arXiv:2301.06775v2 [math.AG] 8 Feb 2023

德尔佩佐曲面上的超对数函数方程

ANA-MARIA CASTRAVET 和 LUC PIRIO

摘要。对于任意 d ∈ {1,....., 6}，我们证明，次数为 d 的德尔佩佐曲面上的圆锥曲线网满足一个函数恒等式，其分量是权为7 – d 的反对称超对数。我们的方法对 d 一视同仁，并依赖于关于魏尔群在德尔佩佐曲面上的直线集上的作用的经典结果。这些超对数函数恒等式是经典的对数和二重对数所满足的三项恒等式和（阿贝尔的）五项恒等式的自然推广；它们分别对应 d = 6 和 d = 5的情形。

1. 引言

1.1. 多对数的函数方程。经典对数 Log 满足柯西恒等式

$$\mathrm{Log}(x) + \mathrm{Log}(y) - \mathrm{Log}(xy) = 0 \tag{1}$$

对所有 x、y > 0均成立，这个函数恒等式在数学中具有基础性作用。

19 世纪的几位作者各自独立地发现了下列恒等式的等价形式

$$R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0\,, \tag{Ab}$$

对所有满足 0 < x < y < 1 的 x、y 均成立，其中 R 表示罗杰斯二重对数，其定义为

$$R(x) = \mathbf{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(x)\,\mathrm{Log}(1-x) - \frac{\pi^2}{6} \tag{2}$$

对于 x ∈ (0, 1)，Li_2 表示经典双对数，即权为 2 的多重对数。

恒等式 (Ab) 如今称为二重对数的阿贝尔恒等式，因此采用了这一记号。它可视为柯西恒等式 (1) 的权为 2 的推广。为了了解其推广方式，回顾权为 n 的多重对数 Li_n，它经典地定义在单位圆盘 D = { z ∈ C , |z|< 1 } 上，定义为收敛级数

$$\mathbf{Li}_n(z) = \sum_{k\geq 1} z^k/k^n\,.$$

第一个多重对数通过关系 $\mathrm{Li}_1(z) = -\mathrm{Log}(1-z)$ 与通常的对数相关。对于 z ∈ D，Log 和 R 都可视为前两个多重对数的适当形式，使得两个函数恒等式 (1) 和 (Ab) 均成立。

多对数是非常重要的特殊函数，其性质推广了对数和二重对数的性质。特别是，它们满足如下形式的函数方程:

$$\sum_{i=1}^{M} c_i\,\mathbf{Li}_n(U_i) = \mathrm{L}_{n-1} \tag{3}$$

其中，c_i's 是有理系数，U_i's 是多变量有理函数，而 $L_{n-1}a$ 是权至多为 $n-1$ 的多对数函数的有理表达式。

自十九世纪初（Spence、Kummer、阿贝尔等人的研究）至今，许多作者发现了上述形式的函数恒等式，这些恒等式由权为 n 的某种形式的多对数 Li_n 满足 ≤ 7。多变量推广的多对数也得到了研究，尤其是它们的函数方程。这一领域目前十分活跃。[1]多对数与数学中的若干不同领域有关，例如双曲几何（双曲多胞体的体积）、数域的 K理论（Zagier猜想）、周期与多重ζ值理论、高能物理中的散射振幅、簇代数理论等。[2] 特别是，现已明确证实，了解形如（3）的函数恒等式非常重要，参见 [G1，第 §2] 节。然而，尽管近期该领域涌现了大量研究，多对数所满足的函数恒等式仍未得到充分理解。

已知只有当 $n \leq 7$ 时才存在形式为 (3) 的恒等式，而高权情形（$n = 6,7$）中的恒等式则是通过计算机辅助计算得到的（参见 [Ga]）。普遍认为，对于任意 $n \geq 1$，都应存在一个 Li_n 所满足的基本恒等式，其形式为 (3)，并且其他恒等式都可以由此形式地推导出来（例如，参见 [Gri, §4.1] 的最后一段）。首先值得考察的是权为 2 的情形，其中阿贝尔恒等式就是所提到的基本恒等式；直到最近，这一结果才在 [dJ] 中得到证明。对于权为 3 的情形，Goncharov 在 [G3] 中发现的三变量 22 项三对数方程可能就是基本恒等式，但据我们所知，迄今尚无证明。权为 4 的情形是 Goncharov 和 Rudenko 最近的著作 [GR] 的研究主题。他们利用模空间 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ 的簇结构，构造了一个四对数函数恒等式，并借此证明了权为 4 时的 Zagier猜想。人们预计，这个恒等式对于四对数所起的作用，将与阿贝尔恒等式对于二重对数所起的作用相同。

1.2. 超对数。超对数是多对数的推广，其历史可追溯至庞加莱。它们是定义在 P^1 上的多值全纯函数，可由黎曼球面上具有对数奇点的某些给定有理 1-形式经过迭代积分得到。更确切地说，设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+1}$ 是 P^1上的 $m+1$ 个两两不同的点。我们固定一个仿射坐标 z，使得 $\sigma_{m+1} = \infty$。那么，对于 $s = 1, \ldots, m$，1-形式 $\omega_s = \mathrm{d}z/(z - \sigma_s)$ 构成了 P^1 上极点位于 $\Sigma = \{\sigma_s\}_{s=1}^{m+1}$处的全局对数1-形式空间的一组基。我们令 $Z = \mathrm{P}^1 \setminus \Sigma$。

给定 $\{1, \ldots, m\}$中任意一个由元素组成的元组 $(s_k)_{k=1}^{w}$，权为 w 的超对数 $L^{\omega_{s_1} \cdots \omega_{s_w}}$ 是定义在 Z 上的多值函数，其归纳定义如下：

$$L_{\omega_{s_w}}(z) = \int^z \omega_{s_w} = \mathrm{Log}(z - \sigma_{s_w}) \qquad \text{and} \qquad L_{\omega_{s_1} \ldots \omega_{s_w}}(z) = \int^z \frac{L_{\omega_{s_2} \ldots \omega_{s_w}}(u)}{u - \sigma_{s_1}} du$$

多对数函数（例如 Log、罗杰斯二重对数 R，或所有经典多对数 Li_n）是在 $\Sigma = \{0, 1, \infty\}$ 这一特定情形下的超对数。如果说多对数的性质，尤其是它们满足的函数方程，已得到深入研究，那么对更一般的超对数的研究则少得多（不过可参见 [We]，以及较新的 [Br]）。近期的几项研究表明，超对数与高能物理中某些散射振幅的计算有关（例如参见博士论文[Pa]，或近期的“白皮书” [B&al]，，特别是其中的第五节）。

[1]例如，参见 Goncharov、Gangl、Goncharov-Rudenko、Charlton-Gangl-Radchenko 和 Rudenko 的研究。[2]更多详情请参阅综述 [Za] 或 [G2]。

本文介绍对数和二重对数的三项恒等式和五项恒等式在权 3、4、5 和 6 时的推广。这些恒等式与上述两个经典恒等式相似，但涉及非多对数超对数。为此，我们从几何角度考察阿贝尔恒等式 (Ab)，将其与五次德尔佩佐曲面的圆锥曲线纤维化联系起来。推广将涉及次数为 ≤ 6.[3]的德尔佩佐曲面的圆锥曲线纤维化。

1.3. 五次德尔佩佐曲面上的阿贝尔恒等式。五个有理自变量

$$U_1 = x, \qquad U_2 = y, \qquad U_3 = \frac{x}{y}, \qquad U_4 = \frac{1-y}{1-x} \qquad \text{and} \qquad U_5 = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}$$

R 在 (Ab) 中的表达式可作如下几何解释：令

$$\beta : X_4 = \mathbf{Bl}_{p_1,\dots,p_4}(\mathbf{P}^2) \longrightarrow \mathbf{P}^2$$

为复射影平面在一般位置的 4 个点 $\mathrm{p}_1 = [1:0:0], \mathrm{p}_2 = [0:1:0], \mathrm{p}_3 = [0:0:1]$ 和 $\mathrm{p}_4 = [1:1:1]$ 处的爆破。该曲面是五次德尔佩佐曲面。它带有五个圆锥曲线纤维化 $\phi_i : \mathrm{X}_4 \to \mathrm{P}^1 (\mathrm{i} = 1, \dots, 5)$，它们与作为有理函数的复合映射 $\mathrm{U}_i \circ \beta : \mathrm{X}_4 \dashrightarrow \mathrm{P}^1$ 相同。因此，阿贝尔恒等式可以写成

$$(\mathcal{A}b_{X_4}) \qquad \sum_{i=1}^{5} \epsilon_i R(\phi_i) = 0$$

其中某些常数 $\varrho_1, \dots, \varrho_5$ 等于 1 或 -1；对于适当选取的罗杰斯二重对数分支，该恒等式在 X_4 的任意充分一般的点附近局部成立。

1.4. 主要结果：推广至次数为 ≤ 6 的德尔佩佐曲面。设 $3 \leq \mathrm{r} \leq 8$，并令

$$X_r = \mathbf{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(\mathbf{P}^2)$$

为在一般位置的 r 个点处对射影平面进行爆破所得的曲面。那么 X_r 是次数为 $9 - \mathrm{r}$ 的德尔佩佐曲面，即反典范类 $-\mathrm{K}_{X_r}$ 是充足的，且自交数为 $(-\mathrm{K}_{X_r})^2 = 9 - \mathrm{r}$。若 $3 \leq \mathrm{r} \leq 6$，则完全线性系 $-\mathrm{K}_{X_r}$ 定义一个嵌入 $\mathrm{X}_r \hookrightarrow \mathrm{P}^{9-r}$，使得 X_r 的次数为 $9 - \mathrm{r}$。我们将曲线 $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}_r$ 的次数定义为 $\mathrm{C} \cdot (-\mathrm{K}_{X_r})$。$\mathrm{X}_r$ 中次数为 1 和 2 的光滑有理曲线分别称为直线和光滑圆锥曲线。X_r 上的圆锥曲线纤维化是指映射 $\mathrm{X}_r \to \mathrm{P}^1$ 在后复合一个 PGL_2 元素意义下的等价类，其中一般纤维为光滑圆锥曲线。

以下事实是众所周知的：

(i). X_r 中直线的数量 l_r 是有限的；(ii). X_r 上的圆锥曲线纤维化数量 κ_r 也是有限的；(iii). 任意圆锥曲线纤维化 $\mathrm{X}_r \to \mathrm{P}^1$ 恰有 $\mathrm{r} - 1$ 个可约纤维，每个可约纤维都是 X_r 中的两条直线的并，且这两条直线在一点处横截相交。(iv). 皮卡群 $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_r)$是自由群，并受某个魏尔群 W_r作用。此外，该作用保持交乘积不变。

