arXiv:2301.06771v1 [math.GT] 17 Jan 2023

特殊广义映射与 Gromoll 过滤

OSAMU SAEKI

Abstract. 从闭的 n 维流形到 $\mathbb{R}^p$ with$1 \leq p \leq n$ 的光滑映射，若其奇点仅为定折叠，则称为特殊广义映射。我们证明，对于 $1 \leq p < n$ 和 $n \geq 6$，一个同伦 n 球面存在一个具有标准性质、映入 $\mathbb{R}^p$ with p 的特殊广义映射，当且仅当其 Gromoll 过滤等于 p。

1. Introduction

设 M 是一个光滑闭的 n 维流形。为研究 M 的微分拓扑，使用其上的 Morse 函数已知颇有裨益。例如，可以通过这种方法获得同调信息，甚至获得关于 M 的把手体分解的信息。然而，通常很难获取把手粘附映射的信息。例如，若存在一个 Morse 函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$，且恰有两个临界点，那么 M 同胚于 n 维球面 S^n [12]：然而，众所周知，不仅标准 n 维球面，维数为 ≥ 7 的异球面也存在这样的函数。因此，仅凭存在这样一个特殊的 Morse 函数，无法分辨可微结构之间的差异。

另一方面，还有一种特殊广义映射的概念，它是上述一类 Morse 函数的自然推广。特殊广义映射是光滑映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^p$，其奇点只有定折叠（详情见第2节）。据作者所知，Calabi [3] 最早研究了这类映射，并用它们研究微分几何中的曲率挤压问题，不过没有给出详细说明。后来，Burlet–de Rham [2] 研究了从 3 维流形到 $\mathbb{R}^2$ 的特殊广义映射，并完整刻画了哪些 3 维闭流形能够容许此类映射。在 [14], 中，作者研究了同伦球面上的特殊广义映射，并证明一个同伦 n球面微分同胚于标准 n球面，当且仅当它对每个 $1 \leq p \leq n$ 都容许一个映入 $\mathbb{R}^p$的特殊广义映射（另见 [11]）。在 [16], 中，作者证明，若考虑奇点恰为局部极小值和极大值的 Morse 函数的协边，那么借助映入 $\mathbb{R}^2$, 的特殊广义映射，我们可以恢复同伦球面的 h协边群。由此，特殊广义映射可以为我们提供有关流形可微结构的信息。如今已知，在许多情况下，特殊广义映射的存在性可以刻画标准可微结构（例如，见 [17, 18, 19]）。

最近，在 [22], Wrazidlo 研究了具有标准性质的同伦球面的特殊广义映射（详情见本文第2节），并指出此类映射的存在与 Gromoll 引入的 Θ_n 同伦 n球面 h–协边群的 Gromoll 过滤密切相关 [8]。更

Date: 2023年1月18日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 57R45；次分类号 57R35、57R55、57R60、58K30。*Key words and phrases.* 定折叠、特殊广义映射、同伦球面、Gromoll 过滤。

准确地说，已证明，对于 $n \geq 7$ 和 $1 \leq p \leq n-1$， $\Gamma_p^n \subset F_p^n$，其中 Γ_p^n 是 Θ_n 的 Gromoll 过滤，而 F_p^n 是 Θ_n 的子群，由能够映入 $\mathbf{R}^p$ 且允许标准特殊广义映射的同伦n球面组成。

本文通过证明事实上 $\Gamma_p^n = F_p^n$ 成立，进一步强化了这一结果。我们将通过仔细运用 [14]中得到的特殊广义映射结构定理来证明这一点。需要注意的是，Gromoll 过滤仍在研究之中，已知结果总结于 [6, 附录]。

本文安排如下。第2节回顾有关特殊广义映射的基本定义，并回顾结构定理。第3节回顾 Gromoll 过滤 [8]的定义。文献中已有几种表述方式，我们给出一种有助于证明主要结果的表述。最后，在第4节中，我们通过运用结构定理，以一种便于处理的方式分解源同伦 n–球面，从而证明 $\Gamma_p^n \supset F_p^n$ 成立。我们还对 Calabi 的贡献 [3]作出评论。

