在超压缩性；格林函数

MSC 2010： 60G51；60G52；60J25；60J75。

1. 引言与主要结果

关于定义在 $\mathbb{R}^d$ 或黎曼流形上的微分算子的热核界的研究历史悠久。有关这一主题的综述，可参阅 Davies[7], 、Grigor'yan [9] 和 Ouhabaz [17]的专著。 [1] 中证明了这方面的一项基本结果：散度形式的 $\mathbb{R}^d$ 上的二阶一致抛物型方程的基本解（即热核） $p(t,x,y)$ 满足以下高斯估计

$$p(t,x,y) \asymp t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{t}\right), \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

此处及下文中，对于两个函数 f 和 g， $f \asymp g$ 表示存在正数常量c_1， c_2， c_3， c_4，使得 $c_1 f(c_2 r) \leq g(r) \leq c_3 f(c_4 r)$。

此后，人们致力于刻画函数 V，使得薛定谔算子 $\mathcal{L} := -\Delta + V$（或带有薛定谔扰动 V 的二阶椭圆微分算子）的热核与高斯估计相当。例如，当 $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 且 $p > d/2$ 时，或者当势 V 属于所谓的 Kato类时，便会出现这种情况；关于这一主题的最新研究，参见 Bogdan、Dziubański 和 Szczypkowski [3]。然而，一般而言，这类高斯估计并不成立。一个典型且重要的例子是具有反平方势的薛定谔算子，即

$$\mathcal{L}_\lambda := -\Delta + \frac{\lambda}{|x|^2},$$

其中 $-(d-2)^2/4 \leq \lambda < 0$；关于 $\mathcal{L}_\lambda$ 的热核的显式非高斯估计，参见 Ishige、Kabeya 和 Ouhabaz [11], 、Milman 和 Semenov [16] 以及 Zhang [21, 22] 。

由于薛定谔算子及其性质在几何学、分析学、概率、量子力学等领域中发挥着重要作用，自然会提出以下重要问题（例如，参见 [21, 第 371] 页和 [22, 第 344]页）——

是否存在关于 $\mathcal{L}^V := -\Delta + V$ 的全局估计，能够揭示其对势 V 的显式依赖?

X. Chen: 中国上海市上海交通大学数学系，邮编 200240。chenxin217@sjtu.edu.cn。*J. Wang*: 中国福州市福建师范大学数学与统计学院、福建省数学分析及其应用重点实验室（FJKLMAA）和福建省应用数学中心（FJNU），邮编 350007。jianwang@fjnu.edu.cn。

显然， $\mathcal{L}^V$在 $\mathbb{R}^d$上的热核 $p(t,x,y)$ 满足

$$\frac{c_d e^{-\|V\|_\infty t}}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \le p(t,x,y) \le \frac{c_d e^{\|V\|_\infty t}}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right).$$

上述界在时间方面并非定性尖锐，因为函数 $e^{-\|V\|_\infty t}$ 和 $e^{\|V\|_\infty t}$ 同时出现在不等式两侧。特别是，当势 V 在 $\mathbb{R}^d$上无界时，上述界并无用处。在这种情况下，可以想见， $p(t,x,y)$的界会以非常隐含的方式依赖于势 V，此时高斯估计并不成立。许多作者研究了无界势对应的薛定谔算子的热核估计，参见例如 [12, 14, 15, 19] 及其中的参考文献。特别是，当势 V在无穷远处趋于无穷时，Sikora[19], 获得了热核 $p(t,x,y)$的精确对角估计；更多详情亦可参见 [12, 14, 15] 。事实上，在这一特殊设定下已有一些更深入的结果（参见 [2] 及其中的参考文献）。例如，设 $V(x) = |x|^\alpha$ 且 $\alpha > 2$，Davies 和 Simon 在 [8, 定理 6.3] 中证明，与算子 $\mathcal{L}^V = \Delta + V$相关的薛定谔半群满足所谓的内禀超收缩性。特别地，根据 [8, 定理 6.3] 以及 [7, 定理 4.2.5 和推论 4.5.8], ，我们知道，对于任意$\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得对所有 $t > T$和 x， $y \in \mathbb{R}^d$,

$$(1-\varepsilon)e^{-\lambda_1 t}\varphi_1(x)\varphi_1(y) \le p(t,x,y) \le (1+\varepsilon)e^{-\lambda_1 t}\varphi_1(x)\varphi_1(y),$$

其中 $\varphi_1(x)$ 是算子 $\mathcal{L}^V$ 的基态（对应于最小特征值 λ_1 的特征函数）（关于 φ_1 的显式表达式，另见 [19, 定理 7] ）。Metafune、Pallara 和 Rhandi [14], 也得到了类似的界，其中推导出了形如 $p(t,x,y) \le c(t)\varphi(x)\varphi(y)$ 的估计，并对当 t 趋于 0 时的 $c(t)$ 给出了更精确的估计。

然而，据我们所知，对于趋于∞ 的广义势 $V\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$（当 $|x| \to \infty$ 时），全局且在定性意义上尖锐的双边界（尤其是非对角估计）仍然未知。本文的主要目的是肯定地解决这一问题。

在全文中，设 $\mathcal{L}^V$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的薛定谔算子

$$\mathcal{L}^V = -\frac{1}{2}\Delta + V, \tag{1.1}$$

其中 $\Delta := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的拉普拉斯算子，而 $V\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的非负局部有界势。众所周知（例如参见 [6, 第 3] 章），存在与由 (1.1) 定义的算子 $\mathcal{L}^V$ 相联系的薛定谔半群 $\{T_t^V\}_{t\ge 0}$，并且根据 Feynman-Kac 公式，$\{T_t^V\}_{t\ge 0}$ 具有如下概率表示

$$T_t^V f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\right], \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d), \tag{1.2}$$

其中， $\{B_t\}_{t\ge 0}$ 是标准的 $\mathbb{R}^d$值布朗运动， $\mathbb{P}_x$ 和 $\mathbb{E}_x$ 分别表示对应于初始值为$x \in \mathbb{R}^d$ 的 $\{B_t\}_{t\ge 0}$ 的概率和期望。此外，根据 [6, 第 3] 章（另见 [20, 定理 B.7.1]），存在一个关于勒贝格测度的联合连续密度$p\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$，使得

$$T_t^V f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y) f(y)\,dy, \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

此外，由于 $\mathcal{L}^V$在 $L^2(\mathbb{R}^d;\, dx)$上是对称的，对于所有 $t > 0$和 $x, y \in \mathbb{R}^d$，均有 $p(t,x,y) = p(t,y,x)$。下文中，令 $q(t,x,y)$表示标准d维布朗运动 $\{B_t\}_{t\ge 0}$的转移密度函数（即热核）；也就是说，

$$q(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right), \quad t > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

由于 $V \ge 0$，显然

$$p(t,x,y) \le q(t,x,y), \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

为陈述主要结果，我们需要一些假设和记号。令 $\mathscr{G}$ 为非递减且严格为正的函数类 $g:[0,\infty)\to[1,+\infty)$，满足

$$\lim_{r\to\infty} g(r)=\infty$$

并且存在一个常数 $c_0>0$，使得对所有 $r\geq 0$,

$$g(2r)\leq c_0 g(r). \tag{1.5}$$

本文中，我们始终对 V 作如下假设:

假设 (H): 存在正数常量 C_1, C_2 和 $g\in\mathscr{G}$，使得

$$C_1 g(|x|)\leq V(x)\leq C_2 g(|x|),\quad x\in\mathbb{R}^d \text{ with } |x|>1. \tag{1.6}$$

对任意 $s\geq 0$，令

$$t_0(s):=\frac{1+s}{\sqrt{g(s)}},\quad s>0.$$

我们称 $t_0:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ 是几乎递增的（分别地，几乎递减的），如果存在一个递增的（分别地，递减的）函数 $h:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$，使得对某些正数常量 C_*、C^*,

$$C_* h(s)\leq t_0(s)\leq C^* h(s),\quad s\geq 0.$$

对任意 $a,b>0$, $a\wedge b=$最小$\{a,b\}$ 和 $a\vee b=$最大$\{a,b\}$。

定理 1.1. 在**假设 (H)**下，对任意 $C_0>0$，有

(i) 对所有 x, $y\in\mathbb{R}^d$ 和 $0<t\leq C_0 t_0(|x|\wedge|y|)$,

$$p(t,x,y)\asymp t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}\exp\left(-\left(t\min\{g(|x|),g(|y|)\}+|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}\right)\right). \tag{1.7}$$

(ii) 对所有 x, $y\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\geq C_0 t_0(|x|\wedge|y|)$,

$$p(t,x,y)\asymp e^{-t}\psi(t,x)\psi(t,y), \tag{1.8}$$

其中

$$\psi(t,x):=\exp\left(-\left((1+|x|)\sqrt{g(|x|)}+\frac{(1+|x|)^2}{t}\right)\right),\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

我们对定理 1.1 及其证明作几点评论。

(i) 与 [12, 14, 15, 19]，中采用的方法不同，我们主要使用概率方法证明定理 1.1。证明中用到的两个关键工具是热核 $p(t,x,y)$ 的概率表示式 (2.13)，以及 $(\tau_{B(x,r)}, B_{\tau_{B(x,r)}})$ 的显式分布，其中 $\tau_{B(x,r)}$ 是布朗运动 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 首次离开球 $B(x,r)$ 的时间。这为我们提供了一种新的方法: 通过仔细研究势 V 与布朗运动 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 的行为之间的相互作用，获得 $p(t,x,y)$ 的双边估计（即 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 访问 V 取不同值的位置的行为）。更多细节见下文引理 2.4、2.5、3.2 和 4.2 的证明。

（ii）本文仅考虑薛定谔算子 $\mathcal{L}^V=-\frac{1}{2}\Delta+V$的热核，但这一方法适用于更一般的框架。事实上，根据我们的证明，借助狄利克雷热核的导数的显式估计（见 (2.14) 和 (2.15)），我们可以考虑更一般的情形，例如将拉普拉斯算子 Δ 替换为 $\mathbb{R}^d$中的散度形式二阶微分算子，或黎曼流形上的拉普拉斯－贝尔特拉米算子。此外，通过应用 $p(t,x,y)$的概率表示 (2.13)，我们还可以在另一篇论文[5]中，为 V属于一类在无穷远处衰减至零的势函数的 $\mathcal{L}^V=-\Delta+V$得到双边热核估计。

(iii) 为了简化记号，本文对势函数 V作出**假设 (H)** 。仔细追踪证明后，我们立即得知，即使**假设 (H)**中对 V只要求下界，(1.7) 和 (1.8) 中的上界仍然成立，而 $p(t,x,y)$ 的相应下界仅依赖于 V的上界。此外，条件 (1.5) 对我们的结果仍非必要。例如，考虑势函数$V(x)$，使得对于所有满足 $g(r)=e^r$的 $|x|\geq 1$，都有 $C_1 g(C_2|x|)\leq V(x)\leq C_3 g(C_4|x|)$。那么，在

定理 1.1 的证明中，性质 $c_1 g(|x|) \le \sup_{z\in B(x,|x|/3)} V(z) \le c_2 g(|x|)$ 将由 $c_3 g(c_4|x|) \le \sup_{z\in B(x,|x|/3)} V(z) \le c_5 g(c_6|x|)$ 取代。因此，根据我们的论证可知，(1.7) 和 (1.8) 仍然成立。

如前所述，与已知结果相比，[12, 14, 15, 19], 定理 1.1 给出了 $p(t,x,y)$在全时间和空间范围内定性锐利的双边估计。据我们所知，定理 1.1 涵盖了文献中的对角估计，尤其是首次给出了（双边）非对角估计。下面，我们考虑一个具体例子，$V(x) = |x|^\alpha$ 适用于 $\alpha > 0$。请注意，当 $\alpha \in (0, 2]$,时，相应的薛定谔半群 $\{T_t^V\}_{t\ge 0}$并非内蕴超收缩；然而，下面的例 1.2 甚至给出了 $p(t,x,y)$在完整时间范围内的双边估计，这似乎也是新的。

