arXiv:2301.06797v1 [math.GM] 17 Jan 2023

关于希尔费尔-普拉巴卡分数阶导数、萨维变换及其在分数阶微分方程中的应用

MOHD KHALID，SUBHASH ALHA

数学系，毛拉纳·阿扎德国立乌尔都大学，加奇博利，海得拉巴-500032，印度。

电子邮箱：khalid.jmi47@gmail.com，subhashalha@manuu.edu.in

摘要：本文旨在研究萨维变换及其与Hilfer-Prabhakar分数阶导数和正则化Hilfer-Prabhakar分数阶导数之间的关系，并给出一些与萨维变换相关的引理。此外，本文还利用萨维变换和傅里叶变换，并结合三参数米塔格-莱夫勒函数，采用Hilfer-Prabhakar分数阶导数求解柯西型分数阶微分方程。

关键词和短语：希尔费尔-普拉巴卡、普拉巴卡积分、萨维变换、傅里叶变换、米塔格-莱夫勒函数。

2010年 数学主题分类：44A35、26A33、42B10。

---

1 引言

分数阶微积分是数学的一个分支，研究实数阶或复数阶的分数阶积分与导数。文献中使用了多种类型的分数阶积分与导数。近年来，由于分数阶微积分在物理学、化学、生物学、控制理论、经济学、电子学以及科学技术的其他领域有着广泛的应用，因此受到了研究人员的广泛关注 [13], [14], [15], [3], [16], [11]。普拉巴卡积分是对黎曼-刘维尔积分的一种修正，其核涉及三参数米塔格-莱夫勒函数。Hilfer-Prabhakar 导数及其正则化版本首次发表于一篇研究论文中，见 [6]。

许多研究人员将希尔费尔-普拉巴卡分数阶导数应用于各个领域，这得益于其特殊性质，其中包括能够结合拉普拉斯变换、傅里叶变换、苏穆杜变换、谢胡变换、埃尔扎基变换等多种积分变换。在 Garra等人 的研究论文中 [6], ，作者研究了希尔费尔-普拉巴卡导数及其正则化版本的拉普拉斯变换，并将这些结果应用于数理物理方程

例如热方程和自由电子激光方程。同样，Panchal等人 [8] 将苏穆杜变换应用于非齐次柯西问题；Yudhveer等人 [9] 则将埃尔扎基变换与希尔费尔-普拉巴卡分数阶导数及其正则化版本结合起来，用于求解一种自由电子激光型积分微分方程。Bel-gacem等人 [10] 将谢胡变换应用于Prabhakar导数和希尔费尔-普拉巴卡导数，并据此求解了一些分数阶微分方程。同样，萨维变换与拉普拉斯变换、埃尔扎基变换、苏穆杜变换、Kamal变换和Monand变换有着更深的联系。2019年，Mahgoub等人 [17] 提出了一种名为萨维变换的新积分变换，主要用于研究其在求解线性微分方程方面的适用性。如今，科学与工程领域的研究人员广泛使用萨维变换来求解各种积分方程和微分方程问题 [24–29]。

本文将萨维变换应用于多种形式的分数阶导数，包括普拉巴卡积分、Prabhakar导数、Hilfer-Prabhakar 导数及其正则化版本，以此求解分数阶微分方程。随后，利用这些研究论文的结果，从 Mittag-Leffler型函数的角度分析涉及分数阶 Hilfer-Prabhakar分数阶导数的柯西型分数阶微分方程。

2 定义与预备知识

定义 2.1. *[17]* 萨维变换记作 $\mathcal{T}(s)$，应用于函数$\psi(t)$：

$$\begin{aligned} Sa[\psi(t), s] = \mathcal{T}(s) = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \psi(t) exp\left(\frac{-t}{s}\right) dt \\ = \frac{1}{s}\int_0^\infty exp(-t)\psi(st)dt, s \in (\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

萨维变换应用于一组函数

$$\mathcal{A} = \left\{ \psi(t) \mid \exists\, M, \lambda_1, \lambda_2 > 0, k > 0, |\psi(t)| \leq M\, e^{\left(\frac{t}{\lambda_j}\right)}, if\ t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

对于所有大于某个常数“k”的 $\psi(t)$ 值，积分变换（2.1）均有定义。

容易证明，萨维积分变换是一个线性算子，并且具有许多与其他积分变换相似的特性。

命题 2.1。 *[18]* 两个函数的萨维变换， $\psi(t)$ 和$\phi(t)$，分别表示为 $\mathcal{F}(s)$ 和 $\mathcal{G}(s)$，可通过对它们的卷积应用萨维变换得到

$$Sa[\psi(t) * \phi(t)), s] = s^2 \mathcal{F}(s)\mathcal{G}(s), \tag{2.2}$$

或者等价地，

$$T^{-1}\left[s^2 \mathcal{F}(s)\mathcal{G}(s), t\right] = \psi(t) * \phi(t), \tag{2.3}$$

其中

$$\psi(t)*\phi(t)=\int_0^{\infty}\psi(\tau)\phi(t-\tau)d\tau, \tag{2.4}$$

定义 2.2. *[2]* 将黎曼-刘维尔积分算子（其阶数为 α 且大于 0）作用于函数 $\psi(t)$

$${}_0\mathcal{I}_t^{\alpha}\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\psi(\tau)d\tau, \alpha\in\mathbb{C}\ and\ t>0. \tag{2.5}$$