除非另有说明，本文中的流形和映射均为 C^∞ 类可微。

2. Preliminaries

本节回顾一些关于特殊广义映射的已知结果，这些结果是我们研究所必需的。关于大部分材料，请读者参阅 [14]。

设 M 是一个闭的 n 维流形， p 是一个满足 $1 \leq p \leq n$ 的整数。对于光滑映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$，我们将奇点集合记为

$$S(f) = \{x \in M \mid \operatorname{rank} df_x < p\}.$$

Definition 2.1. (1) 若存在分别以 x 和 $f(x)$ 为中心的局部坐标 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$，使得 f 具有形式 $y_j \circ f = x_j, j = 1, 2, \ldots, p-1$ 且 $y_p \circ f = x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$，则称 f 的奇点 $x \in S(f)$ 为定折叠。

(2) 光滑映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$ 称为特殊广义映射，若 $S(f)$ 仅由定折叠组成。

容易证明，对于上述特殊广义映射， $S(f)$ 是 M 中维数为 $p-1$ 的正则子流形，并且 $f|_{S(f)}\colon S(f) \to \mathbf{R}^p$ 是浸入。

Example 2.2. 考虑单位 n–球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 以及标准投影$pr : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^p$, $1 \leq p \leq n$。那么容易验证，限制映射$f = pr|_{S^n}\colon S^n \to \mathbf{R}^p$ 是特殊广义映射。

Definition 2.3. 设 M 是一个闭 n 维流形。整数构成的（可能为空的）有限集合

$$\mathcal{S}(M) = \{p \mid 1 \leq p \leq n, \exists f : M \to \mathbf{R}^p \text{ special generic map}\}$$

称为 M 的特殊广义维数。这显然是 M 的一个微分同胚不变量。

由例 2.2 可知， $\mathcal{S}(S^n)$ 与整个集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 重合。

下文主要考虑从 n 维流形到 $\mathbf{R}^p$ 、具有 $1 \leq p < n$ 的特殊广义映射。关于映射到 $\mathbf{R}^n$ 的特殊广义映射，请读者参阅 [7]。例如，已知一个可定向闭 n 维流形当且仅当 M 稳定可平行化时，才存在到 $\mathbf{R}^n$ 的特殊广义映射。当流形 M 是 n 维不可定向流形时，它当且仅当存在一组 n 个处处线性无关的 $TM \oplus \varepsilon$ 截面，才存在到 $\mathbf{R}^n$ 的特殊广义映射；其中 TM 是 M 的切丛， ε 是 M 上的平凡线丛（参见 [1] 和 [13, 推论 2.4]）。

Definition 2.4. 令 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$ 是如上定义的特殊广义映射，假设 $1 \le p < n$。若 $f(x) = f(x')$，且点 x 和 x' 属于 $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x'))$ 的同一个连通分支，则称两点 x、$x' \in M$ 等价于 f。我们将关于 f 等价关系的商空间记作 W_f，并赋予其商拓扑。商映射记作 $q_f\colon M \to W_f$. $\bar{}$ $\bar{}$ 于是存在唯一连续映射 $f\colon W_f \to \mathbf{R}^p$，使得 $f = f \circ q_f$。商空间 W_f 或交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbf{R}^p \\ & {\scriptstyle q_f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ & W_f & \end{array}$$

称为 f 的斯坦因分解。空间 W_f 也常称为 f 的 Reeb 空间。

那么，以下结构定理是已知的（参见 [2, 14]）。

Proposition 2.5. 设 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$ 是一个从闭 n 维流形 M 到满足 $1 \le p < n$ 的欧几里得空间的特殊广义映射。则 W_f 可赋予唯一的光滑 p 维紧流形结构，且其边界 $\bar{}$ 非空，使得 $f\colon W_f \to \mathbf{R}^p$ 是一个浸入。此外，我们有以下结论。

(1) 限制映射 $q_f|_{S(f)}\colon S(f) \to \partial W_f$ 是一个微分同胚。(2) 限制映射 $q_f|_{M \setminus S(f)}\colon M \setminus S(f) \to \mathrm{Int}\ W_f$ 是一个光滑 S^{n-p} 丛。(3) 设 $C \cong \partial W_f \times [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ 是 ∂W_f 在 W_f 中的一个闭领圈邻域，$\pi\colon C \to \partial W_f$ 是自然投影，并令 $B = q_f^{-1}(C)$。那么，映射 $\pi \circ q_f|_B\colon B \to \partial W_f$ 是一个 D^{n-p+1} 丛，其结构群为正交群 $O(n-p+1)$。

