广义倒谱估计量的统计一致性

朱斌和 Mattia Zorzi

arXiv:2301.06784v1 [eess.SP] 17 Jan 2023

摘要——我们研究如何估计平稳随机过程或平稳多维随机场的广义倒谱系数。结果表明，广义倒谱系数的朴素版基于周期图的估计量并不一致。我们提出了一种用于估计这些系数的一致估计量。此外，我们证明，后者可用于构建某一特定类别级联线性随机系统的一致估计量。

索引词——广义倒谱系数、周期图、一致估计量、系统辨识。

I. 引言

给定一个平稳时间序列 y_0，y_1，...，y_{N-1}，对该序列某些二阶统计量（例如协方差 $c_k := \mathbb{E}\,[y_{t+k}\, y_t^*]$，其中 $\mathbb{E}$ 表示数学期望）的估计，一直是信号处理、辨识和系统理论领域的一项基本问题。具体而言，在需要高分辨率谱估计器的实际应用中，通常会使用协方差估计。更具体地说，我们想提及有关有理协方差扩展的研究方向，参见例如[1]–[12]。

令 $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$ 为角频率的取值域。根据平稳过程的经典理论，y_t 的协方差是功率谱密度 $\Phi(\theta)$的傅里叶系数，而该函数在 $\mathbb{T}$上是非负的，即

$$c_k = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\theta} \Phi(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

鉴于上述关系，协方差 c_k 可视为功率谱Φ 的矩（源自力学的一个术语），其中复指数函数 $\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 起基函数的作用。另一个重要的矩实例是倒谱系数

$$m_k := \int_{\mathbb{T}} e^{ik\theta} \log \Phi(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

假设积分结果为有限值，例如，当 $\log \Phi \in L^1(\mathbb{T})$ 时。这些 m_k在语音处理中具有重要应用，参见例如 [13], [14]。此外，倒谱系数是协方差扩展问题中用于获得带有零点的有理谱密度，参见 [4], [15]。

受积分表示（1）和（2）的启发，自然的做法是将真实谱 Φ 替换为周期图 Φ （一种简单的谱估计量），并将积分离散化为有限求和，从而得到估计量 $\hat{c}_k$ 和 $\hat{m}_k$ 。一个重要的问题是，这些估计量在统计意义上是否一致，也就是说：当可用时间序列的长度 N 趋于无穷时，$\hat{c}_k$ （以及 $\hat{m}_k$）是否在某种随机意义下收敛到真实值 c_k （以及 m_k）？这种相合性有助于评估在恰当选择模型类时，那些基于矩的谱估计量是否相合，参见例如 [16], [17]。

对于协方差估计量$\hat{c}_k$，在某些高斯假设下，可以在 [18, 第 5.3 小节3] 找到对相合性问题的肯定答案。这多少令人意外，因为仅凭周期图 Φ 并不是真实谱 Φ 的一致估计量：其方差在每个频率 θ处都不会随着 $N \to \infty$趋于无穷而趋于零，参见例如 [18,第 425] 页。$\hat{c}_k$ 的相合性源于包含 $\hat{\Phi}$的式（1）离散版本中的平均运算。倒谱估计量 $\hat{m}_k$的相合性问题比$\hat{c}_k$的相合性问题难得多，因为后者是关于 Φ 的线性估计量，而前者则涉及对数（显然是非线性的）。答案仍然是肯定的，可在 [13] 中找到；其假设是谱分量 Y_ℓ （将在第 III 节后文定义）为相互独立的高斯随机变量。

然而，对于多维随机场，经典倒谱系数 (2) 并不总能保证协方差扩展问题存在解，参见[8], [19]。为克服这一困难，在作者近期的论文 [16], [20], [21] 中，使用了广义倒谱系数 [22], ，它们是谱的幂函数的矩，用以建立一个有理协方差扩展问题，其解为具有零点的有理多维谱密度。令我们惊讶的是，在进行仿真研究时，基于周期图的广义倒谱系数估计量似乎并不一致。然而，在本文后续的推导中我们发现，在与 [13]中通常倒谱估计量相同的高斯假设下，使用 Φ 的广义倒谱估计量$\hat{}$确实在一个常数乘法因子意义下是一致的 。换言之，未加窗周期图足以生成广义倒谱系数的一致估计量，所需做的只是对计算结果进行适当缩放。据我们所知，文献此前从未探讨过这一一致性问题。最后，我们证明

B. Zhu 任职于中山大学智能系统工程学院，中国广州外环东路132号，邮编510006（电子邮箱：zhub26@mail.sysu.edu.cn）。M. Zorzi 任职于帕多瓦大学信息工程系，意大利帕多瓦 Giovanni Gradenigo 路6b号，邮编35131（电子邮箱：zorzi mat@dei.unipd.it）。本研究部分得到了中国国家自然科学基金（项目编号62103453）以及中山大学“百人计划”的资助。通讯作者：B. Zhu。电话： +8614748797525。传真： +86(20) 39336557。

我们的结果可用于构建一类级联 线性随机系统的一致估计量。正如例如 [23], [24], 所解释的，级联系统在流程工业、信号处理及其他工程应用中十分常见。

本文组织如下。第二节回顾离散傅里叶变换并定义所用符号。第三节阐述广义倒谱估计问题及其统计一致性。第四节说明在谱分量相互独立且服从高斯分布的假设下，广义倒谱估计量具有一致性。第五节讨论谱分量相关这一更一般的情形。第六节将广义倒谱估计的一致性结果推广至多维随机场。第七节介绍广义倒谱估计量在级联系统辨识中的应用，相关仿真结果见第八节。最后，第九节总结全文。

II. 离散傅里叶变换回顾

本节旨在简要说明全文所用的离散傅里叶变换符号。

信号处理文献中，有限复值序列 $y_0, \ldots\ldots, y_{N-1}$（长度为 N）的标准离散傅里叶变换定义为

$$Y_\ell = \sum_{t=0}^{N-1} y_t \, e^{-it\frac{2\pi}{N}\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, N-1. \tag{3}$$

逆离散傅里叶变换定义为

$$y_t = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} Y_\ell \, e^{it\frac{2\pi}{N}\ell}, \quad t = 0, \ldots, N-1. \tag{4}$$

上述两个表达式可以改写为矩阵形式:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}\mathbf{y} \quad \text{and} \quad \mathbf{y} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^*\mathbf{Y}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{Y} = [Y_0, \ldots, Y_{N-1}]^\top$、$\mathbf{y} = [y_0, \ldots, y_{N-1}]^\top$，以及

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \omega_N^{0\cdot 0} & \omega_N^{0\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{0\cdot(N-1)} \\ \omega_N^{1\cdot 0} & \omega_N^{1\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{(N-1)\cdot 0} & \omega_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

是离散傅里叶变换矩阵，其中 $\omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ 是一个本原 N 次单位根。由此立即可得 $\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^*$。还要注意，$\mathbf{F}$ 是复对称矩阵，因此 $\mathbf{F}^* = \overline{\mathbf{F}}$（逐元素复共轭）。

III. 问题陈述

为了引入广义倒谱估计问题，我们需要先回顾周期图和协方差估计的一些基本概念。

考虑一个均值为零、二阶平稳的复值离散时间随机信号 y_t（因此 $t \in \mathbb{Z}$）。假设给定了有限个随机样本 $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_{N-1}$。取（单边）有限傅里叶变换，得到

$$Y(\theta) = \sum_{t=0}^{N-1} y_t \, e^{-it\theta}, \tag{7}$$

一个依赖于角频率$\theta \in \mathbb{T} = [0, 2\pi)$的随机变量。注意，频率区间 $[0, 2\pi)$ 被视为商群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，因此函数 $Y(\theta)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 2π- 周期的。在平稳过程的谱理论中， $\mathbb{T}$ 通常被视为复平面上的单位圆，并写作 $Y(e^{i\theta})$ 而非 [25]。这里我们采用更简单的记号 $Y(\theta)$。未加窗的周期图是随机过程 y_t 的功率谱 $\Phi(\theta)$ 的一种初步估计，其定义为

$$\hat{\Phi}(\theta) := \frac{1}{N}|Y(\theta)|^2. \tag{8}$$

此外，周期图 $\hat{\Phi}$ 还可以解释为标准有偏协方差估计 [26], 的相关图，即其双边有限傅里叶变换:

$$\hat{\Phi}(\theta) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{c}_k e^{-ik\theta}, \tag{9}$$

其中

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1-k} y_{t+k} \, y_t^*, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10}$$

并且$\hat{c}_{-k} = \hat{c}_k^*$。这里，$(\cdot)^*$ 应用于复数时表示取复共轭。

实际应用中，$\hat{\Phi}$ 通常在规则网格上计算的，网格大小为 N，等于时间序列 y_t 的长度。换言之，频率区间 $[0, 2\pi)$ 被划分为 N 个长度相等的子区间 $2\pi/N$，网格点组成集合

$$\mathbb{T}_N := \left\{ \frac{2\pi}{N}\ell \,:\, \ell = 0, 1, \ldots, N-1 \right\}. \tag{11}$$

为简洁起见，记 $Y_\ell = Y(2\pi\ell/N)$，类似地记 $\hat{\Phi}_\ell = \hat{\Phi}(2\pi\ell/N)$。随机变量 $\{Y_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$ 称为过程 y_t [13]的谱分量。随后可通过离散谱$\{\hat{\Phi}_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$，利用逆离散傅里叶变换计算协方差估计（另见第 II 节）。

$$\hat{c}_k \approx \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell} \hat{\Phi}_\ell, \tag{12}$$