定义 2.3. *[2]* 将黎曼-刘维尔分数阶导数（其阶数为 α 且大于 0）作用于函数 $\psi(t)$

$${}_0\mathcal{D}_t^{\alpha}\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}\psi(\tau)d\tau,\ \ n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

定义 2.4. *[2]* 将 Caputo 分数阶导数（其阶数为 α 且大于 0）作用于函数 $\psi(t)$

$${}_0^C\mathcal{D}_t^{\alpha}\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}\psi^{(n)}(\tau)d\tau,\ \ n-1<\alpha<n,\ \ n\in\mathbb{N} \tag{2.7}$$

定义 2.5. *[1]* 将 Hilfer 分数阶导数（其阶数为 α 且 ρ，其中$0<\alpha\leq 1$，且 $0\leq\rho\leq 1$）作用于函数 $\psi(t)$

$${}_0\mathcal{D}_t^{\alpha,\rho}\psi(t)=\left({}_0\mathcal{I}_t^{\rho(1-\alpha)}\frac{d}{dt}({}_0\mathcal{I}_t^{(1-\alpha)(1-\rho)}\psi(t))\right) \tag{2.8}$$

定义 2.6. *[19, 20]*将 Weyl 分数阶微分算子（其阶数为 α 且大于 0）作用于函数 $\psi(t)$

$${}_{-\infty}\mathcal{D}_t^{\alpha}\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{-\infty}^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}\psi(\tau)d\tau,\ \ n-1<\alpha<n,\ \ n\in\mathbb{N} \tag{2.9}$$

Metzler 和 Klafter 在其论文中定义的算子 (2.9) 的修正傅里叶变换 *[21]* 如下:

$$F\left\{{}_{-\infty}\mathcal{D}_t^{\alpha}\psi(x)\right\}=-k^{\alpha}\psi^*(k), \tag{2.10}$$

其中 $\psi^*(k)$ 是 $\psi(x)$ 的傅里叶变换

定义 2.7。 *[22]* 设 $\psi(x)$ 是在每个部分区间 $(-\infty,\infty)$ 上定义的分段连续函数，并且在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，其傅里叶变换由所给积分方程定义，

$$F[\psi(x),k]=\psi^*(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)exp(ikx)dx, \tag{2.11}$$

傅里叶变换的逆变换为

$$\psi^{-1}[\psi^*(k)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k)exp(-ikx)dk, \tag{2.12}$$

定义 2.8。 *[3]* 给出一个单参数米塔格-莱夫勒函数,

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ z,\alpha\in\mathbb{C},\ \ Re(\alpha)>0. \tag{2.13}$$

给出了一个双参数Mittag-Leffler函数,

$$E_{\alpha,\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z^k)}{\Gamma(\alpha k+\rho)},\ \ z,\alpha,\rho\in\mathbb{C},\ \ Re(\alpha)>0. \tag{2.14}$$

定义 2.9. *[3]* 给出了一个三参数Mittag-Leffler函数，也称为Prabhakar函数,

$$E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\rho)}\frac{(z)^k}{k!},\quad z,\alpha,\rho,\gamma\in\mathbb{C},\alpha>0, \tag{2.15}$$

为便于应用，我们将进一步使用式 (2.15) 的推广形式，该形式由

$$e^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega}=t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega t^{\alpha}) \tag{2.16}$$

该函数用参数 $\omega\in\mathbb{C}$ 和自变量t表示，其中t是一个大于0的实变量。

定义 2.10. *[3]* 函数 ψ 在 $L^1[0,1]$,$0<$,$b<\infty$和 $t>0$ 上的Prabhakar分数阶积分可表示为以下形式

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t)&=\int_0^t(t-\tau)^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega(t-\tau)^{\alpha})\psi(\tau)d\tau\\&=(\psi*e^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega})(t)\end{aligned} \tag{2.17}$$

Prabhakar分数阶积分的上述表示中的参数 $\alpha,\rho,\gamma,\omega$ 为复数，且 α,ρ 大于0。

定义 2.11。 *[3]* 函数 ψ 在 $L^1[0,1]$,$0<b<\infty,t>0$ 和 $\psi*e^{\gamma}_{\alpha,\ \rho,\ \omega}\in W^{k,\ 1}[0,b]$, $k=\lceil\rho\rceil$的 Prabhakar 分数阶导数可表示为

$$\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t)=\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,k-\rho,\omega,0^+}\psi(t), \tag{2.18}$$

Prabhakar 分数阶导数给定表示中的参数 $\alpha,\rho,\gamma,\omega$ 为复数，且 α 和 ρ 的实部均大于 0。

式 (2.6) 中的黎曼-刘维尔分数阶导数可表示为

$$\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t)=\mathcal{D}^{\rho+\theta}_{0^+}\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,\theta,\omega,0^+}\psi(t), \tag{2.19}$$

定义 2.12。 *[6]* 函数 ψ在 $AC[0,b]$,$0<b<\infty,t>0$和 $k=\lceil\rho\rceil$的正则化 Prabhakar 分数阶导数可表示为

$${}^{C}\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t)=\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,k-\rho,\omega,0^+}\frac{d^k}{dt^k}\psi(t) \tag{2.20}$$