作为一个推论，我们得到以下结论 [14]。

Corollary 2.6. 设 M 是一个闭的 n 维流形。对于 $1 \le p < n$，存在一个特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$，当且仅当以下条件成立。

(1) 对于一个紧致、可平行化且边界非空的 p 维流形 W，存在一个光滑的 S^{n-p} 丛 E，其底空间为 W，使得其在 ∂W 上的限制的结构群可约化为正交群$O(n-p+1)$。(2) 存在一个 D^{n-p+1} 丛 B，其底空间为 ∂W，结构群为正交群 $O(n-p+1)$。(3) 存在一个丛同构 $\varphi\colon \partial B \to \partial E$，它定义在 ∂W 上的光滑 S^{n-p} 丛之间，且 M 微分同胚于通过微分同胚 φ 沿边界粘合 E 和 B 而得到的流形 $E \cup_\varphi B$。

Remark 2.7. 在上述推论中，若存在一个特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$，则流形 W 可以选取得与 W_f 微分同胚。

请注意，一般而言，上述光滑 S^{n-p}–丛 E 在 W 上的结构群是整个微分同胚群 $\mathrm{Diff}(S^{n-p})$。当 $n-p=1$ 为 2 或 3 时，自然包含 $O(n-p+1) \to \mathrm{Diff}(S^{n-p})$ 已知是弱同伦等价（见 [20, 9]）。此外，对于同胚群 $\mathrm{Homeo}(D^{n-p+1})$，限制映射 $\mathrm{Homeo}(D^{n-p+1}) \to \mathrm{Homeo}(S^{n-p})$ 存在右逆。这意味着每个定义在 W 上的光滑 S^{n-p}–丛都可以扩张为一个拓扑 D^{n-p+1}–丛。利用这些结果，我们得到以下 [14, 15]。

Corollary 2.8. 设 M 是一个闭的 n维流形。

(1) 对于满足 $n-p=1$的 p，当 $n-p=1$为 2 或 3 时，存在特殊广义映射 f: $M \to \mathbf{R}^p$，当且仅当 M 与某个丛的边界微分同胚；该丛的结构群为 $O(n-p+1)$，底空间是一个具有非空边界的紧致可平行化 p维流形。(2) 如果存在某个 $1 \leq p < n$对应的特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$，那么$M$ 与一个拓扑丛的边界同胚；该丛的底空间是一个具有非空边界的紧致可平行化 p维流形。

现在，我们来考虑同伦球面的特殊广义映射。首先，回顾以下结果（见 [14]）。

LEMMA 2.9. 对于闭的 n 维流形 M 上的特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$，若满足 $1 \leq p < n$, M，则它是同伦 n 球面，当且仅当 Reeb 空间 W_f 可缩。

以下定义最初由 Wrazidlo 提出 [22]。

DEFINITION 2.10. 若闭的 n 维流形 M 上的特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$ 满足 $1 \leq p < n$，且 Reeb 空间 W_f 与 p 维圆盘 D^p微分同胚，则称其为标准映射。

注意，对于 $1 \leq p \leq 3$，每个特殊广义映射都是标准映射。对于 $p=3$，这可由三维庞加莱猜想的肯定解推出。另一方面，对于 $p \geq 6$，特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbf{R}^p$ 是标准映射，当且仅当 $S(f)$ 是单连通的。此外，对于所有 $4 \leq p < n$，已知存在映入 $\mathbf{R}^p$ 的同伦 n 球面的特殊广义映射，它们不是标准映射。

我们回顾以下推论 [22, 推论 3.9]。

LEMMA 2.11. 对于同伦球面 Σ，若存在一个标准特殊广义映射 $\Sigma \to \mathbf{R}^p$，则对于每个满足 $1 \leq p' < p$ 的 p'，Σ 都存在一个映入 $\mathbf{R}^{p'}$ 的标准特殊广义映射。

