无界超材料实验：虚拟周期性边界条件的物理实现

HenrikR. Thomsen,* BaoZhao, and AndreaColombi苏黎世联邦理工学院，土木、环境与测绘工程系，*Stefano-Franscini-Platz 5*，*8093* 苏黎世，瑞士

（日期：2023年1月18日）

arXiv:2301.06861v1 [physics.app-ph] 17 Jan 2023

摘要

我们在实验中实现了弹性超材料的虚拟几何周期性。首先，通过迭代注入极性反转后的反射波场，抵消区域端点处不需要的边界反射。由此形成的无界实验状态，使我们能够更好地分析超材料对传播波场的影响。随后，将从结构一端传出的传播波场重新引入另一端，从而形成虚拟几何周期性。我们发现，引入虚拟周期性后，实验观测到的带隙逐渐趋近于解析解。所建立的工作流程为在强色散波传播和内部散射存在的情况下，对超材料原型开展实验研究与验证提供了一种新方法。针对具有任意力学性能的超材料实验，这种完全数据驱动、专门设计的边界条件处理方法能够实现反射抑制、虚拟周期性，并引入更一般的虚拟边界。

一、引言

人工超材料早已证明，它们能够呈现非凡的材料性质 [1–3], ，并利用带隙操控和衰减波传播 [4, 5]。这类禁阻频率范围可通过布拉格散射声子晶体 [6] 或局域共振超材料 [7] 设计到材料中。后者能够实现亚波长带隙 [8] ，近来已被用于宽带能量采集 [9–12]。数值模拟推动着超材料的发展，日益增强的计算能力使快速模拟不同设计成为可能。尽管如此，对原型结构进行实验研究和验证仍然至关重要。在数值研究中，可以引入低反射吸收边界层或局部阻尼 [13, 14] 等效应来模拟自由空间波传播；而实验室实验则常受系统模态响应的困扰，例如由自由边界或固支边界引起的响应。此外，由于边界反射，结构内部的波传播也难以解读。因此，往往难以准确区分由所研究的超材料引起的现象与由整个系统引起的现象。

* henrik.thomsen@ibk.baug.ethz.ch

针对这些问题，传统实验解决方案包括被动边界反射阻尼，例如声学黑洞 [15–17] 或梯度阻抗界面 [18]。然而，这些做法会改变宿主结构，进而可能导致系统响应偏离预期。

一种有前景的替代方法是弹性“沉浸式波实验”（IWE） [19], ，用于主动消除固体目标（例如弹性超材料波导）区域端点处不需要的边界反射。IWE 是一种实验方法，旨在克服影响传统波传播实验的实验室条件和样品尺寸限制。其实现方式是，通过修改实验室中遇到的物理边界条件 [20]，将物理实验域中的波传播与所需的虚拟域联系起来。这种方法可用于多种应用，例如隐身和全息术 [21], ，以及对实验室中有限物理域进行虚拟扩展 [19]和修改 [22]。也有人提出利用声学 IWE，通过消除结构一端的反射，并在另一端重新引入传播波场 [23]，来实现任意实验周期性边界条件。若能成功应用这一方法，便可研究声子晶体或局域共振超材料等的影响，而无需在实验室中实际构建大型结构，只需使用少数几个晶胞即可。IWE 的关键在于正确识别边界处的一阶入射事件，即此前未与这些边界发生相互作用的波能量。随后利用这一事件构建次级力特征；将其施加于例如铝梁的自由端时，可使反射能量抵消，从而形成透明边界。之后，若有需要，便可对该边界进行全面控制，并将其与任意虚拟域相连接。

我们的工作展示了弹性 IWE 的首个应用案例，并从两个关键方面显著拓展了该方法：（1）关注的频率范围为 <1 千赫，而非数十千赫；（2）我们聚焦于沿渐变梁传播的弯曲（兰姆）波，这种梁具有强色散和内部散射特性。这类波传播常见于超材料研究中；由于色散和散射很强，难以轻易分离出一阶反射波场。在此背景下，消除源自结构端部的反射波，使我们能够清晰地分析波通过原型超材料的渐变区域等部分时所发生的调制

超材料。

接下来，我们将首先介绍所提出的工作流程，用于在实验域中实现弹性“沉浸式边界控制”。我们将通过示意图展示如何在物理实验中经常遇到的三种情况下有效消除边界反射，并重点关注超材料：(1) 基本情况，即单侧 IWE，此时可以清晰识别结构边界处的入射波场/反射波场；(2) 迭代单侧 IWE，此时由于存在强色散等因素，无法清晰识别入射波场和/或反射波场；(3) 双侧 IWE，此时由于超材料设计等原因导致阻抗差异较大，从而产生内部散射，因此同样需要采用迭代过程。随后，我们将采用所提出的工作流程，成功去除一种用于能量采集的超材料中不需要的边界反射 [12] ，并在弹性实验中创建虚拟几何周期性。

II. 实现沉浸式边界条件的迭代过程

弹性 IWE指出，将入射牵引力作为辅助力施加在实验域的自由表面上（例如岩石表面或铝梁的端部），可以抵消在该边界处反射的波场，同时考虑任何模态转换。Thomsen 等 [19]指出，可以通过在所研究物理域的自由表面端部施加极性翻转的一阶反射波场，在实验中实现这一效果，从而抵消反射的纵波和弯曲波模态。一阶反射指的是在与区域端点相互作用之前未发生过相互作用的事件。与 Becker 等 [22] 和 B¨orsing 等 [21], 所介绍的声学 IWE 不同，由于波传播速度很高，弹性 IWE 几乎无法实时实现，因此难以获得足够短的延迟时间，以便在入射波场到达边界之前对其进行预测。因此，所需的沉浸式实验状态需要通过迭代逐步建立。关键在于正确识别入射波场和反射波场。可采用的方法包括波场注入、重定位 [25] 和 f-k 域滤波 [26]。我们提出的工作流程采用最后一种方法。

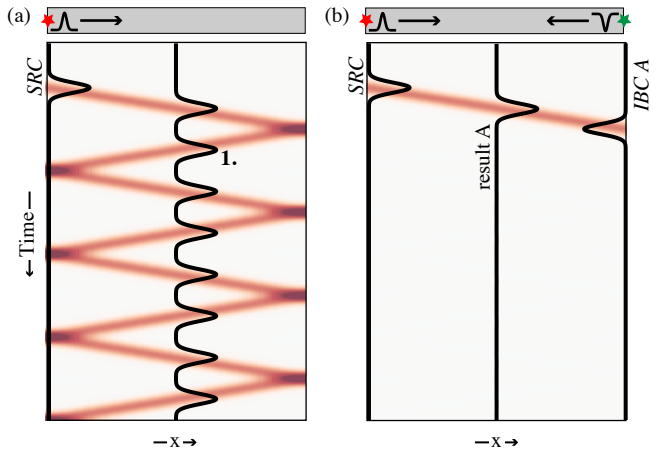


图1. 情况 1 的时距图概念示意：单侧设置，且可清晰识别入射波/反射波：(a) 显示初始实验状态；(b) 显示在右端注入极性反转的一阶反射事件以抵消反射事件后的结果。图中右端的黑色道表示所施加的阻抗边界条件。