例 1.2. 假设 $V(x) = |x|^\alpha$ 适用于 $\alpha > 0$。那么对每个 $x,\ y \in \mathbb{R}^d$，其中 $|x| \le |y|$ 且$t > 0$,

$$p(t,x,y) \asymp \begin{cases} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}} e^{-t(1+|x|)^\alpha - |x-y|(1+|y|)^{\alpha/2}}, & t \le (1+|x|)^{1-\alpha/2}, \\ e^{-t} e^{-(1+|y|)^{1+\alpha/2} - \frac{(1+|y|)^2}{t}}, & t > (1+|x|)^{1-\alpha/2}. \end{cases}$$

特别地,

(i) 对任意 $x,\ y \in \mathbb{R}^d$，若 $|x| \le |y|$ 满足 $|x-y| \le |y|/2$ 或 $|y| \le 2$，则有

$$p(t,x,y) \asymp \begin{cases} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}} e^{-t(1+|y|)^\alpha}, & t \le \max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\}, \\ e^{-t} e^{-(1+|y|)^{1+\alpha/2}}, & t > \max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\}. \end{cases} \tag{1.9}$$

(ii) 对任意 $x,\ y \in \mathbb{R}^d$，若 $|x| \le |y|$ 满足 $|x-y| > |y|/2$ 且 $|y| > 2$，则有

$$p(t,x,y) \asymp \begin{cases} t^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}} e^{-(1+|y|)^{1+\alpha/2}}, & t \le \max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\}, \\ e^{-t} e^{-(1+|y|)^{1+\alpha/2}}, & t > \max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\}. \end{cases} \tag{1.10}$$

在上面的例 1.2 中，我们将 $p(t,x,y)$ 的估计写得更为具体，从而揭示势 $V(x) = |x|^\alpha$ 在不同时间 $t > 0$ 和不同位置 $x, y \in \mathbb{R}^d$所产生的各种影响。对于较大的时间尺度 $t > \max\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\}$（其取决于位置$x, y \in \mathbb{R}^d$和势 V），高斯型界 $t^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}$已完全被基态 $\phi(x) \asymp e^{-(1+|x|)^{1+\alpha/2}}$ 的估计所覆盖（见 [7, 8]）。对于较小的时间尺度 $t \le \max\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\}$，主导界是高斯型界乘以某个额外项。特别地，当 x 接近 y（即 $|x-y| \le |y|/2$ 或 $|y| \le 2$）时，该项为 $e^{-t(1+\max\{|x|,|y|\})^\alpha}$；而当 x与 y之间的距离相对较大时，该项变为 $e^{-(1+\max\{|x|,|y|\})^{1+\alpha/2}}$。特别地，只要$t \le \min\{(1+|x|)^{-\alpha}, (1+|y|)^{-\alpha}\}$，$p(t,x,y)$ 就享有双侧高斯型界。

作为定理 1.1 的一个应用，我们得到薛定谔算子 $\mathcal{L}^V = -\frac{1}{2}\Delta + V$ 的格林函数的如下双边估计。

命题 1.3。假设**假设 (H)** 成立。设 $G(x,y) := \int_0^\infty p(t,x,y)\,dt$ 是与薛定谔半群 $\{T_t^V\}_{t\ge 0}$ 相关联的格林函数。那么，对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$G(x,y) \asymp |x-y|^{-(d-2)} \cdot \Gamma(x,y), \tag{1.11}$$

其中

(1.12)

$$\Gamma(x,y) = \exp\left(-|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|), g(|y|)\}}\right) \cdot \begin{cases} 1, & d \ge 3, \\ \max\left\{\log\left(\frac{1}{|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}\right), 1\right\}, & d = 2, \\ \frac{1}{|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}, & d = 1. \end{cases}$$

当 $|x-y|$ 趋于无穷时，格林函数 $G(x,y)$ 的估计由 Carmona 和 Simon [4] 以及 Schroeder [18], 建立，但命题 1.3 似乎是首次给出全空间区域内 $G(x,y)$ 的估计 (1.11)。注意,

$$\max\left\{\log\left(\frac{1}{|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}\right),1\right\}\asymp\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)$$

当 $|x-y|\le\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}$ 时。当 $d\ge2$ 时，根据 (1.11),

$$G(x,y)\asymp\begin{cases}Q(x,y), & |x-y|\le\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}},\\ |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}\right), & |x-y|>\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}},\end{cases}$$

其中， $Q(x,y)$ 表示拉普拉斯算子 Δ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的格林函数；当 $d=1$ 时，有

$$G(x,y)\asymp\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}, & |x-y|\le\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}},\\ |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}\right), & |x-y|>\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}.\end{cases}$$

上述估计表明，当 $d\ge2$ 时，在小距离尺度下， $G(x,y)\asymp Q(x,y)|x-y|\le\frac{1}{\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}}$ （这取决于位置 x、$y\in\mathbb{R}^d$ 以及势 V），这说明势 V 仅在大距离尺度下才有显著影响；当 $d=1$ 时，即使在小距离尺度下，势 V 在估计 $G(x,y)$ 中也起主导作用。

本文其余部分安排如下。下一节将给出一些初步估计。随后，第 3 节和第 4 节分别证明当 $0<t\le C_0t_0(|x|\wedge|y|)$ 和 $t\ge C_0t_0(|x|\wedge|y|)$ 时的定理 1.1。第 5 节将给出例 1.2 和命题 1.3 的证明。

2. 预备知识

对于任意 $D\subset\mathbb{R}^d$，令 $\tau_D=\inf\{t\ge0:\ B_t\notin D\}$. 我们从 $p(t,x,y)$ 的如下随机表示开始。

引理 2.1. 设 U 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个区域。那么，对于每个 $x\in U$ 和 $y\notin\bar{U}$,

$$p(t,x,y)=\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\le t\}}p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},y\right)\right]. \tag{2.13}$$

证明。由于 $y\notin U$，存在一个开集 D，使得 $y\in D\subset U^c$。取任意满足 $\mathrm{supp}[f]\subset D$ 的非负函数 $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$，则有

$$\begin{aligned}T_t^Vf(x)&=\mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^tV(B_s)\,ds\right)\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds-\int_{\tau_U}^tV(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\le t\}}\right]\\&=\mathbb{E}_x\left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\le t\}}\mathbb{E}_{B_{\tau_U}}\left[f(B_{t-\tau_U})\exp\left(-\int_0^{t-\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\right]\right\}\\&=\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\le t\}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},z\right)f(z)\,dz\right)\right]\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\le t\}}p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},z\right)\right]f(z)\,dz,\end{aligned}$$

其中，第二个等号由以下事实得出：由于 $\mathrm{supp}[f]\cap U=\emptyset$，当 $\tau_U>t$ 时， $f(B_t)=0$；第三个等号用到了强马尔可夫性质；第四个等号则是 Feynman-Kac公式 (1.2) 的推论。

由于 f 是c 任意选取，即可由上述等式立即得到所需的断言 (2.13) .

□

对于任意 $D \subset \mathbb{R}^d$，令 $q_D(t,x,y)$ 表示 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 在 D上的标准布朗运动的狄利克雷热核。记 $B(x,r) := \{z \in \mathbb{R}^d : |z-x| < r\}$ 为以 $x \in \mathbb{R}^d$为中心、半径为 $r>0$的欧几里得球。关于 (τ_D, B_{τ_D}) 的分布的下述刻画已在 [10,定理 1.1]中证明。

引理 2.2. 对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $r>0$，有

$$\mathbb{P}_x(\tau_{B(x,r)} \in dt, B_{\tau_{B(x,r)}} \in dz) = \frac{1}{2}\frac{\partial q_{B(x,r)}(t,x,\cdot)}{\partial n}(z)\,\sigma(dz)\,dt, \tag{2.14}$$

其中 $\sigma(dz)$ 表示 $\partial B(x,r)$ 上的勒贝格曲面测度（特别地，当 $d=1$时，$\sigma(dz)$ 是边界上的狄拉克测度），而 $\frac{\partial q_{B(x,r)}(t,x,\cdot)}{\partial n}(z)$ 表示$q_{B(x,r)}(t,x,\cdot)$在点 $z \in D$处的外法向导数。

引理 2.3. 存在正常数 C_i, $i=1,\cdots,4$，使得对于任意 $R>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $t>0$和 $y\in\partial B(x,R)$,

$$\frac{C_1 R}{t^{d/2+1}}\exp\left(-C_2\left(\frac{R^2}{t}+\frac{t}{R^2}\right)\right) \leq \frac{\partial q_{B(x,R)}(t,x,\cdot)}{\partial n}(y) \leq \frac{C_3 R}{t^{d/2+1}}\exp\left(-C_4\left(\frac{R^2}{t}+\frac{t}{R^2}\right)\right). \tag{2.15}$$

证明。由于布朗运动 $\{B_t\}_{t\geq 0}$具有空间齐次性，因此有

$$q_{B(x,R)}(t,x,y) = q_{B(0,R)}(t,0,y-x), \quad t,R>0, x,y\in\mathbb{R}^d,$$

因此，只需证明对于 $x=0$，(2.15) 成立。

根据 [23, 定理 1.1]（对于 $d\geq 3$）和 [13, 定理 1]（对于 $d\geq 1$），对于任意 $t\in(0,1]$ 和 x，$y\in B(0,1)$,

$$\begin{aligned} c_1 t^{-d/2}\left(\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t}\wedge 1\right)e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{t}} &\leq q_{B(0,1)}(t,x,y) \\ &\leq c_3 t^{-d/2}\left(\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t}\wedge 1\right)e^{-\frac{c_4|x-y|^2}{t}}; \end{aligned} \tag{2.16}$$

而对于任意 $t\in(1,+\infty)$ 和 x，$y\in B(0,1)$,

$$c_1(1-|x|)(1-|y|)e^{-c_2 t} \leq q_{B(0,1)}(t,x,y) \leq c_3(1-|x|)(1-|y|)e^{-c_4 t}. \tag{2.17}$$

利用 (2.16)、(2.17) 以及对所有 $y\in\partial B(0,1)$，$q_{B(0,1)}(t,0,y)=0$ 这一事实，我们立即可以得到：对于所有 $y\in\partial B(0,1)$ 和 $t\in(0,1]$,

$$\frac{c_5}{t^{d/2+1}}\exp\left(-\frac{c_6}{t}\right) \leq \frac{\partial q_{B(0,1)}(t,0,\cdot)}{\partial n}(y) \leq \frac{c_7}{t^{d/2+1}}\exp\left(-\frac{c_8}{t}\right);$$

而对于所有 $y\in\partial B(0,1)$ 和 $t\in(1,\infty)$,

$$c_5\exp\left(-c_6 t\right) \leq \frac{\partial q_{B(0,1)}(t,0,\cdot)}{\partial n}(y) \leq c_7\exp\left(-c_8 t\right).$$

因此，对于所有 $t>0$ 和 $y\in\partial B(0,1)$，都有：

$$\frac{c_9}{t^{d/2+1}}\exp\left(-c_{10}\left(\frac{1}{t}+t\right)\right) \leq \frac{\partial q_{B(0,1)}(t,0,\cdot)}{\partial n}(y) \leq \frac{c_{11}}{t^{d/2+1}}\exp\left(-c_{12}\left(\frac{1}{t}+t\right)\right). \tag{2.18}$$

另一方面，得益于标准布朗运动 $\{B_t\}_{t\geq 0}$的缩放性质，对于任意 $R>0$、$t>0$ 和 $y\in B(0,1)$，都有：

$$q_{B(0,1)}(t,0,y) = R^d q_{B(0,R)}(R^2 t,0,Ry).$$

将其与（2.18）结合可得，对于任意 $t>0$ 和 $y\in\partial B(0,R)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{B(0,R)}(t,0,\cdot)}{\partial n}(y) &= R^{-(d+1)}\frac{\partial q_{B(0,1)}(R^{-2}t,0,\cdot)}{\partial n}(R^{-1}y) \\ &\leq \frac{c_{11}}{R^{d+1}(R^{-2}t)^{d/2+1}}\exp\left(-c_{12}\left(\frac{1}{R^{-2}t}+R^{-2}t\right)\right) \\ &= \frac{c_{11}R}{t^{d/2+1}}\exp\left(-c_{12}\left(\frac{R^2}{t}+\frac{t}{R^2}\right)\right). \end{aligned}$$

类似地，应用（2.18）中的第一个不等式，我们可以得到，对于任意 $t>0$ 和 $y\in\partial B(0,R)$,

$$\frac{\partial q_{B(0,R)}(t,0,\cdot)}{\partial n}(y)\geq\frac{c_{13}R}{t^{d/2+1}}\exp\left(-c_{14}\left(\frac{R^2}{t}+\frac{t}{R^2}\right)\right).$$

因此，所需断言（2.15）得证。 □

借助上述所有引理，当$|x-y|>C_0t^{1/2}$时，我们得到 $p(t,x,y)$的以下上界估计。

引理 2.4。 给定任意常数 $C_0>0$，存在正常数 C_5 和 C_6，使得对所有x，$y\in\mathbb{R}^d$ 以及满足 $|x-y|>2C_0t^{1/2}$的 $t>0$，

$$p(t,x,y)\leq C_5t^{-d/2}\exp\left(-C_6\left(\frac{|x-y|^2}{t}+|x-y|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|y|)\}}\right)\right). \tag{2.19}$$

证明。 不妨设 $|x|\leq|y|$。特别地，有 $|x-y|\leq2|y|$。现在假设 $|x-y|>2C_0t^{1/2}$。令 $U=B(y,|x-y|/3)$。然后，根据（2.13），

$$\begin{aligned}
p(t,x,y)&=p(t,y,x)\\
&\leq\mathbb{E}_y\left[\exp\left(-\tau_U\inf_{u\in U}V(u)\right)p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},x\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t\exp\left(-s\inf_{u\in U}V(u)\right)\cdot\left(\int_{\partial U}p(t-s,z,x)\frac{\partial q_U(s,y,\cdot)}{\partial n}(z)\,\sigma(dz)\right)ds\\
&\leq c_1\int_0^t e^{-c_2sg(|y|)}(t-s)^{-d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{t-s}}|\partial U|\frac{|x-y|}{s^{d/2+1}}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}ds\\
&\leq c_3\int_0^t e^{-c_2sg(|y|)}(t-s)^{-d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{t-s}}\left(\frac{|x-y|^2}{s}\right)^{d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}s^{-1}ds\\
&\leq c_4t^{-d/2-1}e^{-\frac{c_5|x-y|^2}{t}}\int_0^t\exp\left(-c_5\left(sg(|y|)+\frac{|x-y|^2}{s}\right)\right)ds.
\end{aligned}$$

这里，上述第二个等式由 (2.14) 得出；在第二个不等式中，我们使用了 (2.15)，以及以下事实：$|x-y|>2C_0t^{1/2}$，$\inf_{u\in U}V(u)\geq c_6g(|y|)$（由 (1.5)、(1.6) 和 $|x-y|\leq2|y|$ 推得），并且

$$p(t-s,z,x)\leq q(t-s,z,x)\leq c_7(t-s)^{-d/2}e^{-\frac{c_8|x-y|^2}{t-s}},\quad z\in\partial U;$$

第三个不等式由 $|\partial U|\leq c_9|x-y|^{d-1}$ 得出；第四个不等式则由以下事实得出：由于 $|x-y|>2C_0t^{1/2}$，对所有 $s\in(0,t)$,

$$\begin{aligned}
&(t-s)^{-d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{t-s}}\left(\frac{|x-y|^2}{s}\right)^{d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}s^{-1}\\
&=|x-y|^{-d-2}\left(\frac{|x-y|^2}{t-s}\right)^{d/2}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{t-s}}\left(\frac{|x-y|^2}{s}\right)^{d/2+1}e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}\\
&\leq c_{10}|x-y|^{-d-2}e^{-\frac{c_{11}|x-y|^2}{t-s}}e^{-\frac{c_{11}|x-y|^2}{s}}\leq c_{12}t^{-d/2-1}e^{-\frac{c_{11}|x-y|^2}{t}}e^{-\frac{c_{11}|x-y|^2}{s}},
\end{aligned}$$

其中，在第一个不等式中，我们使用了

$$\left(\frac{|z|^2}{s}\right)^m e^{-\frac{c_2|z|^2}{s}}\leq e^{-\frac{c_{13}|z|^2}{s}},\quad s>0,\ m>0,\ z\in\mathbb{R}^d\text{ with }|z|>2C_0s^{1/2}$$

最后一个不等式同样由 $|x-y|>2C_0t^{1/2}$ 得出。

现在对所有 $s>0$，令 $G(s):=sg(|y|)+\frac{|x-y|^2}{s}$。我们可以直接验证

$$\inf_{s\in[0,t]}G(s)\geq\begin{cases}G(t)=tg(|y|)+\frac{|x-y|^2}{t}, & t\leq\frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}},\\ G\left(\sqrt{\frac{|x-y|^2}{g(|y|)}}\right)=2|x-y|\sqrt{g(|y|)}, & t>\frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}.\end{cases}$$

将其代入上述关于 $p(t,x,y)$ 的估计，可得

$$p(t,x,y) \le \begin{cases} c_{14}t^{-d/2}\exp\left(-c_{15}\left(tg(|y|)+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right), & t \le \frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \\ c_{14}t^{-d/2}\exp\left(-c_{15}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right), & t > \frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \end{cases}$$
$$\le c_{16}t^{-d/2}\exp\left(-c_{17}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right),$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了以下事实:

$$tg(|y|) \le |x-y|\sqrt{g(|y|)} \le \frac{|x-y|^2}{t} \quad \text{if } t \le \frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}.$$

证明完毕。 □

本节余下部分将给出 $T_t^V 1(x)$ 的上界估计。

引理 2.5. 存在常数 $C_7, C_8 > 0$，使得对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，只要满足 $|x| \ge 2$ ，

$$T_t^V 1(x) \le C_7\left(\exp(-C_8 tg(|x|)) + \exp\left(-\frac{C_8|x|^2}{t}\right)\right). \tag{2.20}$$

证明。 根据 (1.2)，对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x| \ge 2$,

$$T_t^V 1(x) = \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U > t\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U \le t\}}\right]$$
$$=: I_1(x) + I_2(x),$$

其中 $U = B(x, |x|/2)$。

由 (1.5) 和 (1.6) 可得 $\inf_{u\in U} V(u) \ge c_1 g(|x|)$，这立即意味着 t

$$I_1(x) \le \exp\left(-c_1 tg(|x|)\right).$$

另一方面,

$$I_2(x) \le \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U \le t, B_t \in B(x,|x|/3)\}}\right]$$
$$+ \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U \le t, B_t \notin B(x,|x|/3)\}}\right]$$
$$=: I_{21}(x) + I_{22}(x).$$

由强马尔可夫性质,

$$I_{21}(x) \le \mathbb{P}_x\left(\tau_U \le t, B_t \in B(x,|x|/3)\right) \le \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{B_{\tau_U}}\left(B_{t-\tau_U} \in B(x,|x|/3)\right)\right]$$
$$\le \sup_{s\in[0,t], z\in\partial U}\int_{B(x,|x|/3)} q(s,z,y)\,dy$$
$$\le c_2 \sup_{s\in[0,t]}\left(\left(\frac{|x|^2}{s}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{c_3|x|^2}{s}\right)\right) \le c_4\exp\left(-\frac{c_5|x|^2}{t}\right),$$

在第四个不等式中，我们使用了 (1.4)。同时，有

$$I_{22}(x) \le \mathbb{P}_x\left(B_t \notin B(x,|x|/3)\right) = \int_{B(x,|x|/3)^c} q(t,x,y)\,dy$$
$$\le c_6 t^{-d/2}\int_{B(x,|x|/3)^c}\exp\left(-\frac{c_7|x-y|^2}{t}\right)dy \le c_8\exp\left(-\frac{c_9|x|^2}{t}\right),$$

其中，第二个不等式由 (1.4) 得出，而在最后一步中，我们用到了这一事实 $|x| \ge 2$。

结合 上述关于 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 的所有估计，即可得到所需的结论 (2.20)。 □

Le引理 2.6. 存在正常数 C_9, C_{10} 使得对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$T_t^V 1(x) \le C_9 e^{-C_{10}t}. \tag{2.21}$$

证明。由 (1.2) 以及 $V \geq 0$ 这一事实，显然 (2.21) 对所有 $0 < t \leq 1$ 均成立。

接下来，我们考虑 $t > 1$ 的情形。令 $A := \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \geq 1\}$。由 V 的局部有界性及 (1.6)，可知 $|A| > 0$，因此对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$，都有 $\mathbb{P}_x(\Lambda) > 0$，其中

$$\Lambda := \{\omega \in \Omega : B_t(\omega) \in A \text{ for all } t \in [1/2, 1]\}.$$

因此，对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} T_1^V 1(x) &= \mathbb{E}_x \left[\exp\left(-\int_0^1 V(B_s)\, ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\exp\left(-\int_0^1 V(B_s)\, ds \right) \mathbf{1}_\Lambda \right] + \mathbb{E}_x \left[\exp\left(-\int_0^1 V(B_s) ds \right) \mathbf{1}_{\Lambda^c} \right] \\ &\leq e^{-1/2} \mathbb{P}_x(\Lambda) + \mathbb{P}_x(\Lambda^c) < \mathbb{P}_x(\Lambda) + \mathbb{P}_x(\Lambda^c) = 1. \end{aligned}$$

因此，由 $x \mapsto T_1^V 1(x)$ 的连续性可知，对于每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x \in K} T_1^V(x) < 1. \tag{2.22}$$

另一方面，根据 (2.20),

$$\lim_{|x| \to \infty} T_1^V(x) = 0.$$

组合 将其与 (2.22) 结合，可得存在一个正常数 $a \in (0, 1)$，使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} T_1^V(x) = a < 1.$$

通过应用常规的迭代论证，我们得到对所有 $k \in \mathbb{N}_+$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} T_k^V 1(x) \leq a^k = e^{-(\log a^{-1})k}.$$

此外，对任意 $t > 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} T_t^V 1(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} T_{t-[t]}^V \left(T_{[t]}^V 1 \right)(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} T_{[t]}^V 1(x) \leq e^{-(\log a^{-1})[t]} \leq a^{-1} e^{-(\log a^{-1})t},$$

因此证明完成。 □

下面定义

$$t_0(s) := \frac{1+s}{\sqrt{g(s)}}, \quad s > 0. \tag{2.23}$$

应用引理 2.6，可得到 (2.20) 的如下改进。

推论 2.7. 对于任意常数 $C_0 > 0$，存在常数 $C_{11}, C_{12} > 0$，使得对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$

$$T_t^V 1(x) \leq \begin{cases} C_{11} \exp\left(-C_{12} t g(|x|)\right), & 0 < t \leq C_0 t_0(|x|), \\ C_{11} \exp\left(-C_{12}(t + (1+|x|)\sqrt{g(|x|)}) \right), & t \geq C_0 t_0(|x|). \end{cases} \tag{2.24}$$

证明。当 $|x| \leq 2$, $t_0(|x|) \leq c_1$ 时，因此我们可以直接由 (2.21) 推出 (2.24)。所以，只需证明对每个满足 $|x| > 2$ 的 $x \in \mathbb{R}^d$，(2.24) 都成立。根据 (2.20) 和 (2.21)，我们有

$$\begin{aligned} T_t^V 1(x) =& T_{t/2}^V \left(T_{t/2}^V 1 \right)(x) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} T_{t/2}^V 1(z) \cdot T_{t/2}^V 1(x) \\ \leq& c_1 \left[\exp\left(-c_2(t + t g(|x|))\right) + \exp\left(-c_2 \left(t + \frac{(1+|x|)^2}{t} \right) \right) \right] \\ \leq& c_3 \left[\exp\left(-c_4 t g(|x|)\right) + \exp\left(-c_2 \left(t + \frac{(1+|x|)^2}{t} \right) \right) \right], \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了对所有 $r \geq 0$， $g(r) \geq 1$ 这一事实。此外，我们注意到，对所有 $t \leq C_0 t_0(|x|)$， $tg(|x|) \leq c_5(1+|x|)\frac{2}{t}$。将这一事实代入 (2.25)，当 $0 < t \leq C_0 t_0(|x|)$ 时，即可得到所需结论。特别地，有

$$T^V_{\frac{C_0 t_0(|x|)}{2}}(x) \leq c_5 \exp\left(-c_6(1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right).$$