DEFINITION 2.12. 对于同伦 n球面 Σ，我们定义

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \max\{p \,|\, 1 \leq p < n, \exists f : \Sigma \to \mathbf{R}^p \text{ standard special generic map}\},$$

这称为 Σ的折叠完善度。

注意，对于 $n \geq 5$，由 [11, 14] 可知，我们总有 $\mathcal{F}(\Sigma) \geq 2$。还要注意，对于任意同伦球面 Σ，我们有

$$\mathcal{S}(\Sigma) \supset \{1, 2, \ldots, \mathcal{F}(\Sigma), n\}$$

由引理 2.11 和 [7] 可得。

例如，根据例 2.2，我们有 $\mathcal{F}(S^n) = n-1$。

现在，对于 $n \geq 5$，令 Θ_n 表示定向同伦 n–球面的 h–配边群，其中加法对应于连通和运算。对于 $1 \leq p \leq n-1$，我们用 F_p^n 表示 Θ_n 的子集，该子集由满足 $\mathcal{F}(\Sigma) \geq p$ 的同伦 n–球面 Σ （即其 h–配边类）组成。根据 [14, 引理 5.4]，可知 F_p^n 实际上是 Θ_n 的一个子群。因此，我们得到 Θ_n 按子群构成的如下滤过:

$$\Theta_n = F_1^n = F_2^n \supset \cdots \supset F_{n-4}^n \supset F_{n-3}^n = F_{n-2}^n = F_{n-1}^n = 0,$$

其中，最后三个子群的消失由 [14, 推论4.2] 和[15, 注2.4]得出。

3. Gromoll filtration

本节中，我们回顾同伦球面群 [8]的 Gromoll 过滤概念。

对于 $n \geq 6$，已知 Θ_n 同构于群 $\Gamma^n = \pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}))$，该群由 S^{n-1} 上保持定向的微分同胚的同痕类组成。这个同构通过如下方式给出：将保持定向的微分同胚φ：$S^{n-1} \to S^{n-1}$ 对应到同伦 n–球面 $D^n \cup_\varphi (-D^n)$，该球面由沿边界粘合两份 n维圆盘得到（见 [4]）。

对于 $1 \leq p \leq n-1$，令 $\mathrm{Diff}^+_p(S^{n-1})$ 为 $\mathrm{Diff}^+(S^{n-1})$ 的子群，由满足 $\pi^n_p \circ \varphi = \pi^n_p$ 的微分同胚 φ：$S^{n-1} \to S^{n-1}$ 组成，其中 π^n_p：$S^{n-1} \to \mathrm{R}^{p-1}$是标准投影 $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{p-1}$ 在单位球面 S^{n-1} 上的限制。自然映射 $\pi_0(\mathrm{Diff}^+_p(S^{n-1})) \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^{n-1})) = \Gamma^n$ 的像记为Γ^n_p。因此，我们得到 $\Gamma^n \cong \Theta_n$ 的如下子群滤过：

$$\Gamma^n = \Gamma^n_1 = \Gamma^n_2 \supset \Gamma^n_3 \supset \cdots \supset \Gamma^n_{n-4} \supset \Gamma^n_{n-3} = \Gamma^n_{n-2} = \Gamma^n_{n-1} = 0,$$

其中，$\Gamma^n_1 = \Gamma^n_2$ 由Cerf伪同痕定理 [4], 得出，而最后三个子群的消失由 [20, 9]得出。

注意，自然投影的限制 π^n_p：$S^{n-1} \to \mathrm{R}^{p-1}$ 是一个特殊广义映射（见例 2.2）。因此，根据命题2.5，我们可知$\pi_0(\mathrm{Diff}^+_p(S^{n-1}))$自然同构于 $\pi_{p-1}(\mathrm{Diff}^+(S^{n-p})\ SO(n-p+1))$（另见 [8]）。

4. 折叠滤过与Gromoll滤过

Wrazidlo [22] 证明了，当 $n \geq 7$ 且 $1 \leq p \leq n-1$时，$\Gamma^n_p \subset F^n_p$。事实上，我们有如下结论。