其被视为傅里叶积分的近似

$$\hat{c}_k = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\theta} \hat{\Phi}(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}. \tag{13}$$

注释 1。或者，我们可以在大小为 $K \geq 2N-1$ 的更密网格上计算周期图。这样选择网格大小的动机在于，它足以保证通过公式从离散谱 $\{\hat{\Phi}_\ell\}_{\ell=0}^{K-1}$ 中精确恢复协方差估计值

$$\hat{c}_k = \frac{1}{K} \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{ik\frac{2\pi}{K}\ell} \hat{\Phi}(2\pi\ell/K), \tag{14}$$

这与通常的傅里叶积分 (13) 不同。借助快速傅里叶变换程序，通过 (14) 进行计算比直接时间平均 (10) 更高效。不过，我们还想指出，当 N （因此 K 也）趋于无穷大时，(12) 和 (14) 之间的差异将变得可以忽略。

本文研究如何从平稳过程的样本中估计其广义倒谱系数。后者是通过将经典倒谱系数定义（2）中的对数替换为所谓的广义对数函数得到的:

$$s_\alpha(x) = \begin{cases} (x^\alpha - 1)/\alpha, & 0 < |\alpha| \le 1, \\ \log x, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{15}$$

其广义性源于：对于固定的 $x > 0$，当参数 $\alpha \to 0$ 时，极限 $(x^\alpha - 1)/\alpha \to \log x$ 成立。广义对数由此导出以下定义，我们主要关注正的 α。

定义 1 ([22]). 给定功率谱密度 $\Phi(\theta)$ 和实数 $\alpha \in (0, 1]$, ，广义倒谱系数定义为

$$m_{\alpha,k} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{T}} e^{ik\theta} \Phi(\theta)^\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} & \text{if } k \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha} \left[\int_{\mathbb{T}} \Phi(\theta)^\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} - 1 \right] & \text{if } k = 0. \end{cases} \tag{16}$$

注意，分子中的常数 1 在 $k \neq 0$ 的情形下会消失，这是由于对复指数函数 $e^{ik\theta}$ 积分所致。此外，我们对 $\alpha = 1$ 并不太感兴趣，因为在这种情况下，$m_{\alpha,k}$ 会化为（1）中的协方差 c_k （ $k = 0$相差 1）。因此，在本文余下部分，我们只考虑$\alpha \in (0,1)$的情形。稍微滥用一下记号，我们将在下标中省略α ，直接写作 m_k 。

受式 (12) 启发，利用周期图估计广义倒谱系数的估计量定义如下:

$$\hat{m}_k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell} \hat{\Phi}_\ell^\alpha & \text{if } k \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{\Phi}_\ell^\alpha - 1 \right) & \text{if } k = 0. \end{cases} \tag{17}$$

本节最后正式陈述上述广义倒谱估计量的相合性问题。

问题 1. 给定零均值平稳复随机过程的样本路径 y_0，……，y_{N-1} y_t，考察当样本路径长度 N 趋于无穷时，估计量 (17) 是否在某种随机意义下收敛到真值 (16)。

IV. 独立谱分量情形下的相合性

首先，引入谱分量的归一化形式:

$$\bar{Y}_\ell := \frac{1}{\sqrt{N}} Y_\ell \quad \text{so that} \quad \hat{\Phi}_\ell = |\bar{Y}_\ell|^2. \tag{18}$$

假设1。 信号 $\{y_t\}_{t=0}^{N-1}$的归一化谱分量 $\{\bar{Y}_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$ 是相互独立、均值为零的复数

¯（圆对称）高斯随机变量，满足 $\operatorname{var} Y_\ell \;=\hat{}\, \mathbb{E}\,\Phi_\ell = \lambda_\ell > 0$。更准确地说，每个 Y_ℓ 的实部和虚部都是相互独立的实高斯随机变量，且方差相等，即 $\lambda_\ell/2$，参见例如 [26, 第 361] 页。

注意，上述假设在以下两种情形下成立。

情形 *1*。过程 y_t 是方差为$\sigma^2 > 0$的独立同分布高斯过程，例如高斯白噪声。在这种情况下，随机向量 $\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}\mathbf{y}$ （符号见式 (5)）服从高斯分布，其协方差矩阵为

$$\mathbb{E}\bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{N}\mathbf{F}(\mathbb{E}\mathbf{y}\mathbf{y}^*)\mathbf{F}^* = \sigma^2\mathbf{I}, \tag{19}$$

其中$\mathbf{F}$ 是式 (6) 中的离散傅里叶变换矩阵。

情形 *2*。过程 y_t 是高斯且 N-周期的，即对所有 $t \in \mathbb{Z}$，几乎必然有$y_t = y_{t+N}$ 。由此可直接推出协方差具有循环对称性 $c_{N-k} = c_{-k} = c_k^*$ 。因此，随机向量 $\mathbf{y}$ 的协方差矩阵具有循环结构（不只是托普利茨结构），具体为

$$\mathbf{C} := \mathbb{E}\mathbf{y}\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{N-2} & & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

通俗地说，$\mathbf{C}$ 的每一列都是第一列的循环移位（行也一样）。由于$\mathbf{C}$ 也是协方差矩阵，因此我们还要求它是正定的[1]。众所周知，任意循环矩阵都可以由离散傅里叶变换矩阵对角化。更确切地说，定义酉矩阵$\mathbf{U} := \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}$，并令$\mathbf{c} = [c_0, \overline{\cdots}, c_{N-1}]^\top$为$\mathbf{C}$的第一列。则循环矩阵$\mathbf{C}$ 具有谱分解$\mathbf{C} = \mathbf{U}^*\mathbf{\Psi}\mathbf{U}$ ，其中$\mathbf{U}^*$ 的列是归一化特征向量，对角矩阵 $\Psi = \mathbf{diag(Fc)}$包含正特征值 [27], ，另见 [28]。因此，谱分量向量$\mathbf{Y}$ 的¯协方差矩阵为

$$\mathbb{E}\bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{N}\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^* = \Psi. \tag{21}$$

本节的主要结果概述如下。

定理1. 在假设*1*下，广义倒谱系数的估计量(17) 除一个常数乘法因子外是一致的。更准确地说，对于 $k \neq 0$，有

$$C\hat{m}_k = \frac{C}{\alpha N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell} \hat{\Phi}_\ell^\alpha \xrightarrow{m.s.} m_k \tag{22}$$

and

$$C\hat{m}_0 + \frac{C-1}{\alpha} = \frac{C}{\alpha N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{\Phi}_\ell^\alpha - \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{m.s.} m_0 \tag{23}$$

当 $N \to \infty$ 时，其中常数为 $C = 1/\Gamma(\alpha + 1)$ ，且这里的收敛是在均方意义下理解的。这里 $\Gamma(\cdot)$是伽马函数。

[1]厄米特结构$\mathbf{C}$ 源于关系式 $c_{N-k} = c_k^*$。

该定理的证明基于一个众所周知的事实：若且唯若复值随机变量序列的方差趋于零，则该序列本身在均方意义下收敛于一个常数。此外，该常数就是该序列期望的极限。因此，只要证明对于给定常数 C，在 $k\neq 0$ 的情形下，$\mathbb{E}(\hat{C m}_k)\to m_k$，且当样本数 N趋于无穷时，$\mathrm{var}\,\hat{m}_k\to 0$，并对情形 $k=0$作类似证明，即可确立定理1的结论。本节其余部分将讨论 $\hat{m}_k$ 的期望和方差的计算。

A. Φ_ℓ^α 的均值与 $\hat{m}_k$

由假设1可知，经过适当缩放后，$\hat{\Phi}_\ell=|\bar{Y}_\ell|^2=(\mathrm{Re}\,\bar{Y}_\ell)^2+(\mathrm{Im}\bar{Y}_\ell)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布。事实上，Φ_ℓ 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\lambda_\ell}e^{-x/\lambda_\ell},\quad x\geq 0, \tag{24}$$

这只是一个指数分布。下面的计算很直接:

$$\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)=\frac{1}{\lambda_\ell}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x/\lambda_\ell}\mathrm{d}x=\lambda_\ell^\alpha\Gamma(\alpha+1), \tag{25}$$

其中第二个等式来自 [29, 式 3.381.4]。

现在我们可以计算 $\hat{m}_k$ 的均值了。对于 $k\neq 0$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\hat{m}_k&=\mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha N}\sum_{\ell=0}^{N-1}e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell}\hat{\Phi}_\ell^\alpha\right)\\&=\frac{1}{\alpha N}\sum_{\ell=0}^{N-1}e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell}\lambda_\ell^\alpha\Gamma(\alpha+1) &\text{(26a)}\\&\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\int_{\mathbb{T}}e^{ik\theta}\Phi(\theta)^\alpha\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\quad\text{as}\quad N\to\infty. &\text{(26b)}\end{aligned}$$