其中， α、 ρ、 γ、 ω 为复数，且 α 和 ρ 的实部大于 0。

定义 2.13. *[6, 7]* 令 $\psi \in L^1[a,b]$、$\rho \in$ (0, 1) $\nu \in [0,1]$、$0 < b < t \leq \infty$、$\psi * e^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha\ 1-\nu}$，$()(1-\rho)\,\omega$(.) $\in AC^1[a,b]$。Hilfer-Prabhakar分数阶导数定义为

$$\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t) = \left(\mathcal{I}^{-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho),\omega,0^+}\frac{d}{dt}(\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi)\right)(t) \tag{2.21}$$

定义 2.14. *[7]* 函数 ψ(t)的正则化Hilfer-Prabhakar分数阶导数在 $L^1[a,b]$, $\rho \in$ (0, 1) $\nu \in [0,1], 0 < b \leq \infty, t > 0$ 中定义为

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t) &= \left(\mathcal{I}^{-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho),\omega,0^+}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\frac{d}{dt}\psi\right)(t) \\ &= \mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,1-\rho,\omega,0^+}\frac{d}{dt}\psi(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

定理 2.1. *[17]* 若 $\mathcal{T}$(s)表示函数 ψ(t)的萨维变换，则函数 ψ(t)的 m 阶导数的萨维变换表示为 $\mathcal{T}_m$(s)

$$\mathcal{T}_m(s) = Sa[\psi^{(m)}(t), s] = s^{-m}\mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k-m-1}\psi^{(k)}(0), m \geq 0 \tag{2.23}$$

引理 2.1. 设 $0 < \alpha < 1$ 和 $\omega \in \mathbb{C}$ 满足 $Re(\alpha) > 0$, $Re(\rho) > 0)$ $Re(\gamma) > 0$。利用式 (2.1)、(2.15)，可得 Mittage-Leffler 型函数$t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\ \rho}(\omega t^{\alpha})$的萨维变换

$$Sa\left[t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega t^{\alpha}), s\right] = s^{\rho-2}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma}, \tag{2.24}$$

证明。

$$\begin{aligned} Sa\left[t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega t^{\alpha}), s\right] &= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-t}(st)^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega(st)^{\alpha})dt, \\ &= s^{\rho-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k(\omega s^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\rho)k!}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha k+\rho-1}dt, \\ &= s^{\rho-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k(\omega s^{\alpha})^k}{k!}, \\ &= s^{\rho-2}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma}. \end{aligned}$$

□

引理 2.2. 已知函数 ψ(t)的萨维变换表示为 $\mathcal{T}$(s)，利用方程 (2.2)、(2.24) 可求得函数 ψ(t)的 Prabhakar 分数阶积分的萨维变换，表示如下:

$$Sa[\mathcal{I}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t), s] = s^{\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma}\mathcal{T}(s), \tag{2.25}$$

证明。

$$\begin{aligned} Sa[\mathcal{I}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t), s] &= Sa\left[\int_0^t (t-\tau)^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}[\omega(t-\tau)^{\alpha}]\psi(\tau)d\tau, s\right] \\ &= Sa\left[(\psi * e^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega})(t), s\right] \\ &= s^2 Sa\left[t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\rho}(\omega t^{\alpha}), s\right] \times Sa[\psi(t), s] \\ &= s^2 \times s^{\rho-2}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma}\mathcal{T}(s) \\ &= s^{\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma}\mathcal{T}(s), \end{aligned}$$

□

3 主要结果

定理 3.1。 *[*Prabhakar 导数的萨维变换*]*：给定格式中 Prabhakar 分数阶导数表示的萨维变换

$$Sa[\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t),s]=s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-m-1}\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,k-m+\rho,\omega,0^+}\psi(t)|_{t=0} \quad (3.1)$$

证明。已知函数 $\psi(t)$ 的萨维变换表示为 $\mathcal{T}(s)$，对关于变量 t 的 Prabhakar 分数阶导数 (2.18) 应用萨维变换，并利用方程 (2.23) 和卷积 (2.2)，即可得到所给表示式

$$\begin{aligned}
&Sa[\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t),s]\\
&\quad=Sa\left[\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,m-\rho,\omega,0^+}\psi(t),s\right]\\
&\quad=Sa\left[\frac{d^m}{dt^m}g(t),s\right],\ \ where\ \ \ g(t)=\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,m-\rho,\omega,0^+}\psi(t)\\
&\quad=s^{-m}Sa[g(t),s]-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-m-1}g^{(k)}(0),\ \ g^{(k)}(0)=\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,m-\rho,\omega,0^+}\psi(0)\\
&\quad=s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-m-1}\left[\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,k-m+\rho,\omega,0^+}\psi(t)\right]_{t=0}
\end{aligned}$$

□

定理 3.2. *[*正则化 Prabhakar 导数的萨维变换*]*：正则化 Prabhakar 分数阶导数的萨维变换可表示为给定的形式

$$Sa[{}^{C}\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t),s]=s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\psi^{(k)}(0^+) \quad (3.2)$$

证明。已知函数 $\psi(t)$ 的萨维变换表示为 $\mathcal{T}(s)$，对正则化 Prabhakar 分数阶导数（2.20）关于变量 t 应用萨维变换，并利用萨维变换的公式（2.25）、（2.23）和卷积公式（2.2），

我们得到所给出的表示

$$
\begin{aligned}
&Sa[{}^{C}\mathcal{D}^{\gamma}_{\alpha,\rho,\omega,0^+}\psi(t),s] \\
&\quad= Sa\left[\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,m-\rho,\omega,0^+}\frac{d^m}{dt^m}\psi(t),s\right] \\
&\quad= Sa\left[\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,m-\rho,\omega,0^+}h(t),s\right],\quad where\quad h(t)=\frac{d^m}{dt^m}\psi(t) \\
&\quad= s^{m-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}Sa[h(t),s] \\
&\quad= s^{m-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[s^{-m}Sa[\psi(t),s]-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-m-1}\psi^{(k)}(0)\right] \\
&\quad= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\psi^{(k)}(0^+)
\end{aligned}
$$

□

定理 3.3。 *[*Hilfer-Prabhakar 导数的萨维变换*]*：萨维变换将 Hilfer-Prabhakar分数阶导数表示为特定形式

$$
\begin{aligned}
Sa[\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t),s] &= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s) \\
&\quad - s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\,\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(t)|_{t=0^+}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

证明。已知函数 $\psi(t)$ 的萨维变换表示为 $\mathcal{T}(s)$，对关于变量 t 的 Hilfer-Prabhakar分数阶导数 (2.21) 应用萨维变换，并利用方程 (2.25)、(2.23)，可得到所给表示式

$$
\begin{aligned}
&Sa[\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t),s] \\
&\quad= Sa\left[\left(\mathcal{I}^{-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho),\omega,0^+}\frac{d}{dt}(\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi)\right)(t),s\right] \\
&\quad= Sa\left[\mathcal{I}^{-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho),\omega,0^+}k(t),s\right],\ where\ \ k(t)=\frac{d}{dt}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(t) \\
&\quad= s^{\nu(1-\rho)}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}Sa[k(t),s] \\
&\quad= s^{\nu(1-\rho)}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\left[s^{-1}Sa[\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(t),s]-s^{-2}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(0^+)\right] \\
&\quad= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\,\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(t)|_{t=0^+}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.4。 *[*正则化 Hilfer-Prabhakar 导数的萨维变换*]*：萨维变换将正则化 Hilfer-Prabhakar分数阶导数表示为给定格式

$$
Sa[{}^{C}\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t),s]=s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}f(0^+) \tag{3.4}
$$

证明。已知函数 $\psi(t)$的萨维变换表示为 $\mathcal{T}(s)$，对正则化Hilfer-Prabhakar分数阶导数 (2.22)应用萨维变换

关于变量 t，并利用方程(2.25)、(2.23)以及萨维变换的卷积公式(2.2)，可得所给表示

$$\begin{aligned} Sa[{}^{C}\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(t),s] &= Sa\left[\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,1-\rho,\omega,0^+}\frac{d}{dt}\psi(t),s\right] \\ &= Sa\left[\mathcal{I}^{-\gamma}_{\alpha,1-\rho,\omega,0^+}z(t),s\right],\ \ z(t)=\frac{d}{dt}\psi(t) \\ &= s^{1-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}Sa[z(t),s] \\ &= s^{1-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}[s^{-1}Sa[\psi(t),s]-s^{-2}f(0^+)] \\ &= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s)-s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}f(0^+) \end{aligned}$$

□

4 应用

本节介绍如何应用萨维变换求解柯西型分数阶微分方程，涉及 Hilfer-Prabhakar 分数阶导数和正则化的 Hilfer-Prabhakar 分数阶导数。

定理4.1。本定理给出了分数阶平流-弥散方程广义柯西型问题的解

$$\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(x,t) = -p\mathcal{D}_x\psi(x,t)+\vartheta\,\Delta^{\frac{\lambda}{2}}\psi(x,t) \tag{4.1}$$

满足以下约束条件

$$\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(x,0^+)=g(x),\ \ \omega,\ \gamma,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha>0, \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)=0,\ \ t\geq 0, \tag{4.3}$$

可得

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t^{\nu(1-\rho)+n\rho+\rho-1}e^{(-ikx)}g(k)(ipk-\vartheta|k|^{\lambda})^{n}E^{\gamma(1+n)-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho)+\rho(n+1)}(\omega t^{\alpha})dk \tag{4.4}$$

在该解中，$\Delta^{\frac{\lambda}{2}}$ 表示 λ阶分数阶广义拉普拉斯算子，其中 λ 的取值范围为(0,2)，ρ 的取值范围为(0,1)，ν 的取值范围为 *[0,1]*，x 属于$\mathbb{R}$，t 属于 $\mathbb{R}^{+}$，且 γ 大于0。$\Delta^{\frac{\lambda}{2}}$ 的傅里叶变换为 $-|k|^{\lambda}$，详见文献 *[30]*

证明。函数 $\overline{\psi}(x,s)$ 表示关于变量 t 的 $\psi(x,t)$ 的萨维变换，而 $\psi^{*}(k,t)$ 表示关于变量 x 的 $\psi(x,t)$ 的傅里叶变换。通过对方程（4.1）应用傅里叶变换和萨维变换，并使用方程（3.3）、（2.10），可得到变换后的解。首先，我们将对左端应用萨维变换和傅里叶变换

$$\begin{aligned} LHS &= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi^{*}(k,0) \\ &= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}g^{*}(k) \end{aligned} \tag{4.5}$$

现在我们将对右端应用萨维变换和傅里叶变换

$$RHS = ipk\overline{\psi}^*(k,s) - \vartheta|k|^\lambda \overline{\psi}^*(k,s) \tag{4.6}$$

因此，我们将得到

$$\begin{aligned}
s^{-\rho}(1-\omega s^\alpha)^\gamma \overline{\psi}^*(k,s) - s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^\alpha)^{\gamma\nu} g^*(k) &= ipk\overline{\psi}^*(k,s) - \vartheta|k|^\lambda \overline{\psi}^*(k,s) \\
\overline{\psi}^*(k,s)[s^{-\rho}(1-\omega s^\alpha)^\gamma + \vartheta|k|^\lambda - ipk] &= s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^\alpha)^{\gamma\nu} g^*(k) \\
\overline{\psi}^*(k,s) &= \frac{s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^\alpha)^{\gamma\nu} g^*(k)}{s^{-\rho}(1-\omega s^\alpha)^\gamma \left[1 + \frac{\vartheta|k|^\lambda - ipk}{s^{-\rho}(1-\omega s^\alpha)^\gamma}\right]} \\
\overline{\psi}^*(k,s) &= s^{\nu(1-\rho)+\rho-2}(1-\omega s^\alpha)^{\gamma\nu-\gamma} g^*(k) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-\vartheta|k|^\lambda + ipk}{s^{-\rho}(1-\omega s^\alpha)^\gamma}\right]^n \\
\overline{\psi}^*(k,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (ipk - \vartheta|k|^\lambda)^n s^{\nu(1-\rho)+\rho+\rho n-2}(1-\omega s^\alpha)^{\gamma\nu-\gamma n-\gamma} g^*(k)
\end{aligned}$$

对于 $\frac{\vartheta|k|^\lambda - ipk}{s^{-\rho}\ 1-\omega s^\alpha}()^\gamma < 1$，应用傅里叶 $\psi^{-1}[\psi^*(k)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(k)dk$逆变换和萨维 $Sa^{-1}[s^{\rho-2}(1-\omega s^\alpha)^{-\gamma}] = t^{\rho-1}E^{\gamma}_{\alpha,\ \rho}(\omega t^\alpha)$变换，我们将得到所需结果

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^{\nu(1-\rho)+n\rho+\rho-1} e^{(-ikx)} g(k)(ipk - \vartheta|k|^\lambda)^n E^{\gamma(1+n)-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho)+\rho(n+1)}(\omega t^\alpha)dk$$

□

定理4.2。该定理为分数阶平流-弥散方程的广义柯西型问题提供了一个解。

$${}^{C}\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}\psi(x,t) = -p\mathcal{D}_x\psi(x,t) + \vartheta\ \Delta^{\frac{\lambda}{2}}\psi(x,t) \tag{4.7}$$

满足以下约束

$$\psi(x,0^+) = g(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x,t) = 0,\ \ t \geq 0, \tag{4.9}$$

得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^{\rho n} e^{(-ikx)} g(k)(ipk - \vartheta|k|^\lambda) E^{\gamma n}_{\alpha,\rho(n+1)}(\omega t^\alpha)dk \tag{4.10}$$

在解中，$\Delta^{\frac{\lambda}{2}}$ 表示阶数为 λ的分数阶广义拉普拉斯算子，其中 λ 的取值范围为(0,2)，ρ 的取值范围为(0,1)，ν 的取值范围为 *[0,1]*，x 属于 $\mathbb{R}$，t 属于 $\mathbb{R}^+$，且 γ 大于0；$\Delta^{\frac{\lambda}{2}}$ 的傅里叶变换为 $-|k|^\lambda$，详见 *[30]*

证明。函数 $\overline{\psi}(x,s)$表示 $\psi(x,t)$关于变量 t的萨维变换，而 $\psi^*(k,t)$表示 $\psi(x,t)$关于变量 x的傅里叶变换。对方程(4.7)应用傅里叶变换和萨维变换，并利用方程(3.4)、(2.10)，可得变换后的解

$$
\begin{aligned}
&s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\psi^{*}(k,0)=ipk\overline{\psi}^{*}(k,s)-\vartheta|k|^{\lambda}\overline{\psi}^{*}(k,s)\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)[s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}+\vartheta|k|^{\lambda}-ipk]=s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}g^{*}(k)\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=\frac{s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}g^{*}(k)}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[1+\frac{\vartheta|k|^{\lambda}-ipk}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]}\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=s^{-1}g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{ipk-\vartheta|k|^{\lambda}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]^{n}\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}(ipk-\vartheta|k|^{\lambda})^{n}s^{\rho n-1}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma n}
\end{aligned}
$$

对于 $\left[\frac{\vartheta|k|^{\lambda}-ipk}{s^{-\rho}\ 1-\omega s^{\alpha}}()^{\gamma}\right]<1$，对上述方程两边分别取 Sawi 变换和傅里叶变换的逆变换，可得到最终结果

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t^{\rho n}e^{(-ikx)}g(k)(ipk-\vartheta|k|^{\lambda})E_{\alpha,\rho(n+1)}^{\gamma n}(\omega t^{\alpha})dk$$

□

本节研究包含 Hilfer-Prabhakar分数阶导数的分数阶自由电子激光方程。

定理 4.3。本节给出了分数阶热方程的广义柯西型问题的解

$$
{}^{C}\mathcal{D}_{\alpha,\omega,0^{+}}^{\gamma,\rho,\nu}\psi(x,t)=N\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\psi(x,t) \tag{4.11}
$$

满足初始条件

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,0)=g(x)\\
&\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)=0
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

$with\ \ \rho\in(0,1)\ \ \nu[0,1];\quad \omega;\quad N、\ \alpha>0、\ \gamma\geq 0、\quad is\ \ given\ \ by$

$$
\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ikx}E_{\alpha,\rho n+1}^{\gamma n}(\omega t^{\alpha})(-Nk^{2})^{n}t^{\rho n}g(k)dk \tag{4.13}
$$

证明。函数 $\overline{\psi}(x,s)$ 表示函数 $\psi(x,t)$ 关于变量 t 的萨维变换，而 $\psi^*(k,t)$ 表示函数 $\psi(x,t)$ 关于变量 x 的傅里叶变换。对

方程 (4.11) 应用傅里叶变换和萨维变换，并利用方程 (3.4)、(4.12)、(2.12)，可得到变换后的解

$$
\begin{aligned}
&s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\psi^{*}(k,0)=-Nk^{2}\overline{\psi}^{*}(k,s)\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)[s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}+Nk^{2}]=s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}g^{*}(k),\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=\frac{s^{-\rho-1}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}g^{*}(k)}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[1+\frac{Nk^{2}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]},\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=s^{-1}g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-Nk^{2}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]^{n},\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=s^{-1}g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}(-Nk^{2})^{n}s^{\rho n}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma n}g^{*}(k),\\
&\overline{\psi}^{*}(k,s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-Nk^{2})^{n}s^{\rho n-1}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma n}g^{*}(k),
\end{aligned}
$$

对于 $\frac{Nk^{2}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}<1$，对上述方程两边应用 Sawi 变换和傅里叶变换的逆变换，即可得到最终结果

$$
\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ikx}E_{\alpha,\rho n+1}^{\gamma n}(\omega t^{\alpha})(-Nk^{2})^{n}t^{\rho n}g(k)dk
$$

□

定理 4.4。该定理给出了分数阶热方程广义柯西型问题的解，

$$
\mathcal{D}_{\alpha,\omega,0^{+}}^{\gamma,\rho,\nu}\psi(x,t)=M\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\psi(x,t), \tag{4.14}
$$

$$
\mathcal{I}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^{+}}^{-\gamma(1-\nu)}\psi(x,t)|_{t=0}=g(x), \tag{4.15}
$$

$$
\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)=0,
$$

with $\rho\in(0,1)$ $\nu[0,1]$； ω、 $x\in\mathbb{R}$； M、 $\alpha>0$、 $\gamma\geq 0$、 *is given by*

$$
\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ikx}g(k)(-Mk^{2})^{n}t^{\rho(n+1)-\nu(\rho-1)-1}E_{\alpha,\rho(n+1)+\nu(1-\rho)}^{\gamma(n+1-\nu)}dk \tag{4.16}
$$

证明。函数 $\overline{\psi}(x,s)$ 表示 $\psi(x,t)$ 关于变量 t 的萨维变换，而 $\psi^{*}(k,t)$ 表示 $\psi(x,t)$ 关于变量 x 的傅里叶变换。对方程 (4.14) 应用傅里叶变换和萨维变换，并利用方程 (3.3) 、 (4.15) 、 (2.12)，得到

得到变换后的解,

$$s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^{+}}f(x,0)=-Mk^{2}\overline{\psi}^{*}(k,s)$$

$$s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\overline{\psi}^{*}(k,s)-s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}g^{*}(k)=-Mk^{2}\overline{\psi}^{*}(k,s)$$

$$\overline{\psi}^{*}(k,s)[s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}+Mk^{2}]=s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}g^{*}(k)$$

$$\overline{\psi}^{*}(k,s)=\frac{s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}g^{*}(k)}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}+Mk^{2}}$$

$$\overline{\psi}^{*}(k,s)=\frac{s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}g^{*}(k)}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[1+\frac{Mk^{2}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]}$$

$$\overline{\psi}^{*}(k,s)=s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu-\gamma}g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}(-Mk^{2})^{n}s^{\rho n}(1-\omega s^{\alpha})^{-\gamma n}$$

$$\overline{\psi}^{*}(k,s)=g^{*}(k)\sum_{n=0}^{\infty}(-Mk^{2})^{n}s^{\rho n+\nu(1-\rho)+\rho-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu-\gamma n-\gamma}$$

对 $\left(\underline{s^{-\rho}}^{\frac{Mk^{2}}{(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}}\right)<1$，取傅里叶变换和萨维变换的逆变换，即可得到所需结果

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ikx}g(k)(-Mk^{2})^{n}t^{\rho(n+1)-\nu(\rho-1)-1}E^{\gamma(n+1-\nu)}_{\alpha,\rho(n+1)+\nu(1-\rho)}dk$$

□

定理4.5。柯西型分数阶微分方程的解

$${}^{C}\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,-\omega,0^{+}}\psi(x,t)=-\lambda(1-x)\psi(x,t),\quad for\ \ |x|\leq 1 \tag{4.17}$$

$$f(x,0)=1 \tag{4.18}$$

其中 $t>0,\ \lambda>0,\ \gamma\geq 0,\ 0<\alpha\leq 1, 0<\rho\leq 1,\ \ is$

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^{n}(1-x)^{n}t^{\rho n}E^{\gamma n}_{\alpha,\rho n+1}(-\omega t^{\alpha}) \tag{4.19}$$

证明。函数 $\overline{\psi}(x,s)$ 表示关于变量 t 的 $\psi(x,t)$ 的萨维变换。对方程（4.17）应用萨维变换，并利用（3.4）、（4.18），可得到变换后的

解

$$
\begin{aligned}
s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}\,\overline{\psi}(k,s) - s^{-\rho-1}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}\,\overline{\psi}(x,0) &= -\lambda(1-x)\overline{\psi}(x,s)\\
\overline{\psi}(k,s)[s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma} + \lambda(1-x)] &= s^{-\rho-1}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}\\
\overline{\psi}(k,s) &= \frac{s^{-\rho-1}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}{s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[1+\frac{\lambda(1-x)}{s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]}\\
\overline{\psi}(k,s) &= \frac{s^{-\rho-1}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}{s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\left[1+\frac{\lambda(1-x)}{s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]^{-1}\\
\overline{\psi}(k,s) &= s^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-\lambda(1-x)}{s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]^{n}\\
\overline{\psi}(k,s) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^{n}(1-x)^{n}s^{\rho n-1}(1+\omega s^{\alpha})^{-\gamma n}
\end{aligned}
$$

对于$\frac{\lambda}{(1-x)\,s^{-\rho}(1+\omega s^{\alpha})^{\gamma}} < 1$，对上述方程两边应用萨维变换的逆变换，即可得到所需结果

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^{n}(1-x)^{n}t^{\rho n}E^{\gamma n}_{\alpha,\rho n+1}(-\omega t^{\alpha})$$

□

定理 4.6. 本定理给出了柯西型分数阶微分方程的解。

$$\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^{+}}\psi(t) = \lambda\mathcal{I}^{\delta}_{\alpha,\rho,\omega,0^{+}}\psi(t) + y(t), \tag{4.20}$$

$$\left(\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^{+}}\psi(t)\right)|_{t=0} = M \tag{4.21}$$

其中 $\psi(t) \in L_1[0,\infty)$: $\rho \in (0,1)$ $\nu \in [0,1]$: $\omega,\lambda \in \mathbb{C}$: $t,\alpha > 0, K,\gamma,\delta \geq 0$, *is given by*

$$
\begin{aligned}
\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\mathcal{I}^{\gamma+n(\delta+\gamma)}_{\alpha,\rho(2n+1),\omega,0^{+}}y(t) + M\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}t^{\rho(2n+1)+\nu(1-\rho)-1}\\
\times E^{\delta n+\gamma n+\gamma-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho)+\rho(2n+1)}(\omega t^{\alpha})
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

证明。对方程 (4.20) 两边应用萨维变换，并利用方程 (3.3)、(4.21) 和 (2.25)，即可求得柯西型分数阶微分方程的解

$$
\begin{aligned}
Sa[\lambda\mathcal{I}^{\delta}_{\alpha,\rho,\omega,0^{+}}\psi(t) + y(t)] &= Sa\left[\lambda\mathcal{I}^{\delta}_{\alpha,\rho,\omega,0^{+}}\psi(t),s\right] + Sa[y(t),s]\\
&= \lambda Sa[(\psi * e^{\delta}_{\alpha,\rho,\omega})(t),s] + Sa[y(t),s]\\
&= \lambda Sa[\psi(t)t^{\rho-1}E^{\delta}_{\alpha,\rho}(\omega t^{\alpha}),s] + Sa[y(t),s]\\
&= \lambda s^{2}\mathcal{T}(s)s^{\rho-2}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta} + Sa[y(t),s]\\
&= \lambda s^{\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta}\mathcal{T}(s) + Sa[y(t),s],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Sa\left[\mathcal{D}^{\gamma,\rho,\nu}_{\alpha,\omega,0^+}y(t),s\right] &= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s) \\
&\quad - s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}\mathcal{I}^{-\gamma(1-\nu)}_{\alpha,(1-\nu)(1-\rho),\omega,0^+}\psi(t)|_{t=0}, \\
&= s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\mathcal{T}(s) - s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}M
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(s) &= \frac{Sa[y(t),s] + s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}M}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}\left[1-\frac{\lambda s^{\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]} \\
&= \frac{Sa[y(t),s] + s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}M}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda s^{\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta}}{s^{-\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma}}\right]^n \\
&= \left(Sa[y(t),s] + s^{\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{\gamma\nu}M\right)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n s^{2\rho n+\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta n-\gamma n-\gamma} \\
&= Sa[y(t),s]\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n s^{2\rho n+\rho}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta n-\gamma n-\gamma} \\
&\quad + M\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n s^{2\rho n+\rho+\nu(1-\rho)-2}(1-\omega s^{\alpha})^{-\delta n-\gamma n-\gamma+\gamma\nu}
\end{aligned}
$$

对于 $\left[\frac{\lambda s^{\rho}(\quad 1-\omega s^{\alpha}\ -\delta\ )()^{\gamma}}{s^{-\rho}\ 1-\omega s^{\alpha}}\right] < 1$，对上述方程两边取萨维变换的逆变换，即可得到所需结果

$$
\begin{aligned}
\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathcal{I}^{\gamma+n(\delta+\gamma)}_{\alpha,\rho(2n+1),\omega,0^+}y(t) + M\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n t^{\rho(2n+1)+\nu(1-\rho)-1} \\
\times E^{\delta n+\gamma n+\gamma-\gamma\nu}_{\alpha,\nu(1-\rho)+\rho(2n+1)}(\omega t^{\alpha})
\end{aligned}
$$

□

5 结论

在本研究中，我们首先得到了希尔费尔-普拉巴卡分数阶导数及其正则化版本的萨维变换。随后，我们展示了如何结合萨维变换和傅里叶变换，利用三参数Mittag-Leffler函数，运用这些结果求解包含希尔费尔-普拉巴卡分数阶导数的柯西型分数阶微分方程。结果表明，萨维变换是求解分数阶微分方程的有效工具。

