arXiv:2301.06865v1 [math.QA] 17 Jan 2023

量子格拉斯曼流形的自同构群 *

S Launois 和 T H Lenagan

摘要

我们计算了泛型量子格拉斯曼流形的自同构群。

1 引言

量子格拉斯曼流形 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 是一种非交换代数，是 n 维空间中 k 维平面的经典格拉斯曼流形齐次坐标环的一种变形。本文计算了变形参数 q 不是单位根时一般情形下量子格拉斯曼流形的自同构群。

通常，量子化坐标代数比其经典对应物刚性强得多，也就是说，量子对象的自同构群远小于经典对象的自同构群。尽管如此，计算这些自同构群仍然十分困难，目前只有少数几个已经完成计算的例子，参见例如 [1, 6, 9, 10, 11, 17, 18]。量子矩阵 [10, 17] 的自同构群将对我们当前的研究起到关键作用。

量子格拉斯曼流形 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 作为代数由量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$ 的 $k\times k$ 量子子式生成。这些生成元称为量子 Pl¨ucker 坐标，量子 Pl¨ucker 坐标上存在一个自然偏序；图 1 以 $\mathcal{O}_q(G(3,6))$ 为例展示了这一偏序。 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的自同构有两个显而易见的来源。第一种是将 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$ 的列自同构限制到子代数 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上；这些自同构将在第4节中介绍。第二种是研究 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的某些（非交换）去齐次化自同构；该去齐次化同构于 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的一个斜劳伦扩张，其中 $p=n-k$；正如我们将在第 3 节中看到的那样。

*本研究部分受英国工程与自然科学研究委员会资助，资助项目编号为 EP/R009279/1。

在第4节中，我们研究 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的这些“显而易见的”自同构，并考察它们之间的关系。接着，我们声称这些自同构涵盖了 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的所有自同构，并将在后续各节中论证这一主张。

量子格拉斯曼流形具有一个 $\mathbb{N}$-分次代数结构，其中每个量子普吕克坐标的次数均为一次。在第5节中，我们通过一系列引理利用这一分次结构，说明在允许通过第4节中找到的自同构进行调整后，基本上可以固定偏序集中的极小元和极大元。

在第6节中，我们研究这些经过调整的自同构，并证明此类自同构通过去齐次化等式诱导出 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$ 的一个自同构。完成这一步后，我们的主要结果便可在第7节中根据量子矩阵自同构群的已知结构轻松得出。

2 基本定义

本文中，我们始终在域 K 上进行讨论，并取一个非零元素 $q \in K$，它不是单位根。

$m \times n$ 上的量子矩阵代数记作 $\mathcal{O}_q(M(m,n))$，它是由 K 上的 mn 个不定元 x_{ij} 生成的代数，其中 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le n$ 与 K 的元素交换，并满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
&x_{ij}x_{il} = q x_{il}x_{ij}, && \text{for } 1 \le i \le m, \text{ and } 1 \le j < l \le n\,;\\
&x_{ij}x_{kj} = q x_{kj}x_{ij}, && \text{for } 1 \le i < k \le m, \text{ and } 1 \le j \le n\,;\\
&x_{ij}x_{kl} = x_{kl}x_{ij}, && \text{for } 1 \le k < i \le m, \text{ and } 1 \le j < l \le n\,;\\
&x_{ij}x_{kl} - x_{kl}x_{ij} = (q-q^{-1})x_{il}x_{kj}, && \text{for } 1 \le i < k \le m, \text{ and } 1 \le j < l \le n.
\end{aligned}
$$

众所周知，$\mathcal{O}_q(M(m,n))$ 是在 K 上通过按字典序添加 x_{ij} 得到的迭代 Ore 扩张。直接可得，$\mathcal{O}_q(M(m,n))$ 是一个诺特整环。

当 $m = n$ 时，量子行列式 D_q 定义为：

$$D_q := \sum (-q)^{l(\sigma)} x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)},$$

其中求和遍及 $\{1,\dots,n\}$ 的所有排列 σ。

量子行列式是量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(n,n))$ 中的一个中心元。

若 I 和 J 分别是 $\{1,\dots,m\}$ 和 $\{1,\dots,n\}$ 的 t 元子集，则量子子式 $[I \mid J]$ 定义为由满足 $i \in I$ 和 $j \in J$ 的变量 x_{ij} 生成的 $t \times t$ 量子矩阵子代数的量子行列式。

$k \times n$ 量子格拉斯曼流形的齐次坐标环 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$（非正式名称为量子格拉斯曼流形）是由 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$的 $k \times k$ 个量子子式生成的 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$的子代数，参见例如 [7]。

量子格拉斯曼流形 $\mathcal{O}_q(G(1,n))$ 是一个量子仿射空间，因此其自同构群已为人所知，参见 [1]；所以本文中我们始终假设 $k > 1$。此外，我们将在命题 3.4 中看到 $\mathcal{O}_q(G(k,n)) \cong \mathcal{O}_q(G(n-k,n))$，因此在计算自同构群时，我们将假设 $2k \leq n$ （从而 $n \geq 4$，因为 $k \geq 2$）。

$k \times k$($\mathcal{O}_q(M,k)$) 的量子子式必须包含所有 k 行，因此只需指定定义该量子子式的列即可确定它。基于此，我们将 $[J]$ 记作量子子式 $[1,\ldots,k \mid J]$，其中 k 是 $\{1,\ldots,n\}$ 的一个 k- 元素子集。此类量子子式称为量子 Pl ¨ucker 坐标。$\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中量子 Pl¨ucker 坐标的集合记为 Π。在 Π 上有一个自然的偏序，定义如下：若 $I = [i_1 < \cdots < i_k]$ 且 $J = [j_1 < \cdots < j_k]$，则 $[I] < [J]$ 当且仅当对每个 $l = 1, \ldots, k$, 都有 $i_l \leq j_l$。以 $\mathcal{O}_q(G(3,6))$ 为例，图 1 展示了这个偏序。量子 Pl¨ucker 坐标上的标准单项式是形如 $[I_1][I_2]\ldots[I_t]$ 的表达式，其中 $I_1 \leq I_2 \leq \cdots \leq I_t$ 在此偏序下。所有标准单项式构成 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 在 K 上的向量空间基，参见例如 [7, 命题 2.8]。

3 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$的去齐次化

若环 R 中的元素 a 满足 $aR = Ra$，则称其为 R 的正规元。若R 是整环，则可以将非零正规元 a 取逆，因为集合 $S := \{a^n\}$ 的 Ore 条件很容易验证。关于非交换诺特环的标准结果可见 Goodearl 和 Warfield [5] 以及 McConnell 和 Robson [16]所著的书籍。

令 $u = \{1,\ldots,k\}$。如下引理所示，$[u]$ 与所有其他量子 Pl¨ucker 坐标的交换关系相差 q 的某个幂。

引理 3.1。设 $[I]$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$中的一个量子 Pl ¨ucker 坐标，并令 $d(I) :=\#(I\backslash(I \cap u)) \geq 0$。则 $[u][I] = q^{d(I)}[I][u]$。

证明。结合该论文的引理 3.7 和定理 3.4，即可由 [8] 得出此结论。（请注意，[8] 使用 q^{-1} 作为变形参数，而我们使用 q；因此，解读他们的结果时必须谨慎。）也可以通过将推论陈述中的 $[I] = [u]$ 设为相应值，并注意到所示等式右侧的求和此时为空，从 [7, 推论 1.1] 中推出。

□

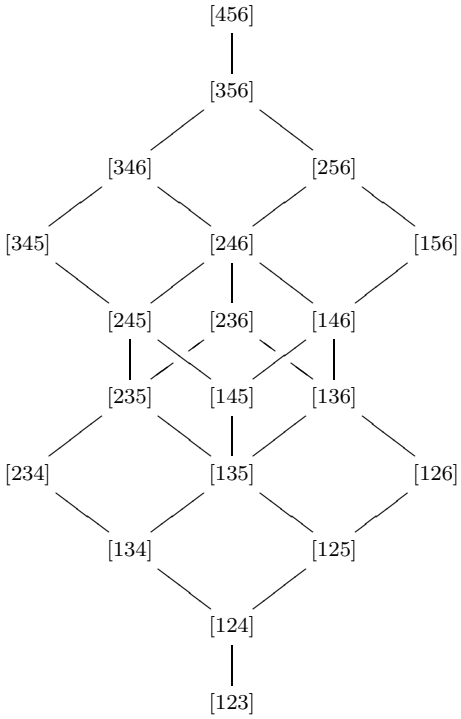


图 1： Π 上 $\mathcal{O}_q(G(3,6))$ 的偏序。

由于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 是由量子 Pl¨ucker 坐标生成的，根据前述引理，元素 $[u]$ 是正规元，因此我们可以将 $[u]$ 求逆，从而得到过环 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$。

对于 $1 \le i \le k$ 和 $1 \le j \le n-k$，令

$$x_{ij} := [1 \ldots, \widehat{k+1-i}, \ldots k, j+k][u]^{-1} \in \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}].$$

定理 2.2] 的 $a = 1$ 情形表明，元素 x_{ij} 生成一个代数R，记作 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$，它包含于其中，且同构于 $\mathcal{O}_q(M(k,n-k))$。此外，

$$\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = R[[u],[u]^{-1}]$$

（注意：按照我们的设定，上面的显示式确实是一个等式，而不只是一个同构。）在本注记的其余部分，我们将写作 $R = \mathcal{O}_q(M(k,p))$，其中$p := n-k$；当我们在这个等式的右边进行运算时，将用$y$ 表示 $[u]$。

由于 $d([1 \ldots, k+1-i, \ldots k, j+k]) = 1$，由引理 3.1 可得 $[u]x_{ij} = qx_{ij}[u]$，且 $yx_{ij} = qx_{ij}y$。

上面的等式表明

$$\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = \mathcal{O}_q(M(k,p))[y,y^{-1};\sigma] \tag{1}$$

其中 σ 是 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的自同构，满足对每个 $i=1,\ldots,k$ 和 $j=1,\ldots,p$，$\sigma(x_{ij}) = qx_{ij}$。我们将把等式 (1) 称为去齐次化等式。

下一个引理给出了上述等式中量子子式与 Pl¨ucker 坐标之间转换的公式。

引理 3.2. (i) 设 $[I \mid J]$ 是 $R = \mathcal{O}_q(M(k,p))$ 中的一个量子子式。则

$$[I \mid J] = [\{1\ldots k\}\backslash(k+1-I) \sqcup (k+J)][u]^{-1} \in \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]\,.$$

(ii) 设 $[L]$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中的一个量子 Pl¨ucker 坐标，并写作 $L = L_{\le k} \cap L_{>k}$，其中$L_{\le k} = L \cap \{1,\ldots,k\}$ 且 $L_{>k} = L \cap \{k+1,\ldots,n\}$。则

$$[L] = [(k+1) - (\{1,\ldots,k\}\backslash L_{\le k}) \mid L_{>k} - k]y \in \mathcal{O}_q(M(k,p))[y,y^{-1};\sigma]$$

证明. (i) 该公式是 [15, 命题 3.3] 的情形 $a=1$，该命题给出了将 $R = \mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的一般量子子式表示为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的量子 Pl¨ucker 坐标的公式。

(ii) 设 $[L]$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中的一个量子 Pl¨ucker 坐标。令 $I = (k+1) - (\{1,\ldots,k\}\backslash L_{\le k})$ 和 $J = L_{>k} - k$。注意到 $|I| = |J| = |L_{>k}|$，因此我们可以构造量子子式$[I \mid J]$。将 (i) 应用于 $[I \mid J]$，可得

$$\begin{aligned}[I \mid J][u] &= [\{1,\ldots,k\}\backslash\{(k+1) - \{(k+1) - (\{1,\ldots,k\}\backslash L_{\le k})\} \sqcup k + (L_{>k} - k)] \\ &= [\{1,\ldots,k\}\backslash(\{1,\ldots,k\}\backslash L_{\le k}) \sqcup L_{>k}] = [L_{\le k} \sqcup L_{>k}] = [L],\end{aligned}$$

由此证明了 (ii)。 □

下面这个由上述引理得出的推论将在后续计算中发挥作用。

推论 3.3. 设 $[L]$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中的一个量子 Pl¨ucker 坐标，并且对于某个 $[I \mid J] \in \mathcal{O}_q(M(k,p))$，有 $[L] = [I \mid J][u]$。(i) 令 $i \in \{1,\ldots,k\}$。则 $i \in I$ 当且仅当 $(k+1) - i \notin L$。(ii) 令 $j \in \{1\ldots,p\}$。则 $j \in J$ 当且仅当 $j+k \in L$。

在接下来的三节中，我们将使用去齐次化（见方程（1））， 把求 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$的自同构的问题转化为求$\mathcal{O}_q(M(k,p))$的自同构的问题；后者已在 [10] 和 [17]中得到解决。在此之前，我们

通过以下两个结果说明去齐次化的用途；其中第二个结果指出，当 $n = 2k$时， $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 还存在一个额外的自同构。

首先，注记存在一个同构 τ ，它将量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(k,n-k)) = K(x_{ij})$ 与 $\mathcal{O}_q(M(n-k,k)) = K(x'_{ij})$ 联系起来，将 x_{ij}映至 x'_{ji}，更一般地，将 $\mathcal{O}_q(M(k,n-k))$ 的量子子式 $[I \mid J]$ 映至 $\mathcal{O}_q(M(n-k,k))$ 的量子子式 $[J \mid I]$。请注意，为了将 $\mathcal{O}_q(M(n-k,k))$ 的量子子式与 $\mathcal{O}_q(M(k,n-k))$ 的量子子式区分开来，我们稍微滥用记号，不给前者加短横线。（当 $k = n-k$且 $x_{ij} = x'_{ij}$ 时，这是由转置给出的量子矩阵自同构，因此我们将 τ称为转置同构。）该自同构可延拓为一个同构： $\mathcal{O}_q(M(k,n-k))[y,y^{-1};\sigma]$ 到 $\mathcal{O}_q(M(n-k,k))[y',y'^{-1};\sigma']$，其中 $\sigma(x_{ij}) = qx_{ij}$，且 $\sigma'(x'_{ij}) = qx'_{ij}$。我们也用 τ 表示这一延拓。

命题 3.4. $\mathcal{O}_q(G(k,n)) \cong \mathcal{O}_q(G(n-k,n))$，通过一个自同构实现，该自同构将 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的量子 Pl¨ucker 坐标 $[L]$ 映射为 $\mathcal{O}_q(G(n-k,n))$ 的量子 Pl¨ucker 坐标 $[w_0(L)]\widehat{\ }$，其中 L 是 $\{1,\dots,n\}$ 中 L 的补集，而 w_0 是 $\{1,\dots,n\}$上对称群的最长元素；也就是说， w_0 将 $\{1,\dots,n\}$的顺序反转。

证明。回顾一下，我们假设 $2k \le n$。存在一个同构

$$\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = \mathcal{O}_q(M(k,n-k))[y,y^{-1};\sigma] \cong^1$$
$$\mathcal{O}_q(M(n-k,k)[y',y'^{-1};\sigma'] \cong \mathcal{O}_q(G(n-k,n))[[u']^{-1}],$$

其中 $[u'] = [1,\dots,n-k] \in \mathcal{O}_q(G(n-k,n))$ 和 $\sigma'(x'_{ij}) = qx'_{ij}$。（注记： $\cong^1$ 是通过应用转置同构 τ 得到的，该同构将 $[I \mid J]$ 映射为 $[J \mid I]$，并将 $y = [u] = [1,\dots,k]$ 映射为 $y' = [u'] = [1,\dots,n-k]$。）

我们需要利用上文建立的量子 Pl¨ucker 坐标与量子子式之间的转换公式，追踪任意一个 $[L]$ of$\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的量子 Pl¨ucker 坐标在此同构下的像。

$$\begin{aligned}
[L] &= [L_{\le k} \sqcup L_{>k}] \\
&= [(k+1) - (\{1,\dots,k\}\backslash L_{\le k}) \mid L_{>k} - k]y \qquad (\in \mathcal{O}_q(M(k,n-k))y) \\
&\overset{1}{\mapsto} [L_{>k} - k \mid (k+1) - (\{1,\dots,k\}\backslash L_{\le k})]y' \qquad (\in \mathcal{O}_q(M(n-k,k))y') \\
&= [\{1,\dots,n-k\}\backslash(n+1-L_{>k}) \sqcup (n-k) + ((k+1) - (\{1,\dots,k\}\backslash L_{\le k}))] \\
&= [\{1,\dots,n-k\}\backslash(n+1-L_{>k}) \sqcup ((n+1) - (\{1,\dots,k\}\backslash L_{\le k}))] \\
&= [\{1,\dots,n-k\}\backslash w_0(L_{>k}) \sqcup w_0(\{1,\dots,k\}\backslash L_{\le k})]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\{1,\dots,n-k\}\backslash w_0(L_{>k}) \sqcup \{n-k+1,\dots n\}\backslash w_0(L_{\le k})] \\
&= [\{1,\dots,n\}\backslash\{w_0(L_{>k}) \sqcup w_0(L_{\le k})\}] \\
&= [\{1,\dots,n\}\backslash w_0(L)] \\
&= [\widehat{w_0(L)}\,] = [w_0(\,\widehat{L}\,)].
\end{aligned}
$$

由于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的量子 Pl¨ucker 坐标作为代数生成 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$，而它们的像作为代数生成 $\mathcal{O}_q(G(n-k,n))$，因此这一计算表明，证明开头给出的同构限制在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 与 $\mathcal{O}_q(G(n-k,n))$ 之间时，仍是一个同构。

□

这一结果的一个直接推论如下。

推论 3.5。当 $2k = n$ 时，存在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构，它将 $\widehat{\ }$量子 Pl¨ucker 坐标 $[I]$ 映射为 $[w_0(\,I\,)],$，其中 w_0 是 $\{1,\dots,n\}$ 上对称群的最长元素。

注 3.6。前一推论中的自同构称为图自同构。在图 1 中，展示 $\mathcal{O}_q(G(3,6))$ 的标准偏序集，该自同构对量子 Pl¨ucker 坐标的作用表现为将偏序集 $\frown$沿竖直方向反射。例如，$[126]$ 被映射为 $[w_0(\,126\,)] = [w_0(345)] = [234]$。只有在 $n = 2k$ 的情况下，$\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 才存在图自同构。请注意，图自同构和转置自同构 τ 都可扩展到 $\mathcal{O}_q(G(k,2k))([u]^{-1}) = \mathcal{O}_q(M(k,k))[y,y^{-1};\sigma]$；它们在这个公共过环上一致，因此我们也用 τ 表示图自同构。

4 Oq(G(k,n)) 的显然自同构

Oq(G(k,n)) 的自同构有两个显而易见的来源。首先是通过包含映射 Oq(G(k,n)) → Oq(G(k,n))。其次是利用第 3 节中引入的去齐次化等式：

$$\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1};\sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}],$$

其中 $p = n-k$ 和 $u = \{1,\dots,k\}$ 而 σ 是 Oq(G(k,n)) 的自同构，满足对每个 $i = 1,\dots,k$ 和 $j = 1,\dots,p$，$\sigma(x_{ij}) = qx_{ij}$。

本节中，我们介绍这些自同构，并探讨它们之间的联系。

首先，根据定义， $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 是 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$ 的子代数。环面 $\mathcal{H}_0 := (K^*)^n$ 通过列乘法作用于 $\mathcal{O}_q(M(k,n))$，并由此在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上诱导出一个作用，该作用在量子 Plücker 坐标上的定义为

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot [i_1, \dots, i_k] = \beta_{i_1} \dots \beta_{i_k} [i_1, \dots, i_k].$$

这是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的环面作用，这种作用在诸如 [12, 14] 的论文中有所讨论 .

其次，环面 $(K^*)^{k+p}$ 在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 上有一个作用，该作用通过行列缩放运行，使得 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \cdot x_{ij} = \alpha_i \beta_j x_{ij}$。作为 $n = k + p$，我们可以将其扩展为环面 $\mathcal{H}_1 := (K^*)^{n+1}$ 在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}$ 上的作用； $\sigma]$ 令

$$(\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \cdot x_{ij} = \alpha_i \beta_j x_{ij}, \quad (\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \cdot y = \alpha_0 y.$$

令 $h = (\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathcal{H}_1$。容易验证 $h \cdot [I \mid J] = \alpha_I \beta_J [I \mid J]$，其中当 $I = [\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}]$ 时 $\alpha_I := \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$，而当 $J = [\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_k}]$ 时 $\beta_J = \beta_{j_1} \dots \beta_{j_p}$。

去齐次化等式在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$ 上诱导出 $\mathcal{H}_1$ 的作用。对于 $h = (\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathcal{H}_1$，我们有 $h \cdot [u] = \alpha_0 [u]$。若 $[L]$ 是任意其他量子 Plücker 坐标，则可写作 $[L] = [I \mid J][u]$，其中 $I = (k+1) - (\{1, \dots, k\} \backslash L_{\le k})$ 且 $J = L_{>k} - k$，由引理 3.2 可知。于是

$$h \cdot [L] = h \cdot [I \mid J] \times h \cdot [u] = \alpha_I \beta_J [I \mid J] \times \alpha_0 [u] = \alpha_0 \alpha_I \beta_J [I \mid J][u] = \alpha_0 \alpha_I \beta_J [L].$$

由于量子 Plücker 坐标生成 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$，且每个 $h \in \mathcal{H}_1$ 都将它们映为自身的标量倍数，因此这类 h 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上作为自同构作用。

我们现在考察 $\mathcal{H}_0$ 与 $\mathcal{H}_1$ 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用之间的联系 .

引理 4.1. 对于作用于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的每个自同构 $g \in \mathcal{H}_0$，都存在一个自同构 $f \in \mathcal{H}_1$，它在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上具有相同的作用。

证明。设 $g = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{H}_0$。我们要寻找 $f = (\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathcal{H}_1$，使得 g 和 f 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用相同。由于 $g \cdot [u] = a_1 \dots a_k [u]$，我们可以扩展 g，使其作用于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$。于是，去齐次化等式将此作用传递到 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}; \sigma]$。我们计算 g 对 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}$ 的生成元 x_{ij} 和 $y^{\pm 1}$ 的作用； $\sigma]$。由于 y 在去齐次化等式中对应于 $[u]$，$g \cdot y = a_1 \dots a_k y$ 和 $g \cdot y^{-1} = (a_1 \dots a_k)^{-1} y^{-1}$。现在， $x_{ij} := [1 \dots, \widehat{k+1-i}, \dots k, j+k][u]^{-1}$；因此

$$\begin{aligned} g \cdot x_{ij} &= g \cdot [1 \dots, \widehat{k+1-i}, \dots k, j+k] \times g \cdot [u]^{-1} \\ &= a_1 \dots a_k a_{k+1-i}^{-1} a_{j+k} [1 \dots, \widehat{k+1-i}, \dots k, j+k] \times (a_1 \dots a_k)^{-1} [u]^{-1} \\ &= a_{j+k} a_{(k+1)-i}^{-1} [1 \dots, \widehat{k+1-i}, \dots k, j+k][u]^{-1} \\ &= a_{j+k} a_{(k+1)-i}^{-1} x_{ij} \end{aligned}$$

我们要寻找一个 $f \in \mathcal{H}$，使其对生成元 x_{ij} 和 y 的作用相同。令 $f = (a_1 \dots a_k; a_k^{-1}, \dots, a_1^{-1}; a_{k+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{H}$。于是 $f \cdot y = a_1 \dots a_k y = g \cdot y$。此外，在 f 中，乘在第 i 行上的项为 a^{-1} $_{(k+1)-i}$，乘在第 j 列上的项为 a_{k+j}，因此 $f \cdot x_{ij} = a^{-1}$ $_{(k+1)-i} a_{k+j} x_{ij} = g \cdot x_{ij}$。所以，$f$ 和 g 在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}$ 的生成元 x_{ij} 和 $y^{\pm 1}$ 上的作用相同；$\sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$；因此 f 和 g 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用相同。

□

反向问题更加微妙，下面的例子说明了这一点。

例 4.2. 设 K 是一个域，其中不存在满足 $b^2 = 2$（例如 $\mathbb{Q}$）的元素 b，并考虑该域上的 $\mathcal{O}_q(G(2,4))$。令 $f = (1; 2, 1; 1, 1) \in \mathcal{H}_1$。那么，不存在元素 $g = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{H}_0$，使其在 $\mathcal{O}_q(G(2,4))$ 上的作用与 f 在 $\mathcal{O}_q(G(2,4))$ 上的作用相同。为验证这一断言，我们使用引理 3.2 中的公式，得到

$$[12] = [u],\ [13] = x_{11}[u],\ [14] = x_{12}[u],\ [23] = x_{21}[u],\ [24] = x_{22}[u],\ [34] = [12 \mid 12][u].$$

这些等式 导出 f 对量子普吕克坐标的如下作用 s:

$$f \cdot [12] = [12],\ f \cdot [13] = 2[13],\ f \cdot [14] = 2[14],\ f \cdot [23] = [23],\ f \cdot [24] = [24],\ f \cdot [34] = 2[34].$$

接下来，对于 $g = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{H}_0$，我们得到

$$g \cdot [12] = a_1 a_2 [12],\ g \cdot [13] = a_1 a_3 [13],\ g \cdot [14] = a_1 a_4 [14],$$

$$g \cdot [23] = a_2 a_3 [23],\ g \cdot [24] = a_2 a_4 [24],\ g \cdot [34] = a_3 a_4 [34];$$

因此，为了使该 g 以与 f 相同的方式作用，我们要求

$$a_1 a_2 = 1,\ a_1 a_3 = 2,\ a_1 a_4 = 2,\ a_2 a_3 = 1,\ a_2 a_4 = 1,\ a_3 a_4 = 2.$$

紧接在上面的方程 4 和 5 表明，我们需要 $a_3 = a_4$（比如说$= b$），而方程 6 给出 $b^2 = 2$，这对于任何 $b \in K$ 都是不可能的。

鉴于这个例子，在以下结果中假设 K 是代数闭的是恰当的。

引理 4.3. 假设 K 是代数闭的。考虑 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 和 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 上的 K。对于作用于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的每个自同构 $f \in \mathcal{H}_1$，都存在一个自同构 $g \in \mathcal{H}_0$，使其在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用相同。

证明. 考虑集合 S，其中的元素 $f=(\alpha_0;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k;\ \beta_1,\ldots,\beta_p)\in\mathcal{H}_1$ 除一个位置外，其余所有位置都等于 1。集合 S 生成 $\mathcal{H}_1$，因此只需证明 S 的每个元素的作用都可以通过 $\mathcal{H}_0$ 中某个元素的作用来实现。我们分三种情况分别讨论。

我们首先考虑其中一个 β_i 项不等于 1 的情形。假设 f 的 $k+1+j$ 位置上的元素 β_j 不等于 1，而 f 的所有其他位置都包含元素 1。注意到 $f\cdot[u]=[u]$。令 $[L]$ 为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中的任意其他量子 Pl¨ucker 坐标，其中 $[L]=[I\mid J][u]$ 对于某个量子子式 $[I\mid J]\in\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 成立。于是 $f\cdot[L]=(f\cdot[I\mid J])(f\cdot[u])=(f\cdot[I\mid J])[u]$，因此当 $j\notin J$ 时 $f\cdot[L]=[L]$，而当 $j\in J$ 时 $f\cdot[L]=\beta_j[L]$。

利用推论 3.3(ii)，我们看到，当 $j+k\notin L$ 时 $f\cdot[L]=[L]$，而当 $j+k\in L$ 时 $f\cdot[L]=\beta_j[L]$。对量子 Pl¨ucker 坐标产生相同作用的 $g\in\mathcal{H}_0$ 元素是 $g=(g_1,\ldots,g_n)$，其中 $g_{j+k}=\beta_j$，而所有其他 $g_i=1$。

我们考虑的下一个情形是 $f=(\alpha_0;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k;\ \beta_1,\ldots,\beta_p)\in\mathcal{H}_1$，其中对于某个 $i\in\{1,\ldots,k\}$，α_i 不等于 1，但 f 的所有其他项都等于 1。同样，$f\cdot[u]=[u]$。令 $[L]$ 为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中任意其他一个量子 Pl¨ucker 坐标，其中对于某个量子子式 $[I\mid J]\in\mathcal{O}_q(M(k,p))$，有 $[L]=[I\mid J][u]$。那么 $f\cdot[L]=(f\cdot[I\mid J])(f\cdot[u])=(f\cdot[I\mid J])[u]$，因此当 $i\notin I$ 时，$f\cdot[L]=[L]$；当 $i\in I$ 时，$f\cdot[L]=\alpha_i[L]$。利用推论 3.3(i)，我们可知，当 $(k+1)-i\in L$ 时，$f\cdot[L]=[L]$；而当 $(k+1)-i\notin L$ 时，$f\cdot[L]=\alpha_i[L]$。令 b 为 K 中的一个元素，满足 $b^k=\alpha_i$。令 $g=(g_1,\ldots,g_n)\in\mathcal{H}_0$ 满足 $g_{k+1-i}=b^{-(k-1)}$，且其他每一项 $g_j=b$。令 $[L]=[l_1,\ldots,l_k]$。于是 $g\cdot[L]=g_{l_1}\ldots g_{l_k}[L]$。

假设 $k+1-i\in L$。那么 g_{l_1}、……、g_{l_k} 中有一个等于 $b^{-(k-1)}$，而其余的 $k-1$ 都等于 b。因此，$g_{l_1}\ldots g_{l_k}=b^{k-1}b^{-(k-1)}=1$，所以 $g\cdot[L]=[L]$。

现在假设 $k+1-i\notin L$。那么每个 g_{l_j} 都等于 b，因此 $g\cdot[L]=b^k[L]=\alpha_i[L]$。

这表明 g 的作用与 f 的作用一致，正如所要求的那样。

需要考虑的最后一种情形是 $f=(\alpha_0;\ \alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_k;\ \beta_1、\ldots\ldots、\beta_p)\in\mathcal{H}_1$，其中 α_0 不等于 1，而所有其他项都等于 1。因此，$f\cdot[u]=\alpha_0[u]$。令 $[L]$ 为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 中任意另一个量子 Pl¨ucker 坐标，且对于某个量子子式 $[I\mid J]\in\mathcal{O}_q(M(k,p))$，有 $[L]=[I\mid J][u]$。注意，对于所有量子子式 $[I\mid J]$，都有 $f\cdot[I\mid J]=[I\mid J]$。因此，$f\cdot[L]=(f\cdot[I\mid J])(f\cdot[u])=[I\mid J].\alpha_0[u]=\alpha_0[L]$。由此，对于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的所有量子子式 $[L]$，都有 $f\cdot[L]=\alpha_0[L]$。令 $b\in K$ 满足 $b^k=\alpha_0$，并设 $g=(b,\ldots\ldots,b)$。那么，对于所有 $[L]$，都有 $g\cdot[L]=b^k[L]=\alpha_0[L]$，且 f 与 g 的作用一致。 □

$\mathcal{H}_1$ 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用并不忠实，正如我们将在下一个命题中看到的。令 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{H}_1$ 除以该作用的核。于是 $\mathcal{H}$ 忠实地作用于

$\mathcal{O}_q(G(k,n))$。下一个结果表明， $\mathcal{H}$ 同构于一个环面 $(K^*)^n$。

命题 4.4. 群 $\mathcal{H}$ 同构于一个环面 $(K^*)^n$。

证明。 $\mathcal{H}_1$ 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用的核，与 $\mathcal{H}_1$ 在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = \mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}]$ 上的作用的核相同。利用右边的表达式，很容易验证这个核是 $\{(1;\ \lambda,\ldots,\lambda;\ \lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-1}) \mid \lambda \in K^*\}$。因此，取 $\lambda = \beta_p$，可知 $h = (\alpha_0;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k;\ \beta_1,\ldots,\beta_p) \in \mathcal{H}_1$ 的作用与 $h' := (\alpha_0;\ \alpha_1\beta_p,\ldots,\alpha_k\beta_p;\ \beta_1\beta_p^{-1},\ldots,\beta_{p-1}\beta_p^{-1},1) \in \mathcal{H}_1$ 相同。也很容易验证， $\mathcal{H}_1$ 中两个不同且最后一位为 1 的元素在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}]$ 上的作用不同，因此结论得证。

□

鉴于这一结果，我们将由 $\mathcal{H}$ 提供的 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上的作用称为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的环面自同构。

在 $n = 2k$ 的情形下，因此 $k = p$，去齐次化等式表明

$$\mathcal{O}_q(M(k,k))[y^{\pm 1};\sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}].$$

在这种情形下，利用公式 $[L] = [I \mid J][u]$ 进行简单分析可知，通过转置 x_{ij} 变量得到的 $\mathcal{O}_q(M(k,k))$ 的额外自同构可扩展为 $\mathcal{O}_q(M(k,k))[y^{\pm 1};\ \sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$ 的自同构；将其限制在 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 上时，便得到推论 3.5 中的图自同构 τ。对于这三个代数 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$、 $\mathcal{O}_q(M(k,k))$ 和 $\mathcal{O}_q(M(k,k))[y^{\pm 1};\ \sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$，我们将此自同构分别记为 τ。

在 $2k = n$ 的情况下，令 $(\alpha_0;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k;\ \beta_1,\ldots,\beta_k) \in \mathcal{H}_1$。容易验证

$$\tau \circ (\alpha_0;\alpha_1,\ldots,\alpha_k;\beta_1,\ldots,\beta_k) \circ \tau = (\alpha_0;\beta_1,\ldots,\beta_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathcal{H}_1,$$

因此 $\langle\tau\rangle$ 作用于 $\mathcal{H}_1$。此外，如果 $(1;\ \lambda,\ldots,\lambda;\ \lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-1})$ 属于 $\mathcal{H}_1$ 对 $\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$ 的作用的核，那么

$$\begin{aligned}\tau \circ (1;\lambda,\ldots,\lambda;\lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-1}) \circ \tau &= (1;\lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-1};\lambda,\ldots,\lambda)\\ &= (1;\lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-1};(\lambda^{-1})^{-1},\ldots,(\lambda^{-1})^{-1})\end{aligned}$$

也属于该作用的核，因此 $\langle\tau\rangle$ 作用于 $\mathcal{H}$。

定义 4.5. 当 $2k \neq n$ 时，令 $\mathcal{A} := \mathcal{H}$；当 $2k = n$ 时，令 $\mathcal{A} := \mathcal{H} \rtimes \langle\tau\rangle$。

上述分析表明， $\mathcal{A}$ 的元素通过去齐次化等式，自然地作为 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的自同构作用。

断言 4.6. $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的自同构群为 $\mathcal{A}$。

我们将在接下来的几节中证明这一论断。

5 调整自同构

量子格拉斯曼流形 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 具有 $\mathbb{N}$-分次代数的结构，并且当给每个量子普吕克坐标赋予一次次数时，它由一次元生成。此外， [13, 定理 5.3] 表明， $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 按照 Chatters [3] 的定义是一个唯一分解整环。根据 Chatters 的说法，诺特整环 R 的元素 p 若满足 (i) $pR = Rp$、(ii) pR 是 R 的高度一素理想，且 (iii) R/pR 是一个整环，则称其为素元素。若诺特整环 R R 至少有一个高度一素理想，且每个高度一素理想都由一个素元素生成，则称 R 为唯一分解整环。

在本节中，我们将利用 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的这些性质，通过一系列结果说明：给定 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的任意自同构，在允许用 $\mathcal{H}$ 的元素调整该自同构后，我们基本上可以固定偏序集中的极小元和极大元。

引理 5.1. 设 $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ 是一个整环分次代数， A_0 等于基域，且 A 由一次元素生成。假设 $a = a_1 + \cdots + a_m$ 是一个正规元，且对于每个 i，都有 $a_i \in A_i$。那么 a_1 是一个正规元。

证明. 若 $a_1 = 0$，则无需证明；因此假设 $a_1 \neq 0$。由于 A 由一次元素生成，只需检验它相对于一次齐次元素的正规性；因此设 $b \in A_1$。那么对于某个满足 $c_i \in A_i$ 的 $c = c_0 + c_1 + \cdots + c_t \in A$，有 $ba = ba_1 + \cdots + ba_m = ac = (a_1 + \cdots + a_m)(c_0 + c_1 + \cdots + c_t)$。比较一次项可得 $0 = a_1 c_0$；因此 $c_0 = 0$。接着，二次项表明 $ba_1 = a_1 c_1 \in a_1 A$，这就证明了 a_1 是正规元。

□

引理 5.2. 设 $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ 是一个整环分次代数，且 A_0 等于基域。另设 A 是一个唯一分解整环。

设 a 是一个正规的一次齐次元素。那么 a 生成一个高度为一的素理想。

证明. 设 P 是理想 aR上的一个极小素理想。由非交换主理想定理 [16, 定理 4.1, P 的高度为一。因此，由于 A 是唯一分解整环， $P = pA$ 对某个正规元 p成立。于是， a 是 p的一个（右）倍数。由次数考虑， p 必为一次，而 a必是 p的一个标量倍数。因此， a 和p 生成同一个理想，即素理想 P。这就证明了所述结论。

□

本节其余结果均讨论 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$。与前几节一样，设 $[u] = [1, \ldots, k]$。

引理 5.3. 假设 $a = \sum a_I[I] \neq 0$（其中 $a_I \in K$）是量子 Pl¨ucker 坐标的线性组合，且为正规元。那么，对于每个具有 $a_I \neq 0$ 的 I， $d(I)$ 都相同。

证明。由于 $a = \sum a_I[I]$ 是一次的， a 是不可约的，同时也是正规元。因此，由 a 生成的理想 P 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的高度一素理想，根据引理 5.2。

如果对于某个 $[I]$ 有 $a = a_I[I]$，则结论成立。因此不妨假设至少有两个标量 a_I 非零。特别地， $aK \neq [u]K$，从而 $[u] \notin a\mathcal{O}_q(G(k,n)) = P$。

取 J，使得在满足 $a_I \neq 0$ 的那些 $d(I)$ 中， $d(J)$ 尽可能小。我们将证明，对于所有满足 $a_I \neq 0$ 的 I，都有 $d(I) = d(J)$。

Now

$$[u]a = [u]\left(\sum_{I\neq J} a_I[I] + a_J[J]\right) = \left(\sum_{I\neq J} a_I q^{d(I)}[I] + a_J q^{d(J)}[J]\right)[u],$$

利用引理 3.1，从而

$$\left(\sum_{I\neq J} a_I q^{d(I)}[I] + a_J q^{d(J)}[J]\right)[u] - q^{d(J)}\left(\sum_{I\neq J} a_I[I] + a_J[J]\right)[u] = [u]a - q^{d(J)}a[u] \in P;$$

也就是说,

$$b := \left(\sum_{I\neq J} (q^{d(I)} - q^{d(J)})a_I[I]\right)[u] \in P$$

由于 $[u] \notin P$，这给出

$$b = \left(\sum_{I\neq J} (q^{d(I)} - q^{d(J)})a_I[I]\right) \in P = a\mathcal{O}_q(G(k,n)).$$

因此，存在一个标量 $\lambda \in K$，满足 $b = \lambda a$。若 $\lambda \neq 0$，则这会导致矛盾，因为 $[J]$ 非平凡地出现在 λa 中，而未出现在 b中。因此， $b = 0$，所以每个 $q^{d(I)} - q^{d(J)} = 0$。这迫使 $d(I) = d(J)$，因为 q 不是单位根。 □

为了证明下一个引理，我们需要确认可以将 [10, 命题 4.2]应用于量子格拉斯曼流形。为此，我们需要注意，对于每个量子 Pl¨ucker 坐标 $[L]$，都存在一个量子 Pl¨ucker 坐标 $[L']$，使得$[L][L'] = \alpha[L'][L]$对某个 $1 \neq \alpha \in K$成立。我们使用引理 3.1 来完成这一步。若 $[L] = [u] = [1, \ldots, k]$，则令 $[L'] = [1, \ldots, k-1, k+1]$，使得 $[L][L'] = q[L'][L]$；若 $[L] \neq [u]$，则令$[L'] = [u]$，使得 $[L][L'] = q^{-d(L')}[L'][L]$。

引理 5.4. 设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构。那么，对某个$\lambda \in K^*$，有 $\rho([u])_1 = \lambda[u]$。

证明。注意， $\rho([u])$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个正规元；因此，将引理 5.1 应用于 $\rho([u])$，可知 $\rho([u])_1$ 是一个正规元。若对某个 $\lambda \in K^*$ 有 $\rho([u])_1 = \lambda[u]$，则结论成立；因此不妨设 $\rho([u])_1 \neq \lambda[u]$。于是，根据引理 5.3， $\rho([u])_1 = \sum a_I[I]$ 对某个 $[I]$ 成立，其中每个 $d(I) = d > 0$。

取 $w \in \mathcal{O}_q(G(k,n))$，使得 $\rho(w) = [u]$，或者等价地， $\rho^{-1}([u]) = w$。注意， w 的零次项必为零。记 $w = w_1 + w_{>1}$。由于 $\rho(w_{>1})_1 = 0$，由 [10,命题 4.2], 可知 $[u] = \rho(w) = \rho(w_1) + \rho(w_{>1})$；因此 $[u] = \rho(w)_1 = \rho(w_1)_1$。若$w_1 = \lambda[u]$，则 $[u] = \rho(w_1)_1 = \rho(\lambda[u])_1 = \lambda\rho([u])_1$，从而 $\rho([u])_1 = \lambda^{-1}[u]$，矛盾；因此对任意 $\lambda \in K^*$，均有 $w_1 \neq \lambda u$。将引理 5.3 应用于 w_1，可将$w_1 = \sum b_J[J]$写成某个 $[J]$，其中每个 $d(J) = e > 0$，例如如此。因此， $[u]w_1 = q^e w_1[u]$。

考虑 $\rho([u]w)$ 中的二次项。我们知道 $\rho([u]w) = \rho([u])\rho(w)$，并且根据 [10, 命题 4.2], $\rho([u])$ 和 $\rho(w)$ 的零次项都为零。因此，

$$\rho([u]w)_2 = \rho([u])_1\rho(w)_1 = \left(\sum a_I[I]\right)[u] = q^{-d}[u]\left(\sum a_I[I]\right).$$

另一方面， $\rho([u]w) = \rho([u]w_1 + [u]w_{>1}) = \rho([u]w_1) + \rho([u]w_{>1})$。现在， $[u]w_{>1}$ 没有次数低于三的项。因此，根据 [10,命题 4.2],， $\rho([u]w_{>1})$ 也如此，特别是 $\rho([u]w_{>1})_2 = 0$。于是， $\rho([u]w)_2 = \rho([u]w_1)_2$。然而，$\rho([u]w_1) = \rho(q^e w_1[u]) = q^e\rho(w_1)\rho([u])$。因此，

$$\rho([u]w)_2 = \rho([u]w_1)_2 = \rho(q^e w_1[u])_2 = q^e\rho(w_1)_1\rho([u])_1 = q^e[u]\left(\sum a_I[I]\right)$$

我们得到的关于 $\rho([u]w)_2$ 的两个表达式必相等；因此 $q^{-d}[u](\sum a_I[I]) = q^e[u](\sum a_I[I])$。于是 $q^{-d} = q^e$；从而 $q^{e+d} = 1$。由于 q 不是单位根，且 $e+d > 0$，这就产生了矛盾，我们的引理得证。

□

引理 5.5. 设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构。则 $\rho([u]) = \lambda[u]$，其中 $\lambda \in K^*$。

证明。元素 $\rho([u])$ 是正规元，并且根据 [10, 命题 4.2], $\rho([u])$ 的零次项等于 0。假设 $\rho([u])$ 的次数为 t，且 $\rho([u]) = a_1 + \cdots + a_t$，其中 $\deg(a_i) = i$。根据引理 5.4，回忆 $a_1 = \lambda[u]$，其中某个 $\lambda \in K^*$。存在一个元素 $r \in \mathcal{O}_q(G(k,n))$，满足 $[u]\rho([u]) = \rho([u])r$。$r$ 的次数必为一次。假设 $r = r_0 + r_1$，其中 r_i 的次数为 i。因此，

$$[u](\lambda[u] + a_2 + \cdots + a_t) = (\lambda[u] + a_2 + \cdots + a_t)(r_0 + r_1).$$

由于上述方程左边没有一次项，我们必有$r_0 = 0$。考察二次项，便可得出 $\lambda[u]^2 = \lambda[u]r_1$; 因此 $r_1 = [u]$ 且 $[u]\rho([u]) = \rho([u])[u]$。

将 $\rho([u])$ 写成 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的标准基中的形式，如 [7], 所示，即 $\rho([u]) = \sum \alpha_i S_i$，其中 α_i 属于域，且每个 S_i 都是标准单项式。若 $S = [I_1]\dots[I_m]$ 是这样的标准单项式，则令 $d(S) := \sum d(I_i)$，并注意到每个 $d(I_i) \geq 0$ 都满足： $d(I_i) = 0$当且仅当 $[I_i] = [u]$。于是，$S[u] = q^{d(S)}[u]S$，因此 $S[u] = [u]S$ 当且仅当 $d(S) = 0$（此时 $S = [u]^m$ 对某个 m成立）。

无论如何，请注意， $[u]S$ 是标准单项式，因为 $[u]$是唯一的最小量子 Pl¨ucker 坐标。因此，

$$\sum \alpha_i[u]S_i = [u]\rho([u]) = \rho([u])[u] = \left(\sum \alpha_i S_i\right)[u] = [u]\left(\sum \alpha_i q^{d(S_i)} S_i\right) = \sum \alpha_i q^{d(S_i)}[u]S_i$$

由于上述表达式中最左端和最右端的项都属于标准基，因此这必然意味着，只要 $\alpha_i \neq 0$，就有 $d(S_i) = 0$。因此， $\rho([u])$ 必定是 $[u]$ 中的一个多项式。

同样的论证适用于自同构 ρ^{-1}; 因此， $\rho^{-1}([u])$ 也必定是关于 $[u]$ 的多项式。

设 $\rho([u]) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i[u]^i$ with $\alpha_t \neq 0$，并类似地设 $\rho^{-1}([u]) = \sum_{i=1}^{s} \beta_i[u]^i$ with $\beta_s \neq 0$

于是，

$$[u] = \rho^{-1}\rho([u]) = \rho^{-1}\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i[u]^i\right) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \rho^{-1}([u])^i = \alpha_1\beta_1[u] + \dots + \alpha_t\beta_s[u]^{st}$$

因此， $s = t = 1$，且 $\rho([u]) = \lambda[u]$，其中某个 $\lambda \in K^*$ 满足要求。 □

上述结果涉及 $[u] = [1,\dots,k]$，即最左端的量子 Pl¨ucker 坐标。我们希望为 $[w] := [n-k+1,\dots,n]$（即最右端的量子 Pl¨ucker 坐标）证明类似的结果。为此，我们采用 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个反自同构，现将其描述如下。

令 w_0 表示 n 元对称群中的最长元素；也就是说，$w_0(i) = n+1-i$。 [2] 中命题 2.12 之前紧接着的讨论表明，映射 θ: $\mathcal{O}_q(G(k,n)) \longrightarrow \mathcal{O}_q(G(k,n))$ 由 $\theta([I]) = [w_0(I)]$ 对每个量子 Pl¨ucker 坐标 $[I]$ 给出，是一个反自同构。注意， $\theta([u]) = \theta([1,\dots,k]) = [n+1-k,\dots,n] = [w]$。

推论 5.6. 设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构。那么存在 $h \in \mathcal{H}$，使得 $(h\circ\rho)([u]) = u$ 且 $(h\circ\rho)([w]) = [w]$。

证明. 映射 $\theta\rho\theta$ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构。根据引理 5.5，存在一个元素 $\mu \in K^*$，使得 $\theta\rho\theta([u]) = \mu[u]$。将 θ 作用于等式两边，得到$\rho\theta([u]) = \mu\theta([u])$；也就是说，$\rho([w]) = \mu[w]$。我们还知道，对于某个 $\lambda \in K^*$，有 $\rho([u]) = \lambda[u]$。令 $h := (\lambda^{-1}, 1, \ldots, 1, \mu^{-1}) \in \mathcal{H}_0$。那么 $(h\circ\rho)([u]) = [u]$ 且 $(h\circ\rho)([w]) = [w]$。引理 4.1 表明，$\mathcal{H}_0$ 中一个元素的作用可由 $\mathcal{H}_1$ 中某个元素的作用实现，因而也可由 $\mathcal{H}$ 中某个元素的作用实现，因此结论成立。

□

在下文中，我们常将原自同构 ρ 替换为 $h \circ \rho$，以便在计算中假设 $\rho([u]) = [u]$ 且 $\rho([w]) = [w]$。

6 转移到量子矩阵

回顾第 2 节中的讨论，在讨论 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 时，我们假设 $1 < k$ 且 $2k \le n$。

设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构。令 $[u] = [1 \ldots k]$ 且 $[w] = [n-k+1, \ldots, n]$。利用推论 5.6，并以将 ρ 调整一个 $\mathcal{H}$ 中的元素为代价，我们可以且将假设 $\rho([u]) = [u]$ 且 $\rho([w]) = [w]$。自同构 ρ 现在可扩张到$\mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$，进而扩张到 $\mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}; \sigma]$，根据第 3 节的去齐次化等式，我们知道 $\rho(y) = y$。

我们将证明，这样的 ρ 会将 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 映到自身。完成这一步后，由于我们知道 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的自同构群，便能知道 ρ 如何作用于 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 中的每个量子子式。随后，我们可以利用引理 3.2 中的公式，计算 ρ 如何作用于 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的任意量子 Plücker 坐标。

根据第 3 节中的讨论，我们知道量子矩阵生成元 x_{ij} 定义如下：

$$x_{ij} := [1, \ldots, \widehat{k+1-i}, \ldots k, j+k][u]^{-1},$$

对于 $1 \le i \le k$ 和 $1 \le j \le p$。在接下来的计算中，所有量子子式 $[- \mid -]$ 均由 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的生成元 x_{ij} 构成。

由于 $2k \le n$，我们知道 $k \le n-k = p$。在这种情况下，量子子式 $[I \mid J] := [1, \ldots, k \mid p+1-k, \ldots, p]$ 有定义（我们使用了 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 的所有行和最后的 k 列；根据假设，列数至少为 k）。

现在，引理 3.2 表明 $[I \mid J] = [p+1 \ldots n][1 \ldots k]^{-1} = [w][u]^{-1}$，由此可得，对于任意满足 $\rho([u]) = [u]$ 且 $\rho([w]) = [w]$ 的元素 $\rho \in \mathcal{H}$，都有 $\rho([I \mid J]) = [I \mid J]$。

我们可以计算 描述 $[I \mid J]$ 如何与 $[u] = [1 \ldots k]$ 交换。注意，$k < n-k+1$，一个 s

$2k \le n$。因此，索引集 $\{1,\dots,k\}$ 和 $\{p+1,\dots,n\}$ 不重叠，并且

$$[u][I \mid J] = [u][w][u]^{-1} = q^k[w][u][u]^{-1} = q^k[w][u]^{-1}[u] = q^k[I \mid J]\,[u],$$

其中第二个等式由引理 3.1 得出。

此外，根据以下引理，我们知道 $[I \mid J]$ 与 x_{ij} 的交换关系 .

引理 6.1。 (i) 如果 $j \ge n+1-2k = p+1-k$，那么 $x_{ij}[I \mid J] = [I \mid J]\,x_{ij}$。
(ii) 如果 $j < n+1-2k = p+1-k$，那么 $x_{ij}[I \mid J] = q[I \mid J]\,x_{ij}$。

证明。 (i) 在这种情况下， x_{ij} 属于由行 I 和列 J 确定的量子矩阵代数，而 $[I \mid J]$ 是该代数的量子行列式，因此结论成立，因为 $[I \mid J]$ 在该代数中是中心元。

(ii) Th is result is obtained from the first equation in E(1.3c) in [4, 第 1 节。3] . □

我们在 $T := \mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1};\,\sigma] = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}]$ 上定义两种分次，它们根据元素与 $y = u$ 和 $[I \mid J] = [1,\dots,k \mid p+1-k,\dots,p]$ 的交换方式对 T 进行分次。

首先，令 $T_i := \{a \in T \mid yay^{-1} = q^i a\}$。

引理 6.2. (i) $T = \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$,
(ii) $\rho(T_i) = T_i$.

证明. 注意， T 由 $y^{\pm 1}$ 和 x_{ij}生成，且 $y^{\pm 1} \in T_0$，而 $x_{ij} \in T_1$，因为 $yx_{ij} = qx_{ij}y$。由于 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 是一个迭代 Ore 扩张，按字典序添加元素 x_{ij}，因此形如 $x_{11}^{a_{11}} \dots x_{kp}^{a_{kp}} y^s$ 且满足 $a_{ij} \ge 0$ 和 $s \in \mathbb{Z}$ 的元素构成 T的一组基。由此立即得到 (i)。
(ii) 则由以下事实得出： $\rho(y) = y$。

□

接下来，令 $T_{(i)} := \{a \in T \mid [I \mid J]a[I \mid J]^{-1} = q^{-i}a\}$。引理 6.1 给出的交换关系表明 $x_{ij} \in T_{(0)} \cup T_{(1)}$。此外，注意到 $y[I \mid J] = [u][I \mid J] = q^k[I \mid J][u] = q^k[I \mid J]y$，因此 $y = u \in T_{(k)}$ 以及 $y^{-1} \in T_{(-k)}$。

引理 6.3。 （i） $T = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} T^{(i)}$,
（ii） $\rho(T^{(i)}) = T^{(i)}$。

证明。 （i）部分的证明与前述引理相同， （ii）部分则由以下事实得出： $\rho([I \mid J]) = [I \mid J]$。

□

引理 6.4. $\left(T_{(0)} \cup T_{(1)}\right) \cap T_1 \subseteq \mathcal{O}_q(M(k,p))$.

证明. 假设 $a \in \left(T^{(0)} \cup T^{(1)}\right) \cap T_1$. 那么 a 是形如 $m := x_{11}^{a_{11}} \dots x_{kp}^{a_{kp}} y^s$ 的单项式的标量倍数之和，其中每个 $a_{ij} \geq 0$ 且 $s \in \mathbb{Z}$。这样的单项式属于 T_f，其中 $f = \sum a_{ij}$，因此我们必须有 $\sum a_{ij} = 1$，因为 $a \in T_1$。于是，每个单项式中只能出现一个 x_{kl}，且 a 是形如 $m := x_{kl} y^b$ 的单项式的标量倍数之和。这样的 m 属于 $T^{(e+bk)}$，其中 $e = 0$ 或 $e = 1$。由于每个 m 都必须属于 $T_{(0)} \cup T_{(1)}$ 我们必须有 $e + bk = 0$ 或 $e + bk = 1$。这些限制的唯一可能解是 $b = 0$，因为 $k \geq 2$。因此，a 是形如 x_{kl} 的单项式的标量倍数之和，这意味着 $a \in \mathcal{O}_q(M(k,p))$.

□

定理 6.5. 设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构，具有 $1 < k$ 和 $2k \leq n$，且满足 $\rho([u]) = [u]$ 和 $\rho([w]) = [w]$。那么 ρ 可自然地延拓为 $T = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = \mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}$ 的一个自同构；$\sigma]$ 使得 $\rho(y) = y$ 且 $\rho(\mathcal{O}_q(M(k,p))) = \mathcal{O}_q(M(k,p))$。

证明. 我们知道 $\rho(y) = y$，因此只需证明 $\rho(\mathcal{O}_q(M(k,p))) = \mathcal{O}_q(M(k,p))$。为此，只需证明对每个生成元 x_{ij}，都有 $\rho(x_{ij}) \in \mathcal{O}_q(M(k,p))$。

注意，对每个 i,j，都有 $x_{ij} \in \left(T_{(0)} \cup T_{(1)}\right) \cap T_1$，因此对每个 i,j，都有 $\rho(x_{ij}) \in \left(T_{(0)} \cup T_{(1)}\right) \cap T_1$。

因此，根据前述引理，$\rho(x_{ij}) \in \mathcal{O}_q(M(k,p))$。

□

7 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的自同构群

在定义 4.5 和断言 4.6 中，我们确定了 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的一个自同构群，并声称它包含了所有自同构。现在我们可以证明这一断言。

回顾　　定义 4.5：当 $2k \neq n$ 且 $\mathcal{A}$ 时，$\mathcal{A} = \mathcal{H}$；当 $2k = n$ 时，$= \mathcal{H} \rtimes \langle \tau \rangle$.

定理 7.1。$\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_q(G(k,n)))$ 与 $\mathcal{A}$ 同构。

证明。设 ρ 是 $\mathcal{O}_q(G(k,n))$ 的任意自同构。由推论 5.6，存在一个自同构 $h \in \mathcal{H}$，使得 $h \cdot \rho([u]) = [u]$ 且 $h \cdot \rho([w]) = [w]$。只需证明这个调整后的自同构属于 $\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{H} \rtimes \langle \tau \rangle$；因此我们可以假设 $\rho([u]) = [u]$ 且 $\rho([w]) = [w]$。这个调整后的自同构满足定理 6.5 的假设，因此 ρ 自然地延拓为 $T = \mathcal{O}_q(G(k,n))[[u]^{-1}] = \mathcal{O}_q(M(k,p))[y^{\pm 1}$ 的一个自同构；$\sigma]$ 使得 $\rho(y) = y$ 且 $\rho(\mathcal{O}_q(M(k,p))) = \mathcal{O}_q(M(k,p))$。由此，$\rho$ 的作用完全由其在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 上的限制决定；因此只需证明 ρ

限制在 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 上的映射可由 $\mathcal{H}$ 中的一个元素实现；或者，如果 $2k=n$，则 ρ 或 $\rho\circ\tau$ 可由 $\mathcal{H}$ 中的一个元素实现。

若 $2k\neq n$，则由 [10, 推论 4.11 及其证明可知，] ρ 由 $\mathcal{O}_q(M(k,p))$ 上的行列运算确定，因此属于 $\mathcal{H}$，这正是所需的。

若 $2k=n$，则由 [17, 定理 3.2] 可知，ρ 或 $\rho\circ\tau$ 由行列运算确定，因此属于 $\mathcal{H}$。无论哪种情况，$\rho\in\mathcal{H}\rtimes\langle\tau\rangle$，这正是所需的。 □

参考文献

[1] J Alev 和 M Chamarie，《若干量子代数的导子与自同构》，Comm Alg 20（1992），1787 – 1802。[2] J M Allman 和 J E Grabowski，《格拉斯曼流形上二面体群作用的量子类比》，《代数学杂志》359（2012），49 – 68。[3] A W Chatters，《非交换唯一分解整环》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 95（1984），4 – 54。[4] K R Goodearl 和 T H Lenagan，《量子 SL_3 和 GL_3 中的本原理想》，《非交换代数新趋势》，Contemporary Mathematics 562（2012），115 – 140。[5] K R Goodearl 和 R B Warfield Jr.，《非交换诺特环导论》。第二版。伦敦数学学会学生文本丛书，61。剑桥大学出版社，剑桥，2004。xxiv+344 页。[6] K R Goodearl 和 M T Yakimov，《量子幂零代数的幺幂自同构与中山自同构》，《交换代数与非交换代数几何》。第二卷，181 – 212，数学科学研究所出版物，68，剑桥大学出版社，纽约，2015。[7] A C Kelly、T H Lenagan 和 L Rigal，《量子格拉斯曼流形的环论性质》，J. Algebra Appl. 3（2004），9 – 30。[8] D Krob 和 B Leclerc，《准行列式与量子行列式的子式恒等式》，Commun. Math. Phys. 169（1995），1 – 23。[9] S Launois，《$U_q^+(B_2)$ 的本原理想与自同构群》，J. Algebra Appl. 6（2007），第1期，21 – 47。

[10] S Launois 和 T H Lenagan, 《量子矩阵的本原理想与自同构》, 代数与表示论 10（4）（2007）, 339 – 365。[11] S Launois 和 T H Lenagan, 《量子矩阵的自同构》, 格拉斯哥数学杂志 55A（2013）, 89 – 100。纪念 Kenny Brown 和 Toby Stafford 60岁生日专刊。[12] S Launois、T H Lenagan 和 B MNolan, 《全正性是一种量子现象：格拉斯曼流形情形》, arXiv:1906.06199, 即将发表于美国数学会回忆录。[13] S Launois、T H Lenagan 和 L Rigal, 《量子唯一因子分解整环》, 伦敦数学会杂志（2）74（2006）, 第2期, 321 – 340。[14] S Launois、T H Lenagan 和 L Rigal, 《量子格拉斯曼流形中的素理想》, 数学精选（新系列） 13 （ 4 ）（ 2008）, 697 – 725。[15] T H Lenagan 和 E J Russell, 《量子格拉斯曼流形上的循环序》, 阿拉伯科学与工程杂志 C辑专题 33（2）（2008）, 337 – 350。[16] J C McConnell 和 J C Robson, 《非交换诺特环》。L. W. Small 协助编写。修订版。数学研究生教程, 30。美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2001。xx+636 页。[17] M Yakimov, 《Launois–Lenagan猜想》, 代数杂志 392（2013）, 1 – 9。[18] M Yakimov, 《量子环面的刚性与Andruskiewitsch–Dumas猜想》, 数学精选 20（2014）, 421 – 464。

S Launois 数学、统计学与精算科学学院，肯特大学，坎特伯雷，肯特，CT2 7FS，英国；电子邮箱：S.Launois@kent.ac.uk

T H Lenagan 麦克斯韦数学科学研究所，数学学院，爱丁堡大学，詹姆斯·克拉克·麦克斯韦大楼，国王大楼群，Peter Guthrie Tait 路，爱丁堡 EH9 3FD，英国；电子邮箱：tom@maths.ed.ac.uk