A. 情况 1：单侧阻抗边界条件与清晰的入射波/反射波识别

实现沉浸式边界控制（IBC）最直接的方法，是在实验域端部注入测得的极性反转的一阶反射波。图1(a)示意了一个一维例子：纵波随时间在两个自由端之间来回传播。波场由源（SRC）从左侧激发。识别并分离在右端反射的第一个事件（以 1. 标示），即可设计出 IBC：该事件的极性反转版本。如图 1(b) 中的 $IBC\ A$ 所示，将其从右侧注入后，首次反射便会有效抵消，任何高阶反射也随之消失。当一阶反射事件能够被清晰识别时，即可采用这一方法。

B. 情况 2：单侧阻抗边界条件与迭代过程

遗憾的是，仅明确识别所需的一阶反射事件并非总是可行，尤其是在处理强色散波传播或内部反射时。在这种情况下，仍可通过采用本文提出的迭代过程实现所需的边界控制。

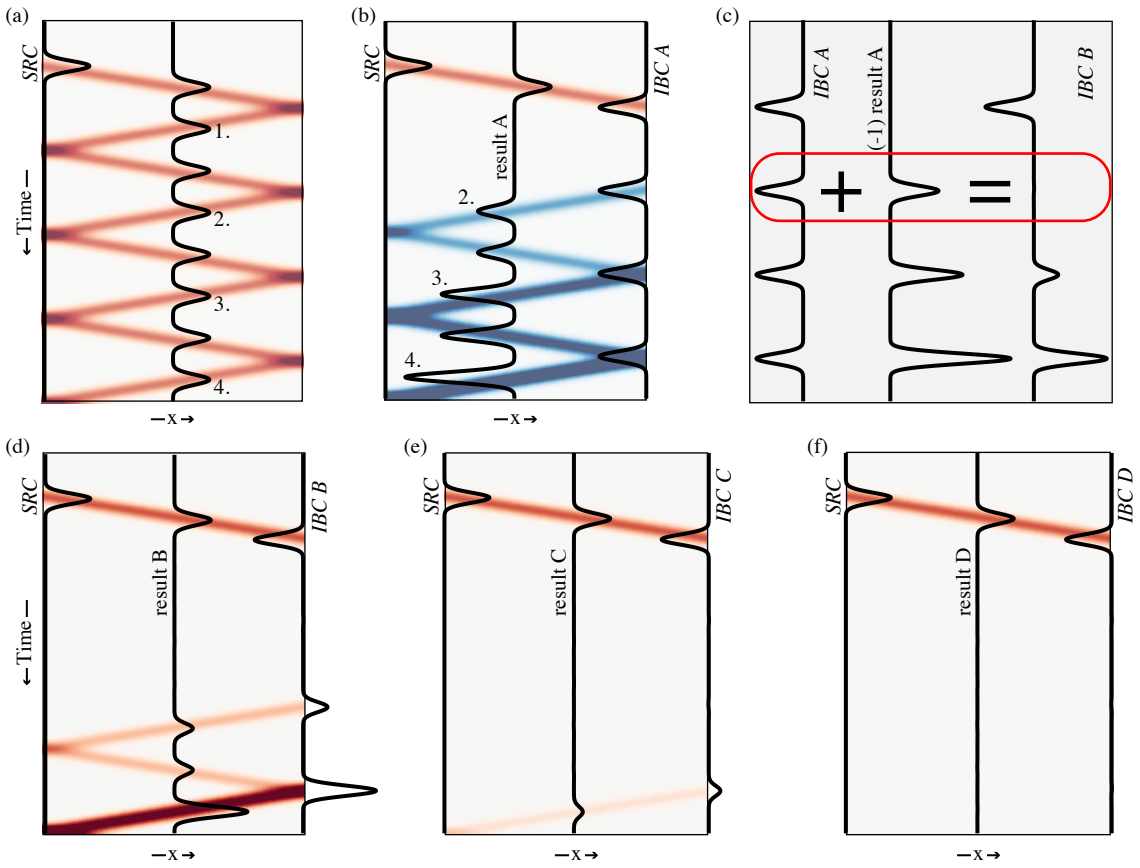


图 2. 情况 2 的时距图概念示意：单侧阻抗边界条件和迭代过程，用于消除边界反射：(a) 显示初始实验状态；(b&d-f) 显示施加于右端的阻抗边界条件的演变（如黑色道所示），以及由此产生的波传播；(c) 显示如何通过叠加当前施加的阻抗边界条件和由此产生的极性反转反射波场，对阻抗边界条件进行迭代修改。

从图 2(a)所示的初始实验状态开始，不是仅注入首次反射事件的极性反转版本，而是按照图 2(b)右端的$IBC\ A$ 所示，注入标记为 1.-4. 的完整反射波场，即向左传播的波场。由同一图可见，这样便消除了首次反射事件。因此，如情况 1 所示，所有高阶事件都会消失。然而，注入极性反转的完整反射波场会向系统主动注入新的能量。因此，二阶事件现在会以与初始实验状态相反的极性传播。此外，由于相长干涉，每次与右端发生高阶相互作用时，波场都会增强，

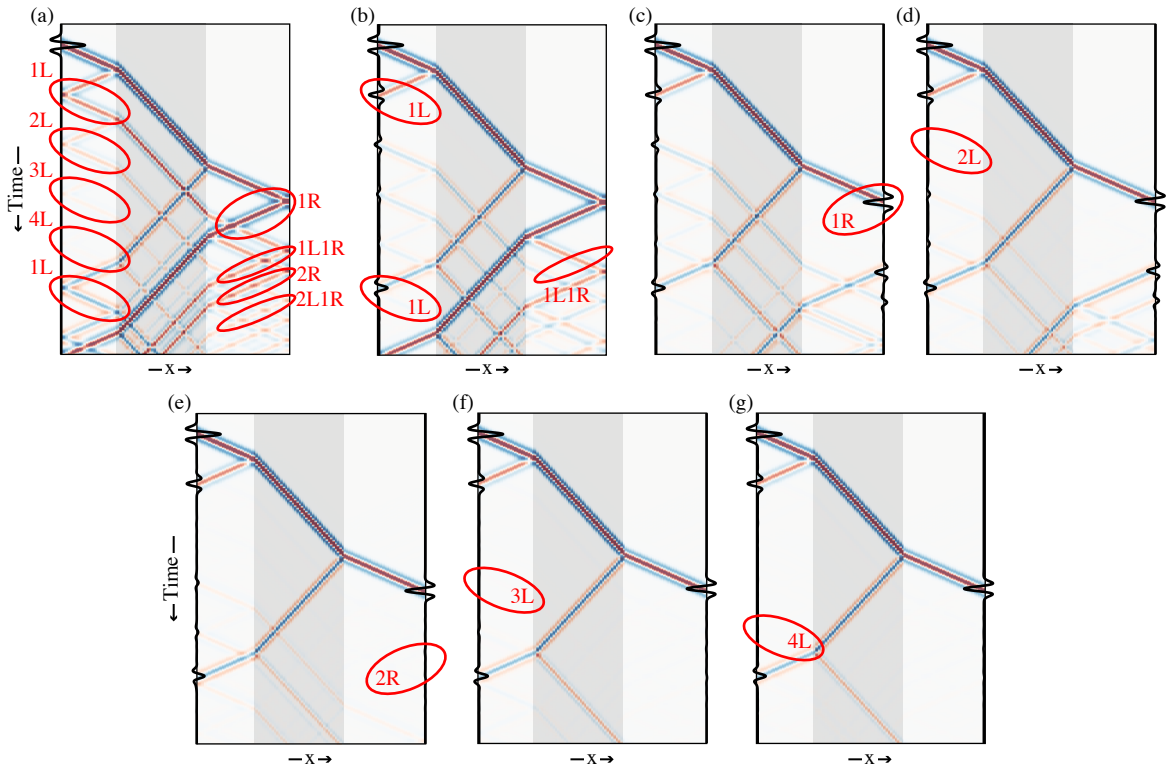


图 3. 情况 3 的时距图概念示意图：双侧 IBC 因阻抗对比而产生内部散射，灰色部分表示阻抗对比：(a) 显示初始实验状态；(b-f) 显示施加于右端和左端的 IBC 的演变，以及由此产生的波传播；(g) 显示最终实验状态，此时左右两侧的 IBC 均收敛为仅施加极性反转的一阶事件，并产生相应的初级波场传播。