结合（2.21）可得，对每个 $t > C_0 t_0(|x|)$,

$$\begin{aligned} T^V_t 1(x) &= T^V_{\frac{C_0 t_0(|x|)}{2}}\left(T^V_{t-\frac{C_0 t_0(|x|)}{2}} 1\right)(x) \leq \left(\sup_{z\in\mathbb{R}^d} T^V_{t-\frac{C_0 t_0(|x|)}{2}} 1(z)\right) \cdot T^V_{\frac{C_0 t_0(|x|)}{2}} 1(x) \\ &\leq c_7 \exp\left(-c_8\left(t - \frac{C_0 t_0(|x|)}{2}\right)\right) \exp\left(-c_8(1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right) \\ &\leq c_9 \exp\left(-c_{10}\left(t + (1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right)\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了如下事实：对于所有 $t > C_0 t_0(|x|)$， $t - \frac{C_0 t_0(|x|)}{2} > \frac{t}{2}$。因此，所需结论得证。□

3. 任意给定 $C_0 > 0$ 时 $0 < t \leq C_0 t_0(|x| \wedge |y|)$ 的双边估计

从本节开始，不失一般性，我们始终假设 $|x| \leq |y|$。我们先给出以下对角估计。

引理 3.1. 对于任意给定的 $C_0, C_0' > 0$，存在正常数 C_i, $1 \leq i \leq 4$，使得对所有 $t > 0$ 和 x, $y \in \mathbb{R}^d$，若满足 $0 < t \leq C_0 t_0(|x|)$ 且 $|x-y| \leq C_0' t^{1/2}$，则

$$C_1 t^{-d/2} \exp\left(-C_2 g(|x|)t\right) \leq p(t,x,y) \leq C_3 t^{-d/2} \exp\left(-C_4 g(|x|)t\right). \tag{3.26}$$

证明。假设 $0 < t \leq C_0 t_0(|x|)$ 且 $|x-y| \leq C_0' t^{1/2}$。由半群性质，

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz \leq c_1 t^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) dz \\ &= c_1 t^{-d/2} T^V_{t/2} 1(x) \leq c_2 t^{-d/2} \exp(-c_3 t g(|x|)). \end{aligned}$$

这里，第一个不等式用到了这一事实

$$p\left(t/2,z,y\right) \leq q\left(t/2,z,y\right) \leq c_1 t^{-d/2},$$

而最后一个不等式由 (2.24) 以及 $t/2 \leq C_0 t_0(|x|)$ 这一事实推出。

另一方面，令 $U := B(x, 3C_0' t^{1/2})$。由于 $t_0(|x|) \leq 1 + |x|$, $t^{1/2} \leq C_0^{1/2} t_0(|x|)^{1/2} \leq C_0^{1/2}(1+|x|)^{1/2}$。结合 (1.5) 和 (1.6)，可得 $\sup_{u\in U} V(u) \leq c_4 g(|x|)$。因此，对于任意满足 $\mathrm{supp}[f] \subset B(x, 2C_0' t^{1/2})$ 的 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$，有

$$\begin{aligned} T^V_t f(x) &= \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\right] \geq \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{t<\tau_U\}}\right] \\ &\geq \exp\left(-t\sup_{u\in U} V(u)\right)\mathbb{E}_x\left[f(B_t)\mathbf{1}_{\{t<\tau_U\}}\right] \geq \exp\left(-c_4 t g(|x|)\right)\int_{B(x,2C_0' t^{1/2})} q_U(t,x,z) f(z)\,dz \\ &\geq c_5 t^{-d/2}\exp\left(-c_4 t g(|x|)\right)\int_{B(x,2C_0' t^{1/2})} f(z)\,dz, \end{aligned}$$

其中，第三个不等式源于 $\mathrm{supp}[f] \subset B(x, 2C_0' t^{1/2})$；在最后一个不等式中，我们使用了下界 (2.16) 和 (2.17)，以及狄利克雷热核 $q_U(t,x,z)$ 的缩放性质。因此，利用上述不等式，我们可以推出 (3.26) 中 $p(t,x,y)$ 的下界。□

引理 3.2. 对于任意正数常量 C_0, C_0'，存在正常数 C_5 和 C_6，使得对所有满足 $0 < t \leq C_0 t_0(|x|)$ 的 $t > 0$ 和 x, $y \in \mathbb{R}^d$ 以及 $|x-y| > 2C_0' t^{1/2}$,

$$p(t,x,y) \geq C_5 t^{-d/2}\exp\left(-C_6\left(g(|x|)t + |x-y|\sqrt{g(|y|)} + \frac{|x-y|^2}{t}\right)\right). \tag{3.27}$$

证明。 假设 $0 < t \le C_0 t_0(|x|)$ 且 $|x-y| > 2C_0' t^{1/2}$。定义 $U = B(y, |x-y| - C_0' t^{1/2})$ 和$W = B(x, 3C_0' t^{1/2})$。可以验证,

$$|\partial U \cap W| \ge c_1 t^{\frac{d-1}{2}}. \tag{3.28}$$

由（2.13），我们有

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &= \mathbb{E}_y \left[\exp\left(-\int_0^{\tau_U} V(B_s)\, ds \right) p\left(t-\tau_U, B_{\tau_U}, x\right) \mathbf{1}_{\{\tau_U \le t\}} \right] \\ &\ge \mathbb{E}_y \left[\exp\left(-\tau_U \cdot \sup_{u\in U} V(u) \right) p\left(t-\tau_U, B_{\tau_U}, x\right) \mathbf{1}_{\{\tau_U \le t, B_{\tau_U} \in W\}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \exp\left(-s \sup_{u\in U} V(u) \right) \left(\int_{\partial U \cap W} p(t-s,z,x) \frac{\partial q_U(s,y,\cdot)}{\partial n}(z)\, \sigma(dz) \right) ds \\ &\ge \frac{c_2|x-y|}{t^{1/2}} \int_0^t e^{-c_3 s g(|y|)} (t-s)^{-d/2} e^{-c_3(t-s)g(|x|)} \left(\frac{t}{s}\right)^{d/2} e^{-\frac{c_3|x-y|^2}{s}} s^{-1}\, ds \\ &\ge c_4 t^{-d/2} e^{-c_5 t g(|x|)} \int_0^{t/2} \exp\left(-c_5 \left(s g(|y|) + \frac{|x-y|^2}{s} \right) \right) s^{-1}\, ds. \end{aligned} \tag{3.29}$$

这里，第二个等式由（2.14）得出；在上面的第二个不等式中，我们使用了（2.15）（注意此处 $|x-y| > 2C_0' t^{1/2}$）和（3.28），以及以下事实:

$$\begin{aligned} &\sup_{u\in U} V(u) \le \sup_{u:|u-y|\le|x-y|} V(u) \le \sup_{u:|u|\le 2|y|+|x|\le 3|y|} V(u) \le c_6 g(|y|), \\ &\sup_{z\in W} p(t-s,z,x) \ge c_7 (t-s)^{-d/2} e^{-c_8(t-s)g(|x|)}, \end{aligned}$$

它们分别可由（1.5）、（1.6）和（3.26）推出，而最后一个不等式则由以下事实得出： $\frac{|x-y|}{t^{1/2}} \ge c_9$。

此外，我们可以推出

$$\begin{aligned} &\int_0^{t/2} \exp\left(-c_5 \left(s g(|y|) + \frac{|x-y|^2}{s} \right) \right) s^{-1}\, ds \\ &\ge \begin{cases} \displaystyle\int_{t/4}^{t/2} \exp\left(-c_5 \left(s g(|y|) + \frac{|x-y|^2}{s} \right) \right) s^{-1}\, ds, & t \le \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \\ \displaystyle\int_{\frac{|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}}^{\frac{2|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}} \exp\left(-c_5 \left(s g(|y|) + \frac{|x-y|^2}{s} \right) \right) s^{-1}\, ds, & t > \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \end{cases} \\ &\ge \begin{cases} c_{10} \exp\left(-c_{11} \left(t g(|y|) + \frac{|x-y|^2}{t} \right) \right), & t \le \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \\ c_{10} \exp\left(-c_{11} |x-y| \sqrt{g(|y|)} \right), & t > \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \end{cases} \\ &\ge \begin{cases} c_{12} \exp\left(-\frac{c_{13}|x-y|^2}{t} \right), & t \le \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \\ c_{12} \exp\left(-c_{13} |x-y| \sqrt{g(|y|)} \right), & t > \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中最后一个不等式由以下事实得出:

$$t g(|y|) \le \frac{16|x-y|^2}{t} \quad \text{for } t \le \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}.$$

将 (3.30) 代入 (3.29)，得到

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &\ge \begin{cases} c_{14} t^{-d/2} \exp\left(-c_{15} \left(t g(|x|) + \frac{|x-y|^2}{t} \right) \right), & t \le \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \\ c_{14} t^{-d/2} \exp\left(-c_{15} \left(t g(|x|) + |x-y| \sqrt{g(|y|)} \right) \right), & t > \frac{4|x-y|}{\sqrt{g(|y|)}}, \end{cases} \\ &\ge c_{16} t^{-d/2} \exp\left(-c_{17} \left(t g(|x|) + |x-y| \sqrt{g(|y|)} + \frac{|x-y|^2}{t} \right) \right). \end{aligned}$$

至此，我们完成了 (3.27) 的证明。 □

引理 3.3。对于任意正数常量 C_0，C_0'，存在正数常量 C_7 和 C_8，使得对所有 $t>0$ 和 x，$y\in\mathbb{R}^d$，满足 $0<t\le C_0t_0(|x|)$ 且 $|x-y|>2C_0't^{1/2}$，

$$p(t,x,y)\le C_7t^{-d/2}\exp\left(-C_8\left(g(|x|)t+|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right). \tag{3.31}$$

证明。假设 $0<t\le C_0t_0(|x|)$ 且 $|x-y|>2C_0't^{1/2}$。证明分为两种情形。

情形 1： $|x-y|\le|y|/4$。根据半群性质，我们有

$$\begin{aligned}p(t,x,y)&=\int_{\{z:|z-y|\le|x-y|/2\}}p\left(t/2,x,z\right)p\left(t/2,z,y\right)dz\\&\quad+\int_{\{z:|z-y|>|x-y|/2\}}p\left(t/2,x,z\right)p\left(t/2,z,y\right)dz\\&=:I_1+I_2.\end{aligned}$$

当 $|z-y|\le|x-y|/2$ 时，有

$$|z-x|\ge|x-y|-|z-y|\ge\frac{|x-y|}{2}\ge C_0't^{1/2}.$$

于是，由 (2.19),

$$\begin{aligned}p\left(t/2,x,z\right)&\le c_1\exp\left(-c_2\left(|x-z|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|z|)\}}+\frac{|x-z|^2}{t}\right)\right)\\&\le c_3\exp\left(-c_4\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

这里最后一个不等式由.....得出

$$g(|z|)\ge g\left(|y|-|z-y|\right)\ge g\left(|y|-\frac{|x-y|}{2}\right)\ge g\left(\frac{7|y|}{8}\right)\ge c_5g(|y|),$$

其中我们用到了 (1.5) 和条件 $|x-y|\le|y|/4$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}I_1&\le\sup_{z\in\mathbb{R}^d:|z-y|\le|x-y|/2}p\left(t/2,x,z\right)\cdot\int_{\mathbb{R}^d}p\left(t/2,z,y\right)\,dz\\&\le c_3\exp\left(-c_4\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right)\cdot T^V_{t/2}1(y)\\&\le c_6\exp\left(-c_7\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+\min\left\{g(|y|)t,(t+(1+|y|))\sqrt{g(|y|)}\right\}\right)\right)\\&\le c_6\exp\left(-c_7\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+\min\left\{g(|x|)t,(t+(1+|x|))\sqrt{g(|x|)}\right\}\right)\right)\\&\le c_8\exp\left(-c_9\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+g(|x|)t\right)\right),\end{aligned}\tag{3.32}$$