Theorem 4.1. 对于 $n \geq 6$ 和 $1 \leq p \leq n-1$，我们有 $\Gamma^n_p = F^n_p$。

注意，对于 $n = 6$，由于 $\Theta_n = \Gamma^n = 0$，该定理显然成立。

定理4.1的证明。我们来证明，对于 $n \geq 7$ 和 $1 \leq p \leq n-1$，$\Gamma^n_p \supset F^n_p$。设 Σ 是属于 F^n_p 的一个同伦 n 球面。于是，存在一个标准特殊广义映射 $f : \Sigma \to \mathrm{R}^p$。采用推论 2.6 中的记号，我们有$\Sigma = E \cup_\varphi B$，并且 W 与 D^p 微分同胚（见注记2.7），其中 E 是一个以 W 为底空间的光滑S^{n-p} 丛，而 B 是一个以 $\partial W \cong S^{p-1}$ 为底空间、结构群为 $SO(n-p+1)$ 的 D^{n-p+1} 丛，因为后者是一个可定向丛。由于 W 可缩，E 与 $S^{n-p} \times W \cong S^{n-p} \times D^p$ 微分同胚。

我们将 $\partial W \cong S^{p-1}$ 分解为两个（$p-1$）维圆盘Δ_0 和 Δ_1 的并，它们沿球面边界粘合。对于每个 Δ_j，$j = 0$，1，B 都是平凡的 D^{n-p+1}丛，$D^{n-p+1} \times \Delta_j$。如有必要，通过修改识别微分同胚 $E \cong S^{n-p} \times D^p$，我们可以假设 φ：$S^{n-p} \times \Delta_0$（$\subset \partial B$）$\to S^{n-p} \times \Delta_0$（$\subset \partial E$）是恒等映射。

现在，齐性 n–球面 Σ 分解为以下对象的并：

$$\begin{aligned} D_0 &= E \cup_\varphi (D^{n-p+1} \times \Delta_0) \cong (S^{n-p} \times W) \cup_{\mathrm{id}} (D^{n-p+1} \times \Delta_0) \\ &\cong (S^{n-p} \times D^p) \cup_{\mathrm{id}} (D^{n-p+1} \times \Delta_0) \end{aligned}$$

并沿其边界粘接。注意，D_0 和 D_1与 n维圆盘微分同胚，并且 π^n_p：$\partial D_1 \cong S^{n-1} \to \mathrm{R}^{p-1}$以适当方式对应于投影 $D_1 = D^{n-p+1} \times \Delta_1 \to \Delta_1$ 在第二个因子上的限制。事实上，这种对应是推论 2.6 的一个特例，该推论应用于例 2.2 中的典范特殊泛型映射 π^n_p：$S^{n-1} \to \mathrm{R}^{p-1}$。

现在考虑粘接微分同胚 $\psi\colon \partial D_1 \to \partial D_0$，其中 $\partial D_1 = (D^{n-p+1} \times \partial\Delta_1) \cup (S^{n-p} \times \Delta_1)$。在 $D^{n-p+1} \times \partial\Delta_1$上，该微分同胚是一个覆盖 $\partial\Delta_1$、结构群为 $SO(n-p+1)$的丛映射，因为 B 的结构群由 $SO(n-p+1)$给出。因此，ψ 对应于 $\pi_{p-1}(\mathrm{Diff}^+(S^{n-p})\ SO(n-p+1)) \cong \pi_0(\mathrm{Diff}^+_p(S^{n-1}))$中的一个元素。进而，这对应于 Γ^n_p的一个元素。因此，Σ属于 Γ^n_p。证明完成。□

关于 Gromoll 过滤的各种计算，读者可参阅 [5] 和 [6, 附录]。例如，$\Gamma^7 \cong \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ 的一个生成元的奇数倍不属于 Γ^7_4 [21]。因此，如 [22], 中所指出的，它们不允许映射到 $\mathbb{R}^3$ 中的特殊广义映射，尽管我们仍不知道生成元的哪些偶数倍允许此类特殊广义映射。

根据 [6],，对于（n，p）=（$8j+1$，$8j-5$）、（$8j+2$，$8j-4$）、（$8j+3$，$8j-3$）$j \geq 1$，以及对于（n，p）=（$4i-1$，$2i-2$）、$i \geq 4$，我们有 $\Gamma^n_p \neq 0$，这意味着在这些维数下，存在允许映射到 $\mathbb{R}^p$中的标准特殊广义映射的奇异 n–球面。

Remark 4.2. 在 Calabi 的一篇综述论文中 [3, 定理 2], 声称，如果$f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^p$ 是一个特殊广义映射，满足 $S(f)$ 同胚于 S^{p-1}，且$f|_{S(f)}$ 是一个嵌入，那么 Σ 属于 Milnor 群 $\Gamma_{n,\ p-1}$。然而，据作者所知，文中既未给出证明，也未给出$\Gamma_{n,\ p-1}$的精确定义。

本文以提出一个问题作结。

Problem 4.3. 对于一个同伦 n–球面 Σ，如果存在一个特殊广义映射$f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^p$，其中某个 p 满足 $3 < p < n-3$，那么是否存在一个标准特殊广义映射 $\Sigma \to \mathbb{R}^p$？

Acknowledgment

作者谨此感谢 Dominik Wrazidlo 提出这一问题，参与富有启发性的讨论，并对论文的早期版本提出重要意见，这些意见大幅改善了论文的表达。作者得到 JSPS KAKENHI 资助编号 JP17H06128、JP22K18267 的部分资助。本研究还得到位于京都大学的国际联合利用与研究中心——数学科学研究所的支持。最后，作者谨向 Maria Aparecida Soares Ruas 教授致以衷心感谢，感谢她始终充满活力且持续不断的鼓励。

References

[1] Y. Ando, *Existence theorems of fold maps*, Japan. J. Math. (N.S.) 30 (2004), 29–73. [2] O. Burlet 和 G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan*, **20** 1974 275 292，数学教学 ( )，–。[3] E. Calabi, *Quasi-surjective mappings and a generalization of Morse theory*，美日微分几何研讨会论文集（京都，1965），第 13–16 页，日本评论社，东京，1966。[4] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 39 (1970), 5–173. [5] D. Crowley 和 T. Schick, *The Gromoll filtration, KO-characteristic classes and metrics of positive scalar curvature*, **17** 2013 1773 1789，几何与拓扑 ( )，–。[6] D. Crowley、T. Schick 和 W. Steimle, *Harmonic spinors and metrics of positive curvature via the Gromoll filtration and Toda brackets*, **11** 2018 1077 1099，拓扑学杂志 ( )，–。[7] J. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*，苏联数学杂志 4 (1970), 1119–1134. [8] D. Gromoll, *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären*, Math. Ann. 164 (1966), 353–371. [9] A.E. Hatcher, *A proof of the Smale conjecture*, Diff(S^3) = $O(4)$, 数学年刊 (2) 117 (1983), 553–607. [10] M. A. Kervaire 和 J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, 数学年刊 (2) 77 (1963), 504–537.

[11] P. Porto, Jr. 和 Y. K. S. Furuya, *On special generic maps from a closed manifold into the plane* **35** 1990 41 52 , Topology Appl. ( ), –。[12] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, 斯特拉斯堡大学数学研究所出版物, 11 Actualit´es Scientifiques et Industrielles, 第 1183 号, Hermann & Cie, 巴黎, 1952, 第 91–154 页。[13] R. Sadykov、O. Saeki 和 K. Sakuma, *Obstructions to the existence of fold maps*, J. Lond. Math. Soc. 81 (2010), 338–354. [14] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293. [15] O. Saeki, *Topology of special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, 关于实奇点与复奇点的研讨会（S˜ao Carlos, 1992）, Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186. [16] O. Saeki, *Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres*, Japan. J. Math. 28 (2002), 287–297. [17] O. Saeki, *Special generic maps on open 4-manifolds*, J. of Singularities 1 (2010), 1–12. [18] O. Saeki 和 K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces* **313** 1999 617 633 , Math. Ann. ( ), –。[19] O. Saeki 和 K. Sakuma, *Elimination of singularities: Thom polynomials and beyond*, 奇点理论（利物浦, 1996）, 第 291–304 页, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 263, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1999。[20] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 621–626. [21] M. Weiss, *Pinching and concordance theory*, J. Differential Geom. 38 (1993), 387–416. [22] D.J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Euclidean spaces*, Topology Appl. 234 (2018), 348–358.

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan