arXiv:2301.06760v1 [math.CA] 17 Jan 2023

关于论文《二次格或 q-二次格上的递推方程及其经典正交多项式解》的评论

D. MBOUNA

Abstract. 我们提出一种简单的方法，仅根据三项递推关系的系数来识别格点上的经典正交多项式。

1. Introduction

尽管文献中对经典正交多项式序列（OPS）已有诸多研究，但仍有一些与之相关的有趣且富有挑战性的问题。例如，D. Abdulaziz Alhaidari（见 [1]）向 OPSFA-14 会议论文集提交了一个尚未解决的问题：有两族定义在实数轴上的正交多项式，目前仅由其三项递推关系（TTRR）描述。这些正交多项式序列由他与合著者在先前的一些工作中得到。鉴于这些多项式在物理学中极为重要，他提出了一个问题：如何推导它们的其他性质，例如权函数、生成函数、正交性、可能的超几何形式、罗德里格公式等。Yutian Li 注意到，其中一个多项式序列是威尔逊多项式的一个特殊情形（见 [9, p.5]），随后 W. Van Assche 在 [9] 中解决了这一问题，将其中一些多项式（包括特殊情形及某些渐近性质）识别为经典正交多项式序列。他还在文中提供了一些思路（[9, p.2]），说明如何根据三项递推关系的系数识别经典正交多项式序列。这些思路通常并不简单（对于格点上的经典正交多项式序列更是如此），具体取决于多项式的定义方式。尽管 D. Tcheutia 在 [8] 中给出了一种解决这一问题的通用方法，这启发我们撰写这篇短文，提出另一种思路。促使我们这样做的原因是，D. Tcheutia 给出的方法需要检验多项式能否用某些适当的基表示，然后使用算法/软件包及计算机系统，将其与已知经典多项式进行匹配。借助我们的刻画（见定理 3.3 和定理 3.5），这类问题可以用非常简单的方式手工解决。此外，这也揭示了这类正交多项式序列的渐近行为以及三项递推关系系数之间的关系。我们仅关注相对于 Askey-Wilson算子的经典正交多项式序列（即定义在 q-二次格上的情形），因为由此可以得到二次格上经典正交多项式序列的类似结果，正如 [4] 中所讨论的那样。

Date: 2023年1月18日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：42C05；次要分类：33C45。*Key words and phrases.* Askey-Wilson算子，经典正交多项式。

2. Preliminaries

令 $\mathcal{P}$ 为所有复系数多项式构成的向量空间，并令 $\mathcal{P}^*$ 为其代数对偶。$\mathcal{P}$ 中的简单集是一个序列 $(P_n)_{n\geq 0}$，满足对每个 n，$\deg(P_n)=n$。若简单集 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为关于 $\mathfrak{u}\in\mathcal{P}^*$ 的正交多项式序列：

$$\langle \mathbf{u}, P_nP_m\rangle = \kappa_n\delta_{n,m}\quad (m=0,1,\dots;\ \kappa_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}),$$

其中，$\langle \mathfrak{u}\ f\rangle$ 表示 $\mathfrak{u}$ 对 $f\in\mathcal{P}$ 的作用。在这种情况下，我们称 $\mathfrak{u}$ 为正则的。泛函 $\mathfrak{u}$ 被多项式 ϕ 左乘定义为

$$\langle \phi\mathbf{u}, f\rangle = \langle \mathbf{u}, \phi f\rangle\quad (f\in\mathcal{P}).$$

我们考虑如下定义的 Askey-Wilson算子：

$$(\mathcal{D}_q f)(x) = \frac{\breve{f}\big(q^{1/2}z\big)-\breve{f}\big(q^{-1/2}z\big)}{\breve{e}\big(q^{1/2}z\big)-\breve{e}\big(q^{-1/2}z\big)},\quad z=e^{i\theta}, \tag{2.1}$$

其中，对每个多项式 f，$\breve{f}(z)=f\big((z+1/z)/2\big)=f(\cos\theta)$，且 $e(x)=x$。这里，$0<q<1$ 和 θ 不一定是实数（见 [6, 第300页]）。回顾一下，首一正交多项式序列（P_n）$_{n\geq 0}$满足以下三项递推关系（TTRR）：

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)+B_nP_n(x)+C_nP_{n-1}(x),\quad n=0,1,2,\dots, \tag{2.2}$$

其中，对每个 $n=0$，$P_{-1}(x)=0$，且 $B_n\in\mathbb{C}$ 和 $C_{n+1}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 为 1, 2, ... 此后，我们用 $0<q<1$ 表示 $x=x(s)=(q^s+q^{-s})/2$。在 (2.1) 中取 $e^{i\theta}=q^s$，则 $\mathcal{D}_q$ 为

$$\mathcal{D}_q f(x(s)) = \frac{f\big(x(s+\frac{1}{2})\big)-f\big(x(s-\frac{1}{2})\big)}{x(s+\frac{1}{2})-x(s-\frac{1}{2})}.$$