为理解后一个极限，首先回顾一下：在真实协方差 c_k 的衰减满足一个温和条件时，对于过程 y_t，$\mathbb{E}\,\hat{\Phi}_\ell=\lambda_\ell\to\Phi(2\pi\ell/N)$ 当 $N\to\infty$ 时，对每个 $\ell\in\{0,\dots,N-1\}$ 都成立，其中 Φ 是真实谱 [26, p. 7]。因此，(26a) 中的项 $\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell}\lambda_\ell^\alpha$收敛到 (26b) 中的积分；这里的收敛是指从归一化黎曼和到积分的收敛。

同理，对于 $k=0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\hat{m}_0+\frac{1}{\alpha}&=\mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\hat{\Phi}_\ell^\alpha\right)\\&\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\int_{\mathbb{T}}\Phi(\theta)^\alpha\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\quad\text{as}\quad N\to\infty,\end{aligned} \tag{27}$$

这等价于 $\mathbb{E}[C\hat{m}_0+(C-1)/\alpha]\to m_0$，对于式（23）中的随机变量以及定理1中给出的常数 C。

B. Φ_ℓ^α 和$\hat{m}_k$的方差

$\hat{\Phi}_\ell^\alpha$ 的二阶矩就是

$$\mathbb{E}[(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)^2]=\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^{2\alpha})=\lambda_\ell^{2\alpha}\Gamma(2\alpha+1), \tag{28}$$

其中第二个等式可由 (25) 立即得出，因为它们具有相同的函数形式。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)&=\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^{2\alpha})-[\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)]^2\\&=\lambda_\ell^{2\alpha}\left\{\Gamma(2\alpha+1)-[\Gamma(\alpha+1)]^2\right\}.\end{aligned} \tag{29}$$

例 1. 在论文 [16], [20],中，我们取了参数 α的一些特殊值，即,

$$\alpha=1-\frac{1}{\nu},\quad \nu\in\mathbb{N}_+,\quad \nu\geq 2. \tag{30}$$

例如，取 $\nu=2$，因此 $\alpha=1/2$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)&=\sqrt{\lambda_\ell}\,\Gamma(3/2)=\frac{\sqrt{\pi\lambda_\ell}}{2},\\\mathbb{E}(\hat{\Phi}_\ell^{2\alpha})&=\lambda_\ell\Gamma(2)=\lambda_\ell,\end{aligned} \tag{31}$$

且 $\mathrm{var}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha)=(1-\pi/4)\lambda_\ell$。

现在我们可以继续计算 $\hat{m}_k$ 的方差，其中假设1中的谱分量之间的独立性起着重要作用。对于 $k\neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\hat{m}_k)&=\mathrm{var}\left(\frac{1}{\alpha N}\sum_{\ell=0}^{N-1}e^{ik\frac{2\pi}{N}\ell}\hat{\Phi}_\ell^\alpha\right)\\&=\frac{1}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{var}(\hat{\Phi}_\ell^\alpha) &\text{(32a)}\\&=\frac{C_1}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell=0}^{N-1}\lambda_\ell^{2\alpha}\to 0\quad\text{as}\quad N\to\infty, &\text{(32b)}\end{aligned}$$

其中，在 (32a) 中，我们使用了谱分量 $\{\bar{Y}_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$ 之间的独立性假设；在 (32b) 中，常数 $C_1=\Gamma(2\alpha+1)-[\Gamma(\alpha+1)]^2$ 由 (29) 确定。为了解释最后一个极限，注意到

$$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\lambda_\ell^{2\alpha}\to\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)^{2\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \tag{33}$$

这是（归一化）黎曼和收敛到积分的结果。因此，黎曼和有界，其与 $\frac{C_1}{\alpha^2N}$ 的乘积也趋于零，当 $N\to\infty$ 时。

对于 $k=0$，我们有

$$\mathrm{var}(\hat{m}_0)=\mathrm{var}\left(\frac{1}{\alpha N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\hat{\Phi}_\ell^\alpha\right) \tag{34}$$

这得出了与 (32a) 相同的结果。因此，当 $N\to\infty$ 时，我们也有 $\mathrm{var}(\hat{m}_0)\to 0$。

注释 2。 这里隐含地假设，底层真实谱密度函数 Φ 足够“良好”，使得诸如 (26b) 和 (33) 所示的收敛有意义。例如，当真实协方差序列 c_k 属于维纳类，即 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$ 时，相应的谱密度 Φ 实际上是连续的（这是勒贝格控制收敛定理的推论）。

注 3. 根据公式 (1)、(26b) 和 (33)，底层过程 y 的真实谱密度 Φ 必须满足可积性条件：$\Phi\in L^1(\mathbb{T})\cap L^\alpha(\mathbb{T})\cap L^{2\alpha}(\mathbb{T})$。由于集合 $\mathbb{T}$ 的勒贝格测度有限，对于 $0<p<q\leq\infty$，我们有 $L^q(\mathbb{T})\subset L^p(\mathbb{T})$ [30]。回想一下,

参数 α 的取值属于区间 (0，1)。因此，前述交集在 $0 < \alpha \leq 1/2$ 时化简为 $L^1(\mathbb{T})$，在 $1/2 < \alpha < 1$ 时化简为 $L^{2\alpha}(\mathbb{T})$。对于这两种情况， $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ 是一个充分条件。

V. 相关谱分量的情形

假设1所规定的谱分量之间的不相关性在渐近意义下成立 [18, 定理 6.2.3，第 426] 页。然而，对于有限个测量值¯ ¯（样本），两个谱分量 Y_{ℓ_1} 和 Y_{ℓ_2} 通常是相关的，其中$\ell_1 \neq \ell_2$。事实上，利用未归一化谱分量 (7) 直接计算可得

$$\operatorname{cov}(Y_{\ell_1}, Y_{\ell_2}) = \frac{1}{1 - e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k a_k - \sum_{k=-N+1}^{-1} c_k a_k \right] \tag{35}$$

其中 $\theta_j = 2\pi\ell_j/N$ 对于 $j = 1,\ 2$， c_k 是过程 y_t 在 (1) 中的真实协方差，且 $a_k = e^{-i\theta_1 k} - e^{-i\theta_2 k}$。

相关谱分量情况下经典倒谱估计的一致性问题已在 [14]中得到研究。下面我们回顾一些众¯ ¯所周知的事实，这些事实将在后文中用到。假设 Y_{ℓ_1} 和 Y_{ℓ_2}是零均值联合圆对称高斯随机变量，也就是说，我们去掉假设1中的独立性部分。令

$$R_{\ell_1\ell_2} = \begin{bmatrix} \lambda_{\ell_1} & r_{\ell_1\ell_2} \\ r^*_{\ell_1\ell_2} & \lambda_{\ell_2} \end{bmatrix} \tag{36}$$

是随机向量 $[\bar{Y}_{\ell_1}\ \bar{Y}_{\ell_2}]^\top$ 的协方差矩阵。根据 [14, 式 16], , 对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_1}\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_2}] &= \mathbb{E}[\,|\bar{Y}_{\ell_1}|^{2\alpha}|\bar{Y}_{\ell_2}|^{2\alpha}\,] \\ &= \lambda^\alpha_{\ell_1}\lambda^\alpha_{\ell_2}[\Gamma(\alpha+1)]^2\,{}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;\rho^2_{\ell_1\ell_2}) \end{aligned} \tag{37}$$

其中,

$$\rho^2_{\ell_1\ell_2} := |r_{\ell_1\ell_2}|^2/(\lambda_{\ell_1}\lambda_{\ell_2})$$

是 Y_{ℓ_1} 与 Y_{ℓ_2}之间皮尔逊相关系数¯ ¯的模平方，并且

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{1}{n!}z^n \tag{38}$$

是超几何级数 [31,第 15] 章，其收敛域为 $|z| < 1$ （当 c 不是负整数时）。这里

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1), & n > 0 \end{cases}$$

是波赫哈默符号，表示上升阶乘。此外，当 $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ 时，级数 (38) 在单位圆 $|z| = 1$ 上也收敛；在 (37) 的情形下，这一条件成立。

接下来，我们证明，对于存在相关谱分量的情形，无法保证使用未加窗周期图的估计量 (17) 一般具有统计一致性；不过，(26) 和 (27) 仍然成立，因为推导这两个结果时并未使用独立性假设。我们只讨论 $\hat{}m_k$ with $k \neq 0$ 的情形，因为 $k = 0$ 的情形可用类似方法得出结论。

不难看出

$$\begin{aligned} &\operatorname{var}(\hat{m}_k) = \mathbb{E}\left[|\hat{m}_k - \mathbb{E}\,\hat{m}_k|^2\right] \\ =&\frac{1}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1} e^{ik\frac{2\pi}{N}(\ell_1-\ell_2)}\left[\mathbb{E}(\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_1}\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_2}) - \mathbb{E}(\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_1})\mathbb{E}(\hat{\Phi}^\alpha_{\ell_2})\right] \\ =&\frac{1}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1} e^{ik\frac{2\pi}{N}(\ell_1-\ell_2)}\lambda^\alpha_{\ell_1}\lambda^\alpha_{\ell_2}[\Gamma(\alpha+1)]^2 \\ &\qquad\times\left[{}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;\rho^2_{\ell_1\ell_2}) - 1\right] \end{aligned} \tag{39}$$