其中第三个不等式由 (2.24) 得出，第四个不等式是因为 $|x|\le|y|$，最后一个不等式则由 $0<t\le C_0t_0(|x|)$ 得出。

类似地，当 $|z-y|>|x-y|/2>C_0't^{1/2}$ 时，由 (2.19) 可得

$$\begin{aligned}p\left(t/2,y,z\right)&\le c_{10}\exp\left(-c_{11}\left(|y-z|\sqrt{\max\{g(|y|),g(|z|)\}}+\frac{|y-z|^2}{t}\right)\right)\\&\le c_{12}\exp\left(-c_{13}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，再次利用 (2.24)，并按照估计 I_1 的相同论证，我们得到

$$I_2\le\sup_{z\in\mathbb{R}^d:|z-y|\le|x-y|/2}p\left(t/2,y,z\right)\cdot\int_{\mathbb{R}^d}p\left(t/2,x,z\right)\,dz$$

$$\leq c_{14}\exp\left(-c_{15}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+g(|x|)t\right)\right).$$

结合 w 利用 I_1 和 I_2的两个估计，我们可以在条件 $|x-y|$下证明 (3.31) ≤$|y|/4$。

情形2： $|x-y|>|y|/4$。由于 $|x|\leq|y|$，可得

$$|y|/4\leq|x-y|\leq|x|+|y|\leq 2|y|. \tag{3.33}$$

现在我们设

$$\begin{aligned}p(t,x,y)=&\int_{\{z:|z-y|\leq|y|/16\}}p\left(t/2,x,z\right)p\left(t/2,z,y\right)\,dz\\&+\int_{\{z:|z-y|>|y|/16\}}p\left(t/2,x,z\right)p\left(t/2,z,y\right)\,dz\\=:&\,J_1+J_2.\end{aligned}$$

当 $|z-y|\leq|y|/16$时，由于 (3.33)，可得

$$|z-x|\geq|x-y|-|z-y|\geq|x-y|-|y|/16\geq|x-y|-|x-y|/4\geq\frac{3C_0't^{1/2}}{4},$$
$$|z|\geq|y|-|z-y|\geq|y|-|y|/16\geq|y|/2.$$

根据这一点和 (2.19)，我们可得

$$\begin{aligned}p\left(t/2,x,z\right)&\leq c_{16}\exp\left(-c_{17}\left(|x-z|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|z|)\}}+\frac{|x-z|^2}{t}\right)\right)\\&\leq c_{18}\exp\left(-c_{19}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

再结合 (3.32) 的论证，可得

$$J_1\leq c_{20}\exp\left(-c_{21}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+g(|x|)t\right)\right).$$

另一方面，当 $|z-y|\geq|y|/16$ 时，由 (3.33) 可知

$$|z-y|\geq\frac{|y|}{16}\geq\frac{|x-y|}{32}\geq\frac{C_0't^{1/2}}{16}.$$

因此，再次应用 (2.19)，我们得到

$$\begin{aligned}p\left(t/2,z,y\right)&\leq c_{22}\exp\left(-c_{23}\left(|z-y|\sqrt{\max\{g(|y|),g(|z|)\}}+\frac{|z-y|^2}{t}\right)\right)\\&\leq c_{24}\exp\left(-c_{25}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

利用这一点，并沿用针对 I_2 的相同论证，我们得到

$$J_2\leq c_{26}\exp\left(-c_{27}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}+g(|x|)t\right)\right).$$

综合 J_1 和 J_2 的估计，我们可以证明当$|x-y|>|y|/4$ 时所需的结论 (3.31)。至此，证明完成。□

总结引理 3.1–3.3 的结果，我们可以得到当 $0<t\leq C_0t_0(|x|)$ 时，$p(t,x,y)$ 的以下双边估计。

命题 3.4. 对于任意 $C_0>0$，存在正常数 C_i，$9\leq i\leq 12$，使得对所有$x,y\in\mathbb{R}^d$ 满足 $|x|\leq|y|$ 以及所有 $0<t\leq C_0t_0(|x|)$，

$$\begin{aligned}&C_9t^{-d/2}\exp\left(-C_{10}\left(tg(|x|)+|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right)\\&\leq p(t,x,y)\\&\leq C_{11}t^{-d/2}\exp\left(-C_{12}\left(tg(|x|)+|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\right)\right).\end{aligned}\tag{3.34}$$

证明. 根据 (3.26)、(3.27) 和 (3.31)，只需证明对于任意给定的 $c_1>1$、 x、 $y\in\mathbb{R}^d$ 和 $0\le t\le C_0t_0(|x|)$，若满足 $|x-y|\le c_1t^{1/2}$，则有

$$|x-y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|x-y|^2}{t}\le c_2\left(1+tg(|x|)\right). \tag{3.35}$$

由于 $|x-y|\le c_1t^{1/2}$, $\frac{|x-y|^2}{t}\le c_3$。此外，根据杨氏不等式，

$$|x-y|\sqrt{g(|y|)}\le c_4t^{1/2}\sqrt{g(|x|)}\le\frac{c_4}{2}\left(1+tg(|x|)\right).$$

这里，第一个不等式由下式得出

$$\begin{aligned}g(|y|)&\le g\left(|x|+|x-y|\right)\le g\left(|x|+c_1t^{1/2}\right)\le g\left(|x|+c_5\sqrt{t_0(|x|)}\right)\\&\le g(|x|+c_5(1+|x|)^{1/2})\le c_6g(|x|),\end{aligned}$$

其中，第三个不等式是基于以下事实 $0<t\le C_0t_0(|x|)$；在第四个不等式中，我们使用了$t_0(|x|)\le1+|x|$; 在最后一个不等式中，我们使用了 (1.5)。

将以上所有估计结合起来即可得到 (3.35)。因此，证明完成。

□

4. Two-sided bounds when $t>C_0t_0(|x|\wedge|y|)$ with any $C_0>0$

回忆一下，对于每个 $s\ge0$， $t_0(s)=\frac{1+s}{\sqrt{g(s)}}$。我们称 $t_0:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ 几乎递增（分别地，递减），如果存在一个递增（分别地，递减）函数 $h:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$，使得对于某些正数常量 C_*,C^*,

$$C_*h(s)\le t_0(s)\le C^*h(s),\quad s\ge0. \tag{4.36}$$

本节将根据 $t_0(\cdot)$ 的不同（几乎单调）性质，给出当 $t>C_0t_0(|x|\wedge|y|)$ 满足任意$C_0>0$时， $p(t,x,y)$ 的双边估计。我们仍假设$|x|\le|y|$。

4.1. $t_0(\cdot)$ 几乎递减。

引理 4.1. 假设 $t_0(\cdot)$ 几乎递减。对于任意 $C_0>0$，存在正常数C_1,C_2，使得对所有 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 以及 $t>C_0t_0(|x|)$,

$$p(t,x,y)\le C_1e^{-C_2t}\exp\left(-C_2(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right). \tag{4.37}$$

证明。 由于 $|x|\le|y|$，由 (4.36) 以及 $t_0(\cdot)$ 的几乎递减性质，可找到一个与 x,y 无关的常数$c_1>0$，使得

$$t_0(|x|)\ge c_1t_0(|y|). \tag{4.38}$$

因此，

$$\begin{aligned}p(t,x,y)&=\int_{\mathbb{R}^d}p\left(t/2,x,z\right)p\left(t/2,z,y\right)dz\\&\le\sup_{z\in\mathbb{R}^d}p\left(t/2,x,z\right)\int_{\mathbb{R}^d}p\left(t/2,z,y\right)dz=\sup_{z\in\mathbb{R}^d}p\left(t/2,x,z\right)T^V_{t/2}1(y)\\&\le c_2t^{-d/2}e^{-c_3t}\exp\left(-c_4(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right).\end{aligned} \tag{4.39}$$

这里在上面的第二个不等式中，我们对 $T^V_{t/2}1(y)$ 使用了 (2.24)，并利用了由 (4.38) 保证的事实: $t>C_0t_0(|x|)\ge C_0c_1t_0(|y|)$，以及

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d}p\left(t/2,x,z\right)\le\sup_{z\in\mathbb{R}^d}q\left(t/2,x,z\right)\le c_5t^{-d/2}.$$

上述不等式以及对所有 $t>C_0t_0(|x|)$

$$t^{-d/2}\le(C_0t_0(|x|))^{-d/2}\le c_6t_0(|y|)^{-d/2}\le c_7\left(\frac{\sqrt{g(y)}}{1+|y|}\right)^{d/2}$$

$$\leq c_8\left((1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right)^{d/2} \leq c_9\exp\left(\frac{c_4}{2}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right)$$

其中 c_4 是式 (4.39) 中的常数，从而得出所需结论 (4.37)。 □

引理 4.2. 假设 $t_0(\cdot)$ 几乎递减。对于任意 $C_0>0$，存在正常数C_3, C_4，使得对所有 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 以及 $t>C_0t_0(|x|)$，

$$p(t,x,y)\geq C_3e^{-C_4t}\exp\left(-C_4(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right). \tag{4.40}$$

证明。 证明分为三种情形。

情形 1： $|x|\geq 4$。根据 (1.2)，对于每个满足 $\mathrm{supp}[f]\subset B(0,5)$ 且 $u\in B(0,5)$ 的 $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$ ，

$$\begin{aligned}T_t^Vf(u)&=\mathbb{E}_u\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^tV(B_s)\,ds\right)\right]\\&\geq\mathbb{E}_u\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^tV(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{t>\tau_{B(0,6)}\}}\right]\geq e^{-c_1t}\int_{B(0,5)}q_{B(0,6)}(t,u,z)f(z)\,dz,\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\sup_{z\in B(0,6)}V(z)\leq c_1$ 这一事实。这立即推出，对于任意$u,z\in B(0,5)$,

$$p(t,u,z)\geq e^{-c_1t}q_{B(0,6)}(t,u,z).$$

于是，由 (2.16) 和 (2.17)，对所有 $u,z\in B(0,5)$ 和 $t>0$,

$$\begin{aligned}p(t,u,z)\geq&\begin{cases}c_2t^{-d/2}e^{-\frac{c_3}{t}}, & 0<t\leq 1\\ c_2e^{-c_3t}, & t>1\end{cases}\\ \geq&c_4\exp\left(-c_5\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.41}$$

现在令 $U:=B(x,|x|-2)$ 和 $W:=B(0,3)$。因此，对所有 $u\in B(0,2)$，我们有:

(4.42)

$$\begin{aligned}p(t,x,u)&=\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^{\tau_U}V(B_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\leq t\}}p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},u\right)\right]\\&\geq\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\tau_U\cdot\sup_{z\in U}V(z)\right)p\left(t-\tau_U,B_{\tau_U},u\right)\mathbf{1}_{\{\tau_U\leq t,B_{\tau_U}\in W\}}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^t\exp\left(-s\sup_{z\in U}V(z)\right)\left(\int_{\partial U\cap W}p(t-s,z,u)\frac{\partial q_U(s,x,\cdot)}{\partial n}(z)\,\sigma(dz)\right)ds\\&\geq c_6\exp\left(-c_7\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\int_0^{t/2}\exp\left(-c_7\left(sg(|x|)+\frac{|x|^2}{s}+\frac{s}{|x|^2}\right)\right)s^{-(d/2+1)}\,ds\\&\geq c_6\exp\left(-c_7\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\int_{\frac{C_0t_0(|x|)}{8}}^{\frac{C_0t_0(|x|)}{4}}\exp\left(-c_7\left(sg(|x|)+\frac{|x|^2}{s}+\frac{s}{|x|^2}\right)\right)s^{-(d/2+1)}\,ds\\&\geq c_8\exp\left(-c_7\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\exp\left(-c_9|x|\sqrt{g(|x|)}\right)\\&\geq c_{10}e^{-c_7t}\exp\left(-c_{11}(1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right).\end{aligned}$$

