arXiv:2301.06827v1 [math.GN] 17 Jan 2023

赋范空间中的弱 I^K-柯西序列

$AmarKumarBanerjee^{\dagger 1}$和 $Mahendranath\ Paul^{\dagger 2}$

†伯德万大学数学系，印度 713104。

摘要

本文研究赋范空间中的弱 I^K-柯西条件，将其作为弱 I^*-柯西条件的推广。我们利用 $AP(I,K)$-条件，考察弱 I-柯西与弱I^K-柯西序列之间的关系。此外，我们还研究同一空间中序列的弱* I^K-柯西条件和弱 I^K-发散性。

关键词：弱 I^K-收敛、弱 I^K-柯西、条件 AP(I,K)、弱* I^K-柯西、弱 I^K-发散

AMS 学科分类：主要分类：40A05；次要分类：40H05

1 引言

在二十世纪中叶，Fast [13]（另见 Steinhaus [25]）利用集合的自然密度这一概念，将通常的收敛概念扩展为统计收敛。经过 Fridy[15] 和 Salat [24], 的卓越研究，统计收敛在过去五十年中已成为一个活跃的研究领域。1985 年，Fridy [14] 以如下方式引入了统计柯西序列的概念：

如果对每个 $\epsilon(>0)$，都存在一个数 N（取决于 ϵ），使得集合 $K(\epsilon)=\{n\in\mathbb{N}\colon |x_n-x_N|\geq\epsilon\}$的自然密度为零，则称序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为统计柯西序列，其中子集 K of $\mathbb{N}$ 的自然密度定义如下：令 K_n 表示集合 $\{k\in K\colon k\leq n\}$，$|K_n|$ 表示 K_n的基数。K 的自然密度定义为 $d(K)=\lim_n \frac{|K_n|}{n}$，如果该极限存在。

2000 年，在 Cannor 等人对弱统计收敛进行开创性研究之后， [9], Bhardwaj 等人 [1]研究了赋范空间中的弱统计柯西序列，并证明在自反空间中，弱统计柯西序列与弱统计收敛序列相同。

利用正整数集 $\mathbb{N}$ 的子集理想 I，Kostyrko 等人 [17, 18]将理想收敛（即 I和 I^*-收敛）的概念作为统计收敛的一种自然推广引入。Dems [10] 和 Nabiev 等人 [20] 分别研究了度量空间中的 I-柯西条件和 I^*-柯西条件。2010 年，Das 等人 [12] 进一步研究了 I-柯西性，并利用 AP 条件建立了 I 与 I^*-柯西条件之间的相互关系。他们还引入了 I和 I^*-发散的概念，并研究了它们在 [20]中的等价性。2010 年，Pehlivan 等人 [22] 研究了赋范空间中的弱 I-收敛和弱 I-柯西序列，并考察了它们的基本性质。随后，Pal 等人 [21] 研究了赋范线性空间中弱 I 和 I^*-发散的概念，并得出了一些重要结论。Bhardwaj 等人 [2]研究了泛函序列的弱* 理想收敛概念。

2010年，Macaj 等人 [19]提出了 I^K-收敛的概念，将其作为序列 I^*-收敛的一种普遍推广。2014年，Das 等人 [11] 研究了 I^K-柯西性和 I^K-发散性，并强调了通过双理想研究可和性理论时 AP(I,K) 条件的重要性。此后，许多关于 I-收敛的研究在度量空间中展开 [4, 5, 6, 7]。最近， [8] 在赋范空间中研究了序列的弱和弱* I^K-收敛。

本文 w　　我们研究弱 I^K-柯西条件这一概念，将其作为弱 I^*-柯西条件的推广　　.

[1]akbanerjee1971@gmail.com, akbanerjee@math.buruniv.ac.in[2]
mahendrabktpp@gmail.com

接下来，我们利用 AP(I,K)-条件说明弱 I-柯西与弱 I^K-柯西之间的相互关系。此外，我们还研究泛函序列的弱* I^K-柯西条件这一概念，并探讨弱I^K-发散，将其作为弱 I^*-发散的推广。

2 基本定义与记号

定义 2.1. 设 X 为非空集合，若由 X 的子集构成的类 $I \subset 2^X$ 满足：(i) 若 A， $B \in I$，则 $A \cup B \in I$；(ii) 若 $A \in I$， $B \subset A$，则 $B \in I$，则称其为理想。

由条件 (ii) 易知 $\phi \in I$。若 $I \neq 2^X$， $\{\phi\}$，则称 I为非平凡理想。若非平凡理想 I 包含 X的所有单点集，则称其为可容许的。若非平凡理想 I 不是可容许的，则称其为非可容许的。

若 I是非空集合 X上的非平凡理想，则 $F = F(I) = \{A \subset X: X \setminus A \in I\}$ 显然是 X 上的一个滤子，称为与理想 I相关联的滤子。全文中， $\mathbb{N}$ 表示所有正整数构成的集合， X 表示一个赋范线性空间， X^* 表示 X的对偶空间。

定义 2.2. *[13]* 若序列 $\{x_n\}$ 在 X 中满足：对任意 $\epsilon > 0$，集合$K(\epsilon) = \{k \in \mathbb{N}: ||x_k - l|| \geq \epsilon\}$ 的自然密度为零，则称该序列统计收敛于 l。

定义 2.3. *[9]* 若序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中满足：对任意$f \in X^*$，序列 $\{f(x_n - x)\}_{n\in\mathbb{N}}$统计收敛于 0，则称该序列弱统计收敛于 $x \in X$。此时记作 $w - st - \lim_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 2.4. *[1]* 若赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 满足：对每个 $f \in X^*$， $\{f(x_n)\}$都是统计柯西的，则称该序列为弱统计柯西序列。

定义 2.5. *[17]* 若序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中满足：对任意 $\epsilon > 0$，集合$A(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N}: ||x_n - x|| \geq \epsilon\} \in I$。则称该序列 I收敛于 x。此时记作 $I - \lim_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 2.6. *[22]* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的序列 X 称为弱 I-收敛于 $x \in X$，如果对于任意 $\epsilon > 0$和 $f \in X^*$，集合 $A(f, \epsilon) = \{n \in \mathbb{N}: |f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon\} \in I$。此时记作 $w - I - \lim_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 2.7.（参见*[22]*） $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的序列 X 称为弱 I^*-收敛于 x 的 X，如果存在集合 $M \in F(I)$，使得由下式定义的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$

$$y_n = \begin{cases} x_n & if\, n \in M \\ x & if\, n \notin M \end{cases}$$

弱收敛于 x。我们用记号 $w - I^* - \lim x_n = x$表示。

定义 2.8. 设 I, K 是集合 $\mathbb{N}$上的两个理想。 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为弱 I^K-收敛于 x 的 X，如果存在集合 $M \in F(I)$，使得由下式定义的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$

$$y_n = \begin{cases} x_n & if\, n \in M \\ x & if\, n \notin M \end{cases}$$

弱 K收敛到 x。我们用记号 $w - I^K - \lim x_n = x$表示。

定义 2.9. *[19]*设 K是一个理想 $\mathbb{N}$。当 $A \setminus B \in K$.时，我们记为 $A \subset_K B$。若 $A \subset_K B$且 $B \subset_K A$，则记为 $A \sim_K B$。显然， $A \sim_K B \Leftrightarrow A \triangle B \in K$。
我们称　　集合 A 是系统 $\{A_n$ 的 K-伪交： $n \in \mathbb{N}\}$，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$， $A \subset_K A_n$ 都成立。

定义 2.10. *[19]* 设 I, K 是集合 X上的理想。若 I 相对于 K具有可加性，或条件 AP(I,K) 成立，则称以下等价条件之一成立：

(i) 对于来自 I 的每个集合序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，存在 $A\in I$，使得对于所有 $i's$， $A_i\subset_K A$。
(ii) 来自 $F(I)$ 的任意集合序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $F(I)$ 中都有一个 K-伪交。
(iii) 对于来自 I 的每个集合序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，都存在一个序列$\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in I$，使得 $A_n\sim_K B_n$ 对$n\in\mathbb{N}$ 和 $B=\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in I$成立。
(iv) 对于每个由两两不相交集合组成的序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset I$，都存在一个序列 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset I$，使得 $A_n\sim_K B_n$ 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $B=\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in I$成立。
(v) 对于来自 $I\exists$ 的每个非递减集合序列 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_i\cdots$，都有一个序列 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset I$，使得 $A_n\sim_K B_n$ 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $B=\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in I$成立。
(vi) 在布尔代数 $2^S/K$ 中，理想 I 对应于一个 σ-有向子集，即每个可数子集都有一个上界。

上述定义是对下面定义的改述:

定义 2.11. *[11]* 设 I、K 是非空集合 S上的理想。若对于每个属于 I的两两不相交集序列 $\{A_n\}$，都存在一个属于 I的序列 $\{B_n\}$，使得对每个 n 都有 $A_n\triangle B_n\in K$，且 $\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in I$，则称 I 相对于 K具有可加性，或称条件 AP(I,K) 成立。

3 弱 I^K-柯西

定义 3.1. *[10]* 若对每个 $\epsilon>0$，都存在一个数 N（依赖于 ϵ），使得集合 $\{n\in\mathbb{N}:\ |x_n-x_N|\geq\epsilon\}\in I$, 则称序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 I-柯西。

定义 3.2. *[22]* 若序列 $\{x_n\}$ 属于 X，且对每个 $\epsilon>0$ 和$f\in X^*$，都存在正整数 $N=N(\epsilon,f)$，使得 $\{n\in\mathbb{N}:\ |f(x_n)-f(x_N)|\geq\epsilon\}\in I$，则称其为弱 I-柯西序列。

注 3.1. 容易证明，若 I和 I_1 是 $\mathbb{N}$ 上的任意两个理想，且满足 $I\subseteq I_1$，则对序列 $\{x_n\}w-I-$，$\lim x_n=x$ 蕴含 $\lim w-I_1-x_n=x$。

引理 3.1.（参见 *[11]*）设 X 是一个赋范空间，且 I 是 $\mathbb{N}$上的一个理想。那么，对任意序列 $\{x_n\}$，以下条件等价:
(i) $\{x_n\}$ 是弱 I-柯西序列。(ii) 对任意 $\epsilon>0$，存在整数 N，使得 $\{n\in\mathbb{N}:\ |f(x_n)-f(x_N)|<\epsilon\}\in F(I)$。(iii) 对每个 $\epsilon(>0)$，都存在集合 $A\in I$，使得 $m,n\notin A$ 蕴含 $|f(x_m)-f(x_n)|<\epsilon$。

引理 3.2. 弱 I-收敛序列 $\{x_n\}$ 是弱 I-柯西序列。

证明。证明很直接，因而略去。 □

本文的主要目标是推广弱 I^*-柯西序列的概念。文献 [20] 中引入的弱 I^*-柯西序列的定义如下。

定义 3.3.（*[20]*）如果存在集合 $M=\{m_1<m_2<...<m_k<...\}\in F(I)$，使得子序列 $\{f(x_{m_k})\}$ 对每个 $f\in X^*$ 都按通常意义是柯西序列，则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为弱 I^*-柯西序列。

定义 3.4. 设 I、K 是集合 $\mathbb{N}$ 上的两个理想。若存在集合 $M\in F(I)$，使得序列 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是弱 $K|_M$-柯西序列，其中 $K|_M=\{A\cap M:\ A\in K\}$，则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为弱 I^K-柯西序列。

引理 3.3. 每个弱 I^K-收敛序列都是弱 I^K-柯西序列。- 证明直接由定义得出，故略去。

命题 3.1. 设 X 是一个赋范空间。设 I、I_1、K、K_1 是集合 $\mathbb{N}$ 上的理想，使得 $I \subseteq I_1$ 且 $K \subseteq K_1$。(i) 若 $\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西序列，则它也是弱 I_1^K-柯西序列。(ii) 若 $\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西序列，则它也是弱 I^{K_1}-柯西序列。

证明。若 $\{x_n\}$是弱 I^K-柯西，则存在一个子集 $M \in F(I)$，使得 $\{x_n\}_{n\in M}$是弱 $K|_M$-柯西。

(i) 现在，由于 $I \subseteq I_1$，因此 $F(I) \subseteq F(I_1)$。于是我们有 $M \in F(I_1)$，因此 $\{x_n\}$ 也是弱 I_1^K-柯西。
(ii) 由于 $K \subseteq K_1$，因此 $K|_M \subseteq K_1|_M$。所以由引理 3.1 可知，若 $\{x_n\}_{n\in M}$是弱 $K|_M$-柯西，则它也是弱 $K_1|_M$-柯西。因此 $\{x_n\}$是弱 I^{K_1}-柯西。 □

引理 3.4。若 I和 K 是 $\mathbb{N}$ 上的理想，且序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是弱 K-柯西，则它也是弱I^K-柯西。

证明。若取 $M = \mathbb{N}$，则 $M \in F(I)$，在这种情况下 $K|_M = K$，因此 $\{x_n\}_{n\in M}$是弱 $K|_M$-柯西。这表明 $\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西。 □

Pr命题 3.2. 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ 是弱 I^I-柯西，当且仅当它是弱 I-柯西。 .

证明。由于 $\{x_n\}$是弱 I^I-柯西，因此存在一个 $M \in F(I)$，使得序列 $\{x_n\}_{n\in M}$是弱$I|_M$-柯西，即对于每个 $\epsilon(>0)$，存在 $F \in F(I)$，使得 m、$n \in F \cap M \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$。由于集合 $F \cap M \in F(I)$，这表明 $\{x_n\}$ 是弱 I-柯西。

逆向部分通过取 $K = I$，由引理 3.4 得出。 □

推论 3.1. 设 I, K 是 $\mathbb{N}$ 上的两个理想。对于 X 中的序列 $\{x_n\}$，若 $K \subset I$，则弱 I^K-柯西性蕴含弱 I-柯西性。

证明. 若序列是 $\{x_n\}$ 弱 I^K-柯西的，则由命题 3.1(ii) 可知，它是弱 I^I-柯西的。因此，由前一个定理可得，$\{x_n\}$ 是弱 I-柯西的。 □

对于 $\mathbb{N}$ 上的任意两个理想 I, K，集合 $I\vee K = \{A\cup B\colon A \in I, B \in K\}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个理想，并且是包含 I 和 K 的最小理想。对偶滤子为 $F(I\vee K) = F(I)\vee F(K) = \{F\cap G\colon F \in F(I)\ G \in F(K)\}$

定理 3.1. 设 I, K 是集合 $\mathbb{N}$ 上的理想。序列 $\{x_n\}$ 在 X 中是弱 I^K-柯西的，当且仅当它是弱 $(I \vee K)^K$-柯西的。

证明. 由于 $I \subset (I \vee K)$，由命题 3.1(i) 可得，$\{x_n\}$ 的弱 I^K-柯西性蕴含其弱 $(I \vee K)^K$-柯西性。

反过来，假设 $\{x_n\}$ 是弱 $(I \vee K)^K$-柯西的，则存在集合 $M \in F(I \vee K)$，使得 $\{x_n\}|_{n\in M}$ 是弱 $K|_M$-柯西的；也就是说，对每个 $\epsilon(>0)$ 以及每个 $f \in X^*$，都存在 $F \in F(K)$，使得 $m, n \in F \cap M \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$。显然，对于某个 $M' \in F(I)$ 和 $G \in F(K)$，$M = M' \cap G$。若令 $F' = F \cap G$，则 $F' \in F(K)$ 且 $F' \cap M' = F \cap G \cap M' = F \cap M$，从而有 $n, m \in F' \cap M' \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$。因此，$\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西的。 □

定理 3.2. 设 X是一个赋范空间，I、K 是 $\mathbb{N}$ 上的理想，则 X中的弱 I-柯西序列 $\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西序列，当且仅当 AP(I, K) 条件成立。

首先，假设 AP(I, K) 条件成立。由于 $\{x_n\}$ 是弱 I-柯西序列，因此对每个 $r \in \mathbb{N}$，我们都可以找到一个集合 $G_r \in I$，使得 $s, t \notin G_r$ 推出 $|f(x_s) - f(x_t)| < \frac{1}{r}$。令 $A_1 = G_1$, $A_2 = G_2 \setminus G_1$,$A_3 = G_3 \setminus (G_1 \cup G_2)$.....等等。于是 $\{A_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$ 是 I 中由两两不相交集合构成的可数族。由于 AP(I, K) 条件成立，存在一个集合族 $\{B_i\colon i \in \mathbb{N}\} \in I$，使得 $B = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in I$，并且对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $A_j \triangle B_j \in K$，即对某个 $C_j \in F(K)$，有 $A_j \triangle B_j = \mathbb{N} \setminus C_j$。令 $M = \mathbb{N} \setminus B$ 和 $\epsilon > 0$ 已给定。选取 $r \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{r} < \epsilon$。现在，$G_r \cap M = G_r \setminus B \subseteq \cup_{i=1}^r (A_i \setminus B_i) \subseteq \cup_{i=1}^r (\mathbb{N} \setminus C_i) = \mathbb{N} \setminus C$，其中 $C = \cap_{i=1}^r C_i \in F(K)$。于是 $G_r^c \cap M \cap C \supseteq M \cap C$（否则就存在一个 $s \in M \cap C$，但 $s \notin G_r^c$，也就是 $B \in G_r$，因而 $s \in G_r \cap M \cap C \subseteq \mathbb{N} \setminus C$，这与矛盾。）这表明，$s, t \in C \cap M$ 推出 $s, t \in G_r^c$，进而推出 $|f(x_s) - f(x_t)| < \frac{1}{r} < \epsilon$。但是 $C \cap M \in F(K|_M)$，即 $\{f(x_n)\}_{n\in M}$ 是 $K|_M$-柯西的，也就是说，$\{x_n\}_{n\in M}$ 是弱 $K|_M$-柯西的。因此，序列 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是弱 I^K-柯西的。

定理 3.3. 设 X 是一个赋范空间， I, K 是 $\mathbb{N}$ 上的理想。假设每个弱 I-柯西序列都是弱 I^K-柯西的。那么，AP(I, K) 条件成立。

证明。设 $x_0 \in X$ 是一个点，使得 x_0 不是孤立点；设 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中一列互不相同的点，且 $\{y_n\}$ 收敛于 x_0。设 $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是来自 I 的一列两两不交的非空集合。我们定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_n = \begin{cases} y_j & \text{if } n \in A_j \\ x_0 & \text{if } n \notin A_j \text{ for any } j \end{cases}$$

任取 $f \in X^*$，并给定 $\epsilon(>0)$。选取 $k \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n \geq k$， $|f(y_n) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$。现在，集合 $D = \{n \in \mathbb{N} : |f(y_n) - f(x_0)| \geq \epsilon\}$ 具有如下性质： $D \subseteq A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$，因此 $D \in I$，并且满足： $s,t \notin D$ 蕴含 $|f(x_s) - f(x_t)| \leq |f(x_s) - f(x_0)| + |f(x_t) - f(x_0)| < \epsilon$。这表明$f(x_n)$ 是 I-柯西的，即 $\{x_n\}$ 是弱 I-柯西的。于是，根据我们的假设， $\{x_n\}$ 是弱 I^K-柯西的。因此，存在集合 $M \in F(I)$，使得 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是弱 $K|_M$-柯西的。设 $B_j = A_j \setminus M$。那么，对每个j， $B_j \in I$，并且 $\cup_j B_j \subseteq \mathbb{N} \setminus M \in I$；显然，对每个 j， $A_j \triangle B_j = A_j \setminus B_j = A_j \cap M$。可能出现两种情况。

情形 1：如果对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $A_j \cap M \in K$，则 AP(I, K) 成立。如果 $A_j \cap M \notin K$ 对至多一个 j 成立，设该项为 j_0，那么重新定义 $B_{j_0} = A_{J_0}, B_j = A_j \setminus M$ （当 $j \neq j_0$ 时），我们再次发现条件 AP(I, K) 成立。
情形 2：最后，若有可能，假设至少存在两个 $j's$ 使得 $A_j \cap M \notin K$。令 l_1 和 l_2 为这样的两个指标。我们将证明这是不可能的。我们有 $C_1 = A_{l_1} \cap M \notin K$ 和 $C_2 = A_{l_2} \cap M \notin K$，其中 $l_1 \neq l_2$。现在，任意一个 $E \in F(K|_M)$ 都具有 $E = C \cap M$ 的形式，其中 $C \in F(K)$。现在 $C \cap C_1 \neq \phi$ （否则我们将有 $C_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus C \in K$，但事实并非如此。用类似的推理可得 $C \cap C_2 \neq \phi$。）于是存在一个 $s \in E$，使得 $s \in A_{l_1}$，即 $x_s = y_{l_1}$；并且存在一个 $t \in E$，使得 $t \in A_{l_2}$，即 $x_t = y_{l_2}$。现在选取 $0 < \epsilon_0 < |f(y_{l_1}) - f y_{l_2}|$ ()，我们发现，对每个 $E \in F(K|_M)$，~~都存在点 s，$t \in E$~~，使得 $|f(x_s) - f(x_t)| > \epsilon_0$。换句话说，[3] 对于这个 ϵ_0，不存在任何 $D \in K|_M$，使得 $s,t \notin D$ 蕴含 $|f(x_s) - f(x_t)| < \epsilon_0$。但这与 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是弱 I^K-柯西矛盾。因此，情形 2 不可能发生。

□

4 弱* I-柯西

定义 4.1. 若赋范空间 X^* 中的序列 $\{f_n\}$ 满足：对每个 $\epsilon(>0)$ 和 $x \in X$，都存在正整数 N，使得 $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_N(x)| \geq \epsilon\} \in I$，则称其为弱* I-柯西序列。

定义 4.2. 若赋范空间 X^* 中的序列 $\{f_n\}$ 满足：存在集合 $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < ... < m_k < ...\} \in F(I)$，使得对于每个$x \in X$， $\{f_{m_k}(x)\}$ 按通常意义是柯西序列，则称其为弱* I^*-柯西序列。

定理 4.1. 设 X 为赋范空间，其对偶空间为 X^*，且 $\{f_n\}$ 是 X^* 中的序列。若 $\{f_n\}$ 是弱*I^*-柯西的，则它是弱* I-柯西的。

证明。设 $\{f_n\}$ 是 X^* 中的弱* I^*-柯西序列。根据定义，存在集合 $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < ... < m_k < ...\} \in F(I)$，使得对每个 $x \in X$，$\{f_{m_k}(x)\}$ 都是通常意义下的柯西序列；也就是说，对每个 $\epsilon(>0)$，都存在一个正整数 k_0，使得对所有 k、$p > k_0$，$|f_{m_k}(x) - f_{m_p}(x)| < \epsilon$。令 $N = N(\epsilon, x) = m_{k_0+1}$，则当 $k > k_0$ 时，我们有 $|f_{m_k}(x) - f_N(x)| < \epsilon$。现在$M_0 = \mathbb{N} \setminus M \in I$，并且 $A(\epsilon, x) = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_N(x)| \geq \epsilon\} \subset M_0 \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\} \in I$。因此结论得证。

□

定理 4.2。设 X 是一个对偶空间为 X^* 的赋范空间。若 X^* 中的序列 $\{f_k\}$ 是弱 I-柯西的，则它是弱* I-柯西的。

证明。设 $\{f_k\}$ 是 X^* 中一个弱 I-柯西序列。那么对每个 $\epsilon(>0)$ 和 $g \in X^{**}$，都存在一个正整数 N，使得 $\{n \in \mathbb{N} : |g(f_n) - g(f_N)| \geq \epsilon\} \in I \to (1)$。令 $x \in X$，并令 $g_x = C(x)$，其中$C: X \to X^{**}$ 是典范映射。因此我们有， $g_x(f_n) = f_n(x)$ 且 $g_x(f_N) = f_N(x)$，于是由 (1) 得， $\{n \in \mathbb{N} : |g_x(f_n) - g_x(f_N)| \geq \epsilon\} \in I$。因此 $\{f_k\}$ 是弱* I-柯西序列。

□

定理 4.3。设 X 是一个自反巴拿赫空间。如果 $\{f_k\}$ 是 X^* 中的一个弱* I-柯西序列，那么它是弱I-柯西序列。

证明。设 X 是一个自反空间。由于 $\{f_k\}$ 是弱* I-柯西的，因此对于每个 $x \in X$ 和 $\epsilon\ (>0)$，存在正整数 N，使得集合 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ |f_n\ (x)\ - f_N\ (x)\ | \geq \epsilon\} \in I$。令 $g \in X^{**}$。由于 X 是自反的，对于某个 $x \in X$ 有 $g = C\ (x)$，其中 $C\colon\ X \to X^{**}$ 是典范映射。由于 $g\ (f_n)\ = f_n\ (x)$ 且 $g\ (f_N)\ = f_N\ (x)$，我们有 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ |g\ (f_n)\ - g\ (f_N)\ | \geq \epsilon\} \in I$ 对每个 $\epsilon > 0$ 都成立。由于该结果对每个 $g \in X^{**}$ 都成立，$\{f_k\}$ 是弱 I-柯西的。 □

定义 4.3。设 I、K 是集合 $\mathbb{N}$ 上的两个理想。若存在集合 $M \in F\ (I)$，使得序列 $\{f_n\}|_M$ 是弱* $K|_M$-柯西的，其中 $K|_M = \{A \cap M\colon\ A \in K\}$，则称 $\{f_n\}$ 中的序列 X^* 是弱* I^K-柯西的。

定理 4.4. 设 X 是一个赋范空间。若 X^* 中的序列 $\{f_k\}$ 是弱 I^K-柯西序列，则它是弱*I^K-柯西序列。

证明可直接由定义和定理 4.2 得出。

注 4.1. 容易看出，利用弱* I^K-收敛的定义和定理 4.3，当 X 是自反巴拿赫空间时，上述定理的逆命题也成立。

5 弱 I^K-发散

定义 5.1. *[11]* 若赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：存在一个元素 $x \in X$，使得对任意正实数 G，则称该序列是 I-发散的。
$A(x, G)\ = \{n \in \mathbb{N}\colon\ |x_n - x| \leq G\} \in I$。

定义 5.2. *[11]* 赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ I-弱发散，当且仅当对每个$f \in X^*$，$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都 I-发散；也就是说，存在一个元素 $x \in X$，使得对于任意正实数G,

$A(f(x)\ G)\ = \{n \in \mathbb{N}\colon\ \ |f(x_n)\ - f(x)| \leq G\} \in I$。

定义 5.3. *[11]* 赋范线性空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 I^*-发散，当且仅当存在集合 $M \in F(I)$，使得 $\{x_n\}_{n\in M}$ 恰当发散；也就是说，存在一个 $x \in X$，使得 $|x_n - x| \to 0$ 当$n \to \infty$时。

定义 5.4. 赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 I^*-弱发散，当且仅当对于每个 $f \in X^*$，都存在集合 $M \in F(I)$，使得 $\{f(x_n)\}_{n\in M}$ 恰当发散。

定义 5.5. 设 K 和 I 是 $\mathbb{N}$ 上的两个理想。赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 I^K-发散的，如果存在集合 $M \in F\ (I)$，使得 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是 $K|_M$-发散的。

定义 5.6. 设 K 和 I 是 $\mathbb{N}$ 上的两个理想。赋范线性空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为弱 I^K-发散的，如果对每个 $f \in X^*$，都存在集合 $M \in F\ (I)$，使得 $\{f\ (x_n)\ \}_{n\in\mathbb{M}}$ 是 $K|_M$-发散的。

引理 5.1. 如果序列 $\{x_n\}$ 是弱 K-发散的，那么它也是弱 I^K-发散的。

证明。若考虑 $M = \mathbb{N} \in F\ (I)$ 和 $K|_M = K$，则证明可直接由定义得出。 y. □

引理 5.2. 若序列 $\{x_n\}$ 是弱 K-发散的，那么它也是弱 I^K-发散的。

6 致谢

第二作者感谢印度科学技术部通过 FIST 项目向伯德旺大学数学系提供经费。

参考文献

[1] V. K. Bhardwaj, I. Bala, 《论弱统计收敛》, International J. Math. Math. Sc. (2007), 文章编号 38530, 共 9 页, doi:10.1155/2007/38530[2] V. K. Bhardwaj, I. Bala, 《空间中的弱理想收敛》, International J. of pure and applied Math. 75(2) (2012), 247-256.[3] M. Balcerzak, K. Dems, A. Komisarski, 《函数序列的统计收敛与理想收敛》, J. Math Anal. Appl. 328(1) (2007), 715-729.[4] A. K. Banerjee, A. Paul, 《I 及 I^*-代数值锥矩阵空间中的柯西条件》, Korean J Math 29(3-4)(2021), 621-629.[5] A. K. Banerjee, A. Paul, 《锥矩阵空间中的 I-散度与 I^*-散度》, 《亚欧数学杂志》13(08) (2020), 2050139.[6]A. K. Banerjee, M. Paul, 《拓扑空间中关于 I^K 及 I^{K^*}-收敛的注记》, arXiv: 1807.11772v1(2018)[7] A. K. Banerjee, M. Paul, 《概率度量空间中的强-I^K-收敛》, Iranian J. of Mathemati- cal Science and Informatics, 17(2) 2022, 273-288.[8] A. K. Banerjee, M. Paul, 《赋范空间中的弱与弱* I^K-收敛》, arXiv:1811.06707v1[9] J. Connor, M. Ganichev, V. Kadets, 《通过弱统计收敛刻画对偶可分的巴拿赫空间》, J. Math. Anal. Appl. 244(1) (2000), 251-261.[10] K. Dems, 《关于 I-柯西序列》, 《实分析交流》30(1) (2004/2005), 123-128.[11] P. Das, M. Sleziak, V. Toma, 《I^K-柯西函数》, 《拓扑及其应用》173 (2014), 9-27.[12] P. Das, S. K. Ghosal, 《关于 I-柯西序列及条件(AP)的若干进一步结果》, 《计算数学及其应用》59(8) (2010), 2597-2600.[13] H. Fast, 《论统计收敛》, Colloq. Math. 2 (1951), 241-244.[14] J. A. Fridy, 《论统计收敛》, Analysis 11 (1991) 59-66.[15] J. A. Fridy, 《统计极限点》, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 1187-1192.[16] B. K. Lahiri, P. Das, 《拓扑空间中的 I 与 I^*-收敛》, Math. Bohem. 2 (2005), 153-160..[17]P. Kostyrko, M. Ma˘caj, T. Sal´at, 《统计收敛与 I-收敛》, 未发表, http://thales.doa.fmph.uniba.sk/macaj/ICON.pdf. [18] P. Kostyrko,T. ˘Sal´at, W. Wilczy´nski, 《I-收敛》, 《实分析交流》26(2) (2000/2001), 669- 686.[19] M. Macaj, M. Sleziak, 《I^K-收敛》, 《实分析交流》36(1) (2010/2011), 177-194. [20] A. Nabiev, S. Pehlivan and M. G¨urdal, 《关于 I-柯西序列》, 《台湾数学杂志》11(2) (2007), 569-576.[21] S. K. Pal, P. Malik, 《弱理想收敛的一个判据及弱理想可求和性的若干进一步结果》, 《南亚数学通报》39) (2015), 685-694.[22] S. Pehlivan, C. Sencimen, Z. H. Yaman, 《赋范空间中的弱理想收敛》, Journal of Inter- disciplinary Mathematics 13(2) (2010), 153-162.[23] D. Rath, B. C. Tripathy, 《关于统计收敛序列与统计柯西序列》, Indian J. Pure Appl. Math. 25(4) (1994), 381-386.[24] T. Sal´at, 《关于实数序列的统计收敛》, 《斯洛伐克数学》30(2) (1980), 139- 150.[25] H. Steinhaus, 《论通常收敛与渐近收敛》, Colloq. Math. 2 (1951) 73-74。