在最后一个等式中，我们利用了 (25) 和 (37)。计算可继续如下:

$$\begin{aligned} &\operatorname{var}(\hat{m}_k) = |\operatorname{var}(\hat{m}_k)| \\ \leq&\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1}\lambda^\alpha_{\ell_1}\lambda^\alpha_{\ell_2}\left[{}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;\rho^2_{\ell_1\ell_2}) - 1\right] \end{aligned} \tag{40a}$$

$$\leq\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1}\lambda^\alpha_{\ell_1}\lambda^\alpha_{\ell_2}\left[{}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;1) - 1\right] \tag{40b}$$

$$=\frac{C_1}{\alpha^2N^2}\sum_{\ell_1=0}^{N-1}\lambda^\alpha_{\ell_1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1}\lambda^\alpha_{\ell_2} \to \frac{C_1}{\alpha^2}\left(\int_{\mathbb{T}}\Phi(\theta)^\alpha\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^2 = \text{const.} \tag{40c}$$

as $N \to \infty$ where,

- (40a) 成立，因为利用级数展开（38），我们可以看到该量

$${}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;\rho^2_{\ell_1\ell_2}) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-\alpha)_n}{n!}\right]^2\rho^{2n}_{\ell_1\ell_2}$$

  为正;
- (40b) 由相关系数的关系式 $0 \leq \rho^2_{\ell_1\ell_2} \leq 1$ 得出;
- (40c) 是应用高斯求和定理 [31，式 15.1.20] 的结果:

$${}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;1) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} \tag{41}$$

  这成立是因为我们将讨论限制在情形$0 < \alpha < 1$，而 C_1 与（32b）中的常数相同。

由（40c）可知，$\hat{}m_k$ 的上界是一个常数，不会随着 N 增大而改善。尽管这样的界可能并不紧，但在这种情况下，无法直接推出广义倒谱估计量（17）的一致性。解决这一问题有两种方法。一种方法是采用加窗周期图 ˇ加窗周期图 Φ，而不是未加窗版本 $\hat{}\Phi$，正如第四节 [14, Sec. IV] 末尾所提示的那样。更具体地说，首先引入一个合适的窗函数 w：$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，见[18,第 6.2 小节3],，然后将相关图（9）修改为

$$\check{\Phi}(\theta) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} w(k)\hat{c}_k e^{-ik\theta}. \tag{42}$$

$\hat{}$ 修正估计量 ˇm_k 可通过将（17）中的 Φ 替换为上述 ˇ Φ得到。这种做法直观上是合理的，因为

ˇ 在相当一般的条件下， Φ 是真实谱 Φ [18, （第6.2小节）4], 的一致估计量，因此可以预期，定理1的结论对 ˇm_k也成立。严格证明似乎很困难（如果可能的话），例如在 ˇ ˆ 计算（25）时， Φ_ℓ 是 Φ_ℓ 的线性组合，并服从广义卡方分布 [32]。遗憾的是，后一种分布一般不具有概率密度函数的闭式表达式。

另一种方法是对基础随机过程作出额外假设 y_t ，例如以下假设。

假设2. 归一化谱分量 $\{\bar{Y}_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$ 的方差渐近有界，即该量

$$\gamma_N := \max_{0\le\ell\le N-1} \lambda_\ell \tag{43}$$

满足 $\lim_{N\to\infty}\gamma_N < \infty$。此外，相关系数的增长受到控制，具体而言，

$$\sum_{\ell_2=0}^{N-1} \rho^2_{\ell_1\ell_2} \le f(N), \quad \forall \ell_1 \in \{0,1,\dots,N-1\} \tag{44}$$

其中 $f(N)$ 是一个满足以下条件的函数:

$$\lim_{N\to\infty} f(N)/N = 0. \tag{45}$$

通俗地说，条件 (44) 要求谱分量之间的相关性较弱。由此可得以下结果。

命题 1. 在假设*1*（不要求谱分量相互独立）和假设*2*成立时，广义倒谱估计量 (17) 除一个常数乘法因子外均方一致，即(22)-(23) 成立。

证明。显然，（39）和（40）中的计算都是成立的。我们将修改（40a）之后的不等式，并证明假设2的作用可以得到结果 var(ˆm_k) $\to 0$ as $N\to\infty$。

根据事实 $0 \le \rho^2_{\ell_1\ell_2} \le 1$ 和条件（44），可得

$$\sum_{\ell_2=0}^{N-1} \rho^{2n}_{\ell_1\ell_2} \le f(N), \quad \forall \ell_1 \in \{0,\dots,N-1\} \text{ and } \forall n \ge 1.$$

接下来，我们利用级数（38）展开（40a）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\hat{m}_k) &\le \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2}{\alpha^2 N^2} \sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1} \lambda^\alpha_{\ell_1}\lambda^\alpha_{\ell_2} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-\alpha)_n}{n!}\right]^2 \rho^{2n}_{\ell_1\ell_2} \\
&\le \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2 \gamma_N^{2\alpha}}{\alpha^2 N^2} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-\alpha)_n}{n!}\right]^2 \sum_{\ell_1=0}^{N-1}\sum_{\ell_2=0}^{N-1} \rho^{2n}_{\ell_1\ell_2} \qquad (46a) \\
&\le \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2 M^{2\alpha}}{\alpha^2}\left[{}_2F_1(-\alpha,-\alpha;1;1)-1\right]\frac{f(N)}{N} \qquad (46b) \\
&= \text{const.} \times \frac{f(N)}{N} \to 0 \quad \text{by (45)},
\end{aligned}$$

其中,

- (46a)由(43)并交换求和顺序得到,

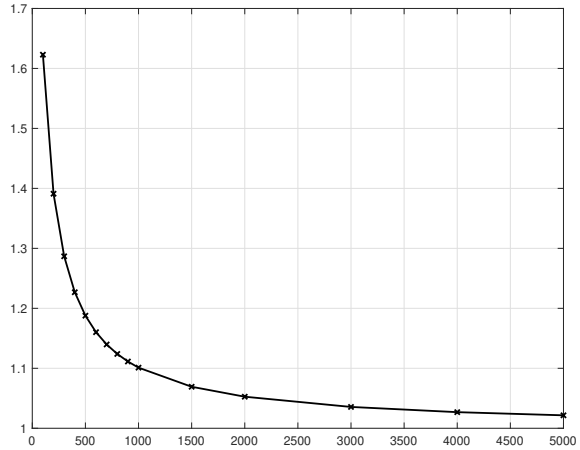


图 1：相关系数的部分和（44）中， $\ell_1 = 3N/4$ 作为 N 的函数。叉号表示已计算出的部分和数值。

- 而在(46b)中，常数 M 是 γ_N的一个上界（由假设2可知其存在），并且我们使用了(44)。

□

例2。 尽管在实践中不容易检验条件（44），但对于由白噪声驱动稳定有理整形滤波器所生成的平稳随机过程而言，这似乎是一个合理的要求。事实上，考虑 ARMA（自回归滑动平均）过程 $y_t = W(z)e_t$，其中 e_t 是归一化白高斯噪声，成形滤波器定义为

$$W(z) = \frac{z^2 - z + 0.8}{z^2 - 1.6z + 0.81} = \sum_{t=0}^{\infty} w_t z^{-t},$$

且 w_t 表示成形滤波器的脉冲响应。那么，不难看出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\bar{Y}_{\ell_1}\bar{Y}^*_{\ell_2}] \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_{t_1,t_2=0}^{N-1}\ \sum_{s=0}^{\min\{t_1,t_2\}} e^{-i\frac{2\pi}{N}(\ell_1 t_1 - \ell_2 t_2)}(w_{t_1-s}w_{t_2-s}).
\end{aligned}$$

根据该公式进行计算，图 1 展示了总和 $\sum_{\ell_2=0}^{N-1}\rho^2_{\ell_1\ell_2}$ 随 N 变化的数值，其中$\ell_1 = 3N/4$ （即对应角频率$\theta_1 = 3\pi/2$）。对于不同的 ℓ_1，也发现了类似的行为。该实验表明，模平方相关系数之和不会随着 N趋于无穷而增长，因此条件 (44)-(45) 得以满足。

VI. 向多维随机场的扩展

我们想指出，第IV节和第V节中得到的结果可以顺利推广到多维情形。为此，设 $y_{\mathbf{t}}$ 是一个零均值平稳的 d维复值随机场，其中$\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{Z}^d$。

给定一个向量$\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)\in\mathbb{N}_+^d$，定义一个有限指标集

$$\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d:=\{(t_1,\dots,t_d):0\le t_j\le N_j-1,\ j=1,\dots,d\},\tag{47}$$

它就是一个 d 维盒子的整数网格，其基数为 $|\mathbf{N}|:=\prod_{j=1}^d N_j$。假设我们已获得场 $\{y_{\mathbf{t}}$ 的样本：$\mathbf{t}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d\}$。此时，谱域变为 $\mathbb{T}^d$，其中包含频率向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ \dots\dots,\ \theta_d)$。对于离散傅里叶变换的计算，式 (11) 中用于离散化 $\mathbb{T}^d$ 的多维对应形式为：

$$\mathbb{T}_{\mathbf{N}}^d:=\left\{\left(\frac{2\pi}{N_1}\ell_1,\dots,\frac{2\pi}{N_d}\ell_d\right)\in\mathbb{T}^d:\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d\right\}.\tag{48}$$

