arXiv:2301.06848v2 [math.RA] 3 Apr 2023

# 克利福德几何代数中的非交换韦达定理

Dmitry Shirokov[1], 2[0000−0002−2407−9601]

[1] HSE大学，俄罗斯莫斯科 101000 dshirokov@hse.ru[2] 俄罗斯科学院信息传输问题研究所，俄罗斯莫斯科 127051 shirokov@iitp.ru

**摘要。** 本文讨论韦达定理（韦达公式）在克利福德几何代数中的推广。我们将广义韦达公式与含有特征值的特征多项式的普通韦达公式进行比较。我们讨论 Gelfand–Retakh 非交换韦达定理，并将其应用于低维几何代数。我们引入几何代数中行列式的简单无基公式这一概念，并证明任意维数的情形下都存在此类公式。基于这一概念，我们给出并证明了任意维数几何代数中的广义韦达定理。研究结果可用于符号计算，以及几何代数在计算机科学、计算机图形学、计算机视觉、物理学和工程学中的各种应用。

**关键词：** 几何代数 · 克利福德代数 · 韦达定理 · 非交换韦达定理 · 韦达公式 · 特征多项式。

## 1 引言

在代数中，韦达公式（或称韦达定理）将任意多项式的系数与其根的和与积联系起来。这些公式以著名的法国数学家弗朗索瓦·韦达（或 Franciscus Vieta）的名字命名。本文将韦达公式推广到（克利福德）几何代数中。我们讨论几何代数中的非交换韦达定理，并将其与通常的韦达定理进行比较。

本文使用了几何代数中特征多项式的概念。请注意，行列式用于计算几何代数中的逆元 [19,14,3,18]。在 [18,1,2], 中，给出了特征多项式系数的显式公式 $C_{(k)}$，适用于 $n \leq 6$中的情形。 [12] 也讨论了几何代数中的特征多项式，并在 [17,16]中用于求解西尔维斯特方程和李雅普诺夫方程。它还用于计算多向量的指数函数及其他初等函数 [4]。我们期待特征多项式及相关概念能在符号

计算、计算机科学、计算机图形学、计算机视觉、物理学和工程学中得到进一步应用，并采用几何代数形式体系。

本文讨论了计算特征多项式系数问题的三种不同方法：1）基于 Gelfand–Retakh 定理的广义韦达公式（对于 $n \leq 3$），其中特征方程的解由多向量（非标量）给出；2）基于 Faddeev–LeVerrier算法的递推公式（对于任意 $n$）；3）由行列式的优化形式推出的显式最优公式（已证明适用于任意 $n$，但目前仅对 $n \leq 6$ 有明确表达）。第一种方法将在第 2–4 节中讨论。第二种方法将在第 5 节开头讨论（并在前一篇论文 [18] 中详述），并用于在第 5–7 节中推导第三种方法。需要注意的是，韦达原定理讨论的是一元多项式方程的根。Gelfand–Retakh 定理将韦达定理推广到了非交换情形（例如复矩阵或克利福德代数元素）。本文将 Gelfand–Retakh 定理应用于克利福德几何代数中特征方程的一个特定情形：其系数是标量，但变量不是标量。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍几何代数中的广义韦达公式，并将其与含有特征值的特征多项式所对应的普通韦达公式进行比较。广义韦达公式不包含特征值。第 3 节讨论 Gelfand–Retakh 关于任意斜域的非交换韦达定理，并给出一些注释。第 4 节将非交换韦达定理应用于几何代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$，其中维数较小 $n = p + q$。第 5 节介绍几何代数中行列式的简单的无基公式这一概念，并证明在任意$n$的情况下，这类公式确实存在。第 6 节给出并证明几何代数 $\mathcal{G}_{p\text{中的}q}$ 广义韦达定理，其中 $n = p + q$ 为任意值。第 7 节讨论使用横线运算为行列式及其他特征多项式系数寻找优化公式的三种替代方法。结论见第 8 节。

本文是会议论文集[20] （“赋能图形与工程学的新型几何代数”研讨会，2022年国际计算机图形学会议）中短文的扩展版本。第5、6和7节为新增内容，定理3、4、5和6首次在本文中提出。

## 2 几何代数中的广义韦达公式

考虑实数（克利福德）几何代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$, $n = p+q \geq 1$ [13,6,15]，其生成元为 $e_a$, $a = 1, 2, \ldots, n$，单位元为 $e \equiv 1$。这些生成元满足

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab} e, \qquad a, b = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $\eta = (\eta_{ab})$ 是一个对角矩阵，其前 $p$ 个元素的对角线值为 1，最后 $q$ 个元素的对角线值为 $-1$。分次反演和逆序变换

任意元素（多向量）$U \in \mathcal{G}_{p,\ q}$ 的分次反演和逆序变换记作

$$\widehat{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \langle U \rangle_k, \qquad \widetilde{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle U \rangle_k,$$

其中，$\langle U \rangle_k$ 是 $U$ 在等级为 $k = 0$、1、.....、$n$的子空间$\mathcal{G}^k_{p,\ q}$上的投影。我们有

$$\widehat{UV} = \widehat{U}\widehat{V}, \qquad \widetilde{UV} = \widetilde{V}\widetilde{U}, \qquad \forall U, V \in \mathcal{G}_{p,q}. \tag{1}$$

考虑复化几何代数$\mathbb{C} \otimes \mathcal{G}_{p,\ q}$, $n = p + q$的如下忠实表示（同构）

$$\beta : \mathbb{C} \otimes \mathcal{G}_{p,q} \to M_{p,q} := \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{C}) & \text{if } n \text{ is even,} \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}) & \text{if } n \text{ 是奇数。} \end{cases} \tag{2}$$

实几何代数$\mathcal{G}_{p,\ q}$ 同构于$M_{p,\ q}$的某个子代数，因为$\mathcal{G}_{p,\ q} \subset \mathbb{C} \otimes \mathcal{G}_{p,\ q}$，而且我们可以考虑非最小维数的表示

$$\beta : \mathcal{G}_{p,q} \to \beta(\mathcal{G}_{p,q}) \subset M_{p,q}.$$

我们可以引入行列式的概念（见 [18]）

$$\mathrm{Det}(U) := \det(\beta(U)) \in \mathbb{R}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}$$

以及特征多项式的概念

$$\begin{aligned} &\varphi_U(\lambda) := \mathrm{Det}(\lambda e - U) = \lambda^N - C_{(1)}\lambda^{N-1} - \cdots - C_{(N-1)}\lambda - C_{(N)} \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}, \\ &U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}, \qquad C_{(k)} = C_{(k)}(U) \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\mathcal{G}^0_{p,\ q}$ 是由等级为 0 的元素构成的子空间，我们将其视为标量。

将特征方程 $\varphi_U(\lambda) = 0$ 的解（即特征值）记为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$。根据矩阵理论中的韦达公式，我们知道

$$C_{(k)} = (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

特别是,

$$C_{(1)} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N = \mathrm{Tr}(U), \qquad \ldots, \qquad C_{(N)} = -\lambda_1 \cdots \lambda_N = -\mathrm{Det}(U),$$

其中 $\mathrm{Tr}(U) := \mathrm{tr}(\beta(U)) = N\langle U \rangle_0$是 $U$ 的迹。元素 $C_{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$ 是变量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 的初等对称多项式。

### 2.1 $n = 1$ 的情形

我们来考虑特殊情形 $n = 1$。在这种情形下，几何代数$\mathcal{G}_{p,q}$ 是交换的，并且 $N = 2$。我们有

$$C_{(1)} = \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}, \qquad C_{(2)} = -\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

但我们还有（见 [18]）

$$C_{(1)} = U + \widehat{U} \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}, \qquad C_{(2)} = -U\widehat{U} \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}. \tag{5}$$

元素 $y_1 := U$ 和 $y_2 := U$ 不是标量（也不等于特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$），但它们是特征方程$\varphi_U(x) = 0$, $x = y_1, y_2$ 的解，这由凯莱–哈密顿定理可知（详见第 4 节）。利用

$$\lambda^2 - (U + \widehat{U})\lambda + U\widehat{U} = 0,$$

我们得到特征值的显式公式

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}(U + \widehat{U} \pm \sqrt{(U + \widehat{U})^2 - 4U\widehat{U}}) = \frac{1}{2}(U + \widehat{U} \pm \sqrt{(U - \widehat{U})^2}) \\ &= \langle U\rangle_0 \pm \sqrt{(\langle U\rangle_1)^2},\end{aligned} \tag{6}$$

它们与 $y_1$ 的显式公式并不一致，2

$$y_{1,2} = \langle U\rangle_0 \pm \langle U\rangle_1, \tag{7}$$

因为标量 $\sqrt{(\langle U\rangle_1)^2}$ 与向量（等级为 1 的元素）$\langle U\rangle_1$并不相同。我们看到，特征方程的根 $\lambda_{1,2}$ （它们是复标量）所起的作用，是由元素的一些对合组合 $y_{1,2}$ 来承担的（这些元素不是标量）。对于退化特征值的情形，我们有 $\langle U\rangle_1 = 0$，且有 $\lambda_{1,2} = y_{1,2} = U = \langle U\rangle_0$相同。

### 2.2 n = 2 的情形

我们来考虑特殊情形 $n = 2$。我们有 $N = 2$，并且

$$C_{(1)} = \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}, \qquad C_{(2)} = -\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

但我们还有（见 [18]）

$$C_{(1)} = U + \widehat{\widehat{U}} \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}, \qquad C_{(2)} = -U\widehat{\widehat{U}} \in \mathcal{G}^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}. \tag{9}$$

请注意，在 $n = 2$ 情况下，$UU = UU$。元素 $y_1 := U$ 和 $y_2 := U$ 不是标量（也不等于特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$），但根据凯莱–哈密顿定理，它们是特征方程 $\varphi_U(x) = 0$, $x = y_1, y_2$ 的解（详情见第 4 节）。使用

$$\lambda^2 - (U + \widehat{\widehat{U}})\lambda + U\widehat{\widehat{U}} = 0,$$

我们得到特征值的显式公式

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}(U+\widehat{\widetilde{U}} \pm \sqrt{(U+\widehat{\widetilde{U}})^2 - 4U\widehat{\widetilde{U}}}) = \frac{1}{2}(U+\widehat{\widetilde{U}} \pm \sqrt{(U-\widehat{\widetilde{U}})^2}) \\ &= \langle U\rangle_0 \pm \sqrt{(\langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2)^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

这与以下显式公式不一致：$y_{1,2}$

$$y_{1,2} = \langle U\rangle_0 \pm (\langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2), \tag{11}$$

其中，标量 $\sqrt{(\langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2)^2} = \sqrt{(\langle U\rangle_1)^2 + (\langle U\rangle_2)^2}$ 不等于表达式 $\langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2$。特征方程的根 $\lambda_{1,2}$（它们是复标量）所起的作用，由元素（它们不是标量）的某些对合组合 $y_{1,2}$ 来承担。

在特征值退化的情况下，若有两个若尔当块，则有 $\langle U\rangle_1 = \langle U\rangle_2 = 0$，且 $\lambda_{1,2} = y_{1,2} = U = \langle U\rangle_0$ 相等；若有一个若尔当块，则有 $(\langle U\rangle_1)^2 = -(\langle U\rangle_2)^2 \neq 0$，且 $\lambda_{1,2} = \langle U\rangle_0 \neq y_{1,2} = \langle U\rangle_0 \pm (\langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2)$。例如，对于 $U = 5e + \frac{1}{2}(e_2 + e_{12})$，在 $n = p = 2, q = 0$ 的情况下，有 $\lambda_{1,2} = 5$，且 $y_{1,2} = 5e \pm \frac{1}{2}(e_2 + e_{12})$。

### 2.3 $n = 3$ 的情形

考虑 $n = 3$ 的情形。我们有 $N = 4$ 以及公式（见 [18]）

$$\begin{aligned} C_{(1)} &= U + \widehat{U} + \widetilde{U} + \widehat{\widetilde{U}}, \\ C_{(2)} &= -(U\widetilde{U} + U\widehat{U} + U\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widetilde{U}), \\ C_{(3)} &= U\widehat{U}\widetilde{U} + U\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}, \\ C_{(4)} &= -U\widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}. \end{aligned} \tag{12}$$

这些公式看起来像是关于特征值的普通韦达公式：

$$\begin{aligned} C_{(1)} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ C_{(2)} &= -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4), \\ C_{(3)} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4, \\ C_{(4)} &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4. \end{aligned} \tag{13}$$

这些元素

$$y_1 := U = \langle U\rangle_0 + \langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2 + \langle U\rangle_3, \quad y_2 := \widetilde{U} = \langle U\rangle_0 + \langle U\rangle_1 - \langle U\rangle_2 - \langle U\rangle_3,$$
$$y_3 := \widehat{U} = \langle U\rangle_0 - \langle U\rangle_1 + \langle U\rangle_2 - \langle U\rangle_3, \quad y_4 := \widehat{\widetilde{U}} = \langle U\rangle_0 - \langle U\rangle_1 - \langle U\rangle_2 + \langle U\rangle_3,$$

不是标量（也不等于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$），而是特征方程 $\varphi_U(x) = 0, x = y_1, y_2, y_3, y_4$ 的解，这由凯莱–哈密顿定理得出（详见第 4 节）。

我们将公式 (5)、(9)、(12) 及其在 $n \geq 4$ 情形下的类似公式称为几何代数中的广义韦达公式。公式 (5)、(9)、(12) 在 [18] 中得到了证明，证明过程使用了由 Faddeev–LeVerrier 算法导出的特征多项式系数递推公式。本文将运用非交换对称函数的技巧，给出这些公式的另一种证明（见第 3 节和第 4 节）。

## 3 关于 Gelfand–Retakh 非交换韦达定理

下面讨论 Gelfand–Retakh 定理（称为非交换韦达定理 [11], 另见 [7,5]）。在第4节中，我们将其用于几何代数中的特征多项式。

**定理1（[11]）**。若 $\{x_1, \ldots, x_N\}$ 是方程的解的有序一般集（即对所有 $k = 1, \ldots, N$，范德蒙拟行列式 $v_k$ 均有定义且可逆）

$$P_N(x) := x^N - a_1 x^{N-1} - \cdots - a_N = 0 \tag{14}$$

在斜域上，则对于 $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$a_k = (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N} y_{i_k} \cdots y_{i_1},$$

其中

$$y_k = v_k x_k v_k^{-1}.$$

在 [11], 中给出了范德蒙拟行列式 $v_k$ 的定义（另见[9,10]）。本文采用 [8]中的另一种定义来定义元素 $v_k$：

$$v_k = P_{k-1}(x_k) = x_k^{k-1} - (y_{k-1} + \cdots + y_1) x_k^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} y_{k-1} \cdots y_1. \tag{15}$$

特别地，我们有

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = x_2 - y_1, \qquad v_3 = x_3^2 - (y_2 + y_1) x_3 + y_2 y_1. \tag{16}$$

下面给出一些例子。

在 $N = 1$的情形下，将 $x = x_1$ 代入（14），可得 $y_1 = x_1 = a_1$和 $v_1 = 1$。

在 $N = 2$的情形下，方程（14）在 $a_1 = y_2 + y_1$ 和 $a_2 = -y_2 y_1$ 的条件下可改写为

$$(x - y_1)x - y_2(x - y_1) = 0. \tag{17}$$

将 $x = x_1$ 代入 (17)，得到 $(x_1 - y_1)x_1 - y_2(x_1 - y_1) = 0$，并且可以取 $y_1 = x_1$。
将 $x = x_2$ 代入 (17)，得到

$$(x_2 - y_1)x_2 - y_2(x_2 - y_1) = 0 \tag{18}$$

在 $v_2$ 可逆的情况下，可以取 $y_2 = v_2 x_2 v_2^{-1}$: $= x_2 - y_1 = x_2 - x_1$。若 $[x_2, v_2] = 0$，则由 (18) 得 $y_2 = x_2$。

在 $N = 3$ 的情况下，方程 (14) 连同 $a_1 = y_3 + y_2 + y_1$、$a_2 = -(y_3 y_2 + y_3 y_1 + y_2 y_1)$ 和 $a_3 = y_3 y_2 y_1$ 可以改写为以下形式

$$(x^2 - (y_2 + y_1)x + y_2 y_1)x - y_3(x^2 - (y_2 + y_1)x + y_2 y_1) = 0. \tag{19}$$

将 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 代入 (19)，我们得出结论：在 $v_2 = x_2 - y_1 = x_2 - x_1$ 可逆的情况下，我们仍可取 $y_1 = x_1$ 和 $y_2 = v_2 x_2 v_2^{-1}$。如果 $[x_2, v_2] = 0$ $y_2 = x_2$ $x = x_3$ 19 $x_3^2 - y_2 +$，那么。$y_1 x_3 + y_2 y_1 x_3 - y_3 x_3^2 - y_2 + y_1 x_3 + y_2 y_1 = 0$ $y_3 = v_3 x_3 v_3^{-1}$ 代入 ( ) 后，我们得到 ( ( ) ) ( ( ) )；在 $v_3$ 可逆的情况下，我们可以取: $= x_3^2 - (y_2 + y_1) x_3 + y_2 y_1$。在 $[x_3, v_3] = 0$ 的情况下，我们得到 $y_3 = x_3$。依此类推。

注记*1.* 条件 $[v_k, x_k] = 0$ 等价于

$$[E_j, x_k] = 0, \qquad j = 1, \dots, k-1,$$

其中 $E_j$, $j = 1, \dots, k-1$ 是变量 $y_{k-1}, \dots, y_1$ 的非交换初等对称多项式:

$$E_1 = y_{k-1} + \cdots + y_1, \qquad E_{k-1} = y_{k-1} \cdots y_2 y_1.$$

例如，在特例 $N = 4$ 中，当所有 $[v_k, x_k] = 0$, $k = 1, \dots, N$ 时，我们可以取 $y_k = x_k$, $k = 1,2,3,4$，在这种情况下

$$[x_2, x_1] = 0, \quad [x_3, x_2 x_1] = 0, \quad [x_3, x_2 + x_1] = 0, \quad [x_4, x_3 x_2 x_1] = 0,$$
$$[x_4, x_3 x_2 + x_3 x_1 + x_2 x_1] = 0, \quad [x_4, x_3 + x_2 + x_1] = 0.$$

我们将在下文的 $\mathcal{G}_{p,\,q}$ 中使用这个特例，其中 $n = p + q = 3$。

## 4 非交换维达定理在几何代数中的应用

我们将定理1应用于几何代数 $\mathcal{G}_{p,\,q}$ 中特征多项式 $\varphi_U(\lambda)$ 的特例。式(14)中的元素 $a_k = C_{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, N$ 现在是标量。我们需要特征方程 $\varphi_U(x) = 0$ 的 $N$ 个解 $x_1, x_2, \dots x_N$。根据凯莱–哈密顿定理，我们可以取 $x_1 = U$:

$$\varphi_U(U) = 0. \tag{20}$$

我们有如下命题。

**定理 2.** 考虑任意元素 $\varphi_U(\lambda)$ *(3)* 的特征多项式 $U \in \mathcal{G}_{p,q}$。我们有

$$\varphi_U(\lambda) = \varphi_{\widehat{U}}(\lambda) = \varphi_{\widetilde{U}}(\lambda) = \varphi_{\widehat{\widetilde{U}}}(\lambda), \tag{21}$$
$$\varphi_U(\widetilde{U}) = \varphi_U(\widehat{U}) = \varphi_U(\widehat{\widetilde{U}}) = 0. \tag{22}$$

证明。我们知道（见 [18] 中的引理10）

$$\mathrm{Det}(U) = \mathrm{Det}(\widehat{U}) = \mathrm{Det}(\widetilde{U}) = \mathrm{Det}(\widehat{\widetilde{U}}).$$

根据特征多项式的定义 (3)，我们得到

$$\varphi_{\widehat{U}}(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda e - \widehat{U}) = \mathrm{Det}(\widehat{\lambda e - U}) = \mathrm{Det}(\lambda e - U) = \varphi_U(\lambda).$$

根据凯莱–哈密顿定理 $\varphi_U(U) = 0$，我们得到 $\varphi_{\widehat{U}}(U) = 0$。将 $\widehat{\ }$ $U$ 代入 $U$，我们得到 $\varphi_U(U) = 0$。其余公式可用类似方法得到。□

### 4.1 $n = 1$ 的情形

在这种情况下，几何代数是交换的。根据凯莱–哈密顿定理，我们可以在定理1中取 $y_1 = x_1 = U$。元素 $x_2 = U$ 满足特征方程（见定理 2）。我们有 $v_2 = x_2 - x_1 = U - U = -2\langle U\rangle_1$。如果 $\langle U\rangle_1 \neq 0$，那么 $y_2 = x_2 = U$，于是得到公式 (5)。

### 4.2 $n = 2$ 的情形

根据凯莱–哈密顿定理，我们可以在定理1中取 $y_1 = x_1 = U$。元素 $x_2 = U$ 满足特征方程（见定理 2）。我们有 $v_2 = x_2 - x_1 = U - U = -2\langle U\rangle_2$。若 $\langle U\rangle_2 = 0$，则可以使用情形 $n = 1$中的公式。若 $\langle U\rangle_2 \neq 0$，则 $v_2 = \lambda e_{12}$，$\lambda \neq 0$ 可逆，且 $y_2 = v_2 \widetilde{U} v_2^{-1} = \widehat{U}$，因为赝标量 $e_{12}$ 与所有偶元素对易，与所有奇元素反对易。于是得到公式（9）。

### 4.3 情形 $n = 3$

根据凯莱–哈密顿定理，我们可以在定理1中取 $y_1 = x_1 = U$。

考虑 $x_2 = \widetilde{U}$。我们有 $v_2 = x_2 - x_1 = \widetilde{U} - U$ 并且 $[v_2, x_2] = 0$ 因为在情形 $n = 3$下 $[U, U] = 0$。因此我们可以取 $y_2 = x_2$。

考虑一下 $x_3 = \widehat{U}$。我们有

$$[x_3, v_3] = [x_3, x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_2 x_1] = 0,$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ 因为元素 $x_1 + x_2 = U + U$ 和 $x_2 x_1 = UU$ 属于中心 $\mathrm{Cen}(\mathcal{G}_{p,\,q}) = \mathcal{G}^0_{p,\,q} \oplus \mathcal{G}^3_{p,\,q}$，并且可以取 $y_3 = x_3$。

考虑 $x_4 = \widetilde{U}$。我们有

$$[x_4, v_4] = [x_4, x_4^3 - (x_3 + x_2 + x_1)x_4^2 + (x_3x_2 + x_3x_1 + x_2x_1)x_4 - (x_3x_2x_1)] = 0,$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ 因为元素 $x_1 + x_2 = U + U$ 和 $x_2 x_1 = UU$ 属于中心 $\mathrm{Cen}(\mathcal{G}_{p,q})$，且 $x_3 x_4 = x_4 x_3$，即 $UU = UU$ 在情形 $n = 3$下。我们取 $y_4 = x_4$。

我们得到 $y_k = x_k$, $k = 1,2,3,4$ 以及以下公式，它们是公式 (12) 的另一种形式：

$$\begin{aligned}
C_{(1)} &= \widetilde{U} + \widehat{U} + \widehat{\widetilde{U}} + U,\\
C_{(2)} &= -(\widetilde{U}\widehat{U} + \widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widetilde{U}U + \widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}U + \widehat{\widetilde{U}}U),\\
C_{(3)} &= \widetilde{U}\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\widehat{U}U + \widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}U + \widehat{U}\widehat{\widetilde{U}}U,\\
C_{(4)} &= -\widetilde{U}\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}}U. \qquad (23)
\end{aligned}$$

请注意，我们针对元素 $U$ 得到了这些公式，其表达式$v_2$、 $v_3$和 $v_4$ 可逆（对于其他元素 $U$，也可以考虑其他序列 $x_1$、 $x_2$、 $x_3$、 $x_4$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\widetilde{\ }}$）。还请注意，并非所有来自 $\{U,U,U,U\}$的序列 $y_1$、 $y_2$、 $y_3$、 $y_4$都能给出正确的韦达公式（参见 [18], 中的定理 3 和引理 7；公式 (12) 和 (23) 是若干正确形式中的两种）。

### 4.4 $n \geq 4$的情形

在 $n \geq 4$ 的情形下，广义韦达公式更为复杂。我们使用额外的（三角形）运算（参见 [18]）

$$U^{\triangle} := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}} \langle U \rangle_k = \sum_{k=0,1,2,3 \mod 8} \langle U \rangle_k - \sum_{k=4,5,6,7 \mod 8} \langle U \rangle_k. \quad (24)$$

请注意

$$\mathrm{Det}(U^{\triangle}) \neq \mathrm{Det}(U), \qquad \varphi_{U^{\triangle}}(\lambda) \neq \varphi_U(\lambda), \qquad \varphi_U(U^{\triangle}) \neq 0 \qquad (25)$$

在一般情形下（与定理 2 的表述作比较）。

在 $n = 4$ 的情况下，广义韦达公式的形式如下

$$\begin{aligned}
C_{(1)} &= U + \widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}^{\triangle} + \widetilde{U}^{\triangle},\\
C_{(2)} &= -(U\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U}^{\triangle} + U\widetilde{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + (\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}),\\
C_{(3)} &= U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle} + U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + U(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle},\\
C_{(4)} &= -U\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}, \qquad (26)
\end{aligned}$$

其中，系数 $C_{(k)}$, $k = 1,2,3,4$ 并非初等对称多项式，因为还涉及共轭运算 $\triangle$。如果忽略共轭运算，这些公式看起来就像普通的韦达公式

$$\begin{aligned}
C_{(1)} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,\\
C_{(2)} &= -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4),\\
C_{(3)} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4,
\end{aligned}$$

$$C_{(4)} = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, \tag{27}$$

如果我们忽略运算 $\triangle$。请注意

$$(UV)^{\triangle} \neq U^{\triangle}V^{\triangle}, \qquad (UV)^{\triangle} \neq V^{\triangle}U^{\triangle}$$

在一般情况下（与性质（1）比较）。

情形 $n = 5$,6 的公式（26）的类似形式见于 [1]（参见定理 5.1 和第 8 节）。这些公式只有在忽略运算 $\triangle$时才具有初等对称多项式的形式，并且可以解释为广义非交换韦达公式。这些公式并非直接由 Gelfand–Retakh 非交换韦达定理推出；要猜出特征方程的"正确"（一般）有序解集 $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$，从而得到广义韦达公式中所需的元素 $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$，并非易事。这是有待进一步研究的问题。

我们在第 6 节和第 7 节中运用不同的技术，详细讨论更复杂情形 $n \geq 4$ 下的韦达公式。

## 5 行列式的无基公式

在 [18]，中，我们提出了一种基于 Faddeev–LeVerrier 算法的方法，可以递归地得到所有特征系数 $C_{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$(3) 的无基公式：

$$U_{(1)} := U, \quad U_{(k+1)} = U(U_{(k)} - C_{(k)}), \quad C_{(k)} := \frac{N}{k}\langle U_{(k)}\rangle_0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{28}$$

我们也在 [1,2] 中使用这种方法。通过这种方法，我们从最低阶系数得到高阶系数。行列式等于最后一个系数的相反数

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(N)} = -U_{(N)} = U(C_{(N-1)} - U_{(N-1)}). \tag{29}$$

我们来考虑运算 $\triangle_1, \ldots \triangle_m$，其中 $m = [\log_2(n)] + 1$（见 [18]）：

$$U^{\triangle_j} := \sum_{k=0}^{n}(-1)^{C_k^{2^{j-1}}}\langle U\rangle_k, \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}. \tag{30}$$

在特殊情况下，我们有 $U^{\triangle_1} = \widehat{U}$, $U^{\triangle_2} = \widetilde{U}$, $U^{\triangle_3} = U^{\triangle}$。

**定理 3.** 对于任意 $n \geq 1$，存在一个关于 $\mathrm{Det}(U)$ $=-C_{(N)}$ 的无基公式，其形式如下

$$\mathrm{Det}(U) = U(\sum_{j=1}^{t}\alpha_j H_j(U)) = (\sum_{j=1}^{t}\alpha_j H_j(U))U, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{t}\alpha_j = 1, \tag{31}$$

其中每个表达式 $H_j(U)$ 仅涉及乘法（由 $N-1$ 个乘数构成）以及运算 $\triangle_1$、.....、$\triangle_m$、 $m = [$对数$_2(n)] + 1$。

注意，表达式

$$\mathrm{Adj}(U) := \sum_{j=1}^{t} \alpha_j H_j(U)$$

(31) 中的伴随矩阵是 $U$，它用于计算逆元

$$U^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(U)}{\mathrm{Det}(U)}$$

在 Det($U$) $\neq 0$ 的情况下。

证明。行列式可以使用 Faddeev–LeVerrier 算法 (28) 计算，因此只涉及乘法、求和以及将 $\langle \quad \rangle_0$ 投影到零级子空间的运算。运算 $\langle \quad \rangle_0$ 可以通过 $m$ 次运算 $\triangle_1$、..... $\triangle_m$ 实现（参见 [18] 中的定理1）：

$$\langle U \rangle_0 = \frac{1}{2^m}(U + U^{\triangle_1} + U^{\triangle_2} + \cdots + U^{\triangle_1 \cdots \triangle_m}).$$

由于 Faddeev–LeVerrier 算法的最后一步 (29)，(31) 中的公因子为 $U$。每一项 $H_j(U)$ 由 $N-1$ 个因子构成，这是由于以下性质（见 [18]）：

$$\mathrm{Det}(\lambda U) = \lambda^N \mathrm{Det}(U).$$

我们有 $\sum_{j=1}^{t} \alpha_j = 1$，因为我们有

$$\mathrm{Det}(e) = 1$$

根据定义，单位元 $e$（我们将单位矩阵与单位元对应，见 [18]），且所有运算 (30) 都不改变等级 0 的符号：$H_j(e) = 1, j = 1, \ldots, t$。□

*例1.* 在 $n \leq 4$ 的情况下，我们有类型为 (31) 且 $t = 1$ 的公式 (5)、(9)、(12)、(26)。在 $n = 5$ 的情况下，我们有

$$\mathrm{Det}(U) = U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}(\widehat{U}\widetilde{U}U\widehat{\widetilde{U}})^{\triangle}, \qquad t = 1. \tag{32}$$

在 $n = 6$ 的情况下，我们有

$$\mathrm{Det}(U) = \frac{1}{3}U\widetilde{U}\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}}U\widetilde{U})^{\triangle} + \frac{2}{3}U\widetilde{U}((\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}})^{\triangle}((\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}})^{\triangle}(U\widetilde{U})^{\triangle})^{\triangle})^{\triangle}, \quad t = 2. \tag{33}$$

通过 [3] 中的计算机计算，可以证明在 $n = 6$ 的情况下，不存在满足 $t = 1$ 的类型 (31) 公式（见定理 3）。

如果参数$t$ 取最小值，我们就称公式 (31)（见定理 3）中 Det($U$) 的公式为简单。对于情形 $n \geq 7$，寻找具有最小 $t$ 的 (31) 型 Det($U$) 显式公式（以及确定最小 $t$ 的值）仍是一个开放问题。

## 6 任意 $n$ 的广义 Vieta 定理

本节中，若已知最后一个特征多项式系数 $C_{(N)} = -\text{Det}(U)$ 的无基公式，我们将介绍一种求得所有特征多项式系数的无基公式的方法。采用此方法时，我们从最高次系数求得低次系数（与基于 Faddeev–LeVerrier 算法的 (28) 式方法相反；该方法从低次系数求得高次系数）。我们将定理 4 称为克利福德几何代数中的广义韦达定理。

例*2.* 我们先来看一个例子 $n = 4$。看一下最后一个特征多项式系数 $\text{Det}(U) = -C_{(4)}$ (26) 的公式：

$$\text{Det}(U) = -C_{(4)} = U\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$$

并形式上将表达式 $(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$ 改为 $\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}$（这并不等同）。写出所得表达式的对称多项式：

$$U + \widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}^{\triangle} + \widetilde{U}^{\triangle}, \qquad U\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U}^{\triangle} + U\widetilde{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + \widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle},$$
$$U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle} + U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + U\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}, \qquad U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}, \tag{34}$$

再将这些公式中的 $\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}$ 形式上改回 $(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$。我们得到 $C_{(1)}$、$-C_{(2)}$、$C_{(3)}$ 和 $-C_{(4)}$ 的正确公式 (26)。

这个例子的证明相当简单。我们有

$$\varphi_U(\lambda) = \text{Det}(\lambda e - U) = (\lambda e - U)(\lambda e - U)^{\widehat{\ }}((\lambda e - U)^{\widehat{\ }}(\lambda e - U)^{\widetilde{\ }})^{\triangle} \tag{35}$$
$$= (\lambda e - U)(\lambda e - \widehat{\widetilde{U}})((\lambda e - \widehat{U})(\lambda e - \widetilde{U}))^{\triangle} \tag{36}$$
$$= (\lambda e - U)(\lambda e - \widehat{\widetilde{U}})(\lambda^2 e - \lambda\widehat{U} - \lambda\widetilde{U} + \widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle} \tag{37}$$
$$= (\lambda e - U)(\lambda e - \widehat{\widetilde{U}})(\lambda^2 e - \lambda\widehat{U}^{\triangle} - \lambda\widetilde{U}^{\triangle} + (\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}) \tag{38}$$
$$= \lambda^4 - (U + \widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}^{\triangle} + \widetilde{U}^{\triangle})\lambda^3 + (U\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U}^{\triangle} + U\widetilde{U}^{\triangle} + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle}$$
$$+ \widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + (\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle})\lambda^2 - (U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^{\triangle} + U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^{\triangle} + U(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$$
$$+ \widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle})\lambda + U\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}. \tag{39}$$

注意，如果我们形式上将 $(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$ 在(38) 中改为 $\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}$（两者并不相同），那么整个表达式将变为 $(\lambda e - U)(\lambda e - \widetilde{U})(\lambda e - \widehat{U}^{\triangle})(\lambda e - \widetilde{U}^{\triangle})$，而表达式 (39) 的系数将包含初等对称多项式。我们不能这样做，因为 $(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle} \neq \widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}$，因此在 (39) 中我们有 $(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}$ 而不是 $\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}$，并且不含初等对称多项式。

注 *1.* 请注意，我们也可以使用计算任意多项式系数的标准方法。通过对行列式 $\text{Det}(\lambda e - U)$ 关于 $\lambda$ 求导并令 $\lambda$ 等于零，可以递归计算 $k < N$ 的所有 $C_{(k)}$ 系数：

$$D_{(N)}(\lambda) := -\varphi_U(\lambda) = -\text{Det}(\lambda e - U), \quad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_{(k-1)}(\lambda) := \frac{1}{N-(k-1)}\frac{\partial D_{(k)}(\lambda)}{\partial \lambda}, \quad k = N, \dots, 1,$$
$$C_{(k)} = D_{(k)}(0).$$

我们可以直接使用以下公式计算这些系数

$$D_{(k)}(\lambda) = \frac{1}{(N-k)!}\frac{\partial^{N-k} D_{(N)}(\lambda)}{\partial \lambda^{N-k}}.$$

这种方法得出的结果与上文讨论的方法相同。这种方法是隐式的（当然，也适用于计算机计算）。前一种方法是显式的，而且更接近韦达定理：观察关于 $C_{(4)}$ 的公式 (26)，去掉不必要的乘数后，我们立即得到 $C_{(3)}$、$C_{(2)}$ 和 $C_{(1)}$ 的公式，正如普通韦达定理 (27) 中那样，在该定理中我们处理的是初等对称多项式。

现在来考虑任意 $n$ 的情形。

**定理 4.** 考虑任意元素 $U \in \mathcal{G}_{p,q}$, $n = p + q$, $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$，其 $U) = -C_{(N)}$ 的显式公式具有 *(31)* 这种形式。我们形式上将每个 $(U_1 \cdots U_j)^{\triangle_i}$ 中的所有表达式分别替换为 $i = 3, \dots, m$。分别写出这些表达式的初等对称多项式。再将先前考虑的表达式 $U_1^{\triangle_i} \cdots U_j^{\triangle_i}$ 形式上替换回这些公式中的 $(U_1 \cdots U_j)^{\triangle_i}$，即将 $i = 3, \dots, m$ 替换回去。由此得到系数 $(-1)^{k+1}C_{(k)}$, $k = 1, \dots, N-1$ 的正确公式，我们称之为克利福德几何代数中的广义韦达公式。

证明。 证明与上文的示例 $n = 4$ 类似（见（35）–（39））。我们使用特征多项式 $\varphi_U(\lambda) = \det(\lambda e - U)$ 的现有公式，其形式为（31）。然后将运算 $\widehat{\ }$，$\widetilde{\ }$ 移入括号 $(\lambda e - U)$ 内。这些运算是线性的，并且不会改变单位元 $e$。我们对包含运算 $\triangle_3, \dots, \triangle_m$ 的表达式展开括号。然后将运算 $\triangle_3, \dots, \triangle_m$ 移入括号内，并利用这些运算的线性性质以及它们不会改变单位元这一点 $e$。接着展开所有括号，即可得到所需结果。□

注 *2*。 我们可以将定理 4 改写如下。考虑一个任意元素 $U \in \mathcal{G}_{p,q}$, $n = p + q$, $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$，它具有 $C_{(N)} = -\det(U)$ 的显式公式，形式为（31）。那么，所有其他特征多项式系数为

$$C_{(k)} = (-1)^{k+1} \sum_{X_l \in X(k)} \mathrm{F}(X_l), \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{40}$$

其中，F 是一个 $N$ 元函数，它由 (31) 得到：分别在每个 $t$ 项中从左到右枚举元素 $U$ 的每次出现，

且 $X(k)$ 是由 $k$ 个元素 $U$ 和 $N-k$ 个单位元素 $e$ 组成的所有可能元组的集合：

$$X(k)=\left\{X_l=(x_1,x_2,\dots,x_N)\,|\,x_i\in\{e,U\},\quad \sum_{i=1}^{N}x_i=kU+(N-k)e\right\}. \tag{41}$$

这一结论已通过计算机计算在 $n\leq 6$ in[1] 的情形下得到验证。现在，对于任意维数 $n$，我们也得到这一结论，因为它只是用不同术语对定理 4 的重新表述。将 $e$ 代入 (41)，相当于去掉多余的乘数，因为运算 $\triangle_1$，.. .，$\triangle_m$ 不会改变单位元 $e$。

对于低维情形，我们有

$$n=1,\ \mathrm{F}(x_1,x_2)=x_1\widehat{x_2}\in\mathcal{G}_{p,q},\quad x_1,x_2\in\mathcal{G}_{p,q};$$
$$n=2,\ \mathrm{F}(x_1,x_2)=x_1\widehat{\widehat{x_2}}\in\mathcal{G}_{p,q},\quad x_1,x_2\in\mathcal{G}_{p,q};$$
$$n=3,\ \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\widehat{x_2}\widehat{x_3}\widehat{x_4}\in\mathcal{G}_{p,q},\quad x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathcal{G}_{p,q};$$
$$n=4,\ \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\widehat{\widehat{x_2}}(\widehat{x_3}\widehat{x_4})^{\triangle}\in\mathcal{G}_{p,q},\quad x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathcal{G}_{p,q};$$
$$n=5,\ \mathrm{F}(x_1,x_2,\dots,x_8)=x_1\widehat{\widehat{x_2}}\widehat{x_3}\widehat{x_4}(\widehat{x_5}\widehat{x_6}x_7\widehat{\widehat{x_8}})^{\triangle}\in\mathcal{G}_{p,q},$$
$$x_1,x_2,\dots,x_8\in\mathcal{G}_{p,q};$$
$$n=6,\ \mathrm{F}(x_1,x_2,\dots,x_8)=\frac{1}{3}x_1\widetilde{x_2}\widehat{x_3}\widehat{\widehat{x_4}}(\widehat{x_5}\widehat{\widehat{x_6}}x_7\widetilde{x_8})^{\triangle}$$
$$+\frac{2}{3}x_1\widetilde{x_2}((\widehat{x_3}\widehat{\widehat{x_4}})^{\triangle}((\widehat{x_5}\widehat{\widehat{x_6}})^{\triangle}(x_7\widetilde{x_8})^{\triangle})^{\triangle})^{\triangle},\qquad x_1,x_2,\dots,x_8\in\mathcal{G}_{p,q}.$$

例 *3.* 对于情形 $n=5$，6，我们可以对公式 (32)、(33) 使用定理 4（或等价地，注 2）中的方法，从而得到关于 $C_{(2)}$，. ..，$C_{(7)}$ 的无基公式（广义韦达公式）。这些公式见 [1]。例如，在情形 $n=6$ 下，我们由 (33) 得到：

$$\begin{aligned}C_{(2)}=-((&UU^{\triangle}+U\widetilde{U}+(\widehat{U}\widehat{\widehat{U}})^{\triangle}+\widetilde{U}\widehat{\widehat{U}}+\widehat{U}\widehat{\widehat{U}}+U\widehat{U}^{\triangle}+\widetilde{U}\widehat{U}^{\triangle}+U\widehat{\widehat{U}}+\widetilde{U}\widetilde{U}^{\triangle}\\&+(U\widetilde{U})^{\triangle}+U\widehat{U}+\widetilde{U}\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}+\widetilde{U}\widehat{U}+U\widetilde{U}^{\triangle}+U\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}+\widetilde{U}U^{\triangle})+\frac{1}{3}((\widehat{\widehat{U}}\widetilde{U})^{\triangle}\\&+(\widehat{\widehat{U}}U)^{\triangle}+(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}+(\widehat{U}U)^{\triangle}+\widehat{\widehat{U}}\widetilde{U}^{\triangle}+\widehat{\widehat{U}}U^{\triangle}+\widehat{\widehat{U}}\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}+\widehat{\widehat{U}}\widehat{U}^{\triangle}+\widehat{U}\widetilde{U}^{\triangle}\\&+\widehat{U}U^{\triangle}+\widehat{U}\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}+\widehat{U}\widehat{U}^{\triangle})+\frac{2}{3}(\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}+\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}U^{\triangle}+\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U}^{\triangle}+\widehat{U}^{\triangle}U^{\triangle}\\&+(\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}\widetilde{U})^{\triangle}+(\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}U)^{\triangle}+(\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}\widehat{\widehat{U}})^{\triangle}+(\widehat{\widehat{U}}^{\triangle}\widehat{U})^{\triangle}+(\widehat{U}^{\triangle}\widetilde{U})^{\triangle}+(\widehat{U}^{\triangle}U)^{\triangle}\\&+(\widehat{U}^{\triangle}\widehat{\widehat{U}})^{\triangle}+(\widehat{U}^{\triangle}\widehat{U})^{\triangle})).\end{aligned}$$

## 7 关于横线运算的替代方法

另外三种求解该问题的方法（参见 [18] 以及 [4]中的表 1）旨在寻找计算行列式及其他特征多项式系数的优化公式，

是在几何代数中用以下运算代替 $\triangle_1$、……、 $\triangle_m$:

1. 一种运算（我们称之为横线运算）

$$\overline{U} := 2\langle U\rangle_0 - U;$$

$\widetilde{\ }$2. 两种运算 $\overline{U}$、 $U$ 同时进行;

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$3. 三种运算 $\overline{U}$、 $U$、 $U$同时进行。

引入参数 $t_1$、 $t_2$和 $t_3$，它们分别等于这三种情形下的最少项数。我们有 $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 1$。

我们得到定理 3 的以下类似结果。

**定理5.** 对于任意 $n \geq 1$，存在以下三种类型（$r = 1,2,3$）的 $\mathrm{Det}(U) = -C_{(N)}$ 的无基公式:

$$\mathrm{Det}(U) = U(\sum_{j=1}^{t_r} \alpha_{jr} H_{jr}(U)) = (\sum_{j=1}^{t_r} \alpha_{jr} H_{jr}(U))U, \quad \alpha_{jr} \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{t_r} \alpha_{jr} = 1, \tag{42}$$

其中，每个表达式 $H_{jr}(U)$ 仅涉及乘法（由 $N-1$ 个乘数构成）以及:

*1.* 在情形 $r = 1$ 下的运算 $\overline{U}$ ; $\widetilde{\ }$*2.* 在情形 $r = 2$ 下的运算 $\overline{U}$, $U$ ; $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$*3.* 在情形 $r = 3$ 下的运算 $\overline{U}$, $U$, $U$。

证明. 这三种情形的证明均类似于定理 3 的证明。我们使用 Faddeev–LeVerrier 算法(28) 和公式

$$\langle U\rangle_0 = \frac{1}{2}(U + \overline{U}).$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$使用经典运算 $U$ 和 $U$ 有时可以简化（项数可能更少 $t_1 \geq t_2 \geq t_3$）仅包含运算 $\overline{U}$的公式。

□

请注意，仅使用一种运算$\overline{U}$ 的行列式公式（对于定理5中的$r = 1$ ）在情形 $n = 2j-1$ 和 $n = 2j$ 下必须对所有$j \geq 1$ 一致，这是 Faddeev–LeVerrier 算法所决定的，参见 [18]。

在以下情况 $n \leq 6$ 下，我们有行列式的如下已知公式:

$$n = 1, \qquad \mathrm{Det}(U) = U\widetilde{U} = U\overline{U}, \tag{43}$$

$$n = 2, \qquad \mathrm{Det}(U) = U\widehat{\widetilde{U}} = U\overline{U}, \tag{44}$$

$$n = 3, \qquad \mathrm{Det}(U) = U\widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} = \frac{1}{3}UU\overline{UU} + \frac{2}{3}U\overline{\overline{U}\,\overline{\overline{U}\,\overline{U}}} = U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}, \tag{45}$$

$$n=4, \qquad \mathrm{Det}(U)=U\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^{\triangle}=\frac{1}{3}UU\overline{UU}+\frac{2}{3}U\overline{\overline{U}\,\overline{\overline{U}\,\overline{U}}}=U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}, \quad (46)$$

$$n=5, \qquad \mathrm{Det}(U)=U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}(\widehat{U}\widetilde{U}U\widehat{\widetilde{U}})^{\triangle}=\frac{1}{3}HH\overline{HH}+\frac{2}{3}H\overline{\overline{H}\,\overline{\overline{H}\,\overline{H}}} \quad (47)$$

$$=J\widehat{J}\overline{J\widehat{J}}, \quad (48)$$

$$n=6, \qquad \mathrm{Det}(U)=\frac{1}{3}H\widehat{H}(\widehat{H}H)^{\triangle}+\frac{2}{3}H(\widehat{H}^{\triangle}(\widehat{H}^{\triangle}H^{\triangle})^{\triangle})^{\triangle} \quad (49)$$

$$=\frac{1}{3}HH\overline{HH}+\frac{2}{3}H\overline{\overline{H}\,\overline{\overline{H}\,\overline{H}}}, \quad (50)$$

其中我们采用记号 $J:=UU$、$H:=UU$。

我们得到如下表 1，其中列出了参数 $t$、$t_1$、$t_2$、$t_3$ 的已知最小值（参数 $t$ 见定理 3）。根据论文 [3]，的结果，当 $n=6$ 时，我们有 $t_3=2$（$t_3\neq 1$）；该论文使用了不同类型的分级取反运算。

问号标示的是相应参数的最小值未知之处。一个开放问题是，在 $n=5$、6 这两种情况下，求出参数 $t_1\geq 2$ 的优化公式（见上文，这两个公式必须一致）。另一个开放问题是，在高维情形 $n\geq 7$ 下，求出几何代数中行列式的四种类型、分别采用参数 $t$、$t_1$、$t_2$、$t_3$ 的优化公式。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $t_1$ | 1 | 1 | 2 | 2 | ? | ? |
| $t_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $t_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

**表 1.** 参数 $t$、$t_1$、$t_2$、$t_3$ 的取值。

我们得到以下适用于三种公式类型的定理 4（广义韦达定理）的类似结果。

**定理 6.** 考虑任意元素 $U\in\mathcal{G}_{p,\,q}$，$n=p+q$，$N=2^{[\frac{n+1}{2}]}$，其 $\mathrm{Det}(U)=-C_{(N)}$ 的显式公式属于类型 *(42)*。分别将每个 $H_{jr}(U)$ 中的所有表达式 $\overline{U_1\cdots U_j}$ 形式地替换为 $\overline{U_1}\cdots\overline{U_j}$。分别写出这些表达式的初等对称多项式。再将先前考虑的表达式 $\overline{U_1}\cdots\overline{U_j}$ 形式地替换回 $\overline{U_1\cdots U_j}$。我们得到系数 $(-1)^{k+1}C_{(k)}$，$k=1,\ldots,N-1$ 的正确公式，称之为克利福德几何代数中的广义韦达公式。

证明。 证明与定理 4 的证明类似。我们利用运算 $\overline{U}$ 是线性的，且不会改变单位元 $e$。□

注*3*。 或者（类似于注 2），我们可以使用以下等价算法。考虑任意元素 $U \in \mathcal{G}_{p,\,q}$, $n = p + q$,$N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$，其 $C_{(N)} = -\mathrm{Det}(U)$ 的显式公式属于类型 (42)。那么，所有其他特征多项式系数为

$$C_{(k)} = (-1)^{k+1} \sum_{X_l \in X(k)} \mathrm{F}(X_l), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{51}$$

其中，F 是一个关于 $N$ 的函数，由式 (42) 中从左到右枚举元素 $U$ 的每次出现而得到（分别在每个 $t_r$ 项中），而 $X(k)$ 是由 $k$ 个元素 $U$ 和 $N-k$ 个单位元素 $e$ 组成的所有可能元组的集合：

$$X(k) = \left\{ X_l = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \,|\, x_i \in \{e, U\}, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = kU + (N-k)e \right\}. \tag{52}$$

例*4*。 在 $n = 1$、2 的情形下，由公式

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(2)} = U\overline{U}, \tag{53}$$

我们得到

$$C_{(1)} = U + \overline{U}. \tag{54}$$

在 $n = 3$、4 的情形下，由公式

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(4)} = \frac{1}{3}UU\overline{UU} + \frac{2}{3}U\overline{\overline{U}\,\overline{\overline{U}\,\overline{U}}}, \tag{55}$$

我们得到

$$C_{(1)} = 2(U + \overline{U}), \tag{56}$$

$$-C_{(2)} = UU + \frac{1}{3}\overline{UU} + \frac{2}{3}\overline{U}\,\overline{U} + \frac{8}{3}U\overline{U} + \frac{4}{3}\overline{\overline{U}U}, \tag{57}$$

$$C_{(3)} = \frac{2}{3}U\overline{UU} + \frac{2}{3}UU\overline{U} + \frac{4}{3}U\overline{\overline{U}U} + \frac{2}{3}\overline{\overline{U}\,\overline{U}\,\overline{U}} + \frac{2}{3}U\overline{U}\,\overline{U}. \tag{58}$$

在 $n = 3$、4 的情形下，根据公式

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(4)} = U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}, \tag{59}$$

我们得到

$$C_{(1)} = U + \widetilde{U} + \overline{U} + \overline{\widetilde{U}}, \tag{60}$$

$$-C_{(2)} = \overline{U\widetilde{U}} + \widetilde{U}\overline{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\overline{U} + U\overline{\widetilde{U}} + U\overline{U} + U\widetilde{U}, \tag{61}$$

$$C_{(3)} = \widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}} + U\overline{U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U}. \tag{62}$$

在 $n=5$ 的情况下，我们可以使用相同的算法和公式，得到所有特征多项式系数的正确公式

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(8)} = J\widehat{J}J\overline{\widehat{J}} = U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}}. \tag{63}$$

例如，我们得到

$$C_{(1)} = U + \widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U} + \widetilde{U} + \overline{U} + \overline{\widehat{\widetilde{U}}} + \overline{\widehat{U}} + \overline{\widetilde{U}}, \tag{64}$$

$$\begin{aligned} -C_{(2)} = {} & U\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U} + U\widetilde{U} + U\overline{U} + U\overline{\widehat{\widetilde{U}}} + U\overline{\widehat{U}} + U\overline{\widetilde{U}} + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U} + \widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U} + \widehat{\widetilde{U}}\overline{U} \\ & + \widehat{\widetilde{U}}\overline{\widehat{\widetilde{U}}} + \widehat{\widetilde{U}}\overline{\widehat{U}} + \widehat{\widetilde{U}}\overline{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widetilde{U} + \widehat{U}\overline{U} + \widehat{U}\overline{\widehat{\widetilde{U}}} + \widehat{U}\overline{\widehat{U}} + \widehat{U}\overline{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\overline{U} + \widetilde{U}\overline{\widehat{\widetilde{U}}} \\ & + \widetilde{U}\overline{\widehat{U}} + \widetilde{U}\overline{\widetilde{U}} + \overline{U\widehat{\widetilde{U}}} + \overline{U\widehat{U}} + \overline{U\widetilde{U}} + \overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}} + \overline{\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}} + \overline{\widehat{U}\widetilde{U}}, \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} C_{(7)} = {} & \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}} + U\widehat{U}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}} + U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}} + U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}} \\ & + U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}} + U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}\overline{U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}} + U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}} + U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}\widetilde{U}U\overline{\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}}. \end{aligned} \tag{66}$$

类似地，我们可以写出特征多项式系数 $C_{(3)}$、$C_{(4)}$、$C_{(5)}$、$C_{(6)}$ 的显式公式。由于这些公式过于繁琐，这里不再列出。

在 $n=5$、6 的情况下，我们可以使用相同的算法和公式，为所有特征多项式系数得到另一种形式的正确公式

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(8)} = \frac{1}{3}U\widetilde{U}U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}U\widetilde{U}} + \frac{2}{3}U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}. \tag{67}$$

例如，我们得到

$$C_{(1)} = 2(U + \widetilde{U} + \overline{U} + \overline{\widetilde{U}}), \tag{68}$$

$$\begin{aligned} C_{(2)} = {} & 3U\widetilde{U} + UU + \widetilde{U}U + \widetilde{U}\widetilde{U} + \frac{8}{3}(U\overline{U} + U\overline{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\overline{U} + \widetilde{U}\overline{\widetilde{U}}) + \frac{7}{3}\overline{U\widetilde{U}} \\ & + \frac{4}{3}(\overline{\overline{U}U} + \overline{\overline{U}\widetilde{U}} + \overline{\overline{\widetilde{U}}U} + \overline{\overline{\widetilde{U}}\widetilde{U}}) + \frac{2}{3}(\overline{U}\,\overline{U} + \overline{U}\,\overline{\widetilde{U}} + \overline{\widetilde{U}}\,\overline{U} + \overline{\widetilde{U}}\,\overline{\widetilde{U}}) \\ & + \frac{1}{3}(\overline{UU} + \overline{\widetilde{U}U} + \overline{\widetilde{U}\widetilde{U}}), \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} C_{(7)} = {} & \frac{1}{3}(\widetilde{U}U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}U\widetilde{U}} + UU\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}U\overline{U\widetilde{U}U\widetilde{U}} \\ & + U\widetilde{U}U\widetilde{U}\overline{\widetilde{U}U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}U\widetilde{U}\overline{UU\widetilde{U}} + U\widetilde{U}U\widetilde{U}U\overline{\widetilde{U}\widetilde{U}} + U\widetilde{U}U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}U}) \\ & + \frac{2}{3}(\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}} + U\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}} \\ & + U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U}\overline{U\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U\widetilde{U}}\overline{U}) \end{aligned} \tag{70}$$

同样，我们可以写出特征多项式系数 $C_{(3)}$、$C_{(4)}$、$C_{(5)}$、$C_{(6)}$ 的显式公式。由于这些公式过于繁杂，此处不予列出。

## 8 结论

本文讨论将韦达公式推广到（克利福德）几何代数的情形。我们将 Gelfand–Retakh 定理应用于几何代数中的特征多项式，并展示如何用元素的各种对合的组合来表示特征多项式系数。我们将广义韦达公式与关于特征值的普通韦达公式进行比较。在这里，特征方程的根（复标量）由元素的某些对合组合（它们并非标量）来对应。我们详细讨论低维情形 $n \leq 3$ 。我们还考察特征值任意（包括特征值退化）的情形。我们引入几何代数中行列式的简单无基公式这一概念，并证明任意维数下都存在这类公式。基于这一概念，我们提出并证明了任意维数几何代数中的广义韦达定理。该定理给出了从最高阶系数（即行列式）出发求得所有特征多项式系数的显式公式。文中还讨论了利用横线运算求取行列式及其他特征多项式系数的优化公式的另外三种方法。

我们希望，本文提出的新方法（涉及非交换对称函数和广义韦达公式）有助于在 $n \geq 7$ 情况下，为几何代数中的行列式和逆元找到更优化（更简单）的公式。我们感谢本文的一位匿名审稿人指出了本研究结果在理论与数学物理中的潜在应用，尤其是在伪黎曼流形上的（量子）场论和杨–米尔斯理论中的应用。

**致谢** 本出版物是在2022年HSE大学学术基金计划（资助编号 22-00-001）框架内完成的。

本文的研究结果曾在国际会议 Computer Graphics International 2022（CGI2022）暨 Empowering Novel Geometric Algebra for Graphics & Engineering Workshop 上报告（瑞士日内瓦，2022年9月）。作者感谢本次会议的组织者和与会者，感谢他们进行的富有成效的讨论。

作者感谢 K. Abdulkhaev 和 N. Marchuk 提供的有益讨论。作者感谢匿名审稿人认真审阅本文，并就如何改进文章的呈现方式提出宝贵意见。

**数据可用性** 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

**利益冲突** 本研究不存在任何利益冲突。

## 参考文献

1. Abdulkhaev, K.、Shirokov, D.：《几何代数中特征多项式系数的无基公式》，《应用克利福德代数进展》，**32**，57（2022），第27页。

2. Abdulkhaev, K.、Shirokov, D.：关于几何代数中特征多项式系数显式公式。在：Magnenat-Thalmann N. 等（编），《计算机图形学进展》。CGI 2021。《计算机科学讲义》，第13002卷，670–681页。施普林格，Cham（2021）。 3. Acus, A.、Dargys, A.：多向量的逆：超越阈值 $p+q=$ 5 **28**, 65 2018 ，

《应用克利福德代数进展》（）。 4. Acus, A.、Dargys, A.：特征多项式在克利福德代数中指数函数和初等函数计算中的应用，arXiv:2205.11984（2022）。 5. Connes, A.、Schwarz, A.：重探矩阵韦达定理，《数学物理通讯》39（1997），349–353页。 6. Doran, C.、Lasenby, A.：《物理学家的几何代数》。剑桥大学出版社，剑桥（2003）。 7. Fuchs, D.、Schwarz, A.：《矩阵韦达定理》，《美国数学会译丛》第二辑，第169卷，美国数学会，普罗维登斯，1995年。 8. Fung, M. K.：非交换韦达定理的简单推导。《中国物理学刊》44(5)，341–347页（2006）。 9. Gelfand, I.、Krob, D.、Lascoux, A.、Retakh, V. 和 Thibon, J-Y.：非交换对称函数，《数学进展》112（1995），218-348页。 10. Gelfand, I.、Retakh, V.：拟行列式，I，《Selecta Mathematica》3（1997），417–546页。 11. Gelfand, I.、Retakh, V.：非交换韦达定理与对称函数。在：Gelfand I.M.、Lepowsky J.、Smirnov M.M.（编），《Gelfand数学研讨会论文集，1993–1995》。Birkhäuser Boston。1996年。 https://arxiv.org/abs/q-alg/9507010 1 12 v 。 Helmstetter, J.：克利福德代数及更一般代数中的特征多项式。《应用克利福德代数进展》**29**，30（2019）。 13. Hestenes, D.、Sobczyk, G.：《克利福德代数到几何微积分——数学物理的统一语言》，Reidel出版公司，多德雷赫特，荷兰（1984）。 14. Hitzer, E.、Sangwine, S.：实克利福德代数中的多向量及多向量矩阵逆。《应用数学与计算》**311**，第375–389页（2017）。 15. Lounesto, P.：《克利福德代数与旋量》。剑桥大学出版社，剑桥（1997）。 16. Shirokov, D.：任意维数克利福德代数中西尔维斯特方程的无基解。《应用克利福德代数进展》**31**，70（2021）。 17. Shirokov, D.：关于几何代数中西尔维斯特方程的无基解。在：Magnenat-Thalmann N. 等（编），《计算机图形学进展》。CGI 2020。《计算机科学讲义》，第12221卷，541–548页。施普林格，Cham（2020）。 18. Shirokov, D.：计算任意维数克利福德代数中的行列式、其他特征多项式系数及逆元。《计算与应用数学》**40**，173（2021）。 19. Shirokov, D.：克利福德代数元素的迹、行列式和逆元的概念。在：《分析学进展》。第8届ISAAC大会论文集，第1卷，2012年，187 978 5 209 04582 3 194 1108 5447 2011 俄罗斯人民友谊大学（ISBN - - - - /精装），–；arXiv:。（）。 20. Shirokov, D.：几何代数中的非交换韦达定理。在：Hitzer E. 等（编），《赋能图形与工程领域的新型几何代数 2022》（CGI 2022）。《计算机科学讲义》。施普林格，Cham，2023年，即将出版。