这里，第一步由 (2.13) 得出，第三步是 (2.14) 的推论，第四步由 (2.15)、(4.41) 以及性质 $|\partial U\cap W|\geq c_{12}$、$\sup_{z\in U}V(z)\leq c_{13}g(|x|)$ 得出；第六步中，我们利用了这一事实：$\left($，注意到 $t_0(|x|)=\frac{1+|x|}{\sqrt{g(|x|)}}\right)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{C_0t_0(|x|)}{8}}^{\frac{C_0t_0(|x|)}{4}}\exp\left(-c_7\left(sg(|x|)+\frac{|x|^2}{s}+\frac{s}{|x|^2}\right)\right)s^{-(d/2+1)}\,ds\\&\geq c_{14}t_0(|x|)^{-d/2}\cdot\inf_{s\in[\frac{C_0t_0(|x|)}{8},\frac{C_0t_0(|x|)}{4}]}\exp\left(-c_7\left(sg(|x|)+\frac{|x|^2}{s}+\frac{s}{|x|^2}\right)\right)\\&\geq c_{15}\left((1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right)^{-d/2}\exp\left(-c_{16}|x|\sqrt{g(|x|)}\right)\geq c_{17}\exp\left(-c_{18}|x|\sqrt{g(|x|)}\right)\end{aligned}$$

而最后一个不等式则由以下事实得出：对所有 $C_0t_0(|x|) < t \le 1$ 和 $|x| \ge 4$,

$$e^{-\frac{c_7}{t}} \ge e^{-\frac{c_{19}}{t_0(|x|)}} \ge \exp\left(-\frac{c_{20}\sqrt{g(|x|)}}{1+|x|}\right) \ge \exp\left(-c_{21}(1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right).$$

特别地，我们得到对于每个 $|x| \ge 4$, $u \in B(0,2)$ 和 $t > C_0t_0(|x|)$,

$$p(t,x,u) \ge c_{10}e^{-c_7t}\exp\left(-c_{11}(1+|x|)\sqrt{g(|x|)}\right). \tag{4.43}$$

注意到 $|y| \ge |x| \ge 4$，由 (4.38) 可知，(4.43) 在将 x 替换为 y 后仍然成立。因此,

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &\ge \int_{B(0,2)} p\left(t/2,x,u\right) p\left(t/2,u,y\right)\, du \ge c_{22} \inf_{u\in B(0,2)} p\left(t/2,x,u\right) \cdot \inf_{u\in B(0,2)} p\left(t/2,u,y\right) \\ &\ge c_{23}e^{-c_{24}t}\exp\left(-c_{24}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right). \end{aligned}$$

因此，在 $|x| \ge 4$ 这一条件下，我们得到 (4.40)。

情形2： $|x| \le 4$ **和** $|y| \ge 4$。由于 $|y| \ge 4$，此处 (4.43) 在将 x 替换为 y 后成立。另一方面，注意到 (4.41) 对于 $u, z \in B(0,2)$ 成立。因此我们有

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &\ge \int_{B(0,2)} p\left(t/2,x,u\right) p\left(t/2,u,y\right)\, du \\ &\ge c_{25} \inf_{u\in B(0,2)} p\left(t/2,x,u\right) \cdot \inf_{u\in B(0,2)} p\left(t/2,u,y\right) \\ &\ge c_{26}\exp\left(-c_{27}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\exp\left(-c_{27}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \\ &\ge c_{28}e^{-c_{29}t}\exp\left(-c_{29}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是由 $t \ge \inf_{u\in B(0,4)} t_0(|u|) \ge c_{30} > 0$ 这一事实得到的。因此，我们证明了 (4.40) 对于 $|x| \le 4$, $|y| \ge 4$ 成立。

情形3： $|x| \le 4$ **和** $|y| \le 4$。注意，根据定义，我们有 $\inf_{u\in B(0,4)} t_0(|u|) \ge c_{30} > 0$，因此假设 $t > C_0t_0(|x|)$ 意味着存在一个正常数 c_{31} 使得 $t > c_{31}$。如上所述，(4.41) 对于 $u, z \in B(0,4)$ 成立，因此对于 x, y 也成立。因此,

$$\begin{aligned} p(t,x,y) &\ge c_{32}\exp\left(-c_{33}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) \\ &\ge c_{34}e^{-c_{35}t} \ge c_{36}e^{-c_{37}t}\exp\left(-c_{37}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们用到了对所有 $t > c_{31}$, $e^{-\frac{c_{33}}{t}} \ge c_{38}e^{-c_{35}t}$。 □

4.2. $t_0(\cdot)$ **几乎递增**。

引理4.3。假设 $t_0(\cdot)$ 几乎递增。对于任意 $C_0 > 0$，存在正常数C_5, C_6，使得对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 和 $t > C_0t_0(|x|)$,

$$p(t,x,y) \le C_5e^{-C_6t}\min\left\{\exp\left(-\frac{C_6(1+|y|)^2}{t}\right), \exp\left(-C_6(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right)\right\}. \tag{4.44}$$

证明。证明分为三种情形。

情形 1： $|y| \ge 2$ **和** $|y| \ge 2|x|$。当 $|y| \ge 2$ 且 $|y| \ge 2|x|$时，根据 $t_0(\cdot)$ 几乎递增这一条件，我们可以找到一个常数 $C_0' > 0$，使得 $C_0't_0(|y|) > C_0t_0(|x|)$。我们首先考虑情形 $C_0t_0(|x|) < t \le C_0't_0(|y|)$。

注意，对于每个满足 $|z-y| \le |x-y|/2$ 的 $z \in \mathbb{R}^d$，都有

$$|z-x| \ge |y-x|/2 \ge \frac{|y|-|x|}{2} \ge \frac{|y|}{4} \ge c_1t_0(|y|) \ge c_2\max\{t,1\} \ge 2c_3t^{1/2}. \tag{4.45}$$

其中，我们利用了以下事实：$t_0(y) \le 1+|y| \le 2|y|$、$t \le C_0't_0(|y|)$，以及 $\inf_{z\in\mathbb{R}^d} t_0(|z|) > 0$，这是因为 $t_0(\cdot)$ 几乎递增。因此，我们可以应用 (2.19)，得到对所有 $z \in \mathbb{R}^d$，有

$|z-y| \le |x-y|/2$,

$$
\begin{aligned}
p\left(t/2,x,z\right) &\le c_4 t^{-d/2}\exp\left(-c_5\left(|x-z|\sqrt{\max\{g(|x|),g(|z|)\}}+\frac{|x-z|^2}{t}\right)\right)\\
&\le c_6\exp\left(-c_7\left(|y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|y|^2}{t}\right)\right)\le c_8\exp\left(-\frac{c_9(1+|y|)^2}{t}\right).
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

这里，第二个不等式由 (4.45)、 $t > C_0 t_0(|x|) \ge c_{10}$ 以及对所有满足 $|z-y| \le |x-y|/2$ 的 $z \in \mathbb{R}^d$ 这一事实推出，

$$
g(|z|) \ge c_{11} g\left(|y| - |z-y|\right) \ge c_{12} g\left(|y| - \frac{|y|+|x|}{2}\right) \ge c_{13} g(|y|),
$$

其中我们还使用了 (1.5)，而最后一个不等式是以下性质的结果：

$$
\frac{|y|^2}{t} \ge c_{14}|y|\sqrt{g(|y|)}, \quad t \le C_0' t_0(|y|) \text{ and } |y| \ge 2.
$$

而对于每个满足 $|z-y| > |x-y|/2$ 的 $z \in \mathbb{R}^d$，根据 (4.45)，我们仍可应用 (2.19)，沿用上述论证得到

$$
\begin{aligned}
p\left(t/2,z,y\right) &\le c_{15} t^{-d/2}\exp\left(-c_{16}\left(|y-z|\sqrt{\max\{g(|y|),g(|z|)\}}+\frac{|y-z|^2}{t}\right)\right)\\
&\le c_{17}\exp\left(-c_{18}\left(|y|\sqrt{g(|y|)}+\frac{|y|^2}{t}\right)\right)\\
&\le c_{19}\exp\left(-\frac{c_{20}(1+|y|)^2}{t}\right).
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

现在，写成

$$
\begin{aligned}
p(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz\\
&= \left(\int_{\{z:|z-y|>|x-y|/2\}} + \int_{\{z:|z-y|\le|x-y|/2\}}\right) p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz\\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

根据 (4.47)，我们有

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \sup_{z:|z-y|>|x-y|/2} p\left(t/2,z,y\right)\cdot\int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right)\, dz\\
&\le c_{21}e^{-c_{22}t}\exp\left(-\frac{c_{23}(1+|y|)^2}{t}\right),
\end{aligned}
$$

这里我们用到了这一事实

$$
\int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) dz = T^V_{t/2}1(x) \le c_{24}e^{-c_{25}t}.
$$

这得益于 (2.21)。另一方面，按照上述相同的论证并利用 (4.46)，我们推得

$$
I_2 \le c_{26}e^{-c_{27}t}\exp\left(-\frac{c_{27}(1+|y|)^2}{t}\right).
$$

将上述关于 I_1 和 I_2 的两个估计结合起来，当$C_0 t_0(|x|) < t \le C_0' t_0(|y|)$时，我们便得到所需的断言 (4.44)。

接下来，我们考虑 $t > C_0' t_0(|y|)$ 的情形。由 (2.24) 可得

$$
T^V_{t/2}1(y) \le c_{28}e^{-c_{29}t}\exp\left(-c_{29}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right).
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
p(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right)\cdot T^V_{t/2}1(y) \\
&\leq c_{30}t^{-d/2}e^{-c_{29}t}\exp\left(-c_{29}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \\
&\leq c_{31}e^{-c_{29}t}\exp\left(-c_{29}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right),
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

其中我们用到了以下事实： $t \geq C_0't_0(|y|) \geq c_{32}$ 且

$$
\sup_{z\in\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} q\left(t/2,x,z\right) \leq c_{33}t^{-d/2} \leq c_{34}.
$$

I特别地，由于事实 tha，(4.48) 表明当 $t > C_0't_0(|y|)$ 时，(4.44) 成立 t

$$
\frac{(1+|y|)^2}{t} \leq c_{35}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}, \quad t > C_0't_0(|y|) \text{ and } |y| \geq 2.
$$

情形2： $|y| \geq 2$ 且 $|y| \leq 2|x|$。根据 $t_0(\cdot)$ 的定义以及事实 $|x| \leq |y| \leq 2|x|$，存在正常数 c_{36}, c_{37}，使得 $c_{36}t_0(|x|) \leq t_0(|y|) \leq c_{37}t_0(|x|)$，这意味着$t \geq C_0t_0(|x|) \geq C_0c_{37}^{-1}t_0(|y|) \geq c_{38}$。因此，沿用 (4.48) 的相同论证，我们可以证明对所有 $t > C_0t_0(|x|)$，

$$
p(t,x,y) \leq c_{39}e^{-c_{40}t}\exp\left(-c_{40}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right)
$$

与此同时，事实 $t > C_0t_0(|x|) \geq C_0c_{37}^{-1}t_0(|y|)$ 意味着

$$
\exp\left(-c_{40}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \leq c_{41}\exp\left(\frac{-c_{42}(1+|y|)^2}{t}\right).
$$

Put将上述两个估计结合起来，我们可以在 $|y| \geq 2$ and $|y| \leq 2|x|$ 时证明 (4.44) .