显然，映射 $\boldsymbol{\ell}\mapsto\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\ell}}:=(2\pi\ell_1/N_1,\ \dots\dots,\ 2\pi\ell_d/N_d)$ 是从 $\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d$ 到 $\mathbb{T}_{\mathbf{N}}^d$ 的双射。谱分量由多维离散傅里叶变换给出：

$$Y_{\boldsymbol{\ell}}:=Y(\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\ell}})=\sum_{t\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}y_{\mathbf{t}}\,e^{-i\langle\mathbf{t},\,\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\ell}}\rangle},\quad \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\ell}}\in\mathbb{T}_{\mathbf{N}}^d\tag{49}$$

其归一化形式为 $\bar{Y}_{\boldsymbol{\ell}}:=\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{N}|}}Y_{\boldsymbol{\ell}}$。周期图仍由 $\hat{\ }\,\Phi_{\boldsymbol{\ell}}=|\bar{Y}_{\boldsymbol{\ell}}|^2$ 给出。定理1的多维版本总结如下。

命题2。假设随机场 $\{y_{\mathbf{t}}:\ \mathbf{t}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d\}$ 的归一化谱分量 $\{\bar{Y}_{\boldsymbol{\ell}}:\ \boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d\}$ 相互独立，且为均值为零的复（圆对称）高斯随机$^-$ $\hat{\ }$变量，并满足 方差 $Y_{\boldsymbol{\ell}}=\mathbb{E}\,\Phi_{\boldsymbol{\ell}}=\lambda_{\boldsymbol{\ell}}>0$。此外，假设该场的基础真实谱密度 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$ $y_{\mathbf{t}}$ 满足备注*2*和备注*3*中所讨论的某些正则性。则估计量

$$\hat{m}_{\mathbf{k}}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha|\mathbf{N}|}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}e^{i\langle\mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\ell}}\rangle}\hat{\Phi}_{\boldsymbol{\ell}}^{\alpha} & \text{if } \mathbf{k}\neq\mathbf{0},\\[2mm] \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{|\mathbf{N}|}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}\hat{\Phi}_{\boldsymbol{\ell}}^{\alpha}-1\right) & \text{if } \mathbf{k}=\mathbf{0}\end{cases}\tag{50}$$

广义倒谱系数

$$m_{\mathbf{k}}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{T}^d}e^{i\langle\mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}\rangle}\Phi(\boldsymbol{\theta})^{\alpha}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta}) & \text{if } \mathbf{k}\neq\mathbf{0},\\[2mm] \frac{1}{\alpha}\left[\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(\boldsymbol{\theta})^{\alpha}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta})-1\right] & \text{if } \mathbf{k}=\mathbf{0}\end{cases}\tag{51}$$

在一个常数乘法因子意义下是一致的。这里，$\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{(2\pi)^d}\prod_{j=1}^d\mathrm{d}\theta_j$ 是$\mathbb{T}^d$ 上的归一化勒贝格测度。更确切地说，对于 $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$，我们有如下收敛性

$$C\hat{m}_{\mathbf{k}}\xrightarrow{m.s.}m_{\mathbf{k}},\ \ and\ \ C\hat{m}_{\mathbf{0}}+(C-1)/\alpha\xrightarrow{m.s.}m_{\mathbf{0}}\tag{52}$$

当 $\min(\mathbf{N})\to\infty$ 时，其中常数为 $C=1/\Gamma(\alpha+1)$。

请注意，上述命题的证明与一维情形的证明几乎完全相同（因此省略），因为式（25）和式（29）等量的计算保持不变。多维情形下唯一的区别是，我们需要在求和时使用多个指标，并写出多变量积分。例如，式（33）应改写为

$$\frac{1}{|\mathbf{N}|}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}\lambda_{\boldsymbol{\ell}}^{2\alpha}\to\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(\boldsymbol{\theta})^{2\alpha}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta}).\tag{53}$$

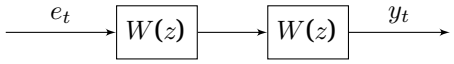


图 2：包含两个相同子系统的级联线性随机系统。

对于具有相关谱分量的情形，我们可以采用 [18,Sec.9.7] forthe2-d case中所述的加窗技术，以及 [33], [34] for 3-d radar signal processing中所述的技术；也可以沿用第五节中的论证思路，此时假设2中的条件替换为

$$\lim_{\min(\mathbf{N})\to\infty}\gamma_{\mathbf{N}}<\infty,\quad \sum_{\boldsymbol{\ell}_2\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}\rho_{\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{\ell}_2}^2\le f(\mathbf{N}),\quad \forall\boldsymbol{\ell}_1\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d,$$

其中

$$\gamma_{\mathbf{N}}:=\max_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}_{\mathbf{N}}^d}\lambda_{\boldsymbol{\ell}},\quad \lim_{\min(\mathbf{N})\to\infty}f(\mathbf{N})/|\mathbf{N}|=0.$$

VII. 级联系统辨识

本节将说明，我们的广义倒谱估计量可以整合到一种谱估计流程中，用于辨识包含相同子系统的级联（可能为多维）线性随机系统，见图 2。其中，$W(z)$表示每个子系统的传递函数，y_t 是输出，e_t 是白噪声输入。当然，在实际应用中，系统不一定由白噪声驱动，而是具有一个输入 u_t，该输入可以建模为平稳随机过程。于是，级联系统的输出（用符号表示）变为 $y_t=[W(z)]^2u_t$。假设我们能够测量 y_t 和 u_t。此时，可以估计输入的功率谱密度，进而估计其成形滤波器 W_u。然后，我们可以对输出进行滤波，得到 $\tilde{y}_t=[\hat{W}_u(z)]^{-1}y_t$，该信号近似满足图 2 的模型。从这个意义上说，我们对输入过程进行了白化。因此，在上述级联系统中考虑白噪声输入并不失一般性。

在化学工程中，常用相同系统的级联来模拟反应器：每个子系统对应一个连续搅拌釜反应器（CSTR），级联的目的是增大反应器的停留时间分布（RTD） [35]。此外，多维情形可以对进水和出水的浓度分布并非均匀这一事实进行建模，示例见 [36]。

我们假设子系统的数量（记为ν）是先验已知的，因此参数 α 被具体设定为$1-\frac{1}{\nu}$（另见第四节中的例 1）。事实证明，对参数的这一选择能够正确恢复子系统的数量。我们的系统辨识方法的核心是 [16], [20] 中提出的一个谱估计问题，下面我们将简要回顾该问题。

假设我们已知某个基础随机场的若干协方差 $\{c_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda\}$ 和广义倒谱系数 $\{m_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda_0\}$，并希望根据这些数值重建谱 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$，即 $L^1(\mathbb{T}^d)$ 中的一个非负函数。这里，指标集 Λ 可以是任意包含零向量且关于原点对称的有限集，即 $\mathbf{k}\in\Lambda\implies-\mathbf{k}\in\Lambda$。另一个指标

集 $\Lambda_0 := \Lambda\backslash\{\mathbf{0}\}$ 出于技术原因，不包含 $m_{\mathbf{0}}$ 。受著名的 最大熵 方法 [37],启发，我们建立如下的一般优化问题:

$$\max_{\Phi\geq 0} \quad \mathbb{H}_\nu(\Phi) := \frac{\nu^2}{\nu-1}\left(\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(\boldsymbol{\theta})^{\frac{\nu-1}{\nu}}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta})-1\right) \tag{54a}$$

$$\text{s.t.} \quad c_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{T}^d} e^{i\langle \mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}\rangle}\Phi(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta}) \ \ \forall \mathbf{k}\in\Lambda, \tag{54b}$$

$$m_{\mathbf{k}} = \frac{\nu}{\nu-1}\int_{\mathbb{T}^d} e^{i\langle \mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}\rangle}\Phi(\boldsymbol{\theta})^{\frac{\nu-1}{\nu}}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta}) \ \ \forall \mathbf{k}\in\Lambda_0, \tag{54c}$$

其中，目标泛函 $\mathbb{H}_\nu(\Phi)$ 是由 α-散度 [38],[39] 导出的 Φ 熵的广义形式。上述表述可视为对 [15], [40] 中协方差与倒谱联合扩展理论的重大推广，因为令 $\nu\to 1$ 即可从我们的问题中恢复出他们的问题。式 (54) 中的优化问题是无限维的，通常处理其有限维对偶问题更为方便。根据 [16], 中的分析，需要采用适当的正则化，以确保对偶问题存在唯一的正解，从而使得到的原始解 Φ 成为严格正的谱密度，这在许多实际应用中都十分理想。更具体地，正则化对偶优化问题表述如下:

$$\min_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}} \ J_{\nu,\lambda}(\mathbf{p},\mathbf{q}) := J_\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \frac{\lambda}{\nu-1}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{P(\boldsymbol{\theta})^{\nu-1}}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta})$$
$$\text{s.t. } P(\boldsymbol{\theta})\geq 0, \quad Q(\boldsymbol{\theta})\geq 0, \quad \forall\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{T}^d \tag{55}$$