[3]对数的三项恒等式也可以从几何视角来考察，但从这个角度来看意义不大，因为它“过于简单”。这就是我们只考虑阿贝尔方程的原因。

$r \leq 8$ 对应的 l_r 和 κ_r 的取值列于下表：

r	3	4	5	6	7	8
l_r	6	10	16	27	56	240
κ_r	3	5	10	27	126	2160

设 ϕ_1、……、ϕ_{κ_r} 是 $X_r \to \mathbb{P}^1$ 上两两不等价的圆锥曲线纤维化。记 L_r 为 X_r 的除子，其不可约分量是 X_r 中的所有直线，并令

$$Y_r = X_r \setminus L_r .$$

由 (iii) 可知，$\mathbb{P}^1$ 中 Y_r 的补集 Σ_i 是一个含有 $r-1$ 个元素的有限集，记为 σ_i^1、……、σ_i^{r-1}。假设 ϕ_i 的选取使得其中一个 σ_i^t（不妨记为 σ_i^{r-1}）与 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 重合。那么，对于 $t = 1$、……、$r-2$，有理微分 $\omega_i^t = dz/(z-\sigma_i^t)$ 构成了 $\mathbb{P}^1$ 上以 Σ_i 为极点的对数 1-形式空间的一组基。

对于所有 $i = 1$、……、κ_r，令 AI_i^{r-2} 为 $Z_i = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_i$ 上权为 $r-2$ 的完全反对称超对数，它定义为超对数 $L^{\omega_i^1 \cdots \omega_i^{r-2}}$ 关于对数 1-形式 ω_i^1、……、ω_i^{r-2} 的反对称化，即：

$$AI_i^{r-2} = \mathrm{Asym}\left(L_{\omega_i^1 \cdots \omega_i^{r-2}}\right) = \frac{1}{(r-2)!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{r-2}} (-1)^\nu L_{\omega_i^{\nu(1)} \cdots \omega_i^{\nu(r-2)}}$$

其中，对于任意 $\nu \in S_{r-2}$，我们用 $(-1)^\nu$ 表示 ν 的符号。每个 AI_i^{r-2} 都唯一确定到一个符号。我们的主要结果如下：

定理 1.1. 存在 $(\varrho_i)_{i=1}^{\kappa_r} \in \{\pm 1\}^{\kappa_r}$，其唯一性相差一个整体符号，使得对于任意 $y \in Y_r$，并对每个 $i = 1, \ldots, \kappa_r$，在 $y_i = \phi_i(y) \in \mathbb{P}^1$ 处适当选取超对数 AI_i^{r-2} 的分支后，下列函数恒等式在 Y_r 中 y 的某个开邻域上成立：

HLog(X_r)
$$\sum_{i=1}^{\kappa_r} \epsilon_i \, AI_i^{r-2}(\phi_i) = 0 .$$

几点说明：

- 恒等式 HLog(X_3) 不过是对数恒等式 (1)，而 HLog(X_4) 与几何恒等式 (Ab_{x_4}) 相同，因此等价于阿贝尔关系 (Ab)。相比之下，其余四个恒等式 HLog(X_r)（$r = 5,6,7,8$）是新的。

- 对于任意 $i = 1$、……、κ_r，定理陈述中的超对数 AI_{r-2i} 的适当分支都以精确且构造性的方式定义（见 8）。此外，在定理 3.1 中，我们通过利用魏尔群 W_r 的自然作用，仅从一个项构造每个项 $\varrho_i \, AI_{r-2i}(\phi_i)$ 的（代数等价物）——不妨将该项假设为 $AI_{r_1}{}^{-2}(\phi_1)$——证明了定理 1.1 的一个不变代数版本。

- 至少当 $r \leq 7$ 时，HLog(X_r) 成立这一事实，可以从以下角度得到概念上的解释：空间 $C^{\mathcal{L}_r}$ 由包含在 X_r 中的直线集合 $\mathcal{L}_r$ 自由张成。W_r 以自然方式作用于该空间；从表示论视角来看，HLog(X_r) 的左侧可以解释为魏尔群 W_r 的符号表示 sign_r 在 $C^{\mathcal{L}_r}$ 的 $(r-2)$ 次外积中的像。$\sum_{i=1}^{\kappa_r} \varrho_i \, AI_{r-2i}(\phi_i)$ 恒等于零的原因是，在 $\wedge^{r-2} C^{\mathcal{L}_r}$ 分解为不可约 W_r-模时，sign_r 不以正重数出现。

1.5. 论文结构。全文中，我们均在复解析或代数情形下进行研究。

在第 §2 节中，我们回顾本文后续部分将用到的超对数和德尔佩佐曲面的基本事实。特别地，我们说明如何通过代数方法证明超对数满足的函数恒等式（参见命题 2.2）。第 §3 节是本文的核心部分，定理 1.1 就在此证明。利用命题 2.2，其证明基本上归结为验证某个（反对称）张量恒等式 $\mathrm{hlog} = 0$成立。在第 §3 节末尾，我们还讨论了向高维推广的可能性（在一般点处对射影空间进行爆破）。最后，在第 §4 节中，我们用一些仿射坐标明确写出恒等式 $\mathrm{HLog}(X_5)$。

1.6. 致谢。A.-M. Castravet 的部分研究得到 ANR 项目 FanoHK 的资助。感谢 Igor Dolgachev 和 Jenia Tevelev 提供的若干有益讨论。L. Pirio 曾与 Maria Chlouveraki 和 Nicolas Perrin 进行过有趣的早期交流，并对此深表感谢。他也感谢 Thomas Dedieu 和 Vincent Guedj 对这项工作的关注。

2. 预备知识

本节回顾超对数和德尔佩佐曲面的一些性质。

2.1. 超对数。超对数是 P^1 上的多值全纯函数，庞加莱和 Lappo-Danilevsky 曾利用它们构造黎曼球面上具有正则奇点的线性微分方程的解。关于超对数的现代参考文献，读者可参阅 [We、Br] 或 [BPP，第 2 节3]。

2.1.1. 设 $\mathrm{n} \geq 1$ 和 $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ 是 n 个两两不同的复数。我们定义

$$\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \infty\} \subset \mathbf{P}^1 \qquad \text{and} \qquad Y = \mathbf{P}^1 \setminus \Sigma .$$

1-形式 $\omega_k = \mathrm{d}\,\mathrm{Log}(\mathrm{z} - \sigma_k) = \mathrm{dz}/(\mathrm{z} - \sigma_k)$，其中 $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{m}$，构成该空间的一组基 e

$$\mathcal{H}_\Sigma = \mathbf{H}^0\big(\mathbf{P}^1, \Omega^1_{\mathbf{P}^1}(\mathrm{Log}\,\Sigma)\big)$$

由沿 Σ 具有对数极点的 P^1 上的全局有理 1-形式构成。

我们固定一个基点 $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$。对于任意一个由 ω_k 构成、长度为 $\mathrm{w} \geq 1$ 的词 $\omega_{k_1}\omega_{k_2}\cdots\omega_{k_w}$，定义与之对应的、在 y 处的超对数为该点处的全纯芽，记作 $\mathrm{L}^{y}_{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}}$其定义通过在 y 的一个充分小邻域内进行逐次积分，并根据以下关系按长度 w 归纳给出：

$$L^y_{\omega_{k_w}}(z) = \int_y^z \omega_{k_w} = \mathrm{Log}\left(\frac{z-\sigma_{k_w}}{y-\sigma_{k_w}}\right) \qquad \text{and} \qquad L^y_{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}}(z) = \int_y^z \frac{L^y_{\omega_{k_2}\ldots\omega_{k_w}}(u)}{u-\sigma_{k_1}}du \quad \text{for } w > 1 ,$$

对于 P^1 上充分靠近 y 的任意 z。芽 $\mathrm{L}^{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}} \in \mathcal{O}_{Y,\,y}$ 可沿任意一条将 y 与任意点 $\mathrm{z} \in \mathrm{Y}$ 连接起来的连续路径 $\gamma_z\colon [0,1] \to \mathrm{P}^1 \setminus \Sigma$ 进行解析延拓。其值

在 z 处，该解析延拓的值仅取决于 γ_z 的同伦类，并且容易看出，它与张量 $\omega_{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{k_w}\in(\mathrm{H}_\Sigma)^{\otimes w}$ 沿 γ_z 的迭代积分一致：有

$$L^y_{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}}(z)=\int_{\gamma_z}\frac{du}{u-\sigma_{k_1}}\otimes\frac{du}{u-\sigma_{k_2}}\otimes\ldots\otimes\frac{du}{u-\sigma_{k_w}}.$$

芽 $\mathrm{L}^y_{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}}$ 在 Y 上导出一个全局但多值的全纯函数，其分支点位于各个 σ_k 处；我们仍将其称为与 $\omega_{k_1}..\omega_{k_w}$ 相关联的超对数，并记作 $\mathrm{L}^{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_w}\circ}$

更正式地，我们考虑映射（其中 II 代表“迭代积分”）

$$\mathrm{II}^y_Y:\oplus_{w\geq0}(\mathcal{H}_\Sigma)^{\otimes w}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1,y},\quad \omega_{k_1}\otimes\omega_{k_2}\otimes\ldots\otimes\omega_{k_w}\longmapsto L^y_{\omega_{k_1}\cdots\omega_{k_w}}. \tag{4}$$

除了是 C-线性的之外，还可以证明，当 $\oplus_{w\geq0}(\mathrm{H}_\Sigma)^{\otimes w}$ 赋予所谓的“洗牌积”时，该映射是代数同态（但本文余下部分不会用到这一性质）。像 $\mathrm{Im}(\mathrm{II}^y{}_Y)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1,y}$ 的一个复子代数，其元素称为超对数（在 y 处的芽）。此外，映射 (4) 是单射。因此，对于任意超对数芽 $\mathrm{L}\in\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1,y}$，使得 L 属于 $\oplus_{w'\geq w}(\mathrm{H}_\Sigma)^{\otimes w'}$ 在 $\mathrm{II}^y{}_Y$ 下的像的整数 $\mathrm{w}\geq0$ 的最小值 w(L) 是良定义的，称为 L 的权。

作为 P^1，上的多值函数，超对数的单值化可证明是幂零的（见 [We, Thm.8.2]）；由此可知，这些函数也构成一个代数，并且权的概念对它们仍然适用。

2.1.2. 最经典的例子是 $\mathrm{m}=2$ with $\sigma_1=0$ and $\sigma_2=1$，其中涵盖了经典多对数的情形。事实上，在这一特殊情形下，令 $\eta_0=\mathrm{dz/z}$ 和 $\eta_1=\mathrm{dz/(1-z)}$ 为 $\mathrm{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ 上的多值超对数，则有

$$\mathrm{Log}=L_{\eta_0},\qquad R=\frac{1}{2}\left(L_{\eta_0\eta_1}-L_{\eta_1\eta_0}\right)\qquad\text{and}\qquad\mathbf{Li}_{n+1}=L_{\eta_0^{\otimes n}\eta_1}\quad\text{for any } n\geq0.$$

在局部使用超对数芽会更为复杂，但可以消除有关所考虑函数分支选择的所有歧义。例如，对于任意 $\mathrm{y}\in\mathrm{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$，在 y 处符号为 $\frac{1}{2}(\eta_0\eta_1-\eta_1\eta_0)$ 的权 2 超对数是由下式定义的全纯函数

$$R^y(z)=\frac{1}{2}\left(L_{\eta_0\eta_1}(z)-L_{\eta_1\eta_0}(z)\right)=\frac{1}{2}\int_y^z\left(\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{u-1}{y-1}\right)}{u}-\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{u}{y}\right)}{u-1}\right)du$$

对于任意 $\mathrm{z}\in(\mathrm{P}^1,\mathrm{y})$。这个超对数应被视为在 y 处局部化的罗杰斯二重对数的全纯版本，该二重对数定义于 2 中。

2.1.3. 现在我们定义本文中涉及的超对数，记为 AI^w。尽管我们的结果适用于权 w 小于或等于 6 的情形，AI^w 的定义关于 w 完全统一，因此本小节中我们不会对权施加任何限制。

我们再次采用 §2.1.1 中的记号：当 $\mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{m}$ 等时，$\Sigma=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\infty\}$, $\omega_k=\mathrm{dz/(z}-\sigma_k)$。我们在 P^1, 上引入一类关于 Σ、权为 $\mathrm{m}=|\Sigma|-1$的特殊类超对数。

对于一个C-v 向量空间 V，我们将 $\wedge^m V$ 与其在 $V^{\otimes m}$ 中的像等同，后者由标准嵌入给出：

$$\wedge^m V \hookrightarrow V^{\otimes m}, \qquad v_1 \wedge \ldots \wedge v_m \longmapsto \frac{1}{m!}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m}(-1)^\tau v_{\tau(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\tau(m)}\Big),$$

其中 $(-1)^\tau$ 表示任意置换 $\tau \in S_m$ 下 τ 的符号。

定义 2.1. 关于 Σ，P^1，上权为 m 的（完全）反对称超对数 AI^m，是指这样一个超对数：其在任意 $y \in Y = P^1 \setminus \Sigma$ 处的芽，是通过映射 (4) 取 $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m \in \wedge^m H_\Sigma \subset (H_\Sigma)^{\otimes m}$ 的像得到的；作为 y 处的芽，有

$$AI^m_\Sigma = II^y_Y(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m).$$

可以验证，$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m \in \wedge^m H_\Sigma$ 是典范定义的，至多相差一个符号。因此，$\pm AI^m_\Sigma$ 由 Σ典范定义。下面是关于前三个例子的一些简单说明：

– $m = 1$ 和 $\sigma_1 = 0$；$AI^1_{\{0,\infty\}} = \mathrm{Log}$ 在相差一个符号的意义下成立；– $m = 2$和 $\sigma_1 = 0$，$\sigma^2 = 1$；在相差一个符号的意义下，可以还原出上文讨论的罗杰斯二重对数的全纯版本，因为 $AI^2_{\{0,1,\infty\}} = R^y$ 在任意 $y \in P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$处作为芽相等；– $m = 3$ 的情形是新的，因为据我们所知，文献中此前尚未研究过权为 3 的反对称超对数。对于满足 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \infty\}$ 的任意 $y \in P^1 \setminus \Sigma$，可以给出 AI^3_Σ 的显式积分表达式（见（19））。然而，可以证明，AI^3_Σ 能够表示为权为 1 或 2 的反对称多对数乘积的如下线性组合：对于 AI^3_Σ 的符号以及 $k = 1$、2、3 时的权为 2 的超对数 $AI^2_{\Sigma\setminus\{\sigma_k\}}$，的适当选取，以下关系成立

$$AI^3_\Sigma(z) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\mathrm{Log}\left(\frac{z-\sigma_k}{y-\sigma_k}\right)\cdot AI^2_{\Sigma\setminus\{\sigma_k\}}(z)$$

对于任意充分接近先前固定基点 y 的 $z \in P^1$。

2.1.4. 超对数的拉回。设 Y 是一个（不一定紧致的）复流形，并设 $H \subset H^0(Y,\Omega^1_Y)$ 是 Y 上全纯 1-形式的一个子空间，使得：

(5) $$\textit{For all } \omega, \omega' \in \boldsymbol{\mathcal{H}}, \textit{one has } d\omega = 0 \textit{ and } \omega \wedge \omega' = 0.$$

例如，当 $H = \phi^* H^0(C, \Omega^1_C)$，且存在正则浸没 $\phi : Y \to C$，其中 C 是一条光滑（不一定紧致的）曲线时，条件 (5) 即成立。条件 (5) 确保，对于任意属于 H 的全纯 1-形式 $\omega_1 \ldots, \omega_w$，按 §2.1.1 中的方式归纳定义的迭代积分 $II^y_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_w} = R^\bullet \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_w$ 仅取决于路径 γ_z 的同伦类。因此，对于所有 $m \geq 1$，存在 C-线性映射 $II^y{}_Y : \oplus_{w\geq 0} H^{\otimes w} \to O_{Y,y}$，其定义如 (4)。此外，该映射是复代数的单射态射。

一种特殊情形是，条件 (5) 不一定对 H 中的所有元素都成立，但存在子空间 $H_i \subset H$（$i = 1 \ldots, d$），使得每个 H_i 都满足 (5)。在这种情况下，对于所有 $w \geq 0$，由子空间 $\sum_{i=1}^d (H_i)^{\otimes w} \subset H^{\otimes w}$上的迭代积分再次给出一个定义良好的单射 C-线性映射：

(6) $$II^y_Y : \oplus_{w\geq 0}\Big(\sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{\mathcal{H}}_i^{\otimes w}\Big) \to O_{Y,y}.$$

2.1.5. 网的超对数。固定 $m \geq 1$。这里考虑的情形是：X 是一个复射影流形，$\phi_i : X \to \mathbb{P}^1$ 是满射态射（$i = 1, \ldots, d$），并且存在由 m+1 个互异点组成的子集 $\Sigma_i = \{\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^m, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$，使得对于所有 i，$\phi_i : X \setminus \phi_i^{-1}(\Sigma_i) \to \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_i$ 都是正则浸没；所有除子 $\phi_i^{-1}(\sigma_i^k) \subset X$ 的并集 $D \subset X$（i 和 $k = 1, \ldots, m$）满足：对于所有两两不同的 $i, j = 1, \ldots, d$，在 $Y = X \setminus D$ 上有 $d\phi_i \wedge d\phi_j, 0$。那么映射 ϕ_i（$i = 1, \ldots, d$）定义了 Y 上的一个正则 d-网超曲面网。

在这种情况下，我们采用以下记号：

- we denote by $\mathcal{H} = \mathbf{H}^0(X, \Omega^1_X(\mathrm{Log} D)) \subset \mathbf{H}^0(Y, \Omega^1_Y)$ the space of logarithmic 1-forms on X with logarithmic poles along to D;
- for $i = 1, \ldots, d$, we set $Y_i = \mathbf{P}^1 \setminus \Sigma_i$ and
  - $\theta_i^j = dz/(z - \sigma_i^k)$ for $k = 1, \ldots, m$, which form a basis of
$$\mathcal{H}_{\Sigma_i} = \mathbf{H}^0\Big(\mathbf{P}^1, \Omega^1_{\mathbf{P}^1}(\mathrm{Log}\, \Sigma_i)\Big)$$
  - $\Theta_i^j = \phi_i^*(\theta_i^j) = d\phi_i/(\phi_i - \sigma_i^k)$ for $k = 1, \ldots, m$, which form a basis of
$$\mathcal{H}_i = \phi_j^*\Big(\mathcal{H}_{\Sigma_i}\Big) \subset \mathcal{H};$$
  - $\theta_i = \theta_i^1 \wedge \ldots \wedge \theta_i^m \in \wedge^m \mathcal{H}_{\Sigma_i} \subset (\mathcal{H}_{\Sigma_i})^{\otimes m}$ and $\Theta_i = \phi_i^*(\theta_i) = \wedge_{k=1}^m \Theta_i^k \in \wedge^m \mathcal{H}_i \subset (\mathcal{H}_i)^{\otimes m}$;
- 对于任意 $y \in Y$，令 $y_i = \phi_i(y) \in \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_i$，并考虑权重 m 超对数的（芽）

$$AI^m_{\Sigma_i} = \mathrm{II}^{y_i}_{Y_i}(\theta_i) \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1, y_i} \quad \text{for } i = 1, \ldots, d \qquad \text{and} \qquad AI^m_i = \mathrm{II}^y_Y(\Theta_i) \in \mathcal{O}_{Y,y}\,.$$

容易验证，对于任意 i，以下关系作为 Y 上 y 处的芽成立：

$$AI^m_i = AI^m_{\Sigma_i} \circ \phi_i.$$

对于任意 $i = 1, \ldots, d$，超对数 AI^m_i（或等价地，$\mathrm{AI}^m_{\Sigma_i}$）仅在相差一个 -1 倍的意义下定义。对每个 i，我们固定 AI^m_i 的两个可能取值之一。以下结果虽然证明起来很简单，却至关重要，因为它将使我们能够以代数方式处理 §3 中要建立的函数恒等式：

命题 2.2。对于 $c_1 \ldots, c_d \in \mathbb{C}$，以下陈述等价：

i. $\sum_{i=1}^d c_i \Theta_i = 0$ 属于 $\wedge^n H \subset H^{\otimes n}$。ii. 存在 $y \in Y$，使得 $\sum_{i=1}^d c_i \mathrm{AI}^m_{\Sigma_i}(\phi_i) = 0$ 作为 Y 上 y 处的全纯芽。iii. 对任意 $y \in Y$，$\sum_{i=1}^d c_i \mathrm{AI}^m_{\Sigma_i}(\phi_i) = 0$ 作为 Y 上 y 处的全纯芽。iv. $\sum_{i=1}^d c_i \mathrm{AI}^m_{\Sigma_i}(\phi_i) = 0$ 作为 Y 上的多值函数。

证明。对于点 $y \in Y$，有 $\sum_{i=1}^d c_i \mathrm{AI}^m_{\Sigma_i}(\phi_i) = \mathrm{II}^y{}_Y(\sum_{i=1}^d c_i \Theta_i)$，其中 $\mathrm{II}^y{}_Y$ 是式（6）中的积分映射。由该映射是单射这一事实，即得结论。□

2.2. 德尔佩佐曲面。德尔佩佐曲面是反典范线丛为丰沛的光滑射影曲面。德尔佩佐曲面同构于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，或同构于在 $\mathbb{P}^2$ 中一般位置的 r 个点 $p_1,\dots,p_r$ 处爆破所得的 $\mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(\mathbb{P}^2)(r\geq 8)$。

以下我们考虑德尔佩佐曲面 $X_r=\mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(\mathbb{P}^2)$，其中 $3\leq r\leq 8$。我们固定一个爆破映射 $\beta=\beta_r: X_r\to\mathbb{P}^2$。关于德尔佩佐曲面的一般性质，可参见 [Ma, Chap.IV] 或 [Do1, Chap.8]。这里我们列出将要用到的性质。

(1). 皮卡群 $\mathrm{Pic}(X_r)$ 是由例外除子 $\beta^{-1}(p_i)$（对于 $i=1,\dots,r$）的类 e_i 以及在 β 下 $\mathbb{P}^2$ 中一般直线的原像类 h 生成的自由阿贝尔群。X_r 上的交数配对由 $h^2=1, h\cdot e_i=0, e_i\cdot e_j=-\delta_{ij}$ 确定，其中 $i,j\in\{1,\dots,r\}$。

(2). 典范除子为 $K=K_{X_r}=-3h+\sum_{i=1}^r e_i$，且 X_r 的次数为 $(-K)^2=9-r$.

(3). X_r 上的直线是一条光滑曲线 $l\subset X_r$，满足 $K\cdot l=l^2=-1$。这样的直线必然是一条光滑有理曲线，并且可自然地与其在 $\mathrm{Pic}(X_r)$ 中的类相对应。我们用 $\mathcal{L}_r$ 表示 X_r 上直线的集合。

(4). X_r 上的圆锥曲线是曲线 $C\subset X_r$，满足 $C\cdot K=-2$ 和 $C^2=0$。当 C 光滑时，它必然是一条光滑有理曲线。否则，它是 X_r 上两条共点直线之和。我们用 $\mathcal{K}_r$ 表示圆锥曲线类的集合。

圆锥曲线纤维化 $X_r\to\mathbb{P}^1$ 由 X_r 上一条圆锥曲线的完全线性系给出。因此，$\mathcal{K}_r$ 对应于射影等价意义下圆锥曲线纤维化的集合。

（5）. 正交补 $K^\perp=\{\alpha\in\mathrm{Pic}(X_r)\mid \alpha\cdot K=0\}$ 是秩为 r 的自由群，由以下类张成

$$\alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad\text{for } i=1,\dots,r-1\qquad\text{and}\qquad \alpha_r=3h-e_1-e_2-e_3.$$

结合由交数配对导出的正定对称型 $-(\cdot,\cdot)|_{K^\perp}$，这些 α_i 定义了一个 E_r 型根系，约定 $E_4=A_4, E_5=D_5$, 见下图:

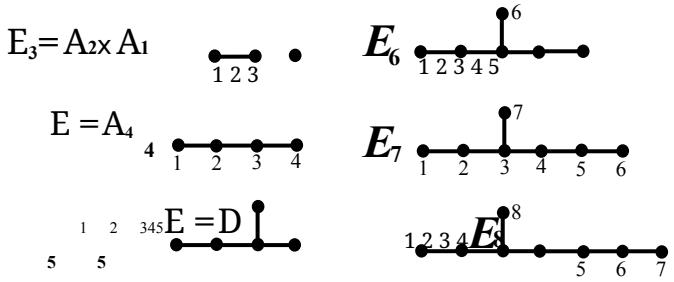


图 1. Dynkin 图 E_r（其中 i 表示 α_i，对任意 $i=1,\dots,r$）

(6)。对于任意 $i=1,\dots,r$，映射

(7) $$s_{\alpha_i}:\beta\longmapsto\beta+(\beta\cdot\alpha_i)\alpha_i$$

是 $(\mathrm{Pic}(X_r),(\cdot,\cdot))$ 的一个对合自同构，它保持 K 不变。s_{α_i} 在 $R_r=K^\perp\otimes_{\mathbf{Z}}R$ 上的限制是正交反射，并生成一个类型为 E_r 的魏尔群，记作 W_r。特别地，W_r 是有限群。

(7)。为简便起见，对任意 i，我们记 $s_i = s_{\alpha_i}$。当 $i = 1, \dots, r-1$ 时，反射 s_i 通过交换 e_i 与 e_{i+1}，在 $\mathrm{Pic}(X_r)$ 上作用，同时保持其他例外类 e_k 和 h 不变。反射 s_r 的作用是克雷莫纳变换，即有 $s_r(h) = 2h - e_1 - e_2 - e_3$，且对 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$，有 $s_r(e_i) = h - e_j - e_k$；当 $k = 4, \dots, r$ 时，s_r 保持 e_k 不变。

(8). 对于元素 $w \in W_r$，我们将 $(-1)^w = (-1)^{l(w)} \in \{\pm 1\}$ 称为 w 的符号。这里，$l(w)$ 表示 w 的长度，按定义，它是能够将 w 写成 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$（其中 $i_1, \dots, i_m$ 属于 $\{1, \dots, r\}$）的最小非负整数 m。映射 $W_r \to \{\pm 1\}$，$w \mapsto (-1)^w$ 是一个群同态，称为符号。相应的符号表示是 W_r 的唯一非平凡一维表示。

(9). X_r 上的任意直线 l（分别地，任意圆锥曲线类 c）都属于例外除子 e_1（分别地，$h - e_1$）的 W_r-轨道。这由诺特不等式推出（例如，见 [Do2，第 288] 页）。等价地：W_r 在直线集合 $\mathcal{L}_r$（分别地，在圆锥曲线类集合 $\mathcal{K}_r$）上具有传递作用。

(10). 任意对应于圆锥曲线类 c 的圆锥曲线纤维化 $\phi_c : X_r \to \mathbb{P}^1$ 恰有 r 个 -1可约纤维，每个可约纤维都是两条直线在一点相交所成的并。特别地，每个圆锥曲线类都具有形式 $c = l + l'$，其中 l、l' 是满足 $l \cdot l' = 1$ 的直线。我们常写作 $l + l'$ 来表示可约圆锥曲线 $l \cup l'$。

(11). 当 $r > 3$ 时，$e_r \in \mathcal{L}_r$ 的稳定子 W_{e_r} 由反射 s_i（i 从 1 到 r 取值且不等于 $r-1$）生成。因此，W_{e_r} 同构于 Dynkin 图 E'_{r-1} 对应的魏尔群；该图由 E_r 删除第 $(r-1)$ 个节点及其相邻的边得到，即 $W_{e_r} \simeq W(E_{r-1})$。特别地，当 $r > 3$ 时，有 $l_r = |\mathcal{L}_r| = |W_r|/|W_{r-1}|$。当 $r = 3$ 时，有 $W_{e_3} = \langle s_1 \rangle \simeq \{\pm 1\}$ 和 $l_3 = |\mathcal{L}_3| = 6$。

(12). $c_1 = h - e_1 \in \mathcal{K}$的稳定子 W_{c_1} 由反射 $s_2, \dots, s_r$生成。W_r 的这个子群同构于与 Dynkin 图 E''_{r-1}相关联的魏尔群；该图由 E_r删去第一个节点及其相邻的边得到，因此其类型为 D_{r-1}.[4] 特别地，我们有 $\kappa_r = |\mathcal{K}_r| = |W_r|/|W(D_{r-1})| = |W_r|/(2^{r-2}(r-1)!)$。

(13). 对于任意两两不相交的 $r-2$ 条直线 $l_1, \dots, l_{r-2}$，存在魏尔群 W 中的一个元素 w，使得对所有 $i = 1, \dots, r-2$，均有 $w \cdot e_i = l_i$（参见 [Ma] 中的推论 26.8.(i)）。

与魏尔群 W_r 以及直线集和圆锥曲线集 $\mathcal{L}_r$ 和 $\mathcal{K}_r$ 相关的一些数值不变量汇总于下表：

我们的方法的一个重要组成部分是，对于每种情形 $r \in \{3, \dots, 8\}$，集合 $\mathcal{L}_r$ 和 $\mathcal{K}_r$（视为 $\mathrm{Pic}(X_r)$ 的子集时）都有明确的描述。我们仅讨论 $r = 8$的情形（由此很容易推导出其他情形），详细信息和证明见 [Ma, §26]和 [Do**1**]。

视为 $\mathrm{Pic}(X_r)$ 中的元素时，任何直线类或圆锥曲线类都由其相对于皮卡格基 $(h, -e_1, \dots, -e_r)$ 的整数坐标元组 $(d, m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ 唯一确定。将坐标 $(r+1)$ 元组 $(d, m_1, \dots, m_r)$ 的类型记为符号 $(d\,;\, k_1^{n_1}, \dots, k^{n_s}{}_s)$，其中 k_t、0 和 $n_t > 0$ 是满足 $t = 1, \dots, s \le r$ 的整数，且具有如下定义性质：对于从 1 到 s 的每个 t，在非零的 $m_1, \dots, m_r$ 中，恰有 n_t 个等于 k_t（例如，$(6, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 0) \in \mathbb{Z}^9$ 的类型为 $(6;\ 3,\ 2^6)$ 等）。

[4]这里我们采用以下约定：$D_2 = A_1 \times A_1$ 且 $D_3 = A_3$。

r	3	4	5	6	7	8
E_r	$A_2 \times A_1$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$W_r = W(E_r)$	$S_3 \times S_2$	S_5	$(Z/2Z)^4 \rtimes S_5$	$W(E_6)$	$W(E_7)$	$W(E_8)$
$\omega_r = \lvert W_r \rvert$	12	5!	$2^4 \cdot 5!$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$l_r = \lvert L_r \rvert$	6	10	16	27	56	240
$\kappa_r = \lvert K_r \rvert$	3	5	10	27	126	2160

表1。

下表列出了 X_8，上直线类和圆锥曲线类的所有类型，并注明了每种类型对应的类的数量（见 [Ma, 命题 26.1] 和 [Do1, §8.8]）。

X_8 上的直线	
类型	此类直线的数量
$(0;\ -1)$	8
$(1;\ 1^2)$	28
$(2;\ 1^5)$	56
$(3;\ 2,\ 1^6)$	56
$(4;\ 2^3,\ 1^5)$	56
$(5;\ 2^6,\ 1^2)$	28
$(6;\ 3,\ 2^7)$	8

X 上的圆锥曲线类$_8$	
类型	此类数量
$(1;\ 1)$	8
$(2;\ 1^4)$	70
$(3;\ 2, 1^5)$	168
$(4;\ 2^3, 1^4)$	280
$(4;\ 3, 1^7)$	8
$(5;\ 2^6, 1)$	56
$(5;\ 3,\ 2^3, 1^4)$	280
$(6;\ 3^2,\ 2^4, 1^2)$	420
$(7;\ 3^4,\ 2^3, 1)$	280
$(7;\ 4,\ 3,\ 2^6)$	56
$(8;\ 3^7, 1)$	8
$(8;\ 4,\ 3^4,\ 2^3)$	280
$(9;\ 4^2,\ 3^5, 2)$	168
$(10;\ 4^4,\ 3^4)$	70
$(11;\ 4^7, 3)$	8

表 2. 一度德尔佩佐曲面 X_8 上直线和圆锥曲线类的类型及其数量。

3. 恒等式 HLog^{r-2}

In t在整个本节中，我们固定 $3 \leq \mathrm{r} \leq 8$。为简便起见，大多数时候我们将记作

$$X = X_r\,, \quad K = K_{X_r}\,, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_r\,, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_r\,, \quad \text{etc.}$$

3.1. 对于每个圆锥曲线类 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}$，我们考虑相应的圆锥曲线纤维化 $\phi_{\mathrm{c}} : \mathrm{X} \to \mathrm{P}^1$，并用 $\Sigma_{\mathrm{c}} \subset \mathrm{P}^1$ 表示对应于 ϕ_{c} 的可约纤维的 $\mathrm{r} - 1$ 个不同点的集合。不失一般性，我们可以假设 $\Sigma_{\mathrm{c}} = \{\sigma_{\mathrm{c}}^1, \ldots, \sigma_{\mathrm{c}}^{r-1}\}$ (其中 $\sigma_{\mathrm{c}}^{r-1} = \infty$)，即我们处于 §2.1.5 所述的超曲面网（在本例中为圆锥曲线）的情形。我们采用与 §2.1.5 相同的设置和记号：我们有

- $Y = X \setminus L$ with $L = L_r = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \ell \subset X$, and $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathbf{H}^0(X, \Omega^1_X(\mathrm{Log}\, L))$;
- and for any conic class $\mathfrak{c} \in \mathcal{K}$, we set:
  - $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\Sigma_{\mathfrak{c}}} = \mathbf{H}^0(\mathbf{P}^1, \Omega^1_{\mathbf{P}^1}(\mathrm{Log}\, \Sigma_{\mathfrak{c}}))$ and $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathfrak{c}} = \phi_{\mathfrak{c}}^* \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\Sigma_{\mathfrak{c}}} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}}$;
  - $\eta'_{\mathfrak{c}} = \wedge_{i=1}^{r-2}\left(\frac{dz}{z - \sigma_{\mathfrak{c}}^i}\right) \in \wedge^{r-2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\Sigma_{\mathfrak{c}}} \subset (\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\Sigma_{\mathfrak{c}}})^{\otimes r-2}$; and
  - $\eta_{\mathfrak{c}} = \wedge_{i=1}^{r-2}\left(\frac{d\phi_{\mathfrak{c}}}{\phi_{\mathfrak{c}} - \sigma_{\mathfrak{c}}^i}\right) = \phi_{\mathfrak{c}}^* \eta'_{\mathfrak{c}} \in \wedge^{r-2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathfrak{c}} \subset (\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathfrak{c}})^{\otimes r-2}$.

每个元素 $\eta_{\mathfrak{c}}$ 都生成一维 C-向量空间 $\wedge^{r-2}\mathrm{H}_{\mathfrak{c}}$，且其定义除符号外是典范的。下文中，我们将 $\wedge^{r-2}\mathrm{H}_{\mathfrak{c}}$ 与其在 $\wedge^{r-2}\mathrm{H}$ 中的像等同。

沿用 §2.1.5 中的记号，对于任意 $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$，并将其视为该点处的全纯芽，有

$$AI_{\mathfrak{c}}^{r-2}(\phi_c) = AI_{\Sigma_{\mathfrak{c}}, y}^{r-2}(\phi_{\mathfrak{c}}) = \mathrm{II}_y(\eta_{\mathfrak{c}}) \in O_{Y,y}\,. \tag{8}$$

由引理 2.2 可知，定理 1.1 等价于以下陈述：

定理 3.1。1. 除了一个整体符号外，对于每个 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}$，存在元组 $(\tau_{\mathfrak{c}})_{\mathfrak{c} \in \mathcal{K}}$ with $\tau_{\mathfrak{c}} = \pm \eta_{\mathfrak{c}}$ 的典范选择，使得以下等式在 $\wedge^{r-2}\mathrm{H}$ 中成立：

$$\sum_{\mathfrak{c} \in \mathcal{K}_r} \tau_{\mathfrak{c}} = 0 \tag{9}$$

2. 此外，恒等式 (9) 张成了 $\tau_{\mathfrak{c}}$'s 之间的线性关系空间，即，如果 $(\mathrm{c}_{\mathfrak{c}})_{\mathfrak{c} \in \mathcal{K}} \in \mathrm{C}^{\mathcal{K}}$ 满足 $\mathrm{P}_{\mathfrak{c} \in \mathcal{K}_r} \mathrm{c}_{\mathfrak{c}}\, \tau_{\mathfrak{c}} = 0$，那么所有 $\mathrm{c}_{\mathfrak{c}}$'s 都相等。

本节的其余部分将致力于证明这一结果。

3.2. 由于 L 的不可约分量是直线 $\mathrm{l} \in \mathcal{L}$，因此可以定义庞加莱留数映射 $\mathrm{Res}_L = \oplus_{\ell \in \mathcal{L}} \mathrm{Res}_\ell : \Omega^1_X(\mathrm{LogL}) \to \oplus_{\ell \in \mathcal{L}} O_\ell$ wich，使得以下层序列是正合的：

$$0 \to \Omega^1_X \longmapsto \Omega^1_X(\log L) \longmapsto \oplus_{\ell \in \mathcal{L}} O_\ell \to 0.$$

由于 X 是有理簇，我们有 $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega^1_X) = 0$，因此留数映射诱导出一个 C-线性向量空间的单射 $\mathrm{Res}_L : \mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{C}^{\mathcal{L}}$，进而得到一个单射线性映射 $\wedge^{r-2}\mathrm{H} \hookrightarrow \wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$。

给定一个与圆锥曲线类 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}$相关联的圆锥曲线纤维化 $\phi_{\mathfrak{c}} : \mathrm{X} \to \mathrm{P}^1$，记 $\mathrm{C}_{\mathfrak{c}}^1, \ldots, \mathrm{C}_{\mathfrak{c}}^{r-1}$为 $\phi_{\mathfrak{c}}$的可约纤维，其中 $\mathrm{C}_{\mathfrak{c}}^i = \phi_{\mathfrak{c}}^{-1}(\sigma_{\mathfrak{c}}^i)$对应 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r} - 1$ (满足 $\sigma_{\mathfrak{c}}^{r-1} = \infty$)。每条圆锥曲线 $\mathrm{C}_{\mathfrak{c}}^i$ 都是两条直线 $\mathrm{l}_{\mathfrak{c}}^i$, $\tilde{\mathrm{l}}_{\mathfrak{c}}^i$ 的并，它们交于一点。因此，留数

$$\mathrm{Res}_L\left(d\phi_{\mathfrak{c}} / \left(\phi_{\mathfrak{c}} - \sigma_{\mathfrak{c}}^i\right)\right) = C_{\mathfrak{c}}^i - C_{\mathfrak{c}}^{r-1} = \left(\ell_{\mathfrak{c}}^i + \tilde{\ell}_{\mathfrak{c}}^i\right) - \left(\ell_{\mathfrak{c}}^{r-1} + \tilde{\ell}_{\mathfrak{c}}^{r-1}\right) \in \mathbf{C}^{\mathcal{L}}$$

对于 $i = 1, \dots, r-2$，构成单射 $H \hookrightarrow C^{\mathcal{L}}$下 $H_c \subset H$ 的像的一组基。因此，我们得到，单射 $\wedge^{r-2}H \hookrightarrow \wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$ 下 $\eta_c \in \wedge^{r-2}H_c \subset \wedge^{r-2}H$ 的像为

$$\left(C_c^1 - C_c^{r-1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(C_c^{r-2} - C_c^{r-1}\right). \tag{10}$$

3.3. 魏尔群 W 以相容的方式作用于直线集合 $\mathcal{L}$ 和圆锥曲线类集合 $\mathcal{K}$。特别地，给定 $c \in \mathcal{K}$，任意 $w \in W$ 的作用都会将 ϕ_c 的可约纤维映至 $\phi_{w\cdot c}$ 的可约纤维，方式如下：

$$w \cdot C_c^i = w \cdot \ell_c^i + w \cdot \tilde{\ell}_c^i .$$

另一方面，W 在 $\mathcal{L}$ 上的作用诱导了 W 在 $C^{\mathcal{L}}$ 上的典范线性作用，因此也诱导了在 $\wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$ 上的作用。$w \in W$ 在任意外积 $\wedge_{i=1}^{r-2} l_i$（其中 $(l_i)_{i=1}^{r-2} \in \mathcal{L}^{r-2}$）上的作用由下式给出：

$$w \cdot \left(\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_{r-2}\right) = (w \cdot \ell_1) \wedge \cdots \wedge (w \cdot \ell_{r-2}) .$$

3.4. 现在固定一个基圆锥曲线类 $c_1 = h - e_1$，并将相应圆锥曲线纤维化 $\phi_{c_1} : X \to P^1$ 的可约纤维标记如下：

$$C^i = C_{c_1}^{i-1} = l_{1i} + e_i \qquad \text{for} \quad i = 2, \dots, r,$$

其中 l_{1i} 表示直线在爆破映射 β 下的严格变换在 P^2中的类，该直线经过 p_1 和 p_i，即 $l_{1i} = h - e_1 - e_i$。作为（$\wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$ 中）$\wedge^{r-2}H_{c_1}$的一个生成元，我们选取并固定

$$\tau_{c_1} = \left(C^2 - C^r\right) \wedge \left(C^3 - C^r\right) \wedge \ldots \wedge \left(C^{r-1} - C^r\right) \in \wedge^{r-2}\mathbf{C}^{\mathcal{L}}.$$

对于任意 $w \in W$，我们有：

$$w \cdot \tau_{c_1} = (w \cdot C^2 - w \cdot C^r) \wedge (w \cdot C^3 - w \cdot C^r) \wedge \ldots \wedge (w \cdot C^{r-1} - w \cdot C^r) \in \wedge^{r-2}\mathbf{C}^{\mathcal{L}}. \tag{11}$$

c_1 的稳定子 W_{c_1} 是 W 的一个子群，因此自然作用于 $\wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$。这一作用使$\wedge^{r-2}H_{c_1} \subset \wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$ 保持不变，因此 $\wedge^{r-2}H_{c_1}$ 自然是一个 W_{c_1}-表示（维数为 1）。

引理 3 .2. 1. 作为 W_{c_1}-表示，$\wedge^{r-2}H_{c_1}$ 与符号表示同构 *n.*

2. 对于 $w \in W$ 和 $c \in \mathcal{K}$，若 $c = w \cdot c_1$，，则元素

$$\tau_c = (-1)^w (w \cdot \tau_{c_1})$$

是 $\wedge^{r-2}H_c \subset \wedge^{r-2}C^{\mathcal{L}}$ 的良定义生成元。

采用本引理中的记号，由于 $i = 2, \dots, r-1$ 对应的 $w \cdot C^i$ 是 ϕ_c 的不可约纤维，显然 τ_c 与 η_c 相差一个符号，因此尤其是 $\wedge^{r-2}H_c$ 的生成元。本引理中第二个陈述的意义在于，它断言 τ_c 仅取决于 c，而不取决于 w（在 τ_{c_1} 已固定的情况下）。

证明。证明 1. 是初等的。事实上，由于它是一个一维的 W_{c_1}-表示，$\wedge^{r-2}H_{c_1}$只有两种可能：要么是平凡的 W_{c_1}-表示，要么是符号表示。要证明第二种情形确实出现，只需找出一个元素 $w \in W_{c_1}$使得 $w\cdot\tau_{c_1} = -\tau_{c_1}$。利用 (7) 和 (11)，可以直接验证 W_{c_1} 的任意生成元 $s_2, \dots, s_r$（参见 §2.2.(12)）都具有这一性质。

引理的第二部分很容易由第一部分推出：对于满足 $w_1, w_2 \in W$ 且 $w_1 \cdot c_1 = w_2 \cdot c_1 = c$ 的 w，有 $w_2^{-1} w_1 \in W_{c_1}$，因此根据 1.，$w_2^{-1} w_1 \cdot \tau_{c_1} = (-1)^{w_2^{-1} w_1} \tau_{c_1}$。于是 $w_2 \cdot (w_2^{-1} w_1 \cdot \tau_{c_1}) = (-1)^{w_2^{-1} w_1} w_2 \cdot \tau_{c_1}$。由于符号 $w \mapsto (-1)^w$ 是一个群同态，对于任意 w，都有 $(-1)^{w^{-1}} = (-1)^w$，因此可得 $w_1 \cdot \tau_{c_1} = (-1)^{w_2} (-1)^{w_1} w_2 \cdot \tau_{c_1}$。这等价于 $(-1)^{w_1} w_1 \cdot \tau_{c_1} = (-1)^{w_2} w_2 \cdot \tau_{c_1}$，而这正是确保 2. 成立的关系。□

3.5. 定理 3.1 的证明。我们将证明以下陈述成立：

1. $\mathcal{K}$-元组 $(\tau_c)_{c \in \mathcal{K}}$ 是 $\oplus_{c \in \mathcal{K}} \wedge^{r-2} H_c$ 的一组基，除整体符号外是典范的。2. 和 $P_{c \in \mathcal{K}} \tau_c$ 在 $\wedge^{r-2} H$ 中按 W 的作用以符号的方式变换。3. 有 $P_{c \in \mathcal{K}} \tau_c = 0$ 属于 $\wedge^{r-2} H$。4. τ_c 在 $\wedge^{r-2} H$ 中的任何标量线性关系，都是与第 3 条恒等式对应的关系的倍数。

第一个断言可由引理 3.2 的第二部分以及每个 τ_c 必与 η_c 相差一个符号这一事实轻易推出（细节留给读者）。在本小节中，我们将先证明第 2 条（参见引理 3.5），再证明第 3 条和第 4 条；后两条将同时由引理 3.7 推出。

对于 $k \geq 1$，遵循 Manin 的做法（参见 [Ma, §26]），我们将任意由 k 条两两不相交直线组成的 k 元组 $(l_i)_{i=1}^k \in \mathcal{L}^k$ 称为例外 k 元组；也就是说，对于任意满足 $1 \leq i < j \leq k$ 的 i、j，都有 $l_i \cdot l_j = 0$。我们证明 2. 和 3. 的方法是初等的，并且依赖于以下引理

引理 3.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个例外 $(r-2)$ 元组。恰有两个圆锥曲线类，使得 $\mathcal{E}$ 中的每个元素都是相应圆锥曲线纤维化的某个可约纤维的一个分支。

证明。由于 W 在例外 $(r-2)$ 元组的集合上具有传递性（根据 §2.2.(13)），不妨设 $\mathcal{E} = (e_3, \ldots, e_r)$。具体而言，我们要确定满足 $c - e_i \in \mathcal{L}$（$i = 3, \ldots, r$）的圆锥曲线类 $c \in \mathcal{K}$。由于集合 L 和 K 都是有限的，且可以明确描述（当 $r = 8$时，参见上文表 2），因此该结论可通过直接逐一分类验证。可以发现，只有两个圆锥曲线类 $c_1 = h - e_1$ 和 $c_2 = h - e_2$满足上述条件。□

我们考虑 $\wedge^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 中的以下元素：

$$\mathbf{hlog} = \mathbf{hlog}^{r-2} = \sum_{c \in \mathcal{K}} \tau_c .$$

现在我们通过将该元素分解到 $\wedge^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 的典范基中，证明它等于零；该典范基由 r 个两两不同的直线 l_1、、...、$l_{r-2} \in \mathcal{L}$ 的外积 $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_{r-2}$ 给出。

令 $\wedge_{exc}^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 为由所有例外的（$r-2$）-直线元组 $(l_i)_{i=1}^{r-2}$ 的外积 $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots\ldots \wedge l_{r-2}$ 张成的 $\wedge^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 的真子空间。我们将这类外积称为例外楔积。我们固定 $\wedge_{exc}^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 的一个由例外楔积构成的基，并将其称为 $\wedge_{exc}^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 的例外基。注意，这个基是唯一的，但其元素的符号可以改变。不过，下面的论证实质上不受这种歧义的影响。

不妨设 $\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{e}_i$ 是例外基中的一个元素，并记

$$\Lambda : \wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbf{C} \tag{12}$$

相对于我们所用例外基的相应线性坐标形式，即，Λ 是定义在 $\wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 上的线性形式，其特征是满足关系 $\Lambda(\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{e}_i) = 1$ 和 $\Lambda(\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{l}_i) = 0$，其中任意例外楔积 $\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{l}_i$ 均满足 $\{\mathrm{l}_i\}_{i=3}^{r}, \{\mathrm{e}_i\}_{i=3}^{r}$。

我们首先证明

引理 3.4。对于任意 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}, \tau_{\mathrm{c}}$ 属于 $\wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$，因此 $\mathrm{hlog} = \mathrm{P}_{\mathrm{c}\in\mathcal{K}}\tau_{\mathrm{c}}$ 也成立。

证明。对于 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}, \tau_{\mathrm{c}}$，它在差一个符号的意义下等于 (10)。注意到圆锥曲线 $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{1}, \ldots, \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{r-1}$ 两两不相交，且每条圆锥曲线都是两条直线之和，即可轻易推出该引理。□

我们还需要以下

引理 3.5. 对任意 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，有 $\mathrm{w}\cdot\mathrm{hlog} = (-1)^{w}\,\mathrm{hlog}$。

证明。对于 一个圆锥曲线类 $\mathrm{c} \in \mathcal{K}$，取满足 $\mathrm{c} = \mathrm{w}_{\mathrm{c}}\cdot\mathrm{c}_1$ 的 $\mathrm{w}_{\mathrm{c}} \in \mathrm{W}$。根据 τ_{c} 的定义，我们有 h as

$$\tau_{\mathrm{c}} = (-1)^{w_{\mathrm{c}}} w_{\mathrm{c}}\cdot\tau_{\mathrm{c}_1} = (-1)^{w_{\mathrm{c}}}\wedge_{i=2}^{r-1}\left(w_{\mathrm{c}}\cdot C^{i} - w_{\mathrm{c}}\cdot C^{r}\right).$$

令 w 为 W 中任意元素。由 (11) 以及 $\mathrm{ww}_{\mathrm{c}}\cdot\mathrm{c}_1 = \mathrm{w}\cdot\mathrm{c}$ 可得

$$w\cdot\tau_{\mathrm{c}} = (-1)^{w_{\mathrm{c}}}\wedge_{i=2}^{r-1}\left(ww_{\mathrm{c}}\cdot C^{i} - ww_{\mathrm{c}}\cdot C^{r}\right) = (-1)^{w}\tau_{w\cdot\mathrm{c}}\,.$$

对圆锥曲线类求和，并且由于 $\mathrm{c} \mapsto \mathrm{w}\cdot\mathrm{c}$ 是 $\mathcal{K}$ 的双射，得到

$$w\cdot\mathbf{hlog} = \sum_{\mathrm{c}\in\mathcal{K}} w\cdot\tau_{\mathrm{c}} = (-1)^{w}\sum_{\mathrm{c}\in\mathcal{K}}\tau_{w\cdot\mathrm{c}} = (-1)^{w}\,\mathbf{hlog}\,. \qquad \square$$

由于 W 在 Pic(X) 上的作用保持交乘积，$\wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 是 $\wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 的一个真 W-子模。此外，W 通过置换例外基的元素来作用于 $\wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$。而且，根据 §2.2.(13)，这一作用在例外楔积上是传递的（相差一个符号）。要验证 $\mathrm{hlog} = 0$ 属于 $\wedge_{exc}^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$，只需检查例外基中的任意元素 $\wedge_{i=1}^{r-2}\mathrm{l}_i$ 在 hlog 中的系数是否为零。对于这样的 $\wedge_{i=1}^{r-2}\mathrm{l}_i$，取 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，使得 $\mathrm{w}\cdot(\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{e}_i) = \wedge_{i=1}^{r-2}\mathrm{l}_i$。只需检查 $\Lambda(\mathrm{w}^{-1}\cdot\mathrm{hlog}) = 0$（见记号 (12)）。根据引理 3.5，只需验证 $\Lambda(\mathrm{hlog}) = 0$。

由引理 (3.3) 可知，在例外基中 τ_{c} 的分解里，$\in \mathcal{K}$ 的系数非零的圆锥曲线类 c 仅有 $\wedge_{i=3}^{r}\mathrm{e}_i$，即 $\mathrm{c}_1 = \mathrm{h} - \mathrm{e}_1$ 和 $\mathrm{c}_2 = \mathrm{h} - \mathrm{e}_2,$,

$$\left\{\mathrm{c}\in\mathcal{K} \;\middle|\; \Lambda(\mathrm{c}) \neq 0\right\} = \{\mathrm{c}_1\,,\ \mathrm{c}_2\}\,. \tag{13}$$

因此，有

$$\Lambda(\mathbf{hlog}) = \sum_{\mathrm{c}\in\mathcal{K}}\Lambda(\tau_{\mathrm{c}}) = \Lambda(\tau_{\mathrm{c}_1}) + \Lambda(\tau_{\mathrm{c}_2})\,. \tag{14}$$

另一方面，考虑到我们对 τ_{c_1} 的初始选择，可得（见上文 §3.2）

$$\tau_{\mathrm{c}_1} = \left(\ell_{12} + e_2 - \ell_{1r} - e_r\right)\wedge\left(\ell_{13} + e_3 - \ell_{1r} - e_r\right)\wedge\ldots\wedge\left(\ell_{1\,r-1} + e_{r-1} - \ell_{1r} - e_r\right)$$

由此立即可得

$$\Lambda(\tau_{c_1}) = \Lambda\left(- e_r \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge \ldots \wedge e_{r-1}\right) = (-1)^r . \tag{15}$$

由 §2.2.(7) 可知，第一基本反射 s_1 在集合 $\{h, e_1, \ldots, e_r\}$ 上的作用是交换 e_1 和 e_2。因此，有 $s_1 \cdot c_1 = c_2$ 和 $s_1 \cdot \left(e_3 \wedge \ldots \wedge e_r\right) = (s_1 \cdot e_3) \wedge \ldots \wedge (s_1 \cdot e_r) = e_3 \wedge \ldots \wedge e_r$，这意味着 $\Lambda(s_1 \cdot \tau_{c_1}) = \Lambda(\tau_{c_1})$。由于按定义 $\tau_{c_2} = (-1)^{s_1} s_1 \cdot \tau_{c_1}$，且因为 $(-1)^{s_1} = -1$，可得

$$\Lambda(\tau_{c_2}) = (-1)^{r-1} = -\Lambda(\tau_{c_1}) . \tag{16}$$

Sub将 (15) 和 (16) 代入 (14) 得到 $\Lambda(\text{hlog}) = 0$，如上所述，这意味着 e

引理 3.6. 有 $\text{hlog} = 0$。

§3.5 开头的断言 3 已得到证明。现在证明断言 4。考虑一个顶点属于 $\mathcal{K}$ 的图；若存在例外基中的元素 $\wedge_{i=1}^{r-2} l_i$，在 τ_c 和 $\tau_{c'}$ 关于例外基的分解中都以非零系数出现，则用一条边连接 c 与 $c' \in \mathcal{K}$。我们有

引理 3.7. 对于例外基中的任意元素 $l_1 \wedge \ldots \wedge l_{r-2}$，恰有两个圆锥曲线类 c、$c' \in \mathcal{K}$，使得 $l_1 \wedge \ldots \wedge l_{r-2}$ 在 τ_c 和 $\tau_{c'}$ 关于例外基的分解中以非零系数出现。此外，这两个系数互为相反数。

证明. 对于 $e_3 \wedge \ldots \wedge e_r$，上文已经证明了这一点（参见 (13)、(15) 和 (16)）。一般情形可通过考虑 W 的作用得出。□

现在假设存在关系 $P_{c \in \mathcal{K}} c_c \tau_c = 0$，其中某个 $c_c \in C$。根据引理 3.7，对于由一条边连接的两个圆锥曲线类 c 和 c′，我们有 $c_c + c_{c'} = 0$。因此，只需证明我们的图是连通的。由于 W 在 $\mathcal{K}$ 上的作用是传递的，只需验证对于所有 $w \in W$，类 $c_1 = h - e_1$ 和 $w \cdot c_1$ 可通过一系列边连接起来。此外，再次利用 W 的作用，只需验证 $w = s_i (i = 1, \ldots, r)$ 的情形。反射 $s_2, \ldots, s_r$ 属于 c_1, 的稳定子，因此无需证明。如果 $w = s_1$, ，那么 $c_2 = w \cdot c_1 = h - e_2$。如上所证，$c_1$ 和 c_2 由一条边连接。定理 3.1 的证明至此完成。

3.6. 表示论解释。K 元组 $\tau_{\mathcal{K}} = (\tau_c)_{c \in \mathcal{K}}$ 是定理 1.1 的表述中涉及的超对数 $(\varrho_i \mathrm{AI}_i^{r-2}(U_i))^{\kappa_r}_{i=1}$ 的代数化身，$\tau_{\mathcal{K}}$ 以及恒等式这一事实

$$\mathbf{hlog}^{r-2} = \sum_{c \in \mathcal{K}} \tau_c = 0 \tag{17}$$

在 $\wedge^{r-2} C^{\mathcal{L}}$ 中成立的内容，可以通过 Weyl 群 W 的表示论来解释。本小节将对此进行阐述。详情请参阅 [Pi]，第二作者曾采用这一方法，为次数 $d \in \{2, \ldots, 6\}$ 的德尔佩佐曲面上的定理 3.1 给出了一个表示论证明。

从这一视角出发，关键点如下（详情参见 [Pi, §3.2] ）：

1. 可以在直和 $\oplus_{c\in\mathcal{K}} \wedge^{r-2} \mathrm{H}_c$ 上定义 W 的自然作用，使得由

$$\iota_{\mathcal{K}} : \oplus_{c\in\mathcal{K}} \wedge^{r-2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_c \longrightarrow \wedge^{r-2}\mathbf{C}^{\mathcal{L}}$$

自然包含 $\wedge^{r-2}\mathrm{H}_c \hookrightarrow \wedge^{r-2}\mathrm{H}$ Res $\xrightarrow{L} \wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 诱导的映射成为 W-表示的态射；

2. 作为一个 W-表示，$\oplus_{c\in\mathcal{K}} \wedge^{r-2} \mathrm{H}_c$ 同构于 sign $\otimes \mathrm{C}^{\mathcal{K}}$，其中 sign 表示符号W-表示，且 $\mathrm{C}^{\mathcal{K}}$ 上的 W-模结构由 W 在 $\mathcal{K}$ 上的置换作用诱导；

3. $\tau_{\mathcal{K}} = (\tau_c)_{c\in\mathcal{K}}$ 的张成空间是 W-不变的，并且是 $\oplus_{c\in\mathcal{K}} \wedge^{r-2} \mathrm{H}_c$ 中唯一一个同构于符号表示 sign 的一维不可约分量；4. 由 1. 和 3. 可知，$\iota_{\mathcal{K}}(\tau_{\mathcal{K}}) = \mathrm{P}_c\, \tau_c = h\log^{r-2}$ 张成 $\wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 的一个 W-子表示，该子表示或者为零，或者同构于 sign；5. 可以通过计算（借助 GAP）明确确定 $\wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 在 W-不可约表示下的分解。特别地，当且仅当 $r = 8$时，sign 在此分解中以正重数出现。

由上文第 4 点和第 5 点，可得到定理 3.1 中恒等式 (9) 的另一种概念性证明。该证明依赖于 $\wedge^{r-2}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 在不可约W-模中的分解；这些分解本身颇具意义，而且对于 $r > 4$ 而言似乎是新的（见 [Pi, 命题 3.2]）。注意，对于 $r = 8$，若要证明我们的主要结果，就需要调整这一方法，例如考虑由 $\wedge^{r-2}_{exc}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 给出的子表示（引理 3.4）。更一般地，确定任意 r 下 $\wedge^{r-2}_{exc}\mathrm{C}^{\mathcal{L}}$ 的不可约分解，并验证它是否将符号作为其不可约分量之一，将会很有意义（我们知道，当 $r \leq 7$时并非如此）。

3.7. 恒等式 HLog^{r-2} 定义在 Z 上。要求所有考虑的留数均为整数，即可在空间 H、H^{Σ_c}、H_c上分别定义典范的 Z-结构 $\mathrm{H}_{\mathbf{Z}}$、$\mathrm{H}^{\Sigma_c}_{\mathbf{Z}}$、$\mathrm{H}_{c,\mathbf{Z}}$；这些结构与拉回及包含相容，也就是说，存在 $\phi_c^*\mathrm{H}^{\mathbf{Z}}_{\Sigma_c} = \mathrm{H}^{\mathbf{Z}}_c$，并且对任意 $c \in \mathcal{K}$，$\mathrm{H}_c \subset \mathrm{H}$ 诱导包含 $\mathrm{H}_{\mathbf{Z}c} \subset \mathrm{H}_{\mathbf{Z}}$。此外，§3.2 中的留数映射 Res_L可典范地提升为定义在 Z 上的 $\mathrm{H}^{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathrm{Z}^{\mathcal{L}}$。所有 §3.3–§3.6 中的论述在 Z 上成立，留待读者验证。总之，HLog^{r-2} 定义在 Z 上，这一事实或许从算术视角来看颇有意义。

3.8. 对于任意 $n \geq 2$，人们很容易想到更一般地考虑将 $\mathrm{Y}_r =$ 爆破于 P^n) 中的 $r \geq n+2$ 个一般点所得的曲面，并尝试沿用本节完全相同的方法来推广定理 3.1。在 $\mathrm{K}^{\perp}_{Y_r} \subset \mathrm{Pic}(\mathrm{Y}_r) = \mathrm{Z}\{H, E_1 \ldots, E_r\}$ 上定义一个对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$（其中 H 是超平面类，E_i 表示例外除子的类），定义为

$$(H,H) = n-1\,, \qquad (H,E_i) = 0 \qquad \text{and} \qquad (E_i,E_j) = -\delta_{ij} \quad \text{for } i,j = 1,\ldots,r\,.$$

可以定义一个与 T 形 Dynkin 型图 $\mathrm{T2}_{,\ n+1,\ r-n-1}$相关联的考克斯特群 W，使得 W 以几何方式作用于 $\mathrm{Pic}(\mathrm{Y}_r)$，特别是保持双线性形式 $(\cdot,\cdot)$。已知 W 有限当且仅当

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{r-n-1} > \frac{1}{2}\,. \tag{18}$$

该条件等价于 Y_r 是一个 Mori 梦空间 [Mu, CT]，并且可转化为：若 $n \geq 5$，则 $r \leq n+3$；若 $n = 4$，则 $r \leq 8$；若 $n = 3$，则 $r \leq 7$。这类爆破是德尔佩佐曲面的自然推广。更多详情请参见 [Mu, CT]。

假设 (18) 成立。可以将直线集合 $\mathcal{L}$ 替换为 Weyl 除子的集合，即有限轨道 $W \cdot E_1$，中的除子，并将集合 $\mathcal{K}$ 中的圆锥曲线类替换为 Weyl 铅笔；我们将 Weyl 铅笔定义为一维线性系统 $|E + F|$，其中 E、F 是满足 $(E, F) = 1$ 的 Weyl 除子。这样的线性系统 c 诱导一个有理映射 $\phi_c : Y_r \dashrightarrow P^1$，其有 $r - n + 1$ 个可约纤维，分量为 E′、F′，其中 E、F 是满足 $(E', F') = 1$ 且 $E' + F' = E + F$ 属于 $\mathrm{Pic}(Y_r)$ 的 Weyl 除子。容易验证，群 W 在集合 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{K}$ 上传递作用。导出引理 3.2 的所有构造在这一更一般的情形下仍然成立；也就是说，对于每个 Weyl 铅笔 $c \in \mathcal{K}$，我们都可以构造典范元素 $\tau_c \in \wedge^{r-n}\mathbb{C}^{\mathcal{L}}$（其定义仅差一个整体符号），使得引理 3.2 以及 §3.5 开头的陈述 1 和 2 均成立。然而，若 $n \geq 3$，恒等式 $\sum_{c\in\mathcal{K}} \tau_c = 0$ 永不成立。沿用本节中的方法，可以证明引理 3.3 的类似结论：对于任意例外的 $(r-n)$-元组 $\mathcal{E}$，恰有 n 个 Weyl 铅笔，使得 $\mathcal{E}$ 中的每个元素都作为相应纤维化的某个可约纤维的分量出现。引理 3.7 的类似结论是，例外基中元素 $E_1 \wedge \ldots \wedge E^{r-n}$ 在 $\sum_{c\in\mathcal{K}} \tau_c$ 中出现时的系数（相差一个符号）为 $(n-2)$；因此，当 $n \geq 3$ 时该系数永不为零。用解析术语来说，这意味着：若 AI_c^{r-n} 表示 P^1 上的超对数，且对任意 $c \in \mathcal{K}$，$\mathrm{AI}_c^{r-n}(\phi_c) = \Pi^y Y_r(\tau_c)$（其中 y 是预先选定的、在 Y_r 中的一般基点），那么函数恒等式 $\sum_{c\in\mathcal{K}} \mathrm{AI}_c^{r-n}(\phi_c) = 0$ 在 Y_r 上 y 的邻域内不成立。

然而，满足 $\sum_{c\in\mathcal{K}} \alpha_c \mathrm{AI}_c^{r-n}(\phi_c) = 0$ 的元组 $(\alpha_c)_{c\in\mathcal{K}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$ 的空间 $\mathrm{HLog}^{r-n}_{Y_r}$ 并非平凡。与德尔佩佐曲面的情形类似，对每个例外 r 元组 $\mathcal{E}$，都存在一个小修改 $F_{\mathcal{E}} : Y_r \dashrightarrow \mathrm{Bl}_{q_1,\ldots,q_r}(P^n)$，其中 $\beta : \mathrm{Bl}_{q_1,\ldots,q_r}(P^n) \to P^n$ 是对一般位置的一组点 $q_1, \ldots, q_r$（这些点可能彼此不同）进行爆破所得的曲面。设 $J \subset \{1, \ldots, r\}$ 的基数为 $n-2$，并令 $\pi_J : P^n \dashrightarrow P^2$ 为从 P^n 中由 $j \in J$ 对应的 q^j 张成的 $(n-3)$ 维平面出发的线性投影。令 $k \notin J$ 时 $q'_k = \pi_J(q_k)$，则在 P^2 中有 $r - n + 2$ 个一般位置的点。爆破 $\beta_J : \mathrm{Bl}_{\{q'_k\}_{k\notin J}}(P^2) \to P^2$ 的总空间是次数为 $d = 7 - r + n$ 的德尔佩佐曲面，我们将其记为 $dP_{d,J}$。令 $\Pi_{\mathcal{E},J} : Y_r \dashrightarrow dP_{d,J}$ 为诱导的有理映射（因此 $\beta_J \circ \Pi_{\mathcal{E},J} = \pi_J \circ \beta \circ F_{\mathcal{E}}$ 是有理映射）。若 $\mathcal{K}_J$ 表示 $dP_{d,J}$ 上的圆锥曲线类，且 $\psi_\kappa : dP_{d,J} \to P^1$ 表示与 $\kappa \in \mathcal{K}_J$ 对应的圆锥曲线纤维化，则复合映射 $\phi_\kappa = \psi_\kappa \circ \Pi_{\mathcal{E},J} : Y_r \dashrightarrow P^1$ 是 Weyl 铅笔（所有 Weyl 铅笔都具有这种形式）。由此得到一个单射 $\mathcal{K}_J \subset \mathcal{K}$。若 $\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_J} \varrho_\kappa \mathrm{AI}_\kappa^{r-n}(\psi_\kappa) = 0$ 表示定理 1.1 给出的 $dP_{d,J}$ 上的恒等式（其中 $\varrho_\kappa \in \{\pm 1\}$ 可取任意 $\kappa \in \mathcal{K}_J$），则超对数恒等式 $\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_J} \varrho_\kappa \mathrm{AI}_\kappa^{r-n}(\phi_\kappa) = 0$ 在 Y_r 上 y 处的局部成立。此恒等式对应于 $\mathrm{HLog}^{r-n}_{Y_r}$ 的一个非零元素，我们将其记为 $\mathrm{HLog}^{r-n}_{\mathcal{E}}$,J。由此可知 $\mathrm{HLog}^{r-n}_{Y_r}$ 并非平凡。

自然会问，对于上述所有的对 $(\mathcal{E}, J)$，$\mathrm{HLog}^{r-n}_{\mathcal{E},J}$ 的集合的张成空间是否与整个空间 $\mathrm{HLog}^{r-n}_{Y_r}$ 重合。对于 $r = n+2$ 且 $n \geq 2$ 任意的情形，这一点由 [Pe] 中的计算得出。通过直接计算，我们还验证了 $(n, r) = (3, 6)$ 和 $(n, r) = (4, 7)$ 的情形确实如此。我们猜想这对所有情形都成立。若猜想为真，这意味着，对于 Y_r 上的完全反对称超对数 AI_c^{r-n} 所满足的函数恒等式而言，并没有任何新的内容，因为一切都源自二维 del Pezzo 超对数恒等式 HLog^{r-n}（在映射 $\Pi_{\mathcal{E},J} : Y_r \dashrightarrow dP_{d,J}$ 下的拉回除外）。

4. 恒等式 HLog^3 的非显式形式

恒等式 HLog^2 等价于阿贝尔关系 (Ab)，后者以显式形式写出。也可以将其他超对数恒等式 HLog^{r-2} 写成显式形式。我们以 $\mathrm{r} = 5$ 的情形为例进行说明。

令 X_5 表示将 P^2 在以下五个点处爆破所得的曲面：$\mathrm{p}_1 = [1 : 0 : 0], \mathrm{p}_2 = [0 : 1 : 0], \mathrm{p}_3 = [0 : 0 : 1], \mathrm{p}_4 = [1 : 1 : 1]$ 以及 $\mathrm{p}_5 = [\mathrm{a} : \mathrm{b} : 1],$，其中参数 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{C}$ 满足

$$ab(a-1)(b-1)(a-b) \neq 0,$$

以下讨论中我们假设该条件成立。

我们将用仿射坐标 x, y 显式写出权重 3 超对数恒等式 $\mathrm{HLog}(\mathrm{X}_5)$。这些坐标对应于仿射嵌入 $\mathrm{C}^2 \hookrightarrow \mathrm{P}^2, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto [\mathrm{x} : \mathrm{y} : 1]$。

相对于坐标 x, y，X_5 上的圆锥曲线纤维化在 P^2 上对应于以下有理函数 U_i（其中 P 表示仿射多项式 $\mathrm{P} = (1 - \mathrm{b})\mathrm{x} - (1 - \mathrm{a})\mathrm{y} - (\mathrm{a} - \mathrm{b})$）：

$$U_1 = x \qquad U_2 = \frac{1}{y} \qquad U_3 = \frac{y}{x} \qquad U_4 = \frac{x-y}{x-1} \qquad U_5 = \frac{b(a-x)}{ay-bx}$$

$$U_6 = \frac{P}{(x-1)(y-b)} \qquad U_7 = \frac{(x-y)(y-b)}{yP} \qquad U_8 = \frac{xP}{(x-y)(x-a)} \qquad U_9 = \frac{y(x-a)}{x(y-b)} \qquad U_{10} = \frac{x(y-1)}{y(x-1)}.$$

对于任意 $\mathrm{i} = 1, \ldots, 10$，使 $\mathrm{U}_i^{-1}(\lambda)$ 可约的 $\lambda \in \mathrm{P}^1$ 集合具有如下形式：$\{0, 1, \mathrm{r}_i, \infty\}$，其中 $\mathrm{r}_i \in \mathrm{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 由下式给出

$$\mathrm{r}_1 = a \qquad \mathrm{r}_2 = \frac{1}{b} \qquad \mathrm{r}_3 = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{r}_4 = \frac{a-b}{a-1} \qquad \mathrm{r}_5 = \frac{b(a-1)}{a-b}$$

$$\mathrm{r}_6 = \frac{b-a}{b} \qquad \mathrm{r}_7 = \frac{1}{1-a} \qquad \mathrm{r}_8 = 1 - b \qquad \mathrm{r}_9 = \frac{1-a}{1-b} \qquad \mathrm{r}_{10} = \frac{a(b-1)}{b(a-1)}.$$

对于 C 上两两不同的三点 (a, b, c)，以及给定的基点 $\xi \in \mathrm{C} \setminus \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$，我们考虑如下定义的权重 3 超对数 $\mathrm{L}^{\xi}{}_{a,b,c}$

$$L^{\xi}_{a,b,c}(z) = \int_{\xi}^{z} \left(\int_{\xi}^{u_3} \left(\int_{\xi}^{u_2} \frac{du_1}{u_1 - c} \right) \frac{du_2}{u_2 - b} \right) \frac{du_3}{u_3 - a}$$

对于任意充分接近 ξ 的 z，其反对称化记为 $\mathrm{AI}^{\xi}{}_{a,b,c}$：

$$AI^{\xi}_{a,b,c} = \frac{1}{6} \left(L^{\xi}_{a,b,c} - L^{\xi}_{a,c,b} - L^{\xi}_{b,a,c} + L^{\xi}_{b,c,a} + L^{\xi}_{c,a,b} - L^{\xi}_{c,b,a} \right). \tag{19}$$

现在我们固定一个基点 $\zeta \in \mathrm{C}^2$，它是 X_5 中某点的像，且不属于任何直线。对于 $\mathrm{i} = 1, \ldots, 10$，我们令 $\zeta_i = \mathrm{U}_i(\zeta) \in \mathrm{C} \setminus \{0, 1, \mathrm{r}_i\}$，并且

$$AI^3_i = AI^{\zeta_i}_{0,1,r_i}.$$

于是可以验证，$\mathrm{HLog}(\mathrm{X}_5)$ 具有以下显式形式

$$\sum_{i=1}^{10} AI^3_i(U_i) = 0, \tag{20}$$

一个在 ζ 的任意充分小邻域上成立的函数恒等式。

参考文献

[Ab] N. H. Abel. 关于函数 $\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} \cdots + xn\, n_2 + \cdots$ 的注记。未发表的手稿（1826）。载于：《N. H. Abel全集》，第二卷，Grøndhal & Søn，1881年，第249–252页。[BPP] P. Banks、E. Panzer、B. Pym。《变形量子化中的多重ζ值》。Inv. Math. 222（2020），第79–159页。[B&al] J. Bourjaily 等。《精密对撞机物理中的多重多对数函数之外》。预印本 arXiv:2203.07088（2022）。[Br] F. Brown。《单值超对数与幺幂微分方程》。未发表文本（2004）。[CT] A.-M. Castravet、J. Tevelev。《希尔伯特第十四问题与Cox环》。Compos. Math. 142（2006），第1479–1498页。[CDG] S. Charlton、C. Duhr、H. Gangl。《纯单值多对数》。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17（2021），第107号论文，34页。[dJ] R. de Jeu。《刻画二对数的所有多变量函数方程》。预印本 arXiv:2007.11014（2020）。[Do**1**] I. Dolgachev。《古典代数几何：一种现代观点》。剑桥大学出版社，2012。[Do**2**] I. Dolgachev。《魏尔群与克雷莫纳变换》。Proc. Sympos. Pure Math. 40，美国数学会（1983），第283–294页。[Ga] H. Gangl。《高阶对数的函数方程》。Selecta Math. 9（2003），第361–377页。[G**1**] A. B. Goncharov。《经典多对数、代数K理论与 $\zeta_F(n)$》。载于：《盖尔范德数学研讨会，1990–1992》，Birkhäuser（1993），第113–135页。[G**2**] A. B. Goncharov。《算术与几何中的多对数》。国际数学家大会论文集（苏黎世，1994），第1、2卷（1995），第374–387页，Birkhäuser。[G**3**] A. B. Goncharov。《构形几何、多对数与动机上同调》。Adv. Math. 114（1995），第197–318页。[GR] A. B. Goncharov、D. Rudenko。《动机关联子、簇簇与关于 zeta(F,4) 的 Zagier猜想》。预印本 arXiv:1803.08585（2018）。[Gri] P. A. Griffiths。《阿贝尔在代数几何中的遗产》。载于《尼尔斯·亨里克·阿贝尔的遗产》，Springer，2004年，第179–205页。[Ma] I. Manin。《三次型：代数、几何、算术》。North-Holland Math. Lib. 4，North-Holland Pub.，1986。[Mu] S. Mukai。《三维加法群的希尔伯特第十四问题反例》。数理解析研究所预印本 #1343，京都，2001。[Pa] E. Panzer。《费曼积分与超对数》。博士论文，洪堡大学，柏林，数学研究所，2015（arXiv:2212.02556）。[Pe] J. V. Pereira。《超平面配置的共振网》。载于《超平面配置——札幌2009》，Adv. Stud. Pure Math. 62，日本数学会（2012），第261–291页。[Pi] L. Pirio。《德尔佩佐曲面上的圆锥曲线网与超对数函数恒等式》。预印本 arXiv:2212.02556（2022）。[We] G. Wechsung。《超对数函数方程》。载于《多对数的结构性质》，Math. Surveys Monogr. 37，美国数学会（1991），第171–184页。[Za] D. Zagier。《几何与数论中的二对数函数》。载于《数论及相关主题：拉马努金学术会议论文集》，孟买，1988年，Tata and Oxford（1989），第231–249页。

Ana-Maria Castravet，Luc Pirio
凡尔赛数学实验室，巴黎萨克雷大学、凡尔赛圣康坦伊夫林大学与法国国家科学研究中心（联合研究单位 8100），美国大道 45 号，78000 凡尔赛，法国。电子邮箱：ana-maria.castravet@uvsq.fr，
luc.pirio@uvsq.fr