传播波场中持续注入作为初始 *IBC A* 一部分的高阶反射事件。这些不需要的事件最终通过重复实验，并利用连续实验状态迭代修改 IBC 而被消除。最终的 IBC 仅施加一阶反射波场，不会引入不需要的波场传播。

具体做法是，如图 2(b) 中 2.- 4. 所示，分离右端反射的新波场，将其极性反转后加到先前施加的 *IBC A* 上。所得的 *IBC B* 如图 2(c) 所示。在这里，*IBC B* 的道中二阶事件已被消除。因此，在施加 *IBC B* 时，实验状态中重新引入的高阶事件减少了一个。接着，图 2(d) 显示了施加 *IBC B* 后如何消除

一阶和二阶反射波，同时仍会引入三阶及增强的高阶事件。最后，再重复这一过程两次后，图 2(f) 中的 $IBC\ D$ 在所示时间范围内与图 1(b) 中的 $IBC\ A$ 相匹配。

总之，迭代过程逐步消除不需要的高阶反射事件。最初包含完整反射波场的 IBC，最终收敛至一阶反射波场。

C. 情况 3：存在内部散射的双侧 IBC

上述用于构建 IBC 的迭代方法也适用于反射不仅发生在结构两端、也发生在结构内部的情况，如图 3(a) 示意所示。在此例中，灰色阴影区域所示的内部阻抗差异会引起内部散射。在研究超材料时经常会遇到这类情况，例如，谐振器会在介质中引入频率相关的阻抗差异。内部阻抗差异会导致两类不希望出现的边界反射：一类是透过结构并在两端反射的波，另一类是在结构内部辐射、随后与端部边界相互作用的波。

因此，构建 IBC 需要采用双侧迭代过程，以构造所需的无界实验状态，使其中仅保留初至波传播。在图 3(a) 中，可以观察到左右两端的一阶反射，分别标记为$1L$ 和$1R$ ，以及高阶事件（$2L$-$4L$、$2R$ 和$1L1R$-$2L1R$）。第一步，将左端反射的完整波场反转极性，并与源波场一同注入。图 3(b) 所示的结果表明，左侧的一阶反射（$1L$）均被消除。高阶事件则再次增强，情况与前述情况 2 中的描述相同。此外，图 3(b) 中右侧的反射（事件$1L1R$）也被消除，该反射源自事件$1L$。接下来，将在新实验状态右侧采集到的完整反射波场（如图 3(b) 所示）反转极性，并从右端注入。结果，事件$1R$ 的反射被抵消，而事件$2R$ 的极性反转，如图 3(c) 所示。随后，利用新的实验状态更新左端的 IBC，从而消除事件$2L$，如图 3(d) 所示。重复数次在两侧交替施加并构建 IBC 波场的迭代过程（图 3

(e-g)）。直到图 3(g) 两端以黑色时间道显示的左右 IBC 波场，与图 3(c) 所示的初始 IBC 相比，仅包含一阶反射事件。施加双侧 IBC 后的最终无界实验状态如图 3(g) 所示。边界处所有不需要的反射均已消除，仅保留主散射波场的传播。

请注意，所述迭代过程会消除不需要的边界反射，直至由迭代步定义的截止时间；迭代步即当前已消除的反射事件阶数。此时间之后的波传播会因注入的阻抗边界条件波场与传播波之间的相长干涉而增强。因此，若所研究系统的阻尼更大，便有利于减少达到所需实验状态所需的迭代步数。

III. 实验实现的虚拟周期边界

接下来，我们将通过实验展示如何使用 IWE 实现虚拟周期边界，以辅助研究一种梯度超材料。图 4(a) 展示了所研究的原型结构。该结构由一根厚 2 毫米、长 1 米的基体梁组成，其中央区域（从 0.3 到 0.6 米）装有长度逐渐增加的“翼片”，该区域跨度为 30 厘米。翼片构成梯度超表面，在减慢行进波群速度的同时，充当传播波的空间频率滤波器。赵等人 [12] 设计这种超材料，用于在低频环境噪声振动下实现宽带、高性能能量采集。首先，我们在基体梁的左右两端构建并施加阻抗边界条件，以消除反射波并形成透明边界。随后，将入射至右端的波场重新引入结构左端，从而在超材料中形成虚拟几何周期性。

A. 所研究的超材料

通过压电致动器（P. 153.05[27]）在梁的左端激发了弯曲平面波。同类型的致动器也安装在梁的另一端。两个致动器均作为 IBC 源，用于控制各自的边界。此外，还

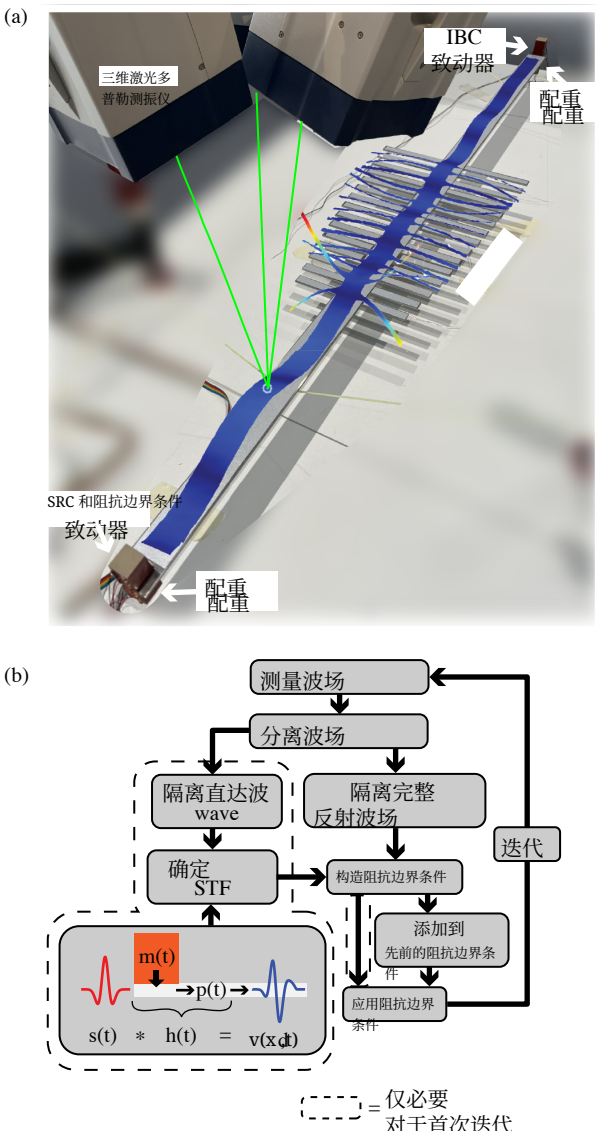


图 4。（a）实验装置。梁的两端均连接有压电致动器和配重。使用三维激光多普勒测振仪测量面外波场传播。图中叠加显示了 12.88 毫秒时沿整个结构的记录快照。（b）迭代构建并应用阻抗边界条件的工作流程。虚线表示仅在首次迭代时需要执行的步骤。