其中，对偶变量（拉格朗日乘子）$\{q_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda\}$ 和 $\{p_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda_0\}$ 分别对应协方差约束和倒谱约束 (54b) 与 (54c)， $P(\boldsymbol{\theta}) := 1+\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_0} p_{\mathbf{k}}e^{-i\langle\mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}\rangle}$ 和 $Q(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda} q_{\mathbf{k}}e^{-i\langle\mathbf{k},\,\boldsymbol{\theta}\rangle}$ 是三角多项式， $\lambda>0$ 是正则化参数。对偶目标函数中的第一项 $J_{\nu,\lambda}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ 是未正则化对偶函数

$$J_\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}) := \frac{1}{\nu-1}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{P(\boldsymbol{\theta})^\nu}{Q(\boldsymbol{\theta})^{\nu-1}}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\theta}) + \langle\mathbf{q},\mathbf{c}\rangle - \langle\mathbf{p},\mathbf{m}\rangle,$$
其中实值内积 $\langle\mathbf{q},\ \mathbf{c}\rangle := \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda} q_{\mathbf{k}}c^*_{\mathbf{k}}$。 (56)

在协方差（多）序列 $\{c_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda\}$ 满足适当的可行性假设（见 [16,假设 5.1]）时，如果级联中的子系统数量这一整数参数 ν 满足条件 $\nu\geq\frac{d}{2}+1$，则正则化对偶问题 (55) 存在唯一解 $(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{q}})$，使得相应的多项式 P 和 Q 均严格为正。此外，正有理函数

$$\hat{\Phi}_\nu(\boldsymbol{\theta}) = [\hat{P}(\boldsymbol{\theta})/\hat{Q}(\boldsymbol{\theta})]^\nu \tag{57}$$

能够精确匹配给定的协方差 $\{c_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda\}$，并近似匹配广义倒谱系数 $\{m_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda_0\}$。显然，我们设定了 $p_{\mathbf{0}}=1$，以避免有理函数 Φ_ν 中的 P 和 Q 之间发生平凡消去。

从数值计算的角度来看，最好在与（48）类似但尺寸不同的网格上对问题（55）进行离散化$\mathbf{K}=(K_1,\ldots,K_d)\in\mathbb{N}_+^d$。公式与上述公式类似，此处省略。详情请参阅 [16,第 8] 节，其中还说明，当网格大小$\mathbf{K}$ （逐分量）足够大时，离散问题的解是相应连续问题解的合理近似。

总之，我们的系统辨识过程可分为四个步骤：**(i)** 用归一化白噪声 $e_{\mathbf{t}}$ 激励系统，并收集输出随机场 $\{y_{\mathbf{t}}:\mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d_{\mathbf{N}}\}$；**(ii)** 选择指标集 Λ，并通过针对多维随机场调整的（12）（例如参见 [41]）估计 $\{c_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda\}$，并通过加上（52）中的常数 C 修正后的（50）估计$\{m_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}\in\Lambda_0\}$；**(iii)** 固定网格大小 $\mathbf{K}$，并根据步骤（ii）中的 $c_{\mathbf{k}}$ 和$m_{\mathbf{k}}$以及正则化参数 $\lambda>0$，求解正则化对偶优化问题（55）的离散版本；**(iv)** 对最优谱 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$进行因子分解，以得到传递函数 $W(\mathbf{z})$，其中 $\mathbf{z}:=(z_1,\ldots,z_d)$。

必须指出，该过程的最后一步涉及谱因子分解，存在显著的技术难题。由于我们的最优谱是有理函数，我们最终需要将多个变量的正 Laurent 三角多项式分解为一个平方，而这通常是不可能完成的任务。[2] 幸运的是，在二维情形下， [43,定理 1.1.1 和 1.1.3]给出了检验这种可因子分解性的充要条件，并提供了在因子分解可行时计算因子的显式公式。该条件中非平凡的部分指出，完整协方差矩阵的某个子矩阵必须具有特定的低秩。

此外，我们想强调，（55）中采用的正则化能够促进对偶问题 [16]的严格凸性[3]和适定性。当然，正则化项并非自然出现在系统辨识问题中。因此，为了使所辨识模型的相合性结果合理，我们应令正则化参数 λ 较小，因为它直接控制广义倒谱匹配中的误差。下一个命题阐述了这一想法。

命题3。 假设模型类设定正确，即未知系统的传递函数 $W(\mathbf{z})$ 使得输入 $e_{\mathbf{t}}$ 为归一化白噪声）时输出随机场的真实谱 $y_{\mathbf{t}}$ (属于具有如下形式(57)的有理函数类。则当样本数 $\min(\mathbf{N})\to\infty$ 且正则化参数$\lambda\to 0$时，（*55*）的最优解经谱因子分解后，能够恢复 $y_{\mathbf{t}}$ 的真实谱以及 $W(\mathbf{z})$ 中的正确系统参数。

证明。 该命题可直接由 [16] 中的定理 6.1 得出。 □

通俗地说，上述结果表明：对于一个由 $\nu\geq d/2+1$ 个相同子系统级联而成的 d 维系统，可以利用其输出过程的一些二阶统计量构造出该系统的一致估计量。

[2]已有研究表明，对于在多维环面 [42] 上严格为正的多元劳伦多项式，总能进行平方和 因子分解。然而，因子通常比原劳伦多项式的次数更高。

[3]未正则化对偶函数 (56) 仅为凸函数，而非严格凸函数 [16]。

VIII. 仿真结果

本节将给出一维和二维级联系统辨识的仿真结果，因为只有在维数满足 $d \leq 2$ 时，多项式谱因子分解的理论结果和算法才适用，正如上一节所强调的那样。

A. 一维动态系统的辨识

考虑一个由传递函数 $W(z)$ 描述的一维线性时不变（LTI）系统。此外，设 W 具有与我们的最优谱（57）相对应的级联结构，即 $W(z) = [W_1(z)]^\nu$，其中每个子系统

$$W_1(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}}. \tag{58}$$

这里的指标集为 $\Lambda_+ = \{0, 1, \ldots, n\}$，为简单起见，我们取 $n = 2$，这对应于一个二阶系统。

我们将多项式 $a(z)$ 在单位圆上的取值记为 $a(\theta) \equiv a(e^{i\theta})$。若白噪声输入 e_t 的方差为单位方差，则输出过程 y_t 的谱密度为 $\Phi(\theta) = [P(\theta)/Q(\theta)]^\nu$，其中 $P(\theta) = |b(\theta)|^2$，$Q(\theta) = |a(\theta)|^2$。我们取整数 $\nu = 3$，其值由我们的辨识过程确定。此外，我们用多项式的根来表示这些多项式，即，$a(z) = (1 - r_{a,1}z^{-1})(1 - r_{a,2}z^{-1})$，且 $b(z) = b_0(1 - r_{b,1}z^{-1})(1 - r_{b,2}z^{-1})$，其中 b_0 是归一化常数，使得 $P(z) = b(z)b(z^{-1})$ 具有 $p_0 = 1$。真实系统参数指定为 $r_{a,1}, r_{a,2} = 0.5e^{\pm i\pi/3}$（共轭复根）以及 $r_{b,1}, r_{b,2} = -0.8$ 和 0.6（实根），因此系统 W_1（也就是 W）具有实参数，并且显然是稳定且最小相位的。由此得到

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{and} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8872 & 0.1774 & -0.4259 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{59}$$

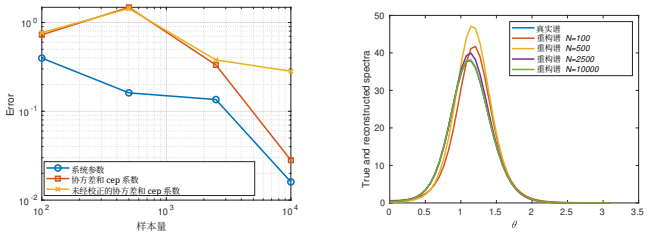
接下来，我们按照上一节列出的系统辨识过程，展示如何根据输出过程 y_t 的样本估计系统参数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$。这些样本的样本量为 N，其生成方式是将归一化的实白噪声 e_t 输入真实系统（因此 y_t 也为实数）。随后，使用（12）和（17）估计输出 y_t 的协方差和广义倒谱系数，所用指标属于集合 $\Lambda = \{k \in \mathbb{Z} : -2 \leq k \leq 2\}$。由于对称性，我们只需计算

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 & \hat{m}_2 \end{bmatrix}.$$

特别是，定理1中用于修正广义倒谱估计的常数 C 等于 $1/\Gamma(\frac{5}{3}) \approx 1.1077$，其中 $\alpha = \frac{\nu-1}{\nu} = 2/3$。估计误差定义为 $\|[\hat{\mathbf{c}}, \widehat{\mathbf{m}}] - [\mathbf{c}, \mathbf{m}]\|$，其中真实的 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{m}$ 使用真实谱计算。不同样本量 N 对应的此类误差显示为橙色曲线

[4] 在图 3a 中以双对数刻度（以 10 为底）绘制。同时，黄色线表示当 $\hat{\mathbf{m}}$ 未通过常数 C 进行校正时的误差。更具体地说，首先生成一条长度为 $N_{\max} = 10^4$ 的时间序列 y_t，并使用

[4] The 此处绘制该线仅为便于观察，并无实际含义 义。



(a) (b)

图3：一维情形下的仿真结果：左图。样本量为 N 的随机过程的协方差和广义倒谱系数的估计误差（橙色线表示经过校正，黄色线表示未经校正）以及系统参数（蓝色线）的估计误差。右图。通过求解正则化对偶优化问题（55）的离散版本得到的真实谱（蓝色线）$\Phi(\theta)$ 与估计谱 $\hat{\Phi}(\theta)$，其中 $\lambda = 10^{-6}$，样本量如上所示。由于实过程的谱具有对称性，此处仅显示对应于 $\theta \in [0, \pi]$ 的部分。请注意，使用 $N = 10^4$ 得到的估计谱与真实谱几乎重合。