情形3： $|y| \leq 2$。如果 $|x| \leq |y| \leq 2$，那么可以找到一个正常数 c_{43}，使得 $t \geq C_0t_0(|x|) \geq c_{43}$。因此，

$$
\begin{aligned}
p(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} p\left(t/2,x,z\right)\cdot T^V_{t/2}1(y) \leq c_{44}t^{-d/2}e^{-c_{45}t} \\
&\leq c_{46}e^{-c_{47}t}\min\left\{\exp\left(-c_{47}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{c_{47}(1+|y|)^2}{t}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

wh这里最后一个不等式是由以下事实得出的：对于每个 $t \geq C_0t_0(|x|) \geq c_{43}$ 和 $|y| \leq 2$,

$$
\min\left\{\exp\left(-c_{47}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{c_{47}(1+|y|)^2}{t}\right)\right\} \geq c_{48}.
$$

至此，我们完成了证明。 □

引理 4.4。 假设 $t_0(\cdot)$ 几乎递增。对于任意 $C_0 > 0$，存在正数常量C_7 和 C_8，使得对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 和 $t > C_0t_0(|x|)$,

$$
p(t,x,y) \geq C_7e^{-C_8t}\min\left\{\exp\left(-\frac{C_8(1+|y|)^2}{t}\right), \exp\left(-C_8(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right)\right\}. \tag{4.49}
$$

证明。 证明分为三种情形。

情形 1： $|x| \geq 4$。由 (4.43) 可知（注意，在 (4.42) 的证明中，我们没有使用 $t_0(\cdot)$ 的几乎递减性质），对于所有 $|u| \geq 4$, $z \in B(0,2)$ 和 $t > C_0t_0(|u|)$,

$$
p(t,u,z) \geq c_1e^{-c_2t}\exp\left(-c_2|u|\sqrt{g(|u|)}\right). \tag{4.50}
$$

另一方面，对于 $|u| \geq 4$, $z \in B(0,2)$ 且 $C_0t_0(|x|) \leq t \leq C_0't_0(|u|)$ 的情形，可以沿用 (4.43) 的证明，得出 (4.42) 中的第四步仍然成立。因此，

$$
\begin{aligned}
p(t,u,z) &\geq c_3\exp\left(-c_4\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\int_0^{t/2}\exp\left(-c_4\left(sg(|u|)+\frac{|u|^2}{s}+\frac{s}{|u|^2}\right)\right)s^{-(d/2+1)}\,ds \\
&\geq c_5e^{-c_6t}\int_{t/4}^{t/2}\exp\left(-c_6\left(sg(|u|)+\frac{|u|^2}{s}+\frac{s}{|u|^2}\right)\right)s^{-(d/2+1)}\,ds
\end{aligned}
$$

$$\geq c_7 t^{-d/2} e^{-c_6 t} \exp\left(-c_8\left(tg(|u|)+\frac{|u|^2}{t}+\frac{t}{|u|^2}\right)\right) \geq c_9 e^{-c_{10}t}\exp\left(-\frac{c_{10}|u|^2}{t}\right).$$

这里在第二个不等式中，我们用到了如下性质

$$\exp\left(-c_4\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) \geq c_{11}e^{-c_{12}t}, \quad t > C_0 t_0(|x|) \geq c_{13},$$

且最后一个不等式由以下事实得到：对所有满足 $|u| \geq 4$ 的 $u \in \mathbb{R}^d$，

$$\frac{|u|^2}{t} \geq c_{14}\left(tg(|u|)+\frac{t}{|u|^2}\right) \geq c_{15}, \quad c_{13} \leq t \leq C_0 t_0(|u|) \leq c_{16}|u|^2.$$

将上述关于 $p(t,u,z)$ 的所有估计结合起来可得，对每个 $z \in B(0,2)$（通过考虑 $t \leq C_0' t_0(|y|)$ 和 $t > C_0' t_0(|y|)$ 的不同情形）

$$p(t,y,z) \geq c_{17}e^{-c_{18}t}\min\left\{\exp\left(-c_{18}|y|\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{c_{18}|y|^2}{t}\right)\right\}. \tag{4.51}$$

因此，由 (4.50) 和 (4.51)，我们得到对于 $t > C_0 t_0(|x|)$，

$$\begin{aligned}
p(t,x,y) &\geq \int_{B(0,2)} p\left(t/2,x,z\right) p\left(t/2,z,y\right) dz \\
&\geq c_{19} \inf_{z\in B(0,2)} p\left(t/2,x,z\right) \cdot \inf_{z\in B(0,2)} p\left(t/2,z,y\right) \\
&\geq c_{20}e^{-c_{21}t}\exp\left(-c_{21}|x|\sqrt{g(|x|)}\right) e^{-c_{21}t}\min\left\{\exp\left(-c_{21}|y|\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{c_{21}|y|^2}{t}\right)\right\} \\
&\geq c_{20}e^{-2c_{21}t}\min\left\{\exp\left(-2c_{21}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{2c_{21}(1+|y|)^2}{t}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

因此，我们已证明 $|y| \geq |x| \geq 4$ 时的 (4.49)。

情形2： $|x| \leq 4$ 且 $|y| \geq 4$。当 $|x| \leq 4$ 且 $|y| \geq 4$ 时，我们可以用 (4.41) 替代 (4.50)，然后按照**情形 1** 中的论证（使用 (4.41) 和 (4.51)）证明 (4.49)。

情形3： $|x| \leq 4$ **和** $|y| \leq 4$。根据 (4.41) 以及事实 $t > C_0 t_0(|x|) \geq c_{22}$，我们可以按照引理 4.2 证明中**情形3**的相同步骤验证 (4.49)。□

将引理 4.1–4.4 合并起来，我们便可得到所有$t > C_0 t_0(|x|)$下 $p(t,x,y)$ 的双边估计。

命题 4.5。假设 $t_0(\cdot)$ 几乎递增或几乎递减。对于任意$C_0 > 0$，存在正常数 C_i, $9 \leq i \leq 12$，使得对每个 x，$y \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x| \leq |y|$且 $t > C_0 t_0(|x|)$，

$$\begin{aligned}
&p(t,x,y) \geq C_9 e^{-C_{10}t}\min\left\{\exp\left(-C_{10}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{C_{10}(1+|y|)^2}{t}\right)\right\}, \\
&p(t,x,y) \leq C_{11}e^{-C_{12}t}\min\left\{\exp\left(-C_{12}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right), \exp\left(-\frac{C_{12}(1+|y|)^2}{t}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

5. 证明

定理 1.1 的证明。 定理 1.1 可直接由命题 3.4 和 4.5 得出。 □

例 1.2 的证明。 令 $V(x) = |x|^\alpha$ 满足 $\alpha > 0$。取 $g(r) = (1+r)^\alpha$ 并应用定理 1.1，可得对于每个 x，$y \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x| \leq |y|$，

$$p(t,x,y) \asymp \begin{cases} t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-t(1+|x|)^\alpha - |x-y|(1+|y|)^{\alpha/2}}, & t \leq (1+|x|)^{1-\alpha/2}, \\ e^{-t}e^{-(1+|y|)^{1+\alpha/2}-\frac{(1+|y|)^2}{t}}, & t > (1+|x|)^{1-\alpha/2}. \end{cases} \tag{5.53}$$

接下来，我们首先考虑 $\alpha \in (2,\infty)$。在这种情形下，由于 $|x| \leq |y|$，

$$\max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2}, (1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\} = (1+|x|)^{1-\alpha/2}.$$

当 $x,\ y\in\mathbb{R}^d$ 满足 $|x-y|\le|y|/2$ 或 $|y|\le 2$（这意味着 $|y|/2\le|x|\le|y|$，尤其当 $|x-y|\le|y|/2$时），对每个 $t>0$，均有

$$|x-y|(1+|y|)^{\alpha/2}\le\frac{|x-y|^2}{2t}+\frac{t(1+|y|)^{\alpha/2}}{2}\le\frac{|x-y|^2}{2t}+\frac{t(3+2|x|)^{\alpha/2}}{2}$$

and

$$(1+|x|)^{\alpha}\asymp(1+|y|)^{\alpha}.$$

因此，当 $0\le t\le(1+|x|)^{1-\alpha/2}$ 时，我们可以通过 (5.53) 中的第一个估计验证 (1.9)。另一方面，当 $t>(1+|x|)^{1-\alpha/2}$ 时，由于对所有 $t>(1+|x|)^{1-\alpha/2}\ge(1+|y|)^{1-\alpha/2}$，$(1+|y|)^{1+\alpha/2}\ge(1+|y|)^2/t$，(1.9) 是 (5.53) 中第二个估计的推论。

当 $|x-y|>|y|/2$ 且 $|y|>2$（这意味着 $|y|/2<|x-y|\le 2|y|$）时，

$$|x-y|(1+|y|)^{\alpha/2}\asymp(1+|y|)^{1+\alpha/2}$$

并且，对于 $0<t\le(1+|x|)^{1-\alpha/2}$，

$$t(1+|x|)^{\alpha}\le\frac{(1+|x|)^2}{t}\le\frac{(1+|y|)^2}{t}\le\frac{c_1|x-y|^2}{t}.$$

因此，由于再次应用 (5.53)，可知 (1.10) 成立。

现在，我们考虑 $\alpha\in(0,2]$。那么，由于 $|x|\le|y|$，

$$\max\left\{(1+|x|)^{1-\alpha/2},(1+|y|)^{1-\alpha/2}\right\}=(1+|y|)^{1-\alpha/2}.$$

设 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 满足 $|x-y|\le|y|/2$ 或 $|y|\le 2$。那么，沿用上述论证，由 (5.53) 可知，当 $t\le(1+|x|)^{1-\alpha/2}$ 时，(1.9) 成立。此外，当 $(1+|x|)^{1-\alpha/2}<t\le(1+|y|)^{1-\alpha/2}$ 时，

$$\frac{(1+|y|)^2}{t}\asymp t(1+|y|)^{\alpha}\asymp(1+|y|)^{1+\alpha/2},\quad c_2t^{-d/2}e^{-c_3t(1+|y|)^{\alpha}}\le e^{-c_4t}\le c_5t^{-d/2}. \tag{5.54}$$

结合上述所有性质与 (5.53)，我们可以证明，当 $|x-y|\le|y|/2$或 $|y|\le 2$ 时，(1.9) 成立。类似地，应用上述论证可知，当 $|x-y|>|y|/2$且 $|y|>2$ 时，(1.10) 成立。□

命题 1.3 的证明。根据对称性 $G(x,y)=G(y,x)$，不妨假设 $|x|\le|y|$。**情形 1**：$|x-y|\le|y|/2$ 或 $|y|\le 2$。在条件 $|x-y|\le|y|/2$ 或 $|y|\le 2$ 下，注意到这里 $t_0(|x|)\asymp t_0(|y|)$ 且 $|x|\asymp|y|$，由例 1.2 的证明可知，

$$p(t,x,y)\asymp\begin{cases}t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-tg(|y|)}, & t\le t_0(|y|),\\ e^{-t}e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}}, & t>t_0(|y|).\end{cases} \tag{5.55}$$

子情形 1.1：$|x-y|^2\le t_0(|y|)/2$。现在我们设

$$\begin{aligned}G(x,y)&=\int_0^{\infty}p(t,x,y)\,dt=\left(\int_0^{|x-y|^2}+\int_{|x-y|^2}^{t_0(|y|)}+\int_{t_0(|y|)}^{\infty}\right)p(t,x,y)\,dt\\&=:I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

根据 (5.55),

$$\begin{aligned}I_1&\asymp\int_0^{|x-y|^2}t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-tg(|y|)}\,dt\\&\asymp|x-y|^{-(d-2)}\int_1^{\infty}s^{d/2-2}\exp\left(-\left(s+\frac{g(|y|)|x-y|^2}{s}\right)\right)\,ds\\&\asymp|x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right).\end{aligned}$$

这里第二步由变量替换 $s=\frac{|x-y|^2}{t}$ 得出，而在最后一步中我们用到了这一事实:

$$\int_1^{\infty}s^{d/2-2}e^{-\left(s+\frac{R^2}{s}\right)}\,ds\asymp e^{-R},\quad R>0. \tag{5.56}$$

再次由 (5.55) 可得,

$$I_2 \asymp \int_{|x-y|^2}^{t_0(|y|)} t^{-d/2} e^{-tg(|y|)}\, dt \asymp |x-y|^{-(d-2)} \int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-d/2} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds,$$

其中最后一步用到了变量替换 $s = \frac{t}{|x-y|^2}$。注意, $\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2} \geq 2$ 和 $\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2} \geq \frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}$。

若 $d > 2$ 或 $|x-y|^2 g(|y|) > 1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-d/2} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds \\
&\leq \exp\left(-c_1|x-y|^2 g(|y|)\right) \int_1^{\infty} s^{-d/2} \exp\left(-c_2 s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds \\
&\leq c_3 \exp\left(-c_4|x-y|^2 g(|y|)\right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-d/2} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds &\geq \int_1^{2} s^{-d/2} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds \\
&\geq c_5 \exp\left(-2|x-y|^2 g(|y|)\right).
\end{aligned}$$