在梁的两端分别安装了两个重 44.3 g 的配重。它们与致动器共同形成了对称边界条件。测试表明，当梁两端仅安装压电致动器时，波反射过程中会发生不期望的模态转换。增加致动器会改变边界条件

梁的两端。然而，与传统的反射抑制方法不同，我们通过应用阻抗边界条件（IBC），保留了对边界响应的完全控制。使用机器人三维激光多普勒测振仪[28]，沿梁在时域测量面外速度，如图 4(a) 所示。数据记录时长为 100 毫秒，采样频率为 $f_s = 100$ 千赫兹；沿梁每隔 1 厘米设置一个测量点，共 101 个测量点，并在每个测量点处重复测量五次后取平均值。将峰值幅度为 100 伏、中心频率为 500 赫兹的里克波施加到位于梁左端的致动器面外分量上。图 5(a) 展示了由此产生的面外弯曲波（A_0 Lamb 模态）沿梁传播时的时间-距离表示，显示的是最初 25 毫秒内的情况。传播弯曲波具有显著的色散特性，而渐变区域造成的大阻抗对比也引发了强烈的内部散射，这些现象均清晰可见。

通常通过分析结构沿线的归一化空间频率分布来研究超材料对传播波的影响，如图 5(c) 所示。连接在基体梁上的翼片长度由短逐渐变长。因此，较高频率比低频率更早在渐变区域内被滤除。由此，与渐变区域相互作用后，入射到该区域的波场频率成分发生了变化。这种现象称为彩虹俘获[4, 29, 30]。总体而言，超材料在 200 至 680 赫兹之间形成了一个带隙。值得注意的是，空间频率成分在 585 赫兹处出现峰值，并延伸至带隙内。正如我们稍后将展示的，这种振型是基体梁两端发生边界反射的结果。

在对原型进行实验研究时，清楚了解构成渐变超结构的各个翼片在哪些频率下发生共振也至关重要。这些见解对于优化渐变剖面及由此形成的带隙十分重要。例如，图 6(a&b) 中的红色（深色）曲线显示了在翼 13 尖端测得的面外速度和频谱。在 220 和 805 赫兹处均可观察到频率响应的显著峰值，说明结构两端的反射会使共振频率难以明确识别。

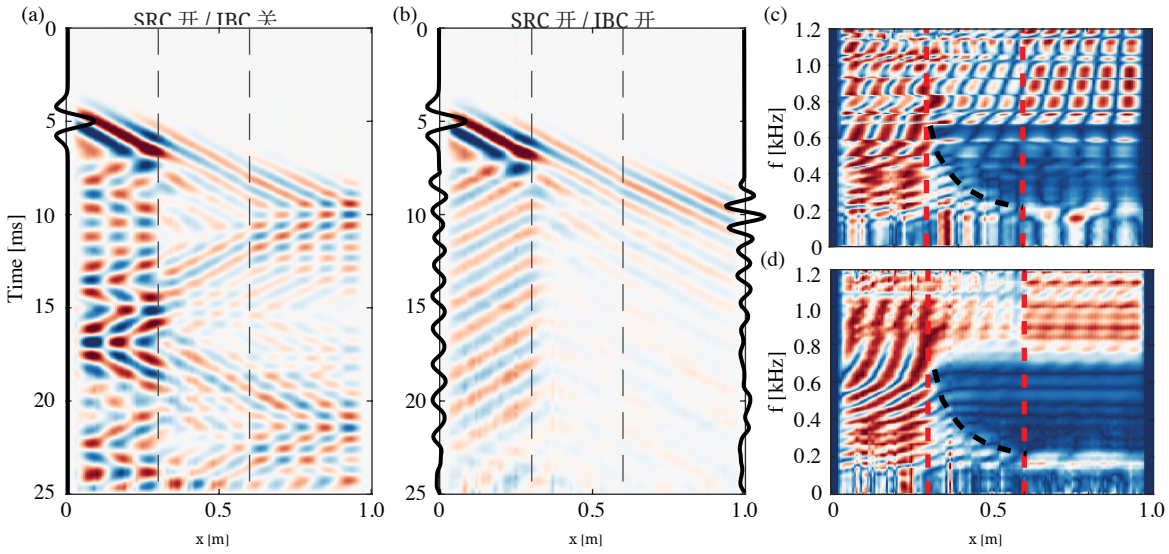


图 5. 沿梁测得的面外速度的时间-距离表示。竖直虚线表示渐变区域。(a) 源开启（由左侧黑线表示）且阻抗边界条件关闭；(b) 源开启且阻抗边界条件开启（由左侧和右侧黑线表示）。(c-d) 阻抗边界条件分别关闭和开启时，沿结构的空间频率分布（针对每个频率进行归一化）。黑色虚线标示带隙。使用三维激光多普勒测振仪扫描得到的波沿结构传播的动画，对于 (a) 和 (b) 两种情况，见补充材料（影片 00 和 01）。

B. 步骤 1：反射消除

我们采用上文所述的情况 3 来消除不需要的边界反射，即在两端迭代构建阻抗边界条件（IBC）。首先，必须确定在左端和右端反射的完整波场，并将其作为阻抗边界条件施加。因此，沿梁测得的面外分量（$v(x,\ t)$)被分解为向右（$r(x,\ t)$)和向左（$l(x,\ t)$)传播的分量。在数据的频率-波数域表示中，向右和向左传播的波场分别映射到相对的象限，可使用掩模滤波器 [26] 将其分离。然而，在梁的相应端施加完整的反射波场并迭代实现阻抗边界条件之前，处理实验室数据时还需要一个额外步骤。由于阻抗边界条件是通过两端的两个致动器施加的，我们必须先确定应向致动器施加哪种电压信号 $s(t)$，以便诱发

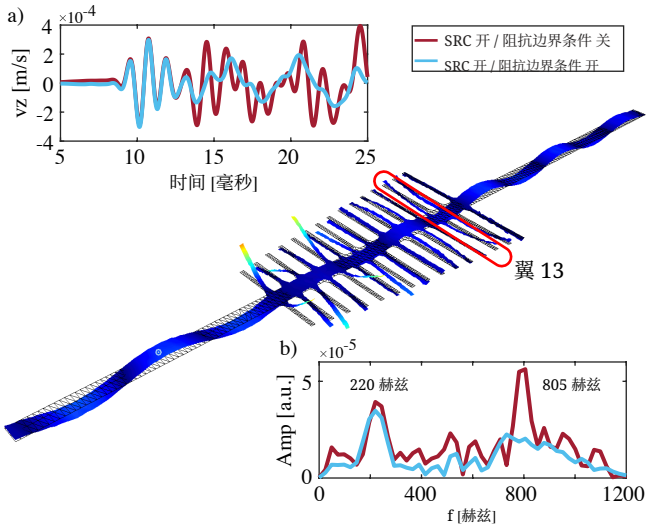


图 6. 通过三维激光多普勒测振仪记录的波传播快照，时间为 19.50 毫秒。图中显示了在翼 13 尖端记录的面外速度的 (a) 时间序列和 (b) 频谱。红色（深色）曲线表示存在边界反射的实验状态（SRC ON / IBC OFF），蓝色（浅色）曲线表示边界反射已消除的实验状态（SRC ON / IBC ON）。

沿梁任意位置 x_d 处的目标波场传播 $v(x_d,\ t)$，即IBC特征 [19] （见图4(b)中工作流程底部的示意图）。为此，必须求得左右致动器（LS和RS）的源传递函数（STF） $h^{-1}_{LS/RS}(t)$，该函数同时考虑致动器的机械响应（$m(t)$）以及波沿梁传播至距源 x_d 处测量点的传播效应（$p(t)$）。通过致动器激励梁的左右两端，并在距梁相应端点 $x_d = 0.1$ 米处进行测量，从而确定STF。随后，我们分离出传播的直达波（$v_d(x_{LS,\ RS},\ t)$）；经过波场分离后，必须能够清晰识别该直达波，测量距离分别为 $x_{LS} = 0.1$ 米和 $x_{RS} = 0.9$ 米。最终，通过在最小二乘意义下对分离出的直达波与施加于致动器的原始源信号（$s(t)$）进行最优匹配，计算得到STF（ $h^{-1}_{LS/RS}(t)$）。可靠地估计STF后，无需对介质作任何额外假设（例如传播速度或频率-波数关系），即可实现阻抗边界条件。因此，该方法完全由数据驱动。最后，将极性反转的右向（$-r(x,\ t)^{refl}$）和左向（$-l(x,\ t)^{refl}$）传播总反射波场与

STF（ $h_{LS/RS}^{-1}(t)$）卷积，并按照情况 3所述的迭代交替方式注入梁的两端。由此获得所需的实验状态，边界反射如图5(b)所示已被消除。该工作流程由图4(b)所示的流程图概括。图5(b)左右两端的黑色道所示的最终IBC特征消除了区域端点处的一阶反射，以及截至25毫秒的所有高阶反射事件。相应的沿结构分布的归一化空间频率分布如图5(d)所示。我们观察到，图5(c)中存在的585赫兹空间频率成分峰值已因边界反射的消除而不复存在。总体而言，200至680赫兹之间的诱导带隙也更加清晰可辨。最后，对翼 13尖端处测得的频率响应进行分析，也显示805赫兹处的强峰得到抑制（见图6(b)），这表明该翼在220赫兹处发生共振。

C. 步骤 2：引入实验虚拟周期性

移除反射波后，我们在实验中引入了虚拟周期性边界条件。为此，将穿过渐变区域后入射到梁右端的向右传播波场分离出来，并重新注入梁的左端。由于致动器的存在，无法直接测量梁端的波场，因此在 $x_1 = 0.85$ m 处测量该波场，并将其向前外推至梁的 $x_2 = 1.0$ m 处右端，然后从梁的左侧重新注入。假设平面波传播， x_2 处的波场在傅里叶域中可表示为 $V(x_2, \omega) = V(x_1, \omega)e^{ikd}$，其中 k为弯曲波数，$d = x_2 - x_1$ 为传播距离， $V(x_1, \omega)$ 为在 x_1处测得的波场。因此，必须确定实验频散关系。

通过采用非均匀波相关（IWC）方法 [31]获得所需的频散关系。该方法通过最大化理论非均匀行波与目标空间响应之间的相关性，从而能够在较短的测量距离内计算波数。我们在梁的右端激励弯曲 A_0 Lamb 模态，并使用 IWC 方法确定渐变后基体梁的 fk关系，即对于 $x > 0.6$ m。图7(a)显示了所得频散关系，在 0 - 1200 赫兹范围内以黑色（深色）圆点表示。假设 A_0

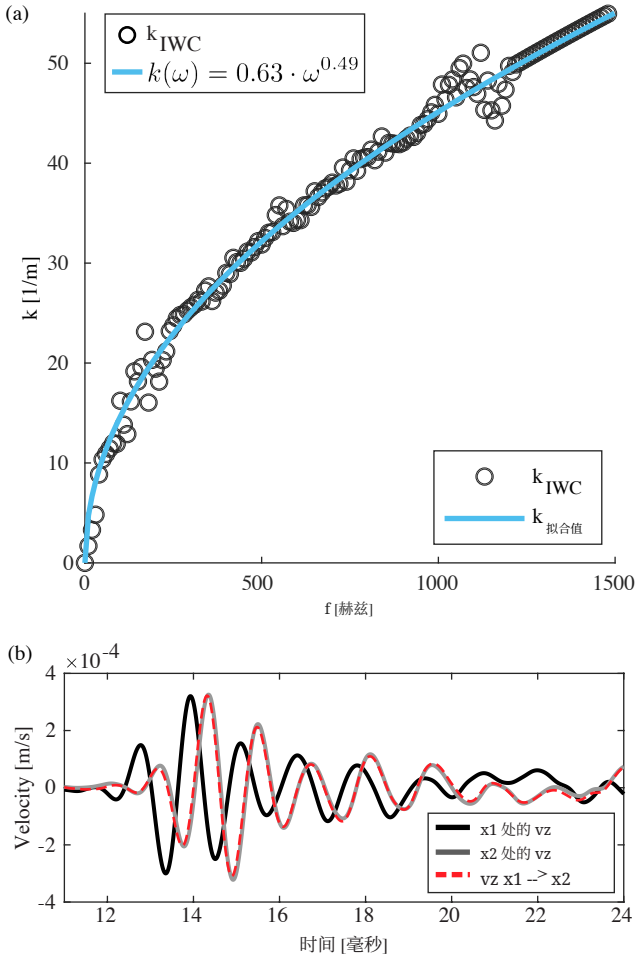


图 7. (a) 通过 IWC 方法确定的频散关系（黑色圆点）以及用于波场重新定位的拟合指数函数。(b) 将 $x_1 = 0.7$ m 处的测量结果（黑线）正向重定位 20 cm（红色虚线），并与 $x_2 = 0.9$m 处的测量结果（灰线）进行比较。

模态可由指数幂律函数 $k(\omega) = a\omega^b + c$ 描述，且 $\omega = 2\pi f$，我们使用最小二乘求解器确定了感兴趣频率范围内连续的 fk关系，如图7(a)中的（浅）蓝线所示。为验证结果，我们将测得的 $x_1 = 0.7$ m 处波场（图7(b)中的黑线）向前传播（重新定位） $d = 0.2$ m 至 $x_2 = 0.9$ m（图7(b)中的红色虚线），并将其与 x_2 处测得的波场（图7(b)中的灰线）进行比较，发现两者吻合良好。

最后，在 IBC 启用时于 0.85 m 处测得的右行波场（见图7(b)）从 0.85 m 向前传播至 1.0 m。为了利用左侧致动器的 STF，在此处重新引入波场时，

波场被额外外推 0.1 m，使其虚拟记录位置与 $x_{LS} = 0.1$ m 相匹配；$h_{LS}^{-1}(t)$ 的测量点即在该位置确定。应用 STF 后，重新定位的向右传播波从左端重新引入梁中。随后，通过在梁的两端迭代构建次级阻抗边界条件，再次抵消新产生的反射波。图 8(a) 中的原型几何示意图表明，梁的右端因此表现为虚拟周期边界。同一图中的时距图描绘了实验形成的周期边界的向右传播波场，而图 8(c) 则展示了其归一化空间频率表示。

为验证观测到的实验现象，我们进行了数值 COMSOL® [32] 模拟（见图 8(b&d)）。数值模型的超胞由一根长 1 m 的基体梁和渐变区域组成，其几何形状与实验原型相符。原型的材料性质近似取为：杨氏模量 69 GPa、密度 2710 g/m^3，泊松比 0.33。如图 8(b) 示意图所示，将超胞复制一次，以表示周期超材料。比较实验数据和数值数据可知，在波第二次通过渐变区域后，两种情况下的带隙均加深。此外，我们发现，引入的周期性恢复了周期边界条件的解析解（详情见附录）。波第一次通过超胞后，在实验和数值结果中，带隙上端（红色虚线）均趋近于解析解（红色实线）（图 8(c&d)）。

需要特别指出的是，通过将右侧离开的波场重新引入左端，这种实验实现并未考虑虚拟周期性梯度超材料之间的后向散射相互作用。不过，COMSOL 数值模拟中包含了这些相互作用，因为数值模型实际上由两个渐变区域组成。图 8(c&d) 中 0.6 - 1.3 m 范围内可观察到的频率成分差异可能就源于此。另一个可观察到的差异是，虚拟周期性实验实现中缺少 200 赫兹以下的能量成分。仔细观察图 8(a&b) 中向右传播的波场可以发现，数值模拟中清晰可见的传播波中较慢的低频部分，在第二次通过超材料时并未出现在实验结果中（图 8(a) 中红圈所示）。

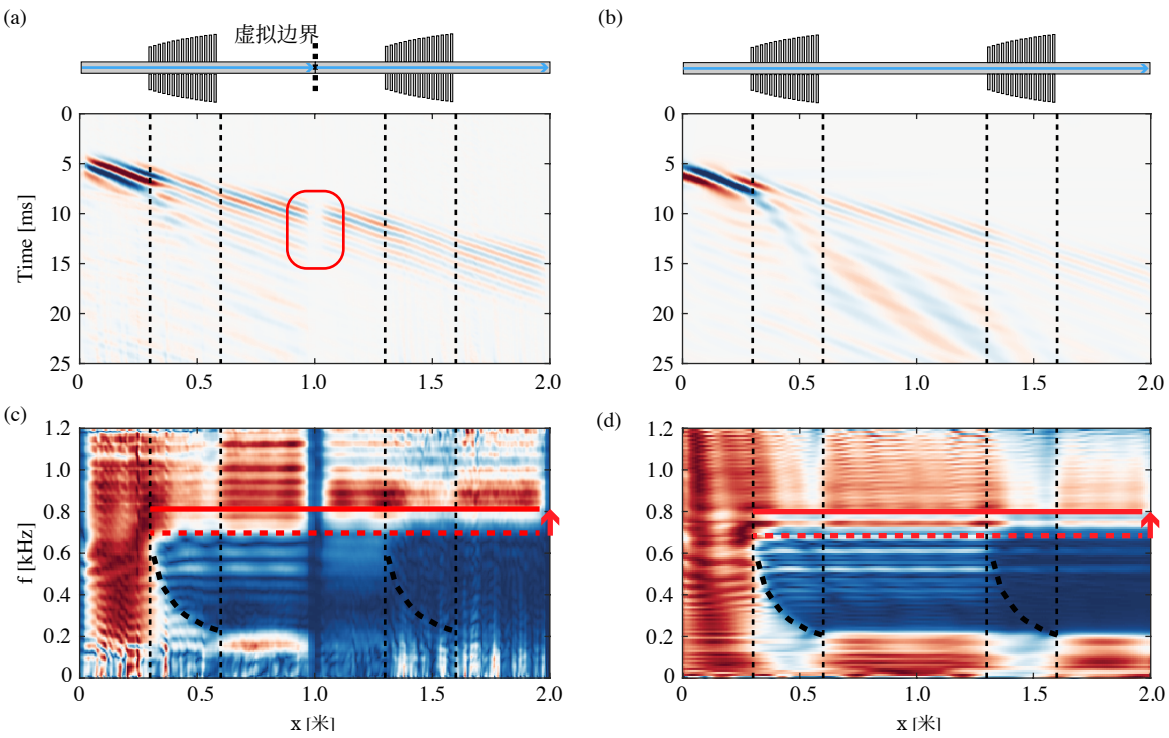


图 8. 沿梁测得的向右传播的面外速度的时间-距离表示。(a) 实验数据，红色方框标示出向右传播的波场在左端重新引入的位置，使其看起来像是波在具有两个连续渐变区域的连续介质中传播。(b) 两个连续渐变超胞的数值模拟及由此产生的向右传播波场。(c 和 d) 分别为 (a) 和 (b) 的归一化空间频率表示。红色虚线表示波经过超胞一次后的带隙上限。经过第二次传播后，实验和数值结果中均可观察到带隙拓宽并趋近于解析解（红色实线）。

IV. 讨论

我们实现的沉浸边界法为后续探索开辟了途径。首先，目前形式的实验虚拟周期性考虑了向右传播的波，也就是说，可以观察到波穿过渐变结构中连续排列的超胞及其产生的效果。然而，向左传播的波，即在渐变谐振器轮廓处散射的能量，并未纳入考虑。要将这些相互作用纳入其中，还需要构建另一个虚拟连接。第二个连接

这需要纳入波场首次通过渐变区域后反射回来的向左传播波场。随后，应在结构右端重新注入该波场。其次，将 IBC 设置在远离渐变区域的位置，会使我们基于传播波场而非倏逝的非传播分量引入周期性。然而，渐变超胞之间短程的倏逝相互作用可能对带隙形成起重要作用 [33, 34]。在所述工作流程中，必须将直达波与反射波适当分离，才能确定 STF。因此，散射发生前至少需要留出一个波长的距离。理论上，可以将致动器及 IBC 移得更靠近渐变区域，但这需要采用不同的方法来分离波场。最后，在图8(a和c)中引入虚拟周期性后，可以观察到缺失的频率成分 <200赫兹。首次应用周期信号时，必须构建一组新的 IBC。为了在此过程中保留周期信号，必须通过加窗将其与左端产生的新的、向右传播的非预期反射波分离。然而，周期信号中速度慢得多的低频分量无法与这些反射波区分开来。因此，周期信号中 <200 赫兹的部分被错误地纳入新 IBC 的第一次迭代，并在应用该 IBC 时被移除。除了采用可视化加窗外，还可以从完整的向右传播波场中减去预测的周期信号，以分离这两个波场分量。

本文展示的示例呈现了空间和时间宽度有限的传播波，即行波包。在首次实现中，这种传播是理想的，因为它使识别直达波及其从一阶到高阶的反射波成为可能。然而，我们提出的工作流程也可应用于周期信号，例如对超材料进行连续正弦激励。事实上，图7(a)中可观察到的、局限于超材料前30 cm（即渐变段之前）的传播波场特征，与周期激励期间出现的驻波有很强的相似性。实际上，如图7(b)所示，梁左端设计的阻抗边界条件（IBC）特征类似于连续正弦激励。因此，通过操控边界条件，我们的方法可用于例如将驻波转换为行波，并丰富沿所研究超材料采集的数据。近期有研究讨论了这种实验工具在声阻抗管中的潜在优势 [35]。

得益于无界超材料实验所提供的可能性，将本文介绍的方法实时实现具有很高的吸引力。然而，弹性 IWE 的实时实现颇具挑战，其可行性在很大程度上取决于实验条件。虽然 IWE 的声学实现已可实时完成 [36], ，但与空气或流体相比，固体中的波速要大得多，这是最主要的限制因素。必须留出足够的时间，才能预测入射到边界上的波场，并在该处通过 IWE 实现所需的操控。如果记录波场的位置与施加阻抗边界条件（IBC）的位置相同，就无法实时实现。不过，在类似本文所述的设置中，如果能够沿波传播路径进行记录，配备足够快速的硬件便有可能实现实时处理。无论如何，都有必要将波场从记录位置外推至发射边界，因此需要事先对所研究介质的均匀部分进行表征。使用波速慢得多的制造材料（如泡沫或塑料），还可进一步提高可行性。

我们想指出，我们提出的方法与地球物理领域常用的“表面相关多次波去除” [37], 有相似之处。然而，我们的方法并不依赖于预测发生在区域边界处的多次反射，而是完全由数据驱动，仅假设波线性传播。

最后，Vasmel [20] 和 Thomsen 等人 [19], 提出的完整三维三分量弹性 IWE，迄今仍未在实验中实现。为此，Thomsen等人[24] 提出了一种基于数值波场注入的方法，当只能获得自由表面处三分量质点速度的记录时，可用该方法提取初始入射波场。然而，这种方法需要对物理实验域进行全面表征。最近，Li等人 [38] 通过在波场注入方案中加入内部吸收边界，绕过了这一在大多数实验中难以满足的要求，从而提取出完整的入射波场和反射波场。因此，这种波场注入方案可以与我们提出的迭代工作流程结合，在设计 IBC 时利用完整的反射波场，而不只是初始入射波场。

V. 结论

我们提出了一种用于超材料原型实验研究与验证的新方法，并提供了一个完全数据驱动的工作流程，以便在强色散波传播和内部散射的情况下实现主动边界控制。通过设计沉浸式边界条件（IBC），即可实现反射抑制、虚拟周期性以及虚拟边界的引入。IBC 通过注入目标边界处反射波场的极性反转全波场，以迭代方式构建。每次实验迭代中，通过调整 IBC 逐步消除高阶反射。我们的专用工作流程无需像弹性 IWE 理论所定义的那样，依赖完美自由表面边界来施加 IBC；它仅利用反射波场，且无需了解所研究的介质。因此，该方法适用于各种实验条件，例如固支边界，或因附着致动器的影响而偏离理想自由表面的边界。在首次概念验证实验中，我们在弹性超材料中创建了虚拟周期边界：将从结构一端离开的波重新引入另一端。由此观测到的实验带隙逐渐收敛于解析解。这种“类布洛赫”几何周期性的实验实现，有望促进超材料研究，而无需在实验室中实际构建大型结构；只需一个至几个晶胞即可。因此，无界实验可成为未来超材料研究的有力工具。

致谢

本研究得到 Horizon 2020 FET-proactive 项目 METAVEH（资助协议编号 952039）和 ERC（欧洲研究理事会）项目资助（编号 694407 - MATRIX）。

附录 A：附录

如图 8(c) 所示，引入虚拟周期性后，实验带隙会变宽。这一现象可以理解为实验实现逐渐趋近于解析解。

最近，Pu等人 [39] 提出了一种多重散射公式，用于对以下情况进行解析描述：

沿基体梁传播并与 N 个谐振器相互作用的波在位置 x 处的面外分量 w（x）：

$$w(x) = w_0(x) + \sum_{n=1}^{N} Q_n G_w(x - x_n). \tag{A1}$$

此处， w_0(x) 表示入射至 N 寄生翼对基部位置 x 处的波场。项 Q_n 表示连接到基体梁上的第n对翼片基部处均匀法向应力的振幅。 G_w 是相关的面外位移格林函数 [40]。这些项共同用于计算 N寄生翼对的散射波场。法向应力振幅 Q_n 可通过机械阻抗求得：

$$Q_n = \frac{2M_n\omega_{rn}^2\omega^2}{S_n(\omega_{rn}^2 - \omega^2)} w(x_n) = Z_n w(x_n), \tag{A2}$$

其中， $\omega_{rn} = \sqrt{K_n/M_n}$ 是第 n对寄生翼片的谐振频率。结合机械阻抗 Z_n，已知第 n对寄生翼对基部处的垂直位移 w(x_n)，即可计算振幅 Q_n 。因此，给定入射波场 w_0(x) 后，即可计算应力振幅，并利用式 A1 求得总波场。

假设入射场为零，且 $w_0 = 0$，则可通过特征值问题的矩阵形式，利用式 A1 和式 A2 求得系统的本征态：

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}, \tag{A3}$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Z_1^{-1} - G_w(0) & -G_w(x_1 - x_2) & \cdots & -G_w(x_1 - x_N) \\ -G_w(x_2 - x_1) & Z_2^{-1} - G_w(0) & \cdots & -G_w(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_w(x_N - x_1) & -G_w(x_N - x_2) & \cdots & Z_N^{-1} - G_w(0) \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix}. \tag{A4}$$

通过我们提出的方法引入的虚拟周期性仅考虑向右传播的波，而忽略超胞之间的相互作用。一个超胞描述的是

基体梁的一个单元以及渐变的寄生翼片，如图 8(a) 所示。因此，这个扩展的特征值问题可表述为：

$$\mathbf{A_E X_E} = \mathbf{0}, \tag{A5}$$

其中：

$$\mathbf{A_E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_1} & & & \\ & \mathbf{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A_N} \end{bmatrix}, \mathbf{X_E} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \vdots \\ \mathbf{X_N} \end{bmatrix}, \tag{A6}$$

其中，$\mathbf{A_1}$ 到$\mathbf{A_N}$ 描述了周期排列的超胞。比较方程 A6 与方程 A4 可知，该配置具有与超材料单个超胞带隙范围相对应的相同特征值。因此，通过在实验中引入虚拟几何周期性，可以收敛至决定超材料带隙的特征值问题的解析解。

[1] K. Bertoldi, P. M.Reis, S. Willshaw, and T. Mullin, 弹性失稳诱发的负泊松比行为, 《Advanced Materials》**22**, 361 (2010).[2] X. Zheng, H. Lee, T. H. Weisgraber, M. Shusteff, J. DeOtte, E. B. Duoss, J. D. Kuntz, M. M. Biener, Q. Ge, J. A. Jackson, 等, 超轻、超刚性的机械超材料, 《Science》**344**, 1373 (2014).[3] Y. Wang, L. Li, D. Hofmann, J. E. Andrade, and C. Daraio, 力学性能可调的结构化织物, 《Nature》**596**, 238 (2021).[4] A. Colombi, D. Colquitt, P. Roux, S. Guenneau, and R. V. Craster, 一种地震超材料：共振超楔, 《Scientific Reports》**6**, 1 (2016).[5] K. H. Matlack, A. Bauhofer, S. Kr¨odel, A. Palermo, and C. Daraio, 用于低频和宽带振动吸收的复合3D打印超结构, 《美国国家科学院院刊》**113**, 8386 (2016).[6] M. M. Sigalas and E. N. Economou, 弹性波和声波的能带结构, 《声与振动杂志》**158**, 377 (1992).

[7] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng, 局域共振声学材料, 《Science》**289**, 1734 (2000).[8] R. V. Craster and S. Guenneau, 声学超材料：负折射、成像、透镜效应与隐身, 第166卷（施普林格科学与商业媒体，2012）。[9] J. M. De Ponti, A. Colombi, E. Riva, R. Ardito, F. Braghin, A. Corigliano, and R. V. Craster, 彩虹超材料中通过机械延迟线实现放大以进行能量采集的实验研究, 《应用物理快报》**117**, 143902 (2020).[10] J. M. De Ponti, A. Colombi, R. Ardito, F. Braghin, A. Corigliano, and R. V. Craster, 用于增强能量采集的梯度弹性超表面, 《新物理学杂志》**22**, 013013 (2020).[11] J. M. De Ponti, L. Iorio, E. Riva, F. Braghin, A. Corigliano, and R. Ardito, 利用梯度谐振器的弯曲模态增强弹性梁中弯曲波的能量采集, 《材料前沿》**8** （2021）。[12] B. Zhao, H. R. Thomsen, J. M. De Ponti, E. Riva, B. Van Damme, A. Bergamini, E. Chatzi, and A. Colombi, 用于宽带、高容量压电能量采集的梯度超材料, 《能源转换与管理》**269**, 116056 (2022).[13] D. Komatitsch and R. Martin, 针对地震波动方程中掠入射情况改进的非分裂卷积完全匹配层, 《地球物理学》**72**, SM155 (2007).[14] P. Rajagopal, M. Drozdz, E. A. Skelton, M. J. Lowe, and R. V. Craster, 关于使用吸收层和商用有限元软件包模拟弹性波在无界各向同性介质中的传播, 《无损检测与评估国际》**51**, 30 (2012).[15] M. Mironov, 厚度在有限区间内平滑减小至零的板中弯曲波的传播 (1988).[16] D. O'Boy, V. Krylov, and V. Kralovic, 利用声学黑洞效应对矩形板中的弯曲振动进行阻尼, 《声与振动杂志》**329**, 4672 (2010).[17] V. Georgiev, J. Cuenca, F. Gautier, L. Simon, and V. Krylov, 利用声学黑洞效应对梁和椭圆板中的结构振动进行阻尼, 《声与振动杂志》**330**, 2497 (2011).[18] C. Vemula, A. Norris, and G. Cody, 利用边缘处的梯度阻抗界面衰减板和梁中的波, 《声与振动杂志》**196**, 107 (1996).[19] H. R. Thomsen, M. Moler´on, T. Haag, D.-J. van Manen, and J. O. A. Robertsson, 弹性沉浸式波实验：理论与物理实现, 《物理评论研究》

1, 033203（2019）

.[20] M. Vasmel，用于地震波传播的沉浸式边界条件，博士论文，苏黎世联邦理工学院，瑞士（2016）。[21] N. B¨orsing、T. S. Becker、A. Curtis、D.-J. van Manen、T. Haag 和 J. O. Robertsson，使用沉浸式边界条件进行隐身与全息实验，《物理评论·应用》**12**，024011（2019）。[22] T. S. Becker、N. B¨orsing、T. Haag、C. B¨arlocher、C. M. Donahue、A. Curtis、J. O. A. Roberts- son 和 D.-J. van Manen，将物理实验实时沉浸到虚拟波动物理域中，《物理评论·应用》**13**，064061（2020）。[23]D.-J. van Manen、M. Moleron、H. R. Thomsen、N. B¨orsing、T. S. Becker、M. R. Haberman 和 J. O. Robertsson，用于超材料实验的沉浸式边界条件，《美国声学学会期刊》**146**，2786（2019），https://doi.org/10.1121/1.5136649。[24]H. R. Thomsen、E. F. M. Koene、J. O. A. Robertsson 和 D.-J. van Manen，基于 FD 注入的开放和封闭配置弹性波场分离，《国际地球物理学杂志》**227**，1646（2021），https://academic.oup.com/gji/article-pdf/227/3/1646/40085128/ggab275.pdf。[25] L. Sønneland、L. E. Berg、P. Eidsvig、A. Haugen、B. Fotland 和 J. Vestby，使用垂直接收器阵列进行二维鬼波消除，载于*SEG 1986*年技术会议扩展摘要，第4卷（勘探地球物理学家学会，1986），第516–519页。[26]B. A. Hardage，垂直地震剖面法，《前沿》**4**，59（1985），https://doi.org/10.1190/1.1487141。[27] PI Ceramic GmbH，PICA剪切致动器（2018）。[28] Polytec GmbH，PSV-500-3D扫描测振仪（2019）。[29] K. Tsakmakidis、A. Boardman 和 O. Hess，《Nature》：超材料中的困陷彩虹光存储，《Nature》**450**，397（2007）。[30] J. M. De Ponti、L. Iorio、E. Riva、R. Ardito、F. Braghin 和 A. Corigliano，通过梯度弹性波导实现选择性模态转换和彩虹俘获，《物理评论·应用》**16**，034028（2021）。[31] B. Van Damme 和 A. Zemp，测量梁中弯曲波的频散曲线：空间傅里叶变换与非均匀波相关法的比较，《声学学报》

与 Acustica 合刊**104**，228（2018）。[32] COMSOL AB，COMSOL Multiphysics v. 5.6（2022）。[33] F. Lemoult、G. Lerosey、J. de Rosny 和 M. Fink，打破衍射极限的共振超透镜，物理评论快报**104**，203901（2010）。[34] F. Lemoult、M. Fink 和 G. Lerosey，用于亚波长尺度远场声音控制的声学谐振器，物理评论快报**107**，064301（2011）。[35] Y. Vered 和 I. Bucher，声波导中多模态行波的实验识别，《机械系统与信号处理》**153**，107515（2021）。[36] T. S. Becker、D.-J. van Manen、T. Haag、C. B¨arlocher、X. Li、N. B¨orsing、A. Curtis、M. Serra- Garcia 和 J. O. A. Robertsson，宽带声学隐身与幻象，《Science Advances》**7**，eabi9627（2021），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.abi9627。[37] R. Abma、N. Kabir、K. H. Matson、S. Michell、S. A. Shaw 和 B. McLain，多次波衰减自适应相减方法的比较，《前沿》**24**，277（2005），https://doi.org/10.1190/1.1895312。[38] X. Li、J. Robertsson、A. Curtis 和D.-J. van Manen，内部未知的固体介质中用于闭孔径波场分解的内部吸收边界条件，《美国声学学会期刊》**152**，313（2022），https://doi.org/10.1121/10.0012578。[39] X. Pu、A. Palermo 和 A. Marzani，准周期弹性超表面的拓扑边缘态，《机械系统与信号处理》**181**，109478（2022）。[40] K. F. Graff，弹性固体中的波动 （Courier Corporation，2012）。