同一序列截取为不同长度 N 后进行模拟。可以看出，橙色线的总体趋势是：随着样本量增大，误差减小。在 $N = 500$ 处出现的唯一例外，可以解释为估计量收敛之前的随机波动。在这个具体示例中，未校正的广义倒谱估计量在 $N = 2500$ 之后开始产生较大误差（相对于校正后的版本）。下一小节中的二维示例将更明显地展现这种不稳定行为。

随后，使用梯度下降算法，在大小为 $K = N$ 的离散网格上求解正则化对偶问题 (55)，其中使用了估计值 $\hat{\mathbf{c}}$、$\hat{\mathbf{m}}$ 和 $\lambda = 10^{-6}$。算法以 $q_0 = 1$ 初始化，其余变量均设为 0，这对应于常数多项式 $P(\theta) = Q(\theta) \equiv 1$。当梯度的范数小于 10^{-6} 时，迭代终止。给定最优多项式 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 后，我们使用 (1-d) 多项式谱因子分解的标准方法（例如 Bauer方法[44]）计算它们的因子 $\hat{a}$ 和 b。与 (59) 比较后，我们计算误差 $\|[\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\|$，不同 N 值下的结果以图 3a 中的蓝线表示。随着样本量 N 增加，蓝线与橙线呈现相同的趋势，这是预期的结果，因为真实系统 $W(z)$ 属于由我们优化问题的解形式 (57) 所规定的模型类，正如命题3中所解释的那样。此外，在图 3b 中，我们绘出了区间 $[0, \pi)$ 上的真实谱 $\Phi(\theta)$ 与估计谱 $\hat{\Phi}(\theta)$。可以清楚地观察到，估计谱收敛到真实谱。

B. 二维随机场建模

在本小节中，我们考虑从平面随机 W 二维线性时不变系统 $W(z_1, z_2)$ 的样本中辨识该系统的问题

过程。该过程与前一小节类似，下面将对此作简要描述。设 $W(\mathbf{z}) = [W_1(\mathbf{z})]^{\nu}$，其中 $\nu = 2$ 以及该子系统

$$W_1(\mathbf{z}) = \frac{b(\mathbf{z})}{a(\mathbf{z})} = \frac{\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_+} b_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}}{\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_+} a_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}}, \tag{60}$$

其中，指标集 $\Lambda_+ := \{(k_1,\ k_2) \in \mathbb{Z}^2 :\ 0 \le k_1,\ k_2 \le 1\}$，使得 W_1 （大致上）在每个维度上的阶均为 1，未定元 $(z_1,\ z_2)$ 简记为 $\mathbf{z}$，而 $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ 表示 $z_1^{k_1}z_2^{k_2}$。为方便记号，将多项式 $a(\mathbf{z})$ 在单位环面上的值记为 $a(\boldsymbol{\theta}) \equiv a(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2})$。为简单起见，我们还对多项式 a、b施加可分离形式 $(1 - r_{a,\ 1}z_1^{-1})(1 - r_{a,\ 2}z_2^{-1})$，并令 $|r_{a,\ j}| < 1$ 对于 $j = 1,$ 取 2。系统参数可通过以下方式设定：

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -r_{a,2} & -r_{a,1} & r_{a,1}r_{a,2} \end{bmatrix}.$$

将二维系统参数汇集到矩阵中会很方便。在我们的具体示例中，取实参数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.5 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.6696 & -0.5357 \\ -0.4018 & 0.3214 \end{bmatrix} \tag{61}$$

其中 $a_{k_1,\ k_2} = A(k_1+1,\ k_2+1)$，$b_{k_1,\ k_2}$ 也类似。注意，约束 $p_{\mathbf{0}} = 1$ 转化为归一化条件 $\|B\|_{\mathrm{F}} = 1$，其中下标 $_{\mathrm{F}}$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。定义在二维域上的真实谱 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$如图 4b 所示。

接下来，我们实现系统辨识过程，以根据输出过程 $y_{\mathbf{t}}$ 的样本估计“系统矩阵” A 和 B，样本量为 $\mathbf{N} = (N_1,\ N_2)$。如第六节所述，使用未加窗周期图估计由集合 $\Lambda = \{(k_1,\ k_2) \in \mathbb{Z}^2 :\ -1 \le k_1,\ k_2 \le 1\}$索引的 $y_{\mathbf{t}}$ 的协方差和广义倒谱系数。由于 $c_{\mathbf{k}}$ 和 $m_{\mathbf{k}}$ 关于原点对称，我们只需计算

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0} & \hat{c}_{0,1} & \hat{c}_{1,-1} & \hat{c}_{1,0} & \hat{c}_{1,1} \end{bmatrix},$$
$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_{0,1} & \hat{m}_{1,-1} & \hat{m}_{1,0} & \hat{m}_{1,1} \end{bmatrix}$$

并将它们按字典序排列。特别地，式（）中的校正常数

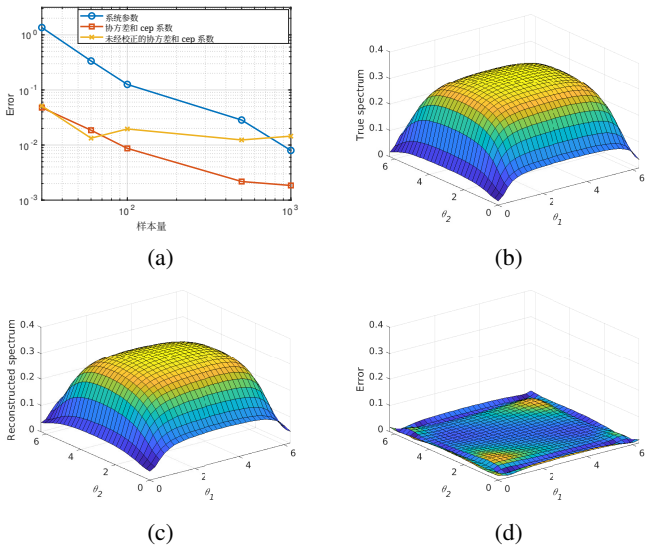
$$C \quad 52 \quad 1/\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = 2/\sqrt{\pi} \approx \text{现}$$

1.1284

在为（），因为 $\alpha = 1 - \frac{1}{\nu} = 1/2$。图 4a 中橙色线绘出了估计误差 $\|[\hat{\mathbf{c}},\ \hat{\mathbf{m}}] - [\mathbf{c},\ \mathbf{m}]\|$ 随样本量 $N_1 = N_2 = N$ 的变化趋势，这与图 3a 中的趋势相同：样本量增加时，误差减小。相比之下，代表错误广义倒谱估计量的黄色线在本例中早在 $N = 100$ 就偏离了橙色线。显然，错误的估计量不具备相合性，因为随着 N 进一步增大，误差曲线不再下降。

然后，我们在大小固定为$\mathbf{K} = (30,\ 30)$的离散网格上，使用估计得到的 $\hat{\mathbf{c}}$、$\hat{\mathbf{m}}$和 $\lambda = 10^{-6}$求解正则化对偶问题 (55)。返回的最优谱 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\theta})$

当样本量为 $N_1 = N_2 = 100$时，求解器得到的结果如图 4c 所示。在这种情况下，显然，估计谱的形状与真实谱几乎无法通过目视区分。此外，逐点绝对误差 $|\Phi(\boldsymbol{\theta}) - \Phi(\boldsymbol{\theta})|$ 如图 4d 所示。可以



(a) (b)

(c) (d)

图4：二维情形下的仿真结果：左上。 协方差和广义倒谱系数的估计误差（橙色线表示经过校正，黄色线表示未经校正）以及系统参数的估计误差（蓝色线），其中随机场的样本量 $N_1 = N_2 = N$ 分别为 30、60、100、500、1000。右上。 $\hat{}y_{\mathbf{t}}$的真实谱 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$。左下。 通过求解正则化对偶优化问题 (55) 的离散版本，并使用 $\lambda = 10^{-6}$ 和样本量 $N = 100$得到的估计谱 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\theta})$。右下。 子图4b和4c之间的逐点绝对误差 $|\hat{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) - \Phi(\boldsymbol{\theta})|$。

看出，误差图相当平坦。作为补充，我们还计算了整个网格$\|\hat{\Phi} - \Phi\|_{\mathrm{F}}/\|\Phi\|_{\mathrm{F}} = 4.40\%$上的累积相对误差，其数值相当小。

一旦得到最小多项式 $\hat{P}$，我们就可以运行因式分解算法 [45，定理1.1.1和1.1.3] $\hat{}$，并计算因子$\hat{a}$和 b。在本例中，样本量为 $N = 100$时，其系数的数值如下列矩阵所示

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.0590 & -0.6896 \\ -0.4503 & 0.2854 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.7102 & -0.5282 \\ -0.3679 & 0.2688 \end{bmatrix}.$$

此处的误差为 $\|[\hat{}A,\ \hat{}B] - [A, B]\|_{\mathrm{F}} = 0.1259$，与不同 N 对应的其他误差一起，绘于图4a中的蓝线。我们可以看到，辨识过程具有命题3所述的一致性。