我们定义算子 $\mathcal{S}_q$ 如下：

$$\mathcal{S}_q f(x(s)) = \frac{f\big(x(s+\frac{1}{2})\big)+f\big(x(s-\frac{1}{2})\big)}{2}.$$

Askey-Wilson算子和平均算子在 $\mathcal{P}^*$上诱导出两个元素，分别记为$\mathbf{D}_q$和$\mathbf{S}_q$，定义如下（见 [5]）：

$$\langle \mathbf{D}_q\mathbf{u}, f\rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathcal{D}_q f\rangle,\quad \langle \mathbf{S}_q\mathbf{u}, f\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}_q f\rangle.$$

定义

$$\alpha = \frac{q^{1/2}+q^{-1/2}}{2},\quad \alpha_n = \frac{q^{n/2}+q^{-n/2}}{2},\quad \gamma_n = \frac{q^{n/2}-q^{-n/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}},\quad n=0,1,\dots\ .$$

3. Main results

首一Askey-Wilson多项式（$Q_n(\cdot;\ a_1,a_2,a_3,a_4|q)$）$_{n\geq 0}$满足（见 [7, (14.1.5)]），(2.2) 其中

$$2B_n = a_1+\frac{1}{a_1}-\frac{(1-a_1a_2q^n)(1-a_1a_3q^n)(1-a_1a_4q^n)(1-a_1a_2a_3a_4q^{n-1})}{a_1(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n})}$$

$$-\frac{a_1(1-q^n)(1-a_2a_3q^{n-1})(1-a_2a_4q^{n-1})(1-a_3a_4q^{n-1})}{(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-2})},$$

$$C_{n+1} = (1-q^{n+1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{n-1})$$

$$\times\frac{(1-a_1a_2q^n)(1-a_1a_3q^n)(1-a_1a_4q^n)(1-a_2a_3q^n)(1-a_2a_4q^n)(1-a_3a_4q^n)}{4(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n})^2(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n+1})}.$$

为达到我们的目的，我们采用如下定义。

定义 3.1. 若关于泛函 $\mathfrak{u} \in \mathcal{P}^*$的首一正交多项式序列 $(P_n)_{n\geq 0}$满足正交关系，则称其为经典正交多项式序列。这也等价于（见 [5, 定理 5]）

$$\mathbf{D}_q(\phi\mathbf{u}) = \mathbf{S}_q(\psi\mathbf{u}) \,, \tag{3.1}$$

其中 ϕ 和 ψ 分别是次数至多为二次和一次的多项式。

在下面的引理中，我们证明，对于经典正交多项式序列，式 (3.1) 中出现的多项式 ϕ 和 ψ 仅由正交多项式序列 $(P_n)_{n\geq 0}$所满足的三项递推关系提供的系数 B_0、B_1、C_1 和 C_2确定。我们强调，这一事实也已在 [3, 引理 2.2]中指出。

引理 3.2. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于泛函 $\mathfrak{u}$ 的经典首一正交多项式序列。设 (2.2) 是 $(P_n)_{n\geq 0}$满足的三项递推关系。则分布方程 (3.1) 中出现的多项式 ϕ 和 ψ由下式给出

$$\phi(x) = (\mathfrak{a}x - \mathfrak{b})(x - B_0) - (\mathfrak{a} + \alpha)C_1 \,,\ \psi(x) = x - B_0 \,,$$

with

$$\mathfrak{a} = \frac{\alpha(3-4\alpha^2)}{4\alpha^2-1} + \frac{(B_0+B_1)^2 + 4\alpha^2(C_1 - B_0B_1 + \alpha^2 - 1)}{2\alpha(4\alpha^2-1)C_2} \,,$$

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}+\alpha)B_1 - \frac{B_0+B_1}{2\alpha} \,.$$

证明. 假设 (3.1) 成立，其中令 $\phi(x) = ax^2+bx+c$且 $\psi(x) = x+e$，其中 $a, b, c, e \in \mathbb{C}$。我们有

$$0 = \langle \mathbf{D}_q(\phi\mathbf{u}) - \mathbf{S}_q(\psi\mathbf{u}),\ x^n\rangle = -\langle \mathbf{u},\ \phi\mathcal{D}_q x^n + \psi\mathcal{S}_q x^n\rangle \,, n = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