若 $d = 2$ 和 $|x-y|^2 g(|y|) \leq 1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-1} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds \\
&\leq \int_1^{\max\left\{\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}, 2\right\}} s^{-1} e^{-s|x-y|^2 g(|y|)}\, ds + \int_{\max\left\{\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}, 2\right\}}^{\infty} s^{-1} e^{-s|x-y|^2 g(|y|)}\, ds \\
&\leq c_6 \int_1^{\max\left\{\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}, 2\right\}} s^{-1}\, ds + \int_1^{\infty} s^{-1} e^{-s}\, ds \\
&\leq c_7 \max\left\{\log\left(\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}\right), 1\right\}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-1} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds &\geq \int_1^{\max\left\{\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}, 2\right\}} s^{-1} e^{-s|x-y|^2 g(|y|)}\, ds \\
&\geq c_8 \max\left\{\log\left(\frac{1}{|x-y|^2 g(|y|)}\right), 1\right\}.
\end{aligned}$$

应用 与上文相同的论证可得, 当 $d = 1$ 和 $|x-y|^2 g(|y|) \leq$ 时 1,

$$\int_1^{\frac{t_0(|y|)}{|x-y|^2}} s^{-1/2} \exp\left(-s|x-y|^2 g(|y|)\right)\, ds \asymp \frac{1}{|x-y|\sqrt{g(|y|)}}.$$

因此, 综合以上所有估计可得

$$\begin{aligned}
I_2 \asymp & |x-y|^{-(d-2)} \exp\left(-|x-y|^2 g(|y|)\right) \cdot \begin{cases} 1, & d \geq 3, \\ \max\left\{\log\left(\frac{1}{|x-y|\sqrt{g(|y|)}}\right), 1\right\}, & d = 2, \\ \frac{1}{|x-y|\sqrt{g(|y|)}}, & d = 1 \end{cases} \\
=: & |x-y|^{-(d-2)} \Pi(x,y).
\end{aligned}$$

此外, 利用 (5.55), 我们可以得到

$$I_3 \asymp \int_{t_0(|y|)}^{\infty} e^{-t} \exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right)\, dt \asymp \exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right). \tag{5.57}$$

结合对 I_1、I_2 和 I_3 的所有估计，我们可以得到

$$\begin{aligned} G(x,y) \asymp & |x-y|^{-(d-2)}\left[\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right)+\Pi(x,y)\right]+\exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right) \\ \asymp & |x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y)+\exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right), \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(x,y)$由 (1.12) 定义。

注意，当 $d\geq 2$ 和 $|x-y|\geq 1$时，

$$\begin{aligned} |x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y) &= g(|y|)^{\frac{d-2}{2}}\left(|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right)^{-(d-2)}\Gamma(x,y) \\ &\geq c_9\exp\left(-c_{10}|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right) \\ &\geq c_9\exp\left(-2c_{10}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right); \end{aligned}$$

当 $d\geq 2$ 和 $|x-y|\leq 1$时，

$$|x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y)\geq \Gamma(x,y)\geq c_9\exp\left(-c_{10}(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right);$$

当 $d=1$时，

$$|x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y)=(1+|y|)\cdot\frac{\exp(-|x-y|\sqrt{g(|y|)})}{(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}}\geq c_9\exp\left(-c_{10}(1+|y|)\sqrt{g(|y|}\right).$$

结合该估计，即可对任意满足 $|x-y|^2\leq t_0(|y|)/2$ 的 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 得到所需结论 (1.11)。

子情形 1.2：$|x-y|^2>t_0(|y|)/2$。在此情形下，我们定义

$$G(x,y)=\int_0^{t_0(|y|)/2}p(t,x,y)\,dt+\int_{t_0(|y|)/2}^{\infty}p(t,x,y)\,dt=:J_1+J_2.$$

由 (5.55)，可得

$$\begin{aligned} J_1 &\asymp \int_0^{t_0(|y|)/2} t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-tg(|y|)}\,dt \\ &\asymp |x-y|^{-(d-2)}\int_{\frac{t_0(|y|)}{2|x-y|^2}}^{\infty} s^{d/2-2}\exp\left(-\left(s+\frac{g(|y|)|x-y|^2}{s}\right)\right)\,ds \\ &\asymp |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right), \end{aligned}$$

其中第二步使用了变量替换 $s=\frac{|x-y|^2}{t}$，最后一步由 (5.56) 以及以下事实得出

$$\int_0^1 s^{d/2-2}\exp\left(-c_{11}\left(s+\frac{g(|y|)|x-y|^2}{s}\right)\right)\,ds\leq c_{12}\exp\left(-c_{13}|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right).$$

根据 (5.57)，有

$$J_2\asymp\exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right).$$

令 $\Gamma(x,y)$ 由 (1.12) 定义。注意，当 $|x-y|^2\geq t_0(|y|)/2$ 时，$|x-y|\sqrt{g(|y|)}\geq c_{14}$，因此

$$\Gamma(x,y)\asymp\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right).$$

因此，根据上述所有估计以及**子情形 1.1**末尾的论证，对于所有满足 $|x-y|^2>t_0(|y|)/2$ 的 $x,y\in\mathbb{R}^d$，我们得到

$$G(x,y)\asymp|x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right)\asymp|x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y),$$

其中在最后一步，我们利用了以下事实：$|x-y|\sqrt{g(|y|)}\geq c_{15}$ 由于 $|x-y|^2\geq t_0(|y|)/2\geq c_{16}|x-y|/\sqrt{g(|y|)}$，并且对于 $d=1$，

$$\frac{c_{17}}{\sqrt{g(|y|)}}\exp\left(-c_{18}|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right)$$

$$\le |x-y|\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right) = \frac{|x-y|\sqrt{g(|y|)}}{\sqrt{g(|y|)}}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right)$$
$$\le \frac{c_{19}}{\sqrt{g(|y|)}}\exp\left(-c_{20}|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right),$$

这再次得益于 $|x-y|\sqrt{g(|y|)} \ge c_{15}$。**C**

例 2: $|x-y| > |y|/2$ 和 $|y| > 2$。然后，我们可以仿照例 1.2 的证明，得到

$$p(t,x,y) \asymp \begin{cases} t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}}, & t \le \max\{t_0(|x|), t_0(|y|)\}, \\ e^{-t}e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}}, & t > \max\{t_0(|x|), t_0(|y|)\}. \end{cases} \tag{5.58}$$

Set

$$G(x,y) = \int_0^{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}} p(t,x,y)\,dt + \int_{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}}^{\infty} p(t,x,y)\,dt =: K_1 + K_2.$$

由 (5.58)，可得

$$K_1 \asymp \int_0^{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}} t^{-d/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}}\,dt$$
$$\asymp |x-y|^{-(d-2)}e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}} \int_{\frac{|x-y|^2}{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}}}^{\infty} s^{d/2-2}e^{-s}\,ds$$
$$\asymp \exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \asymp |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right).$$

其中，在第二步中我们使用了变量替换 $s = \frac{|x-y|^2}{t}$，第三步则由以下事实得到（注意到 $\frac{|x-y|^2}{\text{最大值}\{t_0(|x|)\ t_0(|y|)\}} \asymp \frac{(1+|y|)^2}{\text{最大值}\{t_0(|x|)\ t_0(|y|)\}} \ge c_{21}$）

$$c_{22}\exp\left(-c_{23}(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \le \int_{\frac{|x-y|^2}{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}}}^{\infty} s^{d/2-2}e^{-s}\,ds \le c_{24}$$

仍由 (5.57) 和 (5.58)，可得

$$K_2 \asymp e^{-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}} \int_{\max\{t_0(|x|),t_0(|y|)\}}^{\infty} e^{-s}\,ds$$
$$\asymp |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-(1+|y|)\sqrt{g(|y|)}\right) \asymp |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right),$$

这里我们用到了以下事实：$|x-y| \asymp |y|$。

综合关于 K_1、K_2 的两个估计可得

$$G(x,y) \asymp |x-y|^{-(d-2)}\exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right) \asymp |x-y|^{-(d-2)}\Gamma(x,y),$$

其中，最后一步是基于以下事实：

$$\Gamma(x,y) \asymp \exp\left(-|x-y|\sqrt{g(|y|)}\right), \quad x,y \in \mathbb{R}^d \text{ with } |x-y| \asymp (1+|y|) \ge \frac{c_{25}}{\sqrt{g(|y|)}}.$$

至此，我们已完成所需结论 (1.11) 的证明。 □

致谢。 Xin Chen 的研究得到国家自然科学基金（编号：12122111）的资助。Jian Wang 的研究得到国家重点研发计划（2022YFA1000033）和国家自然科学基金（编号：11831014、12071076 和 12225104）的资助。

参考文献

[1] Aronson, D.G.：线性抛物型方程的非负解，《比萨高等师范学院学报》，22（1968），607–694。[2] Bénédicte, A.、Jacqueline, F.-P. 和 Peter, T.：薛定谔算子的基态正性、负性与紧性，载于 $\mathbb{R}^N$，《泛函分析杂志》，245（2007），213–248。[3] Bogdan, K.、Dziubański, J. 和 Szczypkowski, K.：薛定谔算子热核的尖锐高斯估计，《积分方程与算子理论》，91（2019），第3篇，20页。[4] Carmona, R. 和 Simon, B.：N体量子系统中特征函数与波包的逐点界，V. 下界与路径积分，《数学物理通讯》，80（1981），59–98。[5] Chen, X. 和 Wang, J.：无穷远处趋于零的势下薛定谔算子的双边热核估计，预印本。[6] Chung, K.L. 和 Zhao, Z.：《从布朗运动到薛定谔方程》，《数学科学基础丛书》，312，施普林格出版社，柏林，1995。[7] Davies, E.B.：《热核与谱理论》，《剑桥数学丛书》92，剑桥大学出版社，剑桥，1989。[8] Davies, E.B. 和 Simon, B.：薛定谔算子与狄利克雷拉普拉斯算子的超压缩性及热核，《泛函分析杂志》，59（1984），335–395。[9] Grigor'yan, A.：《热核与流形分析》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009。[10] Hsu, E.P.：球的布朗运动退出分布，载于：《随机过程研讨会》，108–116，1986。[11] Ishige, K.、Kabeya, Y. 和 Ouhabaz, E.M.：具有反平方势的薛定谔算子的热核，《伦敦数学会会刊》，115（2017），381–410。[12] Kurata, K.：磁薛定谔算子及具有非负势的一致椭圆算子的热核估计，《伦敦数学会杂志》，62（2000），885–903。[13] Malecki, J. 和 Serafin, G.：球内拉普拉斯算子的狄利克雷热核，《势分析》，52（2020），545–563。[14] Metafune, G.、Pallara, D. 和 Rhandi, A.：薛定谔算子的核估计，《演化方程杂志》，6（2006），433–457。[15] Metafune, G. 和 Spina, C.：一类薛定谔半群的核估计，《演化方程杂志》，7（2007），719–742。[16] Milman, P. D. 和 Semenov, Y.A.：借助消奇权函数得到的全局热核界，《泛函分析杂志》，212（2004），373–398。[17] Ouhabaz, E.M.：《区域上的热方程分析》，《伦敦数学会专著》，31，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2005。[18] Schroeder, C.：具有周期势的薛定谔算子的格林函数，《泛函分析杂志》，77（1988），60–87。[19] Sikora, A.：薛定谔半群核与约化热核的对角估计，《数学物理通讯》，188（1997），233–249。[20] Simon, B.：薛定谔半群，《美国数学会通报》，7（1982），447–526。[21] Zhang, Q.-S.：薛定谔热核的大时间渐近行为及其应用，《数学物理通讯》，210（2000），371–398。[22] Zhang, Q.-S.：具有负势的薛定谔热核的全局界，《泛函分析杂志》，182（2001），344–370。[23] Zhang, Q.-S.：狄利克雷拉普拉斯算子热核的边界行为，《微分方程杂志》，182（2002），416–430。