IX. 结论

我们提出了一种用于单维和多维情形下广义倒谱系数的估计量。我们证明，当随机过程为独立同分布或周期过程这一特殊情形时，该估计量是一致的。我们还给出了一个条件，可保证在谱分量相关的一般情形下该估计量的一致性。当随机过程由稳定有理滤波器生成时，这一条件似乎能够满足。最后，我们证明，该估计量可用于构造一类级联线性随机系统的一致估计量。

参考文献

[1] C. I. Byrnes、S. V. Gusev 和 A. Lindquist，“有理协方差扩展问题的凸优化方法”，SIAM 控制优化杂志，第 37 卷，第 1 期，第 211–229 页，1998 年。[2] ——，“从有限协方差窗口到建模滤波器：一种凸优化方法”，SIAM评论，第 43 卷，第 4 期，第 645–675 页，2001 年。[3] T. T. Georgiou，“通过选择性谐波放大进行谱估计”，IEEE自动控制汇刊，第 46 卷，42，2001 1，第 29 期，第 – 页。[4] C. Byrnes、P. Enqvist 和 A. Lindquist，“有限数据序列的倒谱系数、协方差滞后及极点零点模型”，IEEE信号处理汇刊，第 49 卷，第 4 期，第 677–693 页，2001 年。[5] A. Ferrante、M. Pavon 和 F. Ramponi，“海灵格与库尔贝克–莱布勒：多变量谱近似”，IEEE自动控制汇刊，第 53 卷，第 4 期，第 954–967 页，2008 年。[6] A. Ferrante、F. Ramponi 和 F. Ticozzi，“关于用于谱密度库尔贝克–莱布勒近似的高效算法的收敛性”，IEEE自动控制汇刊，第 56 卷，第 3 期，第 506–515 页，2011 年。[7] F. Ramponi、A. Ferrante 和 M. Pavon，“一种用于多元谱估计的全局收敛矩阵算法”，IEEE自动控制汇刊，第 54 卷，第 10 期，第 2376–2388 页，2009 年。[8] A. Ringh、J. Karlsson 和 A. Lindquist，“带近似协方差匹配的多维有理协方差扩展”，《SIAM控制与优化学报》，第 56 卷，第 2 期，第 913–944 页，2018 年。[9] B. Zhu，“关于参数化谱估计问题的适定性及其数值解”，IEEE自动控制汇刊，第 65 卷，第 3 期，第 1089–1099 页，2020 年。[10] A. Ferrante、C. Masiero 和 M. Pavon，“时间域与谱域相对熵：一种多元谱估计的新方法”，IEEE自动控制汇刊，第 57 卷，第 10 期，第 2561–2575 页，2012 年。[11] M. Zorzi，“新型高分辨率多元谱估计量”，IEEE自动控制汇刊，第 59 卷，第 4 期，第 892–904 页，2014 年。[12] B. Zhu 和 G. Baggio，“关于谱估计问题解的存在性 `：Byrnes-Georgiou-Lindquist 方法”，IEEE自动控制汇刊，第 64 卷，第 2 期，第 820–825 页，2019 年。[13] Y. Ephraim 和 M. Rahim，“关于倒谱系数的二阶统计量与线性估计”，IEEE语音与音频处理汇刊，第 7 卷，第 2 期，第 162–176 页，1999 年。[14] Y. Ephraim 和 W. J. Roberts，“关于含相关分量的对数周期图的二阶统计量”，IEEE信号处理快报，第 12 卷，第 9 期，第 625–628 页，2005 年。[15] P. Enqvist，“基于协方差与倒谱数据的 ARMA(n, m) 模型设计的凸优化方法”，《SIAM控制与优化学报》，第 43 卷，第 3 期，第 1011–1036 页，2004 年。[16] B. Zhu 和 M. Zorzi，“多维有理协方差与倒谱扩展：一般性表述”，提交至《SIAM控制与优化学报》，2021 年。[17] F. Ramponi、A. Ferrante 和 M. Pavon，“关于多元谱近似的适定性及高分辨率谱估计量的收敛性”，《系统与控制快报》，第 59 卷，第 3 期，第 167–172 页，2010 年。[18] M. B. Priestley，《谱分析与时间序列》（两卷本），丛书：概率与数理统计。爱思唯尔学术出版社，1981 年，2004 年重印。[19] J. Karlsson、A. Lindquist 和 A. Ringh，“带复杂度约束的多维矩问题”，《积分方程与算子理论》，第 84 卷，第 3 期，第 395–418 页，2016 年。[20] B. Zhu 和 M. Zorzi，“广义多维循环有理协方差与倒谱扩展问题”，载于 IFAC PapersOnLine，第 54 卷，第 7 期。帕多瓦，意大利：国际自动控制联合会，2021 年，第 553–558 页，于第 19 届 IFAC 系统辨识研讨会（ SYSID 2021 ）上以线上形式报告。[21] A. Ringh、J. Karlsson 和 A. Lindquist，“多维循环有理协方差扩展问题：解与图像压缩应用”，载于第 54 届决策与控制年会（CDC）。IEEE，2015 年，第 5320–5327 页。[22] K. Tokuda、T. Kobayashi 和 S. Imai，“语音广义倒谱分析——线性预测编码与倒谱法的统一方法”，载于第一届国际口语语言处理会议，1990 年。[23] B. Wahlberg、H. Hjalmarsson 和 J. M¨artensson，“级联系统辨识的方差结果”，Automatica，第 45 卷，第 6 期，第 1443–1448 页，2009 年。[24] H. Sandberg、P. H¨agg 和 B. Wahlberg，《级联系统的近似模型重构》，《系统与控制快报》，第 69 卷，第 90–97 页，2014 年。[25] A. Lindquist 和 G. Picci，《线性随机系统：建模、估计与辨识的几何方法》，当代数学系列丛书。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2015 年，第 1 卷。[26] P. Stoica 和 R. Moses，《信号谱分析》。Upper Saddle River, NJ：Pearson Prentice Hall，2005 年。[27] R. M. Gray，《托普利茨矩阵与循环矩阵：综述》，《通信与信息论基础与趋势》，第 2 卷，第 3 期，第 155–239 页，2006 年。[28] A. Lindquist 和 G. Picci，《循环有理协方差扩展问题：完整解》，IEEE自动控制汇刊，第 58 卷，第 11 期，第 2848–2861 页，2013 年。[29] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第 8 版。Academic Press，2014 年。[30] A. Villani，《关于包含关系 $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ 的另一则注记》，《美国数学月刊》，第 92 卷，第 7 期，第 485–487 页，1985 年。[31] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun 编，《含公式、图表和数学表格的数学函数手册》，第 10 版，美国国家标准局应用数学丛书。美国政府印刷局，1972 年，第 55 卷；Dover Publications 于 2020 年再版并作了修正。[32] R. B. Davies，《算法 AS155：线性组合的分布 χ^2 随机变量》，《应用统计》，第 323–333 页，1980 年。[33] F. Engels、P. Heidenreich、A. M. Zoubir、F. K. Jondral 和 M. Wintermantel，《汽车雷达的进展：计算高效的高分辨率频率估计框架》，《IEEE信号处理杂志》，第 34 卷，第 2 期，第 36–46 页，2017 年。[34] B. Zhu、A. Ferrante、J. Karlsson 和 M. Zorzi，《汽车雷达系统中的传感器数据融合：一种谱估计方法》，载于第 58 届 IEEE决策与控制会议（CDC 2019）。IEEE，2019 年，第 5088–5093 页。[35] A. Renken、M. N. Kashid 和 L. Kiwi-Minsker，《用于化学加工的微结构器件》。John Wiley & Sons，2014 年。[36] V. Vavilin、L. Lokshina、X. Flotats 和 I. Angelidaki，《固体物料的厌氧消化：非均匀进料浓度分布连续流反应器的多维建模》，《生物技术与生物工程》，第 97 卷，第 2 期，第 354–366 页，2007 年。[37] J. P. Burg，《最大熵谱分析》，博士学位论文，地球物理系，斯坦福大学，1975 年。[38] M. Zorzi，《基于Alpha散度的谱密度有理逼近》，《控制、信号与系统数学》，第 26 卷，第 2 期，第 259–278 页，2014 年。[39] ——，《对 THREE 类方法对偶问题的一种解释》，Automatica，第 62 卷，第 87–92 页，2015 年。[40] A. Ringh、J. Karlsson 和 A. Lindquist，《多维有理协方差扩展及其在谱估计和图像压缩中的应用》，《SIAM控制与优化学报》，第 54 卷，第 4 期，第 1950–1982 页，2016 年。[41] B. Zhu、A. Ferrante、J. Karlsson 和 M. Zorzi，《M^2-谱估计：一种相对熵方法》，Automatica，第 125 卷，2021 年 3 月。[42] M. A. Dritschel，《三角多项式的分解》，《积分方程与算子理论》，第 49 卷，第 1 期，第 11–42 页，2004 年。[43] J. S. Geronimo 和 H. J. Woerdeman，《正扩展、Fej´er-Riesz 分解与二变量自回归滤波器》，《数学年刊》，第 160 卷，第 3 期，第 839–906 页，2004 年。[44] A. H. Sayed 和 T. Kailath，《谱因子分解方法综述》，《带应用的数值线性代数》，第 8 卷，第 6–7 期，第 467–496 页，2001 年。