我们回顾一下 $(P_n)_{n\geq 0}$满足的三项递推关系 (2.2) 的系数 B_n 和 C_n，其形式如下

$$B_n = \frac{\langle \mathbf{u},\ xP_n^2\rangle}{\langle \mathbf{u},\ P_n^2\rangle} \,, \quad C_{n+1} = \frac{\langle \mathbf{u},\ P_{n+1}^2\rangle}{\langle \mathbf{u},\ P_n^2\rangle} \,, \quad n = 0, 1, \ldots \,.$$

以下恒等式可通过计算得出 ea　　sily

$$\mathcal{D}_q x^2 = 2\alpha x \,,\ \mathcal{D}_q x^3 = (4\alpha^2-1)x^2 + 1 - \alpha^2 \,,$$

$$\mathcal{S}_q x^2 = (2\alpha^2-1)x^2 + 1 - \alpha^2 \,,\ \mathcal{S}_q x^3 = \alpha(4\alpha^2-3)x^3 + 3\alpha(1-\alpha^2)x.$$

此外，我们还有 $1 = P_0^2$，$x = xP_0^2$，$x^2 = P_1^2 + 2B_0xP_0^2 - B_0^2P_0^2$，其中 $x^3 = xP_1^2 + 2B_0P_1^2 + 3B_0^2xP_0^2 - 2B_0^3P_0^2$以及

$$\begin{aligned} x^4 =& P_2^2 + 2(B_0+B_1)xP_1^2 + \big[(B_0+B_1)(3B_0-B_1) - 2(B_0B_1 - C_1)\big]P_1^2 \\ &+ 2\big[B_0(B_0+B_1)(2B_0-B_1) + (B_0B_1 - C_1)(B_1 - B_0)\big]xP_0^2 \\ &+ \Big((B_0+B_1)(B_1-3B_0)B_0^2 - (B_0B_1 - C_1)(B_0B_1 - C_1 - 2B_0)\Big)P_0^2 \,. \end{aligned}$$

因此，在（3.2）中依次取 $n = 0$、1、2、3，并利用前面的结果，可得

$$e = -B_0,\ c = -(a+\alpha)C_1 - (b + aB_0)B_0,\ b = -(a+\alpha)B_1 - aB_0 + \frac{B_0+B_1}{2\alpha}$$

$$a = \frac{\alpha(3-4\alpha^2)}{4\alpha^2-1} + \frac{(B_0+B_1)^2 + 4\alpha^2(C_1 - B_0B_1 + \alpha^2 - 1)}{2\alpha(4\alpha^2-1)C_2} \,,$$

证明至此完成。 □

在下述定理中，我们说明如何识别非经典正交多项式序列。这一点在 [3, 引理 2.3、公式 (2.17) 和 (2.18)]中也已有部分观察。

定理 3.3. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是满足三项递推关系 (2.2) 的首一正交多项式序列。若 $(P_n)_{n\geq 0}$是经典的，则数列 $(B_n)_{n\geq 0}$ 和 $(C_n)_{n\geq 1}$ 是下列差分方程组的解

$$r_{n+3}B_{n+2} - (r_{n+2} + r_{n+1})B_{n+1} + r_n B_n = 0\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} r_n\left(B_n - qB_{n-1}\right)\left(B_n - q^{-1}B_{n-1}\right) &= (r_{n+1} + r_{n+2})(C_{n+1} - 1/4) \\ &\quad - 4\alpha^2 r_n(C_n - 1/4) + (r_{n-1} + r_{n-2})(C_{n-1} - 1/4)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $(r_n)_{n\geq 0}$ 是由下式给出的非零复数列

$$r_n = \widehat{a}q^n + \widehat{b}q^{-n}\,, \quad \widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, \dots\,, \tag{3.5}$$

$\widehat{\ }$其中 $|\widehat{a}| + |b| \neq 0$。

证明。假设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是经典的，则 $(P_n)_{n\geq 0}$ 和 $(\mathcal{D}_q P_{n+1})_{n\geq 0}$ 都是正交多项式序列。这意味着（见 [2, 定理 1.2]），$(P_n)_{n\geq 0}$ 是 Askey-Wilson 多项式，或是其特殊情形或极限情形。对于 (3.5) 中满足以下条件的任意一组复数 $\widehat{a}$ 和 b,

$$\widehat{a}q^2 = -a_1a_2a_3a_4\widehat{b},$$

容易证明，包含特殊情形或极限情形在内的首一 Askey 多项式 $(Q_n(.;\, a_1, a_2, a_3, a_4|q^{\pm 1}))_{n\geq 0}$ 满足方程组 (3.3)–(3.4)。□

备注 3.4。我们强调，定理 3.3 的逆命题并不成立。例如，考虑一个首一正交多项式序列，其三项递推关系的系数为

$$B_n = 0, \quad C_{n+1} = (1 - aq^{n+1})(1 - bq^{n+1})/4\,, \quad n = 0, 1, \dots\,,$$