参考文献

[1] R. Hilfer，《物理学中的分数阶微积分》，World Scientific Publishing Company，新加坡-新泽西-香港（2000），87-130。

[2] A.A. Kilbas、H.M. Srivastava 和 J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，爱思唯尔科学，美国（2006）。[3] T.R. Prabhakar 等，《核中含广义 Mittag Leffler 函数的奇异积分方程》，《横滨数学杂志》19（1971），7-15。[4] H. Jafari：《一种用于求解积分方程的新型一般积分变换》。《高级研究杂志》（2020）。https://doi.org/10.1016/j.jare.2020.08.016[5] M. Meddahi、H. Jafari 和 M.N. Ncube：《通过 Atangana–Baleanu 导数构造的新型一般积分变换》。《差分方程进展》2021(1)，1-14。[6] Roberto Garra 等：《Hilfer–Prabhakar导数及其若干应用》，《应用数学与计算》242（2014），576-589。[7] S.K. Panchal、P.V. Dole、A.D. Khandagale：《k-Hilfer-Prabhakar分数阶导数及其应用》，《印度数学杂志》59（2017），367-383。[8] Panchal SK、Khandagale AD、Dole PV：《Hilfer-Prabhakar分数阶导数的苏穆杜变换及其应用》。arXiv预印本，arXiv:1608.08017。2016年8月29日。[9] Yudhveer Singh 等：《关于埃尔扎基变换及其在分数阶自由电子激光方程中的应用》，《Sapientia大学学报：数学》11(2)（2019），419-429。

[10] Rachid BELGACEM、Ahmed BOKHARI 和 Boualem SADAOUI：《Hilfer-Prabhakar分数阶导数的谢胡变换及其在若干柯西型问题中的应用》，《非线性分析理论及其应用进展》5(2)（2021），203-214。[11] Om P. Agrawal：《利用特征函数对分布式系统进行分数阶最优控制》，《计算与非线性动力学杂志》3(2)（2008）。[12] Fawang Liu、Pinghui Zhuang 和 Kevin Burrage：《一类分数阶对流–弥散模型的数值方法与分析》，《计算机与数学及其应用》64(10)（2012），2990-3007。[13] Francesco Mainardi：《数学模型导论》，《线性黏弹性中的分数阶微积分与波》。帝国理工学院出版社，伦敦（2010）。[14]K. S. Miller 和 B. Ross，《分数阶积分与导数导论——理论与应用》，Wiley父子公司，纽约（1993）。[15] K.B. Oldham、J. Spanier，《分数阶微积分》，Academic出版社，纽约，1974。[16] G. Samko、A. Kilbas 和 O. Marichev，《分数阶积分与导数：理论与应用》，阿姆斯特丹：Gordon and Breach出版社（1993）。[17] MM Abdelrahim Mahgoub 和 M. Mohand：《新型积分变换“萨维变换”》，《理论与应用数学进展》14(1)（2019），81-87。

[18] Aggarwal S, Sharma SD, Vyas A. 贝塞尔函数的萨维变换及其在计算定积分中的应用。Int J Latest Technol Eng, Manage Appl Sci. 9(7) (2020) 12-8.[19] Miller, K., 韦伊尔分数阶微积分，Springer，柏林-海德堡 (1975), 80– 89[20] Saxena, R.K., Mathain, A.M. and Haubold, H.J., 反应扩散系统与非线性波, Astrophys. Space Sci., 305(3) (2006), 297–303[21] Metzler, R. and Klafter, J., 反常扩散指南：分数阶动力学方法，Phys. Rep., 339(1) (2000), 1–77.[22] Debnath L. and Bhatta D., 积分变换及其应用，Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, 纽约 (2007).[23] Singh, Gyanvendra Pratap, and Sudhanshu Aggarwal, 用于人口增长与衰减问题的萨维变换，International Journal of Latest Technology in Engineering, Management and Applied Science 8(8) (2019年), 157-162.[24] Higazy, M., and Sudhanshu Aggarwal, 用于常微分方程组及其应用的萨维变换，Ain Shams Engineering Journal 12(3) (2021), 3173-3182.[25] Aggarwal, Sudhanshu, and Anjana Rani Gupta, 若干有用积分变换与萨维变换之间的对偶关系，International Journal of Recent Technology and Engineering 8(3) (2019年), 5978-5982.[26] Patil, D. P, 萨维变换在贝塞尔函数中的应用，Aayushi International Interdisciplinary Research Journal (AIIRJ) (2021).[27] Higazy, M., Sudhanshu Aggarwal, and Taher A. Nofal, 用于沃尔泰拉积分方程的萨维分解法及其应用，Journal of Mathematics 2020 (2020).[28] Bhuvaneswari, R., and K. Bhuvaneswari, 萨维变换在密码学中的应用，International Journal of Modern Agriculture 10(1) (2021), 185-189.[29] Sahoo, Mrutyunjaya, and Snehashish Chakraverty, 基于萨维变换的同伦摄动法：求解模糊环境中的浅水波方程，Mathematics 10(16) (2022), 2900.[30] Agarwal, Ritu, Sonal Jain, and R. P. Agarwal, 广义时空对流-弥散方程（含分数阶拉普拉斯算子）的解析解，J Nonlinear Sci (2016), 3545-54.