其中，a 和 b 是两个非零且均不等于 1 的复数。这些系数满足 (3.3)–(3.4)，但相应的正交多项式序列并非经典的。

在 [4, 定理 4.1] 中，给出了满足 (3.1) 的非零泛函具有正则性的充要条件，以及相应正交多项式序列所满足的三项递推关系的系数。此外，基于其中发展的结果和思路，以及引理 3.2，我们得到以下定理。

定理 3.5. 设 B_0、B_1、C_1 和 C_2 为四个复数，并假设以下数列均有定义，且对每个 $n = 1$（2，.....），都有 $C_n \neq 0$。

$$B_n = \frac{\gamma_{n+1}e_n}{d_{2n}} - \frac{\gamma_n e_{n-1}}{d_{2n-2}}, \quad C_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1}d_{n-1}}{d_{2n-1}d_{2n+1}}\phi^{[n]}\left(\frac{e_n}{d_{2n}}\right),$$

其中 $d_n = a\gamma_n + \alpha_n$、$e_n =$ $(b + aB_0)$ $\gamma_n + B_0\alpha_n$，并且

$$\begin{aligned} \phi^{[n]}(z) &= \left((\alpha^2 - 1)\gamma_{2n} + a\alpha_{2n}\right)\left(z^2 - 1/2\right) - \left((b + aB_0)\alpha_n + (\alpha^2 - 1)B_0\gamma_n\right)z \\ &\quad + bB_0 - (a + \alpha)C_1 + a/2, \end{aligned}$$

其中 $b =$ $(a + \alpha)$ $B_1 -$ $(B_0 + B_1)$ / (2α)，并且

$$a = \frac{\alpha(3 - 4\alpha^2)}{4\alpha^2 - 1} + \frac{(B_0 + B_1)^2 + 4\alpha^2(C_1 - B_0B_1 + \alpha^2 - 1)}{2\alpha(4\alpha^2 - 1)C_2}\,.$$

若 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是一个首一正交多项式序列，其三项递推关系的系数为 $(B_n)_{n\geq 0}$ 和 $(C_n)_{n\geq 1}$，则它是经典的。

4. 结论

正如我们所见，对于一个仅由其三项递推关系定义的正交多项式序列，根据定理 3.3 和定理 3.5，可以通过手算判断它是否为经典序列。一旦确认其为经典序列，关于该正交多项式序列的所有必要信息（相应的权函数、罗德里格公式、积分表示、零点以及许多其他性质和刻画）都可以在文献中找到（参见 [4, 6, 7] 及其中的参考文献）。这比 [8]中提出的思路和方法简单得多。

Acknowledgments

作者获得了部分资助。CMUP 是 LASI 的成员，由葡萄牙科学与技术基金会通过项目 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020 提供国家资金支持。

References

[1] *Open problem in orthogonal polynomials* 1709 06081 1 A. D. Alhaidari, , arXiv:math-ph/ .
[2] *Proof of two conjectures on Askey-Wilson polynomials*
v K. Castillo 和 D. Mbouna, , Proc. Amer. Math. Soc., DOI: 10.1090/proc/16250. [3] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho, *A characterization of continuous q-Jacobi Cheby-* , , J. Math. Anal. Appl. ( ) 126358.[4] *shev of the first kind and Al-Salam Chihara polynomials* **514** 2022
K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho, *On the functional equation for classical orthogonal polynomials on lattices* **515** 2022 , J. Math. Anal. Appl. ( ) 126390
[5] M. Foupouagnigni、M. Kenfack-Nangho 和 S. Mboutngam, *Characterization theorem ofclassical orthogonal polynomials on nonuniform lattices: the functional approach*, Integral Transforms Spec. Funct. **22** 2011 739 758 ( ) - M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable. With two* , 数学及其应用百科全书 98. 剑桥大学 *chapters by W. Van Assche. With a foreword by R. Askey.*
出版社，剑桥，2005. [7] R. Koekoek、P. A. Lesky 和 R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues* 2010 , 施普林格数学专著，施普林格出版社，
[8] *Recurrence equations and their classical orthogonal polynomial solutions on* 柏林，D. D. Tcheutia, *a quadratic or a q-quadratic lattice* **25** 2019 7, 969 ,《微分方程 993
及其应用杂志》 ( ), no. –[9] *Solution of an Open Problem about Two Families of Orthogonal Polynomials*W. Van Assche, , SIGMA 15 (2019), 005, 6 页

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Porto, Campo Alegre st., 687, 4169-007 Porto, Portugal*Email address*: dieudonne.mbouna